Vladimír Horák

Projektive Deformation der Segreschen W-Kongruenzen und ihre Abbildung in den Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raum

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 4, 551–595

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100433

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

PROJEKTIVE DEFORMATION DER SEGRESCHEN W-KONGRUENZEN UND IHRE ABBILDUNG IN DEN KLEINSCHEN FÜNFDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Eingelangt am 7. September 1959)

Herrn Professor Jiří Klapka zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

Im ersten Teile dieser Abhandlung werden Typen der Segreschen W-Kongruenzen mit geradlinigen Fokalflächen (d. i. W-Kongruenzen mit asymptotischer Dualisation im Sinne von E. Čech) bestimmt, welche aufeinander abwickelbar transformiert, bzw. projektivbar deformiert werden können; es werden die Bedingungen für die Projektivdifferentialinvarianten der Segreschen Kongruenzen in abwickelbarerer Transformation, bzw. projektiver Deformation formuliert.

Im zweiten Teile werden die Beziehungen zwischen den K-Invarianten zweier Torsen des Kleinschen Raumes — unter der Voraussetzung, dass diese Torsen Segresche Kongruenzen in abwickelbarer Transformation, bzw. projektiver Deformation darstellen — abgeleitet. Diese Beziehungen zwischen den K-Invarianten führen zur Bestimmung gewisser Klassen von Segreschen Kongruenzen, welche die Eigenschaft haben, dass sie auf die assoziierten W-Kongruenzen projektivbar deformiert werden können.

Die Anregung zu dieser Abhandlung stammt vom Akademiker EDUARD ČECH und Herrn Professor JIŘÍ KLAPKA. Beiden spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

I

1. Einführung. In der Abhandlung [7] werden folgende Behauptungen bewiesen:

Das System der Differentialgleichungen

$$(1.1)\qquad y' = \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) y - Pz + \alpha\bar{y}\,,$$
$$z' = Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \alpha\bar{z}\,,$$

$$\bar{y}' = -\left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{y} + P\bar{z} + \bar{\alpha}y\,,$$

$$\bar{z}' = -\,Ry + \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{z} + \bar{\alpha}z\,,$$

bestimmt im Raume P_3 bis auf unimodulare Kollineation zwei Paare der Leitkurven C_y und C_z, bzw. $C_{\bar{y}}$ und $C_{\bar{z}}$ zweier Regelflächen, die Fokalflächen einer Segreschen W-Kongruenz sind; wobei $P, Q, R, S, \alpha, \bar{\alpha}$ Funktionen des Parameters v sind [1] $\left(\alpha' = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}\,, y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \text{ usw.}\right)$, der so eingeführt ist, dass

$$(1.2)\qquad (y, z, y', z') = \omega\,, \quad (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}') = \bar{\omega} \quad (\omega^2 = \bar{\omega}^2 = 1)\ ^{2)}$$

gilt.

Der Punkt $t_1\, y(v) + t_2\, z(v)$, wobei $y(v)$ und $z(v)$ die Leitkurven einer der Fokalflächen sind, beschreibt auf dieser Fläche eine asymptotische Linie dann und nur dann, wenn $v =$ Konst, bzw. $t_1 = c_1$, $t_2 = c_2$ (c_1, c_2 sind Konstanten) ist; speziell: die Leitkurven $y(v)$ und $z(v)$ sind asymptotische Linien dieser Fläche. Ganz analog für die zweite Fokalfläche.

Ein beliebiger Strahl g der betrachteten Kongruenz wird durch die Brennpunkte

$$(1.3)\qquad A_1 = t_1 y + t_2 z\,, \quad A_2 = t_1\bar{y} + t_2\bar{z}$$

bestimmt, sodass die Kongruenz zwischen den Fokalflächen eine Korrespondenz realisiert, in welcher die Punkte der Fokalflächen, die dieselben Werte der Parameter besitzen, einander entsprechen. Jede Segresche Kongruenz ist in eine Schicht (ein einparametriges System) von Regelscharen zerlegbar. Diese Regelscharen sind durch die Gleichung $v =$ Konst bestimmt.

Für das Unterscheiden der einzelnen Typen der Segreschen Kongruenzen haben folgende Konstanten und Funktionen eine Grundbedeutung:

$$(1.4)\qquad \omega, \bar{\omega}, \alpha, \bar{\alpha}, Q^2 - PR, H = Q'^2 - P'R'\,,$$

$$U = (Q^2 - PR)'^2 - 4(Q^2 - PR)\,H,\ S,\ K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}.$$

Wir werden folgende Typen der Segreschen W-Kongruenzen untersuchen:

Typ I: $\omega = \bar{\omega}$ $(\omega^2 = \bar{\omega}^2 = 1)$, $\bar{\alpha} = \pi\alpha \neq 0$ $(\pi^2 = 1)$, $(Q^2 - PR)\,.\,USK \neq 0$. Allgemeine Segresche W-Kongruenz (d. i. eine Kongruenz, die keinem linearen

[1]) Wenn $P : Q : R = a : b : c$ (a, b, c sind Konstanten) gilt, so artet die W-Kongruenz in eine lineare Kongruenz aus. Diesen Fall schliessen wir aus.

[2]) Die Bedingung $\omega^2 = \bar{\omega}^2 = 1$ wird für die Kongruenzen, welche einem linearen speziellen Komplex angehören, nicht erfüllt; diese Kongruenzen werden in der Abhandlung [7] nicht untersucht.

Komplex angehört), deren assoziierte W-Kongruenz auch eine allgemeine Kongruenz ist.

Typ II: $\omega = \overline{\omega}$ $(\omega^2 = \overline{\omega}^2 = 1)$, $\overline{\alpha} = \pi\alpha \neq 0$ $(\pi^2 = 1)$, $(Q^2 - PR) \, . \, UK \neq 0$, $S \equiv 0$. W-Kongruenz, die einem allgemeinen linearen Komplex angehört, deren assoziierte W-Kongruenz eine allgemeine W-Kongruenz ist.

Typ III: $\omega^2 = 1$, $\overline{\omega} = 0$, $\alpha \neq 0$, $\overline{\alpha} = 0$, $(Q^2 - PR) \, UK \neq 0$, $S \equiv 0$. W-Kongruenz, die einem ausgearteten Komplex linearen angehört, deren assoziierte W-Kongruenz eine allgemeine Kongruenz ist (die Leitgerade dieses Komplexes bildet die Gerade $(\bar{y}\bar{z})$, in welche eine der Fokalflächen ausartet).[3]

Typ IV: $\omega = \overline{\omega}$ $(\omega^2 = \overline{\omega}^2 = 1)$, $\overline{\alpha} = \pi\alpha \neq 0$ $(\pi^2 = 1)$, $(Q^2 - PR) \, US \neq 0$, $K \equiv 0$. Allgemeine W-Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz einem nicht ausgearteten linearen Komplex angehört.

Typ V: $\omega = \overline{\omega}$ $(\omega^2 = \overline{\omega}^2 = 1)$, $\overline{\alpha} = \pi\alpha \neq 0$ $(\pi^2 = 1)$, $(Q^2 - PR) \, S \neq 0$, $U = K \equiv 0$,[4] Rang $\begin{pmatrix} P \, Q \, R \\ P' Q' R' \end{pmatrix} = 2$. Allgemeine Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz einem ausgearteten Komplex angehört.

Typ VI: $\omega = \overline{\omega}$ $(\omega^2 = \overline{\omega}^2 = 1)$, $\overline{\alpha} = \pi\alpha \neq 0$ $(\pi^2 = 1)$, $(Q^2 - PR) \, . \, S \neq 0$, $U = K \equiv 0$,[4] Rang $\begin{pmatrix} P \, Q \, R \\ P' Q' R' \end{pmatrix} = 1$. Allgemeine Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz in eine lineare (nicht parabolische) Kongruenz ausartet.

Für alle vorliegende Typen der W-Kongruenzen gilt entweder sgn $U \neq$ $\neq$ sgn $(Q^2 - PR)$, oder sgn $U =$ sgn $(Q^2 - PR) \neq -1$.[5]

Jede Segresche W-Kongruenz bestimmt gleichzeitig eine s. g. *assoziierte W-Kongruenz*, welche durch die zu den Regelscharen der ursprünglichen Kongruenz komplementaren Regelscharen gebildet wird; wenn die ursprüngliche Kongruenz einem linearen Komplex, bzw. einer linearen Kongruenz angehört, so gehören die Fokalflächen der assoziierten W-Kongruenz demselben Komplex, bzw. derselben Kongruenz an. Untersucht man von diesem Standpunkte aus die Segreschen W-Kongruenzen als Paare assoziierter Kongruenzen, so bestimmen die Kongruenzen des Types II und IV, bzw. III und V je ein Paar von assoziierten W-Kongruenzen mit derselben Eigenschaft. Im Falle der Kongruenzen des Types VI entsprechen der linearen Kongruenz, als einer ausgearteten Segreschen Kongruenz, unendlich viele assoziierte W-Kongruenzen, da jede zwei Regelflächen, die der linearen Kongruenz angehören, ein Paar der Fokalflächen einer Segreschen W-Kongruenz des Types VI bilden.

---

[3]) Die Kongruenzen des Types III werden in der Abhandlung [7] nicht untersucht — so gibt es also keinen Widerspruch zwischen der Relation (1.2) und der Relation $\overline{\omega} = 0$. Wenn $\overline{\omega}^2 = 1$, $\omega = 0$, $\alpha = 0$, $\overline{\alpha} \neq 0$ ist, dann artet die durch die Gerade (yz) beschriebene Fokalfläche aus.

[4]) Die Relation $U \equiv 0$ hat noch $K \equiv 0$ zur Folge.

[5]) Die Relation $Q^2 - PR \equiv 0$ charakterisiert die fleknodalen Kongruenzen, die wir aus unseren Betrachtungen auslassen wollen.

Führt man statt des Parameters v einen s. g. *normalen Parameter* $\bar{v}$ ein (dieser ist durch die Differentialgleichung $d\bar{v} = \sqrt{|Q^2 - PR|}\, dv$ definiert, wobei $Q^2 - PR$ ($\neq 0$) eine Funktion von v ist), so kann man für die untersuchten Typen der W-Kongruenzen *die vollständigen Systeme von unimodularen Projektivdifferentialinvarianten* bestimmen. Der Abhandlung [7] nach bilden das vollständige System dieser Invarianten für die Kongruenzen der Typen I, II, IV die Ausdrücke ω, π, α, S, $\varepsilon = Q^2 - PR$ ($\varepsilon^2 = 1$), H, K(α, S, $H \neq 0$, K sind Funktionen des normalen Parameters). Man kann leicht feststellen, dass die Ausdrücke $\omega, \mu = \dfrac{\alpha'}{\alpha}, \varepsilon = Q^2 - PR\ (\varepsilon^2 = 1), H, K$ Invarianten der Kongruenz des Types III sind.[6])

Alle Regelscharen, in welche jede W-Kongruenz des Types V zerlegbar ist, besitzen eine gemeinsame Gerade; wählen wir diese Gerade zur Leitkurve der beiden Fokalflächen, so kann man in das System (1.1)

$$(1.5) \qquad P = 0\,, \quad Q = -\varphi\,, \quad R = 2\beta_1 \quad (\varphi^2 = \varepsilon = 1)$$

einsetzen; die Vorzeichen ω, π, $\varepsilon = Q^2 - PR = 1$ und die Funktionen $\alpha \neq 0$, S, $\lambda = \dfrac{R''}{R'} = \dfrac{\beta_1''}{\beta_1'}$ (des normalen Parameters) bilden das vollständige System der unimodularen Projektivdifferentialinvarianten der Kongruenzen des untersuchten Typs.[7]) Ist die Funktion λ gegeben, dann gilt

$$(1.6) \qquad \beta_1 = c_1 \int e^{\int \lambda dv}\, dv + c_2\,, \quad c_1 \neq 0\,,$$

sodass β_1 bis auf Substitutionen mit konstanten Koeffizienten bestimmt wird; verschiedener Wahl der erwähnten Koeffizienten entsprechen verschiedene Leitkurven der Fokalflächen.

Die *abwickelbaren Flächen* (bzw. ihre Rückkehrkanten) der untersuchten Kongruenz sind durch die Differentialgleichungen

$$(1.7) \qquad t_1 t_2' - t_2 t_1' = G(t)\,, \quad t_1 t_2' - t_2 t_1' = -G(t)$$

bestimmt, wobei $G(t)$ die quadratische Form

$$(1.8) \qquad G(t) \equiv P t_1^2 + 2Q t_1 t_2 + R t_2^2$$

kennzeichnet und die Striche Ableitungen nach dem Parameter v bedeuten. Ist die Kongruenz L so orientiert, dass die Fokalfläche, die durch die Leitkurven

[6]) Ist der Parameter ein normaler Parameter, dann gilt $U = -4\varepsilon H$.

[7]) Ist die Achse des speziellen linearen Komplexes nicht die Leitkurve der Fokalflächen, dann gilt $P = p\beta_1 + \bar{p}$, $Q = q\beta_1 + \bar{q}$, $R = r\beta_1 + \bar{r}$, Rang $\begin{pmatrix} p & q & r \\ \bar{p} & \bar{q} & \bar{r} \end{pmatrix} = 2$ ($p, q, \ldots, \bar{r}$ sind von Null verschiedene Konstanten). Ist der Parameter kein normaler Parameter und fällt die Achse des linearen Komplexes mit der Geraden $(y\bar{y})$ zusammen, dann ist $P = 0$, $QR \neq 0$.

C_y und C_z ($C_{\bar{y}}$ und $C_{\bar{z}}$) bestimmt ist, die erste (zweite) Fokalfläche ist, dann liegen die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen, welche durch die Differentialgleichung $(1.7)_1$, bzw. $(1.7)_2$ bestimmt werden, auf der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche.[8])

Statt der homogenen Parameter t_1, t_2 kann man den nichthomogenen Parameter

$$\frac{t_2}{t_1} = u \tag{1.9}$$

einführen. Dann nehmen die Differentialgleichungen der abwickelbaren Flächen die Form

$$\mathrm{d}u = G(u)\,\mathrm{d}v, \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}u = -\,G(u)\,\mathrm{d}v \tag{1.10}$$

an, wobei $G(u)$ einen evidenten Sinn hat. Nach Bedarf werden wir entweder die homogenen, oder die nichthomogenen Parameter benützen.

Erwähnen wir noch, dass die Differentialgleichung (1.10) für die Typen I, II, III und IV eine Riccatische Differentialgleichung ist, für den Typ V eine Bernoullische Gleichung, oder eine Riccatische Gleichung die in eine Bernoullische transformierbar ist und für den Typ VI eine Gleichung mit getrennten Variablen, oder eine Gleichung, die in eine Gleichung mit getrennten Variablen transformierbar ist.[9]) Bei dem Typ III sind die abwickelbaren Flächen, die durch die Gleichung $(1.7)_2$ definiert sind, Kegel, die der zweiten Fokalfläche von den Punkten der Geraden $(\bar{y}\bar{z})$ umgeschrieben sind.

2. Abwickelbare Transformationen. Bezeichnen wir mit L die W-Kongruenz, die durch das System (1.1) bestimmt ist. Untersuchen wir noch eine andere W-Kongruenz ${}^1L$ (von L verschieden[10])) und es sollen für ${}^1L$ jene Relationen gelten, die wir aus den Relationen (1.1)—(1.10) durch zuschreiben des Indexes 1 bekommen (z. B. ${}^1y$, ${}^1z$, ${}^1A_1$, ${}^1\omega_1, \ldots$); statt ${}^1t_1$ und ${}^1t_2$ benützen wir aber τ_1 und τ_2.

Eine regulare Transformation

$$T : {}^1v = f(u, v)\,, \quad {}^1u = \varphi(u, v) \tag{2.1}$$

zwischen den Strahlen g und ${}^1g$ zweier beliebiger Kongruenzen L und ${}^1L$ ist eine abwickelbare Transformation, wenn sie die abwickelbaren Flächen der

8) Vgl. [8], S. 8.

9) Für die Kongruenzen des Types V kann man den nichthomogenen Parameter durch die Relation $\dfrac{t_1}{t_2} = \bar{u}$ bestimmen; die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen ist dann eine lineare Gleichung. Ist die Kongruenz vom Typ VI so hat die Differentialgleichung (1.10) allgemein die Form $u' = (p + qu + ru^2)\,V$, wobei p, q, r Konstanten sind und V eine nur von v abhängige Funktion ist.

10) D. b. die Kongruenzen L und ${}^1L$ kann man durch keine projektive Transformation ineinander transformieren.

Kongruenz L in die abwickelbaren Flächen der Kongruenz ${}^1L$ überführt und umgekehrt; das bedeutet: die Differentialgleichungen der abwickelbaren Flächen der Kongruenz L werden durch die abwickelbare Transformation (2.1) in die Differentialgleichungen der abwickelbaren Flächen der Kongruenz ${}^1L$ transformiert. In unseren Untersuchungen sind die abwickelbaren Flächen durch Riccatische, bzw. Bernoullische Gleichungen, oder Gleichungen mit getrennten Variablen bestimmt und daher ist jede Transformation, welche eine beliebige von den Gleichungen (1.10) in irgendeine von den Gleichungen

$$\text{(2.2)} \qquad \mathrm{d}{}^1u = {}^1G({}^1u)\,\mathrm{d}{}^1v\,, \quad \mathrm{d}{}^1u = -\,{}^1G({}^1u)\,\mathrm{d}{}^1v$$

desselben Typs überführt eine abwickelbare Transformation des untersuchten Paares der W-Kongruenzen.

Lemma 2.1. *Eine allgemeine abwickelbare Transformation der Segreschen Kongruenzen L und ${}^1L$ ist gleichzeitig eine asymptotische Transformation.*

Beweis. Von den Differentialgleichungen (1.10), bzw. (2.2) bekommt man durch Subtrahieren und Addieren die Differentialgleichungen $\mathrm{d}u = 0$, $\mathrm{d}v = 0$ bzw. $\mathrm{d}{}^1u = 0$, $\mathrm{d}{}^1v = 0$ der asymptotischen Linien. Setzt man statt ${}^1u$ und ${}^1v$ nach (2.1) in die Gleichungen (2.2) ein, so bekommt man unter Voraussetzung, dass (2.1) eine abwickelbare Transformation ist, die Differentialgleichungen der abwickelbaren Flächen der Kongruenz L und durch Subtrahieren und Addieren folgt

$$f_u\,\mathrm{d}u + f_v\,\mathrm{d}v = 0\,, \quad \varphi_u\,\mathrm{d}u + \varphi_v\,\mathrm{d}v = 0\,.$$

Diese Gleichungen sind Differentialgleichungen der asymptotischen Linien dann und nur dann, wenn die abwickelbare Transformation entweder durch die Gleichungen der Form ${}^1v = f(v)$, ${}^1u = \varphi(u)$ oder durch die Gleichungen der Form ${}^1v = f(u)$, ${}^1u = \varphi(v)$ bestimmt wird. Diese Transformationen sind aber asymptotische Transformationen.[11])

Soll eine abwickelbare Transformation T der Kongruenzen L und ${}^1L$ eine projektive Deformation sein, so ist es notwendig, dass sie auch eine asymptotische Transformation zwischen den Fokalflächen dieser Kongruenzen bestimme.[12])

Im Weiteren wollen wir unter Transformation T eine asymptotische abwickelbare Transformation der untersuchten Segreschen W-Kongruenzen verstehen.

Es sei die Orientation der untersuchten Gebilde folgendermassen eingeführt:

---

[11]) Dasselbe Ergebnis bekommt man auch, wenn nur die Parameter v und ${}^1v$ asymptotische Parameter sind und die Parameter u und ${}^1u$ nichtasymptotische Parameter sind. Dann ist die Kongruenz L durch das System (2) der Differentialgleichungen in der Abhandlung [7] bestimmt und analog ${}^1L$.

[12]) [4], S. 490.

Definition 2.1. Es sei eine Kongruenz L durch das System (1.1) der Differentialgleichungen der vorstehenden Reihe nach gegeben; es soll A_1 (A_2) der erste (zweite) Brennpunkt des Strahles g sein. Die durch den ersten (zweiten) Brennpunkt beschriebene Fläche soll die erste (zweite) Fokalfläche sein. Die Tangentialebene in dem Punkte A_1 (A_2) der ersten (zweiten) Fokalfläche soll die zweite (erste) Fokalebene sein. Die Kurven C_y, $C_{\bar{y}}$, bzw. C_z, $C_{\bar{z}}$ sollen die ersten, bzw. zweiten Leitkurven der Fokalflächen werden. Die durch die Differentialgleichung $(1.7)_1$, bzw. $(1.7)_2$ bestimmte Schicht der abwickelbaren Flächen, deren Rückkehrkanten auf der ersten (zweiten) Fokalfläche liegen, ist die erste (zweite) Schicht derselben. Der wachsende Parameter v bestimmt den positiven Durchlaufsinn der Regelscharenschicht der Kongruenz L. Eine analoge Orientation setzt man für die Kongruenz ${}^1L$ voraus.

Der eingeführten orientierten Kongruenz L gehört ihre *orientierte Dualisation* L^* an, welche durch das System der Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad \bar{\eta}' &= \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{\eta} - P\bar{\zeta} - \alpha\eta\,, \\
\bar{\xi}' &= R\bar{\eta} - \left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{\zeta} - \alpha\zeta\,, \\
\eta' &= -\left(Q - S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\eta + P\zeta - \bar{\alpha}\bar{\eta}\,, \\
\zeta' &= -R\eta + \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\zeta - \bar{\alpha}\bar{\zeta}
\end{aligned}
$$

bestimmt ist, wobei

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad \eta &= (y, z, y') = \alpha(y, z, \bar{y})\,, \quad \bar{\eta} = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}') = \bar{\alpha}(\bar{y}, \bar{z}, y)\,, \\
\zeta &= (y, z, z') = \alpha(y, z, \bar{z})\,, \quad \bar{\zeta} = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{z}') = \bar{\alpha}(\bar{y}, \bar{z}, z)
\end{aligned}
$$

ist. Ist der Punkt $A_1 = t_1 y + t_2 z$ ($A_2 = t_1\bar{y} + t_2\bar{z}$) der erste (zweite) Brennpunkt des Strahles g, so ist $E_3 = t_1\bar{\eta} + t_2\bar{\zeta}$ ($E_4 = t_1\eta + t_2\zeta$) die erste (zweite) Fokalebene.

Ist die untersuchte Kongruenz vom Typ III, so sind die Fokalebenen in den Punkten der festen Geraden $(\bar{y}\bar{z})$ unbestimmt und wir werden sie also folgendermassen definieren: $\bar{\eta} = \alpha(\bar{y}, \bar{z}, y)$, $\bar{\zeta} = \alpha(\bar{y}, \bar{z}, z)$; (die Fokalebenen η und ζ werden noch durch die Relationen (2.4) bestimmt). Die Differentialgleichung der entsprechenden Dualisation L^* bekommen wir dann von (2.3) durch die Substitution $\alpha \to 0$, $\bar{\alpha} \to \alpha$.

Lemma 2.2. *Das System der Differentialgleichungen der W-Kongruenz, die A_2 (A_1) für den ersten (zweiten) Brennpunkt besitzt und für welche auch die Reihenfolge der Fokalflächen, Fokalebenen und der Schichten der abwickelbaren Flächen vertauscht wird folgt aus* (1.1) *durch die Transformation*

$$
(2.5)\qquad \begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, & P, & Q, & R, & S, \alpha, \bar{\alpha} \\ \bar{y}, \bar{z}, y, z, & -P, & -Q, & -R, & -S, \bar{\alpha}, \alpha \end{pmatrix};
$$

die Reihenfolge der Leitkurven und der Durchlaufsinn der Regelscharenschicht bleibt unabgeändert.

Das System der Differentialgleichungen der W-Kongruenzen für welche die Kurven C_z, $C_{\bar{z}}$, bzw. C_y, $C_{\bar{y}}$ die ersten, bzw. zweiten Leitkurven der Fokalflächen sind, bekommen wir von (1.1) *durch die Transformation*

$$(2.6) \qquad \begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, & P, & Q, & R, S, \alpha, \bar{\alpha} \\ z, y, \bar{z}, \bar{y}, & -R, & -Q, & -P, S, \alpha, \bar{\alpha} \end{pmatrix};$$

die Reihenfolge der Brennpunkte, Brennflächen, Fokalebenen und der Schichten der abwickelbaren Flächen und der Durchlaufsinn der Regelscharenschicht bleibt unabgeändert.

Das System der Differentialgleichungen der W-Kongruenzen, für welche der wachsende Parameter den negativen Durchlaufsinn der Regelscharenschicht bestimmt, folgt aus (1.1) *durch die Transformation*

$$(2.7) \qquad \begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, & P, & Q, & R, & S, & \alpha, & \bar{\alpha} \\ y, z, \bar{y}, \bar{z}, & -P, & -Q, & -R, & -S, & -\alpha, & -\bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

wobei die Orientation der übrigen Gebilde unabgeändert bleibt.

Ist L nicht vom Typus III, so bekommen wir das System (2.3) *der Differentialgleichungen, das die Dualisation L^* von L bestimmt, aus dem System* (1.1) *durch die Transformation*

$$(2.8) \qquad \begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, P, Q, R, & S, & \alpha, & \bar{\alpha} \\ \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \eta, \zeta, P, Q, R, & -S, & -\alpha, & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Die Transformationen (2.5) *und* (2.6) *bestimmen gewisse Kollineationen, durch welche die Vorzeichen der Funktionen S und K sich gleichzeitig ändern oder unverändert bleiben. Die Transformation* (2.8) *ist eine unimodulare Korrelation, bei welcher die Funktion S das Vorzeichen ändert und die Funktion K das Vorzeichen nicht ändert. Durch eine passende Kombination der Transformationen* (2.5)—(2.8) *kann man erreichen, dass beliebige Funktionen α, S, K das Vorzeichen ändern, oder nicht ändern; die Kongruenz als geometrisches Gebilde bleibt unabgeändert.*[13])

Beweis. Die Transformation (2.5), bzw. (2.6) folgt durch Vergleichen der ersten und der dritten, bzw. der ersten und der zweiten Gleichung des Systems (1.1). Führen wir in (1.1) statt v den Parameter $-v$ ein, so bekommen wir die Transformation (2.7). Die Transformation (2.8) ist in der Abhandlung [6] (S. 25) eingeführt, wobei aber die Reihenfolge der Fokalebenen umgekehrt ist. Die übrigen Behauptungen sind offensichtlich.

Definition 2.2. Wir sagen, dass die Transformation T

a) von übereinstimmender (positiver), bzw. nicht übereinstimmender (negativer) Orientation ist, wenn sie die Reihenfolge der Leitkurven der Fokalflächen von L und ${}^1L$ einhält, bzw. nicht einhält.

[13]) Vgl. [6], S. 618—619.

b) der ersten (zweiten) Art ist, wenn sie die Reihenfolge der Schichten der abwickelbaren Flächen einhält (nicht einhält).

Lemma 2.3. *Die Untersuchung der Transformationen T ist äquivalent mit der Untersuchung der asymptotischen Transformation der Regelflächen, welche eine Kurvenschicht, die auf einer Regelfläche durch eine Riccatische (Bernoullische, lineare homogene Differentialgleichung, Differentialgleichung mit getrennten Variablen) bestimmt ist, in eine Kurvenschicht der zweiten Regelfläche überführt, die durch eine Gleichung desselben Typs bestimmt ist.*

Die Behauptung folgt einerseits daraus, dass die untersuchten Kongruenzen zwischen den Fokalflächen eine asymptotische Transformation realisieren, bei welcher die Punkte, welche denselben Parameterwert besitzen, einander entsprechen, anderseits daraus, dass nur Differentialgleichungen von denselben Typen ineinander transformiert werden können.

Wir beschränken uns im Weiteren auf die übereinstimmend orientierten Transformationen T der ersten Art.

Bemerkung 2.1. Die Untersuchung der nicht übereinstimmend orientierten Transformationen T der 2. Art ist äquivalent mit der Untersuchung der übereinstimmend orientierten Transformationen der 1. Art zwischen der Kongruenz ${}^1L$ und der Kongruenz, die durch das System der Differentialgleichungen, das durch die Transformation (2.6) aus (1.1) folgt, bestimmt ist. Analog, der übereinstimmend orientierten Transformationen der 2. Art entsprechen die übereinstimmend orientierten Transformationen der 1. Art zwischen der Kongruenz ${}^1L$ und der Kongruenz, die durch das System der Differentialgleichungen, das aus (1.1) durch die Transformation (2.5) folgt, bestimmt ist. Analog für die nicht übereinstimmend orientierten Transformationen der 2. Art.

In dem folgenden Satz werden die W-Kongruenzen bestimmt, für welche die übereinstimmend orientierte Transformation T der 1. Art die geradlinigen Asymptotenlinien von L in die nicht geradlinigen Asymptotenlinien von ${}^1L$ überführt.

Satz 2.1. *Dann und nur dann, wenn den Asymptotenlinien $u = c_1$, bzw. $v = c_2$ der Kongruenz L der Reihe nach die Asymptotenlinien ${}^1v = {}^1c_1$, bzw. ${}^1u = {}^1c_2$ der Kongruenz ${}^1L$ in einer beliebigen übereinstimmend orientierten Transformation der 1. Art ensprechen, dann ist die abwickelbare Transformation durch die Gleichung der Form*

$$ {}^1v = f(u)\,, \quad {}^1u = \varphi(v) \tag{2.9}$$

bestimmt. Ist $f(u)$ eine beliebige Funktion, dann gilt

$$ P = pV\,, \quad Q = qV\,, \quad R = rV\,, \tag{2.10}$$

$$ {}^1\overline{P} = {}^1pU\,, \quad {}^1\overline{Q} = {}^1qU\,, \quad {}^1\overline{R} = {}^1rU\,, \tag{2.11}$$

wobei

$$(2.12)\quad {}^1\overline{P} = {}^1P[f(u)]\,.\,f'(u)\,,\quad {}^1\overline{Q} = {}^1Q[f(u)]\,.\,f'(u)\,,\quad {}^1\overline{R} = {}^1R[f(u)]\,.\,f'(u)$$

ist, p, q, r bzw. ${}^1p, {}^1q, {}^1r$ ($p^2 + q^2 + r^2 \neq 0 \neq {}^1p^2 + {}^1r^2 + {}^1q^2$) Konstanten sind, $V \neq 0$ eine beliebige nur von v abhängige Funktion ist und

$$(2.13)\qquad U = \frac{k}{p + qu + ru^2} \neq 0\,,\quad k = \text{Konst} \neq 0$$

ist; die Funktion φ wird bis auf eine Konstante bestimmt. Die Fokalflächen der entsprechenden Kongruenz L (${}^1L$) sind in einer linearen Kongruenz, die gleichzeitig assoziierte Kongruenz zu der Kongruenz L (${}^1L$) ist, enthalten.

Beweis. Setzt man in $(2.1)_1$ nach (2.9) ein, so folgt

$$\varphi'(v)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = [{}^1\overline{P} + 2{}^1\overline{Q}\,\varphi(v) + {}^1\overline{R}\,\varphi^2(v)]\,.\,f'(u)\,,$$

wobei die Striche bei f, bzw. bei φ Ableitungen nach u, bzw. v bedeuten. Durch Vergleichen mit der Relation $(1.10)_1$ folgt

$$(2.14)_1\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{{}^1\overline{P} + 2{}^1\overline{Q}\,\varphi + {}^1\overline{R}\varphi^2} = (P + 2Qu + Ru^2)\,\mathrm{d}v\,,$$

bzw.

$$(2.14)_2\qquad \frac{\varphi'\,\mathrm{d}u}{{}^1P(f) + 2{}^1Q(f)\,\varphi + {}^1R(f)\,\varphi^2} = (P + 2Qu + Ru^2)\,\mathrm{d}f\,.$$

Ist f (φ) eine beliebig gegebene Funktion, so bestimmt die Differentialgleichung $(2.14)_1$, ($(2.14)_2$) gerade die Funktion φ (f). Beschrenken wir uns auf den ersten Fall.

Durch Integration der Gleichung $(2.14)_1$ (unter Voraussetzung, dass u ein Parameter ist) bekommen wir

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi - \varphi_2} = U_1 \exp\,[2\sqrt{{}^1\overline{Q}^2 - {}^1\overline{P}{}^1\overline{R}}\int (P + 2Qu + Ru^2)\,\mathrm{d}v]\,,$$

wobei U_1 eine beliebige Funktion von u ist und $\varphi_1 \neq \varphi_2$ Wurzeln der Gleichung ${}^1\overline{P} + 2{}^1\overline{Q}\varphi + {}^1\overline{R}\varphi^2 = 0$ sind; die letzten sind reelle oder imaginäre Funktionen von u. (Es gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ dann und nur dann, wenn ${}^1\overline{Q}^2 - {}^1\overline{P}{}^1\overline{R} = 0$, d. i., wenn ${}^1L$ eine fleknodale Kongruenz ist — diese haben wir aber von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.) Soll φ nur von v abhängen, so ist es notwendig und hinreichend, dass (2.10) und (2.11) gelte und U_1 nur eine Konstante sei, wie aus der Differentialgleichung $(2.14)_1$ und ihrer Lösung folgt.

Da die Matrix $\begin{pmatrix} P\,Q\,R \\ P'Q'R' \end{pmatrix}$ von Rang 1 ist, so ist die zu L assoziierte Kongruenz eine lineare Kongruenz, d. b. L ist vom Typ VI.

Setzt man die Lösung φ der Gleichung $(2.14)_1$ (unter Voraussetzung (2.10), (2.11)) in die Gleichung $(2.14)_2$ ein, so folgt, dass auch die zu ${}^1L$ assoziierte Kongruenz eine lineare Kongruenz ist.[14])

Satz 2.2. *Es sei T eine beliebige abwickelbare Transformation, welche die Asymptotenlinien u, bzw. v der Fokalflächen von L in die Asymptotenlinien ${}^1u$, bzw. ${}^1v$ der Fokalflächen von ${}^1L$ überführt, d. i. die Transformation*

$$ {}^1u = \varphi(u) \,, \quad {}^1v = f(v) \,, \tag{2.15} $$

wobei $f'(v) > 0$ vorausgesetzt wird.[15]) *Durch eine passende Wahl der arithmetischen Leitkurven $C_{{}^1\tilde{y}}$, $C_{{}^1\tilde{z}}$, $C_{{}^1\tilde{\bar{y}}}$, $C_{{}^1\tilde{\bar{z}}}$ statt der ursprünglichen Leitkurven $C_{{}^1y}$. $C_{{}^1z}$, $C_{{}^1\bar{y}}$, $C_{{}^1\bar{z}}$ der Fokalflächen von L (die Koordinaten der Punkte der neuen Leitkurven erfüllen eine zu* (1.2) *analoge Relation) kann man erreichen, dass die Transformation* (2.15) *die Form*

$$ {}^1u = \varphi(u) \,, \quad {}^1v = v \tag{2.16} $$

annimmt.

Beweis. Führt man statt des Parameters ${}^1v$ der Kongruenz ${}^1L$ einen neuen Parameter ${}^1\tilde{v}$ durch die Relation ${}^1v = f({}^1\tilde{v})$ und gleichzeitig die neuen Leitkurven

$$ {}^1\tilde{y} = \varrho\, {}^1y \,, \quad {}^1\tilde{z} = \varrho\, {}^1z \,, \quad {}^1\tilde{\bar{y}} = \varrho\, {}^1\bar{y} \,, \quad {}^1\tilde{\bar{z}} = \varrho\, {}^1\bar{z} \,, \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{f'({}^1\tilde{v})}} \,, $$

ein, dann gilt

$$ \left({}^1\tilde{y}, {}^1\tilde{z}, \frac{d\,{}^1\tilde{y}}{d\,{}^1\tilde{v}}, \frac{d\,{}^1\tilde{z}}{d\,{}^1\tilde{v}}\right) = \left({}^1\tilde{\bar{y}}, {}^1\tilde{\bar{z}}, \frac{d\,{}^1\tilde{\bar{y}}}{d\,{}^1\tilde{v}}, \frac{d\,{}^1\tilde{\bar{z}}}{d\,{}^1\tilde{v}}\right) = {}^1\omega \quad ({}^1\omega^2 = 1) \,. $$

Durch diese Transformation bleibt ${}^1L$ unabgeändert und es ist ${}^1v = f({}^1\tilde{v}) =$

[14]) Beweisen wir auf eine andere Weise, dass die Fokalflächen der Kongruenz L in einer linearen Kongruenz enthalten sind. Die Koeffizienten A, B, C, bzw. $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ der fleknodalen Formen der entsprechenden Fokalflächen, werden durch die Relationen (nach den Gleichungen (5a) und (5b) der Abhandlung [7])

$$ A = P\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2S\right) - P' \,, \quad B = Q\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2S\right) - Q' \,, \quad C = R\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2S\right) - R' $$

bzw.

$$ \bar{A} = -P\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + 2S\right) + P' \,, \quad \bar{B} = -Q\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + 2S\right) + Q' \,, \quad \bar{C} = -R\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + 2S\right) + R' $$

ausgedrückt. Es gelte (2.10), so ist $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, bzw. $\frac{\bar{A}'}{\bar{A}} = \frac{\bar{B}'}{\bar{B}} = \frac{\bar{C}'}{\bar{C}}$, womit in Hinsicht auf [5] (S. 223) die Behauptung bewiesen ist.

[15]) Durch diese Voraussetzung wird die eineindeutige Abbildung der Asymptotenlinien v auf ${}^1v$ gesichert und die Orientation der Regelscharen erhalten.

$= f(v)$ und also ${}^1\tilde{v} = {}^1v$; schreibt man wieder ${}^1v$ statt ${}^1\tilde{v}$, so folgt gerade die Transformation (2.16).[16])

Im Weiteren wollen wir voraussetzen, dass die Transformation der Leitkurven der Kongruenz ${}^1L$ die Form (2.16) besitzt und die neuen Leitkurven bezeichnen wir wieder C_{1y}, C_{1z}, $C_{1\bar{y}}$, $C_{1\bar{z}}$.

Satz 2.3. *Es seien L und ${}^1L$ zwei beliebige Kongruenzen vom Typ* I—VI *und es soll $R \neq 0 \neq {}^1R$ gelten. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass* (2.16) *ihre übereinstimmend orientierte Transformation der* 1. *bzw.* 2. *Art sei, ist, dass*

$$Q^2 - PR = {}^1Q^2 - {}^1P\,{}^1R \tag{2.17}$$

ist und dass die Funktion φ die Form

$$ {}^1u = \varphi(u) = \frac{su - q}{-ru + p}, \quad ps - qr \neq 0, \tag{2.18}$$

(p, q, r, s sind Konstanten) besitzt.[17])

Beweis. Betrachten wir zuerst die Kongruenzen der Typen I—IV, für welche die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen eine Riccatische Gleichung ist.

Die notwendige Bedingung dafür, dass die Transformation (2.16) eine abwickelbare Transformation der 1. Art sei, ist, dass die Funktion φ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{{}^1P + 2\,{}^1Q\varphi + {}^1R\varphi^2} = \frac{\mathrm{d}u}{P + 2Qu + Ru^2}$$

erfüllt, wobei die Funktionen P, Q, R und ${}^1P$, ${}^1Q$, ${}^1R$ von v abhängen. Diese Differentialgleichung bekommt man durch Einsetzen statt ${}^1u$ und ${}^1v$ nach (2.16) in die Gleichung $(2.2)_1$ und durch Vergleichen mit der Gleichung $(1.10)_1$.[18]) Die Integration der vorliegenden Differentialgleichung (v ist ein Parameter, der nicht von der Integrationsveränderlichen abhängt) gibt die Lösung der Form (L und ${}^1L$ sind keine fleknodale Kongruenzen)

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi - \varphi_2} = \lambda\left(\frac{u - u_1}{u - u_2}\right)^{\nu}, \tag{2.19}$$

wobei φ_1, φ_2, bzw. u_1, u_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung ${}^1P + 2\,{}^1Q\varphi +$

---

[16]) Die Transformationsformeln der Funktionen P, Q, R, S und α für ein beliebiges ϱ siehe [7], S. 15.

[17]) Die Funktion φ ist deswegen in der vorliegenden Form geschrieben, damit die inverse Transformation, die wir brauchen werden, die Form $u = \dfrac{p\,{}^1u + q}{r\,{}^1u + s}$ besitze.

[18]) Soll die Transformation von 2. Art sein, so setzt man in die Gleichung $(2.2)_1$ nach (2.16) ein und das Ergebnis vergleicht man mit der Gleichung $(1.10)_2$.

$+ {}^1R\varphi^2 = 0$, bzw. $P + 2Qu + Ru^2 = 0$ sind, ν eine gewisse Funktion der Koeffizienten dieser Gleichungen ist und λ eine beliebige Funktion von v ist. Da die untersuchten Kongruenzen und auch ihre assoziierte Kongruenzen keine lineare Kongruenzen sind, so hängt wenigstens eine von den Wurzeln φ_1, φ_2, bzw. u_1, u_2 von v ab. Setzt man in die Gleichung $(2.2)_1$ für φ nach der Relation $(2.19)_1$ ein, so folgt eine Riccatische Differentialgleichung dann und nur dann, wenn $\nu^2 = 1$ ist und da $\nu = \pm \sqrt{\frac{{}^1Q^2 - {}^1P\,{}^1R}{Q^2 - PR}}$ ist, also dann und nur dann, wenn (2.17) gilt.[19]) Dann ist

$$\varphi = \frac{(\varphi_1 - \lambda\varphi_2)\,u + (\lambda\varphi_2 u_1 - \varphi_1 u_2)}{(1 - \lambda)\,u + (\lambda u_1 - u_2)}\ .$$

Soll φ nur von u abhängen, so müssen die Koeffizienten $\varphi_1 - \lambda\varphi_2$, $\lambda\varphi_2 u_1 - \varphi_1 u_2$, $1 - \lambda$, $\lambda u_1 - u_2$ oder wenigstens ihre Quotienten konstant werden, und also unter den Funktionen P, Q, R und ${}^1P, {}^1Q, {}^1R$ gewisse Relationen gelten[20]) und die Funktion φ muss die Form (2.18) besitzen.

Die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen der Typen V und VI ist formell auch Riccatische Gleichung; diese kann man aber durch eine passende Wahl der Leitkurven in eine Bernoullische, bzw. lineare Differentialgleichung überführen, was nur eine lineare Transformation der Parameter u und ${}^1u$ erfordert, sodass der Beweis mit dem vorliegenden Beweise übereinstimmt.

Bemerkung 2.2. Benützen wir statt der nichthomogenen Parameter u, bzw. ${}^1u$ in der Transformation (2.16) die homogenen Parameter, so wird die allgemeinste übereinstimmend orientierte asymptotische Transformation T durch die Gleichung

$$(2.20)\qquad t_1 = \nu(s\tau_1 + r\tau_2)\,,\quad t_2 = \nu(q\tau_1 + p\tau_2)\,,\quad v = {}^1v\quad (ps - qr \neq 0)$$

bestimmt, wobei p, q, r, s Konstanten sind.

Satz 2.4. *Es sei* (2.20) *eine übereinstimmend orientierte Transformation der 1. Art der Kongruenzen L und ${}^1L$. Man kann die neuen Leitkurven $C_{\tilde y}, C_{\tilde z}, C_{\tilde{\bar y}}, C_{\tilde{\bar z}}$ für die Fokalflächen der Kongruenz L und die neuen Parameter $\tilde t_1$ und $\tilde t_2$ einführen und die Konstante v so wählen, dass die Transformation T die einfache Form*

$$(2.21)\qquad \tilde t_1 = \tau_1\,,\quad \tilde t_2 = \tau_2\,,\quad v = {}^1v$$

annimmt; die Brennpunkte A_1, A_2 der Kongruenz L und die korrespondierenden Brennpunkte ${}^1A_1, {}^1A_2$ der Kongruenz ${}^1L$ besitzen die gleichen Werte der Para-

[19]) Ist $\nu = -1$, so transformiert T die erste Schicht der abwickelbaren Flächen von L in die zweite Schicht derselben von ${}^1L$.

[20]) Diese Relationen werden weiter bestimmt.

meter. Das System (1.1) *der Differentialgleichungen wird durch die Transformation*

$$\begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, P, Q, R, S, \alpha, \bar{\alpha} \\ \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\bar{y}}, \tilde{\bar{z}}, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, S, \alpha, \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

transformiert, wobei

$$\tilde{P} = \frac{Ps^2 + 2Qqs + Rq^2}{ps - qr}, \quad \tilde{Q} = \frac{Prs + Q(ps + qr) + Rpq}{ps - qr}, \tag{2.23}$$

$$\tilde{R} = \frac{Pr^2 + 2Qpr + Rp^2}{ps - qr} \quad (ps - qr \neq 0)$$

ist.

Beweis. Führen wir statt der Leitkurven der ersten Fokalfläche der Kongruenz L, die durch die Punkte

$$\tilde{y} = \nu(sy + qz), \quad \tilde{z} = \nu(ry + pz) \tag{2.24}$$

beschriebenen Leitkurven ein; dabei müssen wir auch gleichzeitig auf der zweiten Fokalfläche für die Leitkurven, die durch die Punkte

$$\tilde{\bar{y}} = \nu(s\bar{y} + q\bar{z}), \quad \tilde{\bar{z}} = \nu(r\bar{y} + p\bar{z}) \tag{2.25}$$

beschriebenen Kurven wählen, sodass die Untersuchungen, welche wir für die erste Fokalfläche durchführen werden, auch für die zweite Fokalfläche gelten.

Die Kurven $C_{\tilde{y}}$ und $C_{\tilde{z}}$ sind wieder Asymptotenlinien und es gilt

$$\left(\tilde{y}, \tilde{z}, \frac{d\tilde{y}}{dv}, \frac{d\tilde{z}}{dv}\right) = \nu^4(ps - qr)^2 \left(y, z, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}\right).$$

Normiert man den Faktor ν so, dass

$$\nu^4(ps - qr)^2 = 1 \tag{2.26}$$

gelte, so folgt

$$\left(\tilde{y}, \tilde{z}, \frac{d\tilde{y}}{dv}, \frac{d\tilde{z}}{dv}\right) = \omega.$$

Einer beliebigen durch den Punkt $\varrho(\lambda^1 y + \mu^1 z)$ beschriebenen Kurve (d. i. für $\tau_1 = \varrho\lambda$, $\tau_2 = \varrho\mu$) entspricht in der Transformation (2.20) die durch den Punkt $\varrho(\lambda\tilde{y} + \mu\tilde{z})$ beschriebene Kurve, sodass $\tilde{t}_1 = \varrho\lambda = \tau_1$, $\tilde{t}_2 = \varrho\mu = \tau_2$ ist. Die Relationen (2.23) und (2.22) kann man leicht durch Einsetzen in (1.1) nach (2.24) und (2.25) unter Voraussetzung (2.26) verifizieren.

Folgerung 2.1. *Zwischen den Kongruenzen L und ^1L existiert eine abwickelbare übereinstimmend orientierte Transformation T der 1. Art, welche durch die Gleichungen* (2.16) *bestimmt ist, dann und nur dann, wenn die Konstanten p, q, r, s ($ps - qr \neq 0$) so existieren, dass*

$$\tilde{P} = {}^1P, \quad \tilde{Q} = {}^1Q, \quad \tilde{R} = {}^1R \tag{2.27}$$

gilt, wobei $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ durch die Gleichungen (2.23) *bestimmt werden. Diese Transformation hält die nach der Definition* 2.1 *eingeführte Reihenfolge der Leitkurven der Fokalflächen ein und die Leitkurven und die Hauptkurven*[21]) *entsprechen einander; die letzten sind gleichzeitig für beide Kongruenzen reell oder imaginär.*

Bemerkung 2.3. Die letzten Behauptungen folgen entweder daraus, dass die Gleichung der Hauptkurven der Kongruenz L nach der Leitkurventransformation

$$\tilde{G}(\tilde{t}) \equiv \tilde{P}\tilde{t}_1^2 + 2\tilde{Q}\tilde{t}_1\tilde{t}_2 + \tilde{R}\tilde{t}_2^2 = 0$$

ist, oder es folgt folgendermassen:

Die Transformation (2.20) transformiert die quadratische Form (1.8) in die Form

$$\nu^2(ps - qr)(\tilde{P}\tau_1^2 + 2\tilde{Q}\tau_1\tau_2 + \tilde{R}\tau_2^2)\,,$$

sodass die Parameter der Hauptkurven

$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)_{1,2} = \frac{-\tilde{Q} \pm \sqrt{\tilde{Q}^2 - \tilde{P}\tilde{R}}}{\tilde{R}} = \frac{\tilde{P}}{-\tilde{Q} \mp \sqrt{\tilde{Q}^2 - \tilde{P}\tilde{R}}} \tag{2.28}$$

sind. Den Hauptkurven der Kongruenz entsprechen in der Transformation (2.24) die durch die Punkte

$$\sigma[{}^1R\tilde{y} + (-{}^1Q \pm \sqrt{{}^1Q^2 - {}^1P{}^1R})\,\tilde{z}] \tag{2.29}$$

beschriebenen Kurven, wobei $\sigma \neq 0$ eine beliebige Funktion ist. Die Hauptkurven der Kongruenz L beschreiben die Punkte

$$\mu[Ry + (-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR})\,z]$$

oder (geht man zu den neuen Leitkurven $C_{\tilde{y}}$ und $C_{\tilde{z}}$ über und setzt statt P, Q, R nach (2.24) ein) die Punkte

$$\frac{\mu\varrho}{\nu(ps - qr)}\,[\tilde{R}\tilde{y} + (-\tilde{Q} \pm \sqrt{\tilde{Q}^2 - \tilde{P}\tilde{R}})\,\tilde{z}]\,,$$

wobei μ und ϱ beliebige Funktionen sind.[22]) Durch Vergleichen mit der Relation (2.29) (mit Anwendung (2.25)) folgt die Behauptung.

---

[21]) D. i. die durch die Gleichung $Pt_1^2 + 2Qt_1t_2 + Rt_2^2 = 0$ bestimmten Kurven ([7], S. 8).

[22]) Die letzte Relation bekommt man aus der Relation

$$\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)_{1,2} = \frac{r\tilde{P} - s\tilde{Q} \pm s\sqrt{\tilde{Q}^2 - \tilde{P}\tilde{R}}}{s\tilde{R} - r\tilde{Q} \mp r\sqrt{\tilde{Q}^2 - \tilde{P}\tilde{R}}}\,,$$

welche aus (2.28) folgt.

Satz 2.5. *Wenn eine übereinstimmend orientierte abwickelbare Transformation T der ersten Art zwischen den Kongruenzen L und ${}^1L$ existiert, so existiert nur eine einzige.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass zwischen den Kongruenzen L und ${}^1L$ zwei verschiedene abwickelbare Transformationen T und ${}^1T$ des vorliegenden Typs existieren. In Hinsicht auf die Folgerung 2.1 müssen also ausser der vier Konstanten p, q, r, s noch andere vier Konstanten ${}^1p, {}^1q, {}^1r, {}^1s$ (${}^1p{}^1s - {}^1q{}^1r \neq 0$) existieren, die die Funktionen $\tilde{P}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1$ bestimmen (diese bekommt man aus den Funktionen P, Q, R durch die Transformation (2.23), wobei p, q, r, s der Reihe nach durch ${}^1p, {}^1q, {}^1r, {}^1s$ ersetzt wird), für welche $\tilde{P}_1 = {}^1P$, $\tilde{Q}_1 = {}^1Q$, $\tilde{R}_1 = {}^1R$ gilt und nach (2.27) folgt also

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P}\,, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}\,, \quad \tilde{R}_1 = \tilde{R}\,. \tag{2.30}$$

Da aber P, Q, R beliebige unabhängige Funktionen sind, so folgt aus der Relation (2.30), dass

$$\frac{p^2}{{}^1p^2} = \frac{q^2}{{}^1q^2} = \frac{r^2}{{}^1r^2} = \frac{s^2}{{}^1s^2} = \frac{ps - qr}{{}^1p{}^1s - {}^1q{}^1r} = \frac{ps + qr}{{}^1p{}^1s + {}^1q{}^1r}$$

ist; die Konstanten p, q, r, s und ${}^1p, {}^1q, {}^1r, {}^1s$ unterscheiden sich also nur durch einen konstanten Faktor. In Hinsicht auf die Bedingung (2.26) werden wieder die neuen arithmetischen Leitkurven in der Transformation ${}^1T$ durch die Punkte (2.24) beschrieben.

Bemerkung 2.4. Durch Einführung der neuen arithmetischen Leitkurven und des neuen Parameters für die Kongruenz ${}^1L$ (Satz 2.2) werden die ursprünglichen Funktionen ${}^1P, {}^1Q, {}^1R$ in $\varrho^2\,{}^1P, \varrho^2\,{}^1Q, \varrho^2\,{}^1R$ transformiert $\left(\varrho^2 = \dfrac{1}{f'({}^1\tilde{v})}, {}^1\tilde{v} = v\right)$. Da wir statt $\varrho^2\,{}^1P, \varrho^2\,{}^1Q, \varrho^2\,{}^1R$, wieder nur ${}^1P, {}^1Q, {}^1R$ geschrieben haben, so folgt, dass die Gleichungen (2.27) mit der ursprünglichen Bezeichnung geschrieben, die Form $\tilde{P} = \varrho^2\,{}^1P$, $\tilde{Q} = \varrho^2\,{}^1Q$, $\tilde{R} = \varrho^2\,{}^1R$ besitzen, wobei $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ durch (2.23) bestimmt sind.

Dann und nur dann wenn die Konstanten p, q, r, s ($ps - qr \neq 0$) so existieren, dass für zwei beliebige Systeme der Differentialgleichungen, die die Kongruenzen L und ${}^1L$ bestimmen,

$$\tilde{P} : \tilde{Q} : \tilde{R} = {}^1P : {}^1Q : {}^1R \tag{2.30$'$}$$

gilt ($\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ sind durch die Gleichungen (2.23) definiert), so existiert eine abwickelbare Transformation T der Kongruenzen L und ${}^1L$. Alle Funktionen f, die die Transformation der Parameter v und ${}^1v$ (durch eine Gleichung der Form ${}^1v = f(v)$) bestimmen, sind von einer Konstante abhängig, da f eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}f}{{}^1P(f)} = \frac{\mathrm{d}v}{\tilde{P}(v)}$$

ist.

Wenn die Konstanten p, q, r, s $(ps - qr \neq 0)$ so existieren, dass für die Funktionen $P, Q, R, {}^1P, {}^1Q, {}^1R$ die Relation $\tilde{P} : \tilde{Q} : \tilde{R} = {}^1R : {}^1Q : {}^1P$ gilt, dann existieren zwischen den entsprechenden Kongruenzen die nichtübereinstimmend orientierten abwickelbaren Transformationen. Für die Funktion f folgt eine analoge Differentialgleichung, wie in dem vorliegenden Fall.

Setzen wir im Weiteren voraus, dass für die Systeme der Differentialgleichungen, die die Kongruenzen L und ${}^1L$ bestimmen, die Relationen

$$P = {}^1P\,, \quad Q = {}^1Q\,, \quad R = {}^1R \tag{2.31}$$

gelten und die abwickelbare Transformation soll durch die Gleichungen

$$t_1 = \tau_1\,, \quad t_2 = \tau_2\,, \quad v = {}^1v \tag{2.32}$$

ausgedrückt werden.

In Hinsicht auf die vorliegenden Ergebnisse gilt

Satz 2.6. *Sollen zwei Segresche W-Kongruenzen abwickelbar transformiert werden können, so ist es notwendig, dass jede derselben einem beliebigen der Typen* I, II, III *angehöre, oder, dass beide dem Typ* IV, *bzw.* V, *bzw.* VI *angehören.*

Satz 2.7. *Für die beiden Kongruenzen L und ${}^1L$, die in abwickelbaren Transformation* (2.32) *sind, kann man statt des Parameters $v = {}^1v$ gleichzeitig einen gemeinsamen normalen Parameter einführen.*

Beweis. Der normale Parameter v^*, bzw. ${}^1v^*$ der Kongruenz L, bzw. ${}^1L$ ist durch die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{|Q^2 - PR|}}\,\mathrm{d}v^*\,, \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}^1v = \frac{1}{\sqrt{|{}^1Q^2 - {}^1P{}^1R|}}\,\mathrm{d}^1v^*$$

bestimmt. Nach der Relation (2.31) folgt $\mathrm{d}v^* = \mathrm{d}^1v^*$, w. z. b. w.

3. Projektive Deformation. Um die weiteren Untersuchungen ohne lange Rechnung ausführen zu können, führen wir in dem folgenden Lemma einige Relationen ein, die wir brauchen werden.

Lemma 3.1. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
(yz)' &= \left(2S - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(yz) + \alpha\overline{(y\bar{z}) - (z\bar{y})}\,, \\
(\bar{y}\bar{z})' &= -\left(2S + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(\bar{y}\bar{z}) + \bar{\alpha}\overline{(y\bar{z}) - (z\bar{y})}\,, \\
(y\bar{y})' &= -\frac{\alpha'}{\alpha}(y\bar{y}) + P\overline{(y\bar{z}) - (z\bar{y})}\,, \\
(z\bar{z})' &= -\frac{\alpha'}{\alpha}(z\bar{z}) + R\overline{(y\bar{z}) - (z\bar{y})}\,,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(y\bar{z})' = \left(2Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(y\bar{z}) - P(z\bar{z}) - R(y\bar{y}) + \bar{\alpha}(yz) + \alpha(\bar{y}\bar{z}) \,,$$

$$(z\bar{y})' = -\left(2Q + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(z\bar{y}) + P(z\bar{z}) + R(y\bar{y}) - \bar{\alpha}(yz) - \alpha(\bar{y}\bar{z}) \,,$$

$$(3.2) \qquad (A_1A_2) = t_1^2(y\bar{y}) + t_1t_2\,\overline{(y\bar{z}) + (z\bar{y})} + t_2^2(z\bar{z}) \,,$$

$$\begin{aligned}(3.3) \quad \mathrm{d}(A_1A_2) = {} & \left(2t_1\,\mathrm{d}t_1 - \frac{\alpha'}{\alpha}t_1^2\,\mathrm{d}v\right)(y\bar{y}) + \left[\mathrm{d}(t_1t_2) + G(t)\,\mathrm{d}v - \frac{\alpha'}{\alpha}t_1t_2\,\mathrm{d}v\right](y\bar{z}) + \\ & + \left[\mathrm{d}(t_1t_2) - G(t)\,\mathrm{d}v - \frac{\alpha'}{\alpha}t_1t_2\,\mathrm{d}v\right](z\bar{y}) + \left(2t_2\,\mathrm{d}t_2 - \frac{\alpha'}{\alpha}t_1^2\,\mathrm{d}v\right)(z\bar{z}) \,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.4) \quad \mathrm{d}^2(A_1A_2) = {} & \left[2(\mathrm{d}t_1)^2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' t_1^2\mathrm{d}v^2 - 4\frac{\alpha'}{\alpha}t_1\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}v + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 t_1^2\,\mathrm{d}v^2 - \right. \\ & \left. - 2R\,G(t)\,\mathrm{d}v^2\right](y\bar{y}) + \left[2(\mathrm{d}t_2)^2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' t_2^2\,\mathrm{d}v^2 - 4\frac{\alpha'}{\alpha}t_2\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 t_2^2\,\mathrm{d}v^2 - 2P\,G(t)\,\mathrm{d}v^2\right](z\bar{z}) + \left[2\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' t_1t_2\,\mathrm{d}v^2 - \right. \\ & - 2\frac{\alpha'}{\alpha}\mathrm{d}(t_1t_2)\,\mathrm{d}v + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 t_1t_2\,\mathrm{d}v^2 + 2\left(Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)G(t)\,\mathrm{d}v^2 + \dot{G}(t)\,\mathrm{d}v^2 + \\ & \left. + 2G(\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}v\right](y\bar{z}) + \left[2\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' t_1t_2\,\mathrm{d}v^2 - 2\frac{\alpha'}{\alpha}\mathrm{d}(t_1t_2)\,\mathrm{d}v + \right. \\ & + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 t_1t_2\,\mathrm{d}v^2 + 2\left(Q + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)G(t)\,\mathrm{d}v^2 - \dot{G}(t)\,\mathrm{d}v^2 - \\ & \left. - 2G(\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}v\right](z\bar{y}) + 2G(t)[\bar{\alpha}(yz) + \alpha(\bar{y}\bar{z})]\,\mathrm{d}v^2 \,,\end{aligned}$$

wobei

$$(3.5)_{1,2} \qquad \begin{aligned}\dot{G}(t) &= P't_1^2 + 2Q't_1t_2 + R't_2^2 \,, \\ G(\mathrm{d}t) &= 2[Pt_1\,\mathrm{d}t_1 + Q\,\mathrm{d}(t_1t_2) + Rt_2\,\mathrm{d}t_2] \,.\end{aligned}$$

Für die Kongruenz ^1L *folgen den Relationen* (3.1)—(3.5) *analoge Relationen durch die Transformation*

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & y, & z, & \bar{y}, & \bar{z}, & P, & Q, & R, & \alpha, & \bar{\alpha}, & S, & v, & t_1, & t_2, & G(t), & \dot{G}(t), & G(\mathrm{d}t) \\ {}^1A_1, & {}^1A_2, & {}^1y, & {}^1z, & {}^1\bar{y}, & {}^1\bar{z}, & P, & Q, & R, & {}^1\alpha, & {}^1\bar{\alpha}, & {}^1S, & {}^1v, & \tau_1, & \tau_2, & G(\tau), & \dot{G}(\tau), & G(\mathrm{d}\tau)\end{pmatrix} .$$

Beweis. Es folgt durch direkte Ausrechnung unter Verwendung des Systems (1.1).

Soll die abwickelbare Transformation T eine projektive Deformation zweiter Ordnung werden, so ist es notwendig und hinreichend, dass zu je zwei Strahlen (A_1A_2), $({}^1A_1{}^1A_2)$ die in der abwickelbaren Transformation (2.32) korrespondieren (wenigstens) eine Kollineation so existiert, dass

$$
\begin{aligned}
(3.7)_{1-3}\qquad H(A_1A_2) &= ({}^1A_1{}^1A_2)\,, \\
H\,\mathrm{d}(A_1A_2) &= \mathrm{d}({}^1A_1{}^1A_2) + \vartheta({}^1A_1{}^1A_2)\,, \\
H\,\mathrm{d}^2(A_1A_2) &= \mathrm{d}^2({}^1A_1{}^1A_2) + 2\vartheta\,\mathrm{d}({}^1A_1{}^1A_2) + \Theta({}^1A_1{}^1A_2)
\end{aligned}
$$

gilt, wobei ϑ eine gewisse zweckentsprechende Differentialform und Θ eine beliebige Differentialform ist.

In den weiteren Untersuchungen konstruieren wir sukzessiv: die Kollineation, welche die Relation $(3.7)_1$ erfüllt, dann die Tangentialkollineation, die die Relationen $(3.7)_{1-2}$ erfüllt und schliesslich die Schmiegkollineation, die die Relationen $(3.7)_{1-3}$ erfüllt.

Satz 3.1. *Soll die Kollineation H den Brennpunkt A_1, bzw. A_2 des Strahles der Kongruenz L in den Brennpunkt ${}^1A_1$, bzw. ${}^1A_2$ des in der abwickelbaren Transformation entsprechenden Strahles der Kongruenz ${}^1L$ und dadurch die Gerade (A_1A_2) in die Gerade $({}^1A_1{}^1A_2)$ überführen, so ist es notwendig und hinreichend, dass sie die Form*

$$
\begin{aligned}
(3.8)\qquad Hy &= (\varrho - \lambda t_2)\,{}^1y - \mu t_2{}^1z - \nu t_2{}^1\bar{y} + \sigma t_2{}^1\bar{z}\,, \\
Hz &= \lambda t_1{}^1y + (\varrho - \mu t_1)\,{}^1z + \nu t_1{}^1\bar{y} - \sigma t_1{}^1\bar{z}\,, \\
H\bar{y} &= -\,\bar{\lambda} t_2{}^1y + \bar{\mu} t_2{}^1z + (\varrho^{-1} - \bar{\nu} t_2)\,{}^1\bar{y} + \bar{\sigma} t_2{}^1\bar{z}\,, \\
H\bar{z} &= \bar{\lambda} t_1{}^1y - \bar{\mu} t_1{}^1z + \bar{\nu} t_1{}^1\bar{y} + (\varrho^{-1} - \bar{\sigma} t_1)\,{}^1\bar{z}
\end{aligned}
$$

hat, wobei $\varrho \neq 0$, λ, ν, μ, σ, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\sigma}$ beliebige Funktionen sind,[23]) *oder in den Linienkoordinaten die Form*

$$
\begin{aligned}
(3.9)_{1-6}\qquad H(yz) &= [\varrho^2 - \varrho(\mu t_1 + \lambda t_2)]({}^1y{}^1z) + \varrho\nu t_1({}^1y{}^1\bar{y}) - \varrho\sigma t_1({}^1y{}^1\bar{z}) + \\
&\quad + \varrho\nu t_2({}^1z{}^1\bar{y}) - \varrho\sigma t_2({}^1z{}^1\bar{z})\,, \\
H(y\bar{y}) &= [\varrho\bar{\mu} t_2 - (\lambda\bar{\mu})\,t_2^2]({}^1y{}^1z) + [1 - \varrho^{-1}\lambda t_2 - \varrho\bar{\nu} t_2 + (\lambda\bar{\nu})t_2^2]({}^1y{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + [\varrho\bar{\sigma} t_2 - (\lambda\bar{\sigma})\,t_2^2]({}^1y{}^1\bar{z}) + [\varrho^{-1}\mu t_2 - (\mu\bar{\nu})\,t_2^2]({}^1z{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + (\mu\bar{\sigma})\,t_2^2({}^1z{}^1\bar{z}) + [\varrho^{-1}\sigma t_2 - (\nu\bar{\sigma})\,t_2^2]({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})\,, \\
H(y\bar{z}) &= [-\,\varrho\bar{\mu} t_1 + (\lambda\bar{\mu})\,t_1t_2]({}^1y{}^1z) + [\varrho\bar{\nu} t_1 - (\lambda\bar{\nu})\,t_1t_2]({}^1y{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + [1 - \varrho^{-1}\lambda t_2 - \varrho\bar{\sigma} t_1 + (\lambda\bar{\sigma})\,t_1t_2]({}^1y{}^1\bar{z}) + (\mu\bar{\nu})\,t_1t_2({}^1z{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + [\varrho^{-1}\mu t_2 - (\mu\bar{\sigma})\,t_1t_2]({}^1z{}^1\bar{z}) + [\varrho^{-1}\nu t_2 + (\nu\bar{\sigma})\,t_1t_2]({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})\,, \\
H(z\bar{y}) &= [\varrho\bar{\lambda} t_2 + (\lambda\bar{\mu})\,t_1t_2]({}^1y{}^1z) + [\varrho^{-1}\lambda t_1 - (\lambda\bar{\nu})\,t_1t_2]({}^1y{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + (\lambda\bar{\sigma})\,t_1t_2({}^1y{}^1\bar{z}) + [1 - \varrho^{-1}\mu t_1 - \varrho\bar{\nu} t_2 + (\mu\bar{\nu})\,t_1t_2]({}^1z{}^1\bar{y}) + \\
&\quad + [\varrho\bar{\sigma} t_2 - (\mu\bar{\sigma})\,t_1t_2]({}^1z{}^1\bar{z}) + [\varrho^{-1}\sigma t_1 + (\nu\bar{\sigma})\,t_1t_2]({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})\,, \\
H(z\bar{z}) &= [-\,\varrho\bar{\lambda} t_1 + (\lambda\bar{\mu})\,t_1^2]({}^1y{}^1z) + (\lambda\bar{\nu})\,t_1t_2({}^1y{}^1\bar{y}) + [\varrho^{-1}\lambda t_1 + (\lambda\bar{\sigma})\,t_1^2]\,. \\
&\quad .\,({}^1y{}^1\bar{z}) + [\varrho\bar{\nu} t_1 - (\mu\bar{\nu})\,t_1^2]({}^1z{}^1\bar{y}) + [1 - \varrho^{-1}\mu t_1 - \varrho\bar{\sigma} t_1 + \\
&\quad + (\mu\bar{\sigma})\,t_1^2]({}^1z{}^1\bar{z}) + [\varrho^{-1}\nu t_1 - (\nu\bar{\sigma})\,t_1^2]({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})\,, \\
H(\bar{y}\bar{z}) &= -\,\varrho^{-1}\lambda t_1({}^1y{}^1\bar{y}) - \varrho^{-1}\bar{\lambda} t_2({}^1y{}^1\bar{z}) + \varrho^{-1}\bar{\mu} t_1({}^1z{}^1\bar{y}) + \varrho^{-1}\bar{\mu} t_2({}^1z{}^1\bar{z}) + \\
&\quad + [\varrho^{-2} - \varrho^{-1}(\nu t_2 + \bar{\sigma} t_1)]({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})\,,
\end{aligned}
$$

---

[23]) Für ein konkretes Paar von korrespondierenden Strahlen sollen die Funktionenwerte für die Parameter t_1, t_2, v der untersuchten Strahlen bestimmt werden.

wobei

$$(\lambda\bar{\mu}) = \lambda\bar{\mu} - \bar{\lambda}\mu\,, \quad (\lambda\bar{\nu}) = \lambda\bar{\nu} - \bar{\lambda}\nu\,, \ \ldots$$

ist.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned}
(3.10)\qquad Hy &= a_{11}{}^1y + a_{12}{}^1z + a_{13}{}^1\bar{y} + a_{14}{}^1\bar{z}\,,\\
Hz &= a_{21}{}^1y + a_{22}{}^1z + a_{23}{}^1\bar{y} + a_{24}{}^1\bar{z}\,,\\
H\bar{y} &= a_{31}{}^1y + a_{32}{}^1z + a_{33}{}^1\bar{y} + a_{34}{}^1\bar{z}\,,\\
H\bar{z} &= a_{41}{}^1y + a_{42}{}^1z + a_{43}{}^1\bar{y} + a_{44}{}^1\bar{z}\,, \quad \|a_{ik}\| \neq 0
\end{aligned}$$

eine beliebige regulare Kollineation. Soll diese Kollineation den Brennpunkt A_1, bzw. A_2 in den Brennpunkt ${}^1A_1$, bzw. ${}^1A_2$ übertragen und soll gleichzeitig die Relation $(3.7)_1$ gelten, so ist notwendig und hinreichend,[24]) dass

$$(3.11)\qquad HA_1 = \varrho\, {}^1A_1\,, \quad HA_2 = \varrho^{-1}\, {}^1A_2\,, \quad \varrho \neq 0\,, \quad \text{belieb.}$$

ist. Setzt man in diese Relation für A_1, A_2 nach (1.3) und ${}^1A_1 = \tau_1{}^1y + \tau_2{}^1z$, ${}^1A_2 = \tau_1{}^1\bar{y} + \tau_2{}^1\bar{z}$ (unter Voraussetzung (2.31) und (2.32)) ein, so folgen nach (3.11) für die Koeffizienten a_{ik} die Beziehungen

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_{21}}{-(a_{11}-\varrho)} = \frac{-(a_{22}-\varrho)}{a_{12}} = -\frac{a_{23}}{a_{13}} = -\frac{a_{24}}{a_{14}}\,,$$

$$\frac{t_1}{t_2} = -\frac{a_{41}}{a_{31}} = -\frac{a_{42}}{a_{32}} = \frac{a_{43}}{\varrho^{-1}-a_{33}} = \frac{\varrho^{-1}-a_{44}}{a_{34}}\,.$$

Auf Grund dieser Relationen kann man die Koeffizienten a_{ik} mittels der Funktionen λ, μ, ν, σ, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\sigma}$ so ausdrücken, dass die Kollineation die Form (3.8) annimmt. Durch eine direkte Ausrechnung folgen von (3.8) die Relationen (3.9).

Satz 3.2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kollineation* (3.8), *bzw.* (3.9) *eine Tangentialkollineation der Transformation T ist, besteht in den Relationen*

$$\begin{aligned}
(3.12)\qquad \bar{\lambda} &= \bar{b}t_1\,, \quad \bar{\mu} = -\bar{b}t_2\,, \quad \nu = bt_1\,, \quad \sigma = -bt_2\,,\\
\lambda &= at_1\,, \quad \mu = -at_2\,, \quad \bar{\nu} = \bar{a}t_1\,, \quad \bar{\sigma} = -\bar{a}t_2\,,
\end{aligned}$$

wobei a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ beliebige Funktionen sind. Die Tangentialkollineation ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(3.13)\qquad Hy &= (\varrho - at_1t_2)\,{}^1y - at_2^2\,{}^1z - bt_1t_2\,{}^1\bar{y} - bt_2^2\,{}^1\bar{z}\,,\\
Hz &= at_1^2\,{}^1y + (\varrho + at_1t_2)\,{}^1z + bt_1^2\,{}^1\bar{y} + bt_1t_2\,{}^1\bar{z}\,,\\
H\bar{y} &= -\bar{b}t_1t_2\,{}^1y - \bar{b}t_2^2\,{}^1z + (\varrho^{-1} - \bar{a}t_1t_2)\,{}^1\bar{y} - \bar{a}t_2^2\,{}^1\bar{z}\,,\\
H\bar{z} &= \bar{b}t_1^2\,{}^1y + \bar{b}t_1t_2\,{}^1z + \bar{a}t_1^2\,{}^1\bar{y} + (\varrho^{-1} + \bar{a}t_1t_2)\,{}^1\bar{z}
\end{aligned}$$

[24]) Vgl. [4], S. 489.

bestimmt, die in den Linienkoordinaten die Form

$$
\begin{aligned}
(3.14)\quad H(yz) &= \varrho^2({}^1y^1z) + \varrho b t_1^2({}^1y^1\bar{y}) + \varrho b t_1 t_2({}^1y^1\bar{z}) + \varrho b t_1 t_2({}^1z^1\bar{y}) + \varrho b t_2^2({}^1z^1\bar{z})\,, \\
H(y\bar{y}) &= -\varrho\bar{b}t_2^2({}^1y^1z) + [1 - (\varrho^{-1}a + \varrho\bar{a})\, t_1 t_2 + (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2]({}^1y^1\bar{y}) + \\
&\quad + [-\varrho\bar{a}t_2^2 + (a\bar{a})\, t_1 t_2^3]({}^1y^1\bar{z}) + [-\varrho^{-1}a t_2^2 + (a\bar{a})\, t_1 t_2^3]({}^1z^1\bar{y}) + \\
&\quad + (a\bar{a})\, t_2^4({}^1z^1\bar{z}) + \varrho^{-1}b t_2^2({}^1\bar{y}^1\bar{z})\,, \\
H(y\bar{z}) &= \varrho\bar{b}t_1 t_2({}^1y^1z) + [\varrho\bar{a}t_1^2 - (a\bar{a})\, t_1^3 t_2]({}^1y^1\bar{y}) + [1 - (\varrho^{-1}a - \varrho\bar{a})\, t_1 t_2 - \\
&\quad - (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2]({}^1y^1\bar{z}) - (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2({}^1z^1\bar{y}) - [\varrho^{-1}a t_2^2 + (a\bar{a})\, t_1 t_3^2]({}^1z^1\bar{z}) - \\
&\quad - \varrho^{-1}b t_1 t_2({}^1\bar{y}^1\bar{z})\,, \\
H(z\bar{y}) &= \varrho\bar{b}t_1 t_2({}^1y^1z) + [\varrho^{-1}a t_1^2 - (a\bar{a})\, t_1^3 t_2]({}^1y^1\bar{y}) - (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2({}^1y^1\bar{z}) + \\
&\quad + [1 + (\varrho^{-1}a - \varrho\bar{a})\, t_1 t_2 - (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2]({}^1z^1\bar{y}) - [\varrho\bar{a}t_2^2 + (a\bar{a})\, t_1 t_2^3]\,. \\
&\quad .\,({}^1z^1\bar{z}) - \varrho^{-1}b t_1 t_2({}^1\bar{y}^1\bar{z})\,, \\
H(z\bar{z}) &= -\varrho\bar{b}t_1^2({}^1y^1z) + (a\bar{a})\, t_1^4({}^1y^1\bar{y}) + [\varrho^{-1}a t_1^2 + (a\bar{a})\, t_1^3 t_2]({}^1y^1\bar{z}) + [\varrho\bar{a}t_1^2 + \\
&\quad + (a\bar{a})\, t_1^3 t_2]({}^1z^1\bar{y}) + [1 + (\varrho^{-1}a + \varrho\bar{a})\, t_1 t_2 + (a\bar{a})\, t_1^2 t_2^2]({}^1z^1\bar{z}) + \\
&\quad + \varrho^{-1}b t_1^2({}^1\bar{y}^1\bar{z})\,, \\
H(\bar{y}\bar{z}) &= -\varrho^{-1}\bar{b}t_1^2({}^1y^1\bar{y}) - \varrho^{-1}\bar{b}t_1 t_2({}^1y^1\bar{z}) - \varrho^{-1}\bar{b}t_1 t_2({}^1z^1\bar{y}) - \varrho^{-1}\bar{b}t_2^2({}^1z^1\bar{z}) + \\
&\quad + \varrho^{-2}({}^1\bar{y}^1\bar{z})
\end{aligned}
$$

haben, wobei $(a\bar{a}) = a\bar{a} - b\bar{b}$ *ist. Die Tangentialkollineation ist unimodular und die Differentialform* ϑ *in der Relation* $(3.7)_2$ *wird durch die Relation*

$$
\begin{aligned}
(3.15)\qquad \vartheta = \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \mathrm{d}v + \varrho\bar{a}[t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1 + G(t)\, \mathrm{d}v] + \\
+ \varrho^{-1}a[t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1 - G(t)\, \mathrm{d}v]
\end{aligned}
$$

bestimmt.

Beweis. Setzt man in die linke Seite der Relation $(3.7)_2$ nach (3.9) ein und vergleicht man dann die beiden Seiten (die Geraden $(yz), (y\bar{y}), \ldots, (\bar{y}\bar{z})$ und $({}^1y^1z), ({}^1y^1\bar{y}), \ldots, ({}^1\bar{y}^1\bar{z})$ sind linear unabhängige Geraden), so folgt $(t_1 \neq 0 \neq t_2)$

$$
\begin{aligned}
(3.16)_{1,2}\qquad \varrho(t_1\bar{\mu} + t_2\bar{\lambda})[t_2\, \mathrm{d}t_1 - t_1\, \mathrm{d}t_2 - G(t)\, \mathrm{d}v] &= 0\,, \\
\varrho^{-1}(t_1\sigma + t_2\nu)[t_2\, \mathrm{d}t_1 - t_1\, \mathrm{d}t_2 - G(t)\, \mathrm{d}v] &= 0\,,
\end{aligned}
$$

$(3.17)_{1-4}$

$$
\begin{aligned}
(t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1)\left(\varrho\,\frac{\bar{\nu}}{t_1} + \varrho^{-1}\,\frac{\lambda}{t_1}\right) + G(t)\, \mathrm{d}v\left(\varrho\,\frac{\bar{\nu}}{t_1} - \varrho^{-1}\,\frac{\lambda}{t_1}\right) + \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \mathrm{d}v &= \vartheta\,, \\
(t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1)\left(-\varrho\,\frac{\bar{\sigma}}{t_2} + \varrho^{-1}\,\frac{\lambda}{t_1}\right) - G(t)\, \mathrm{d}v\left(\varrho\,\frac{\bar{\sigma}}{t_2} + \varrho^{-1}\,\frac{\lambda}{t_1}\right) + \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \mathrm{d}v &= \vartheta\,, \\
(t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1)\left(\varrho\,\frac{\bar{\nu}}{t_1} - \varrho^{-1}\,\frac{\mu}{t_2}\right) + G(t)\, \mathrm{d}v\left(\varrho\,\frac{\bar{\nu}}{t_1} + \varrho^{-1}\,\frac{\mu}{t_2}\right) + \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \mathrm{d}v &= \vartheta\,, \\
(t_1\, \mathrm{d}t_2 - t_2\, \mathrm{d}t_1)\left(-\varrho\,\frac{\bar{\sigma}}{t_2} - \varrho^{-1}\,\frac{\mu}{t_2}\right) - G(t)\, \mathrm{d}v\left(\varrho\,\frac{\bar{\sigma}}{t_2} - \varrho^{-1}\,\frac{\mu}{t_2}\right) + \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) \mathrm{d}v &= \vartheta\,.
\end{aligned}
$$

Die letzten vier Relationen sind nicht linear unabhängig; durch Subtrahieren einerseits der Relationen $(3.17)_1$ und $(3.17)_2$, bzw. $(3.17)_3$ und $(3.17)_4$ und anderseits der Relationen $(3.17)_1$, $(3.17)_3$, bzw. $(3.17)_2$, $(3.17)_4$ folgen zwei unabhängige Relationen

$$(3.16)_{3,4} \qquad \varrho^{-1}\left(\frac{\lambda}{t_1}+\frac{\mu}{t_2}\right)[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 - G(t)\,\mathrm{d}v] = 0\,,$$

$$\varrho\left(\frac{\bar\nu}{t_1}+\frac{\bar\sigma}{t_2}\right)[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 + G(t)\,\mathrm{d}v] = 0\,.$$

Da $t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1$ und $\mathrm{d}v$ beliebige linear unabhängige Differentialformen sind, so kann man auf Grund der Relationen $(3.16)_{1-6}$ statt der 8 Funktionen λ, μ, ν, σ, $\bar\lambda$, $\bar\mu$, $\bar\nu$, $\bar\sigma$ nur 4 Funktionen a, $\bar a$, b, $\bar b$ so einführen, wie in der Relation (3.12) angegeben ist. Die Gleichungen (3.13), bzw. (3.14) der Tangentialkollineation folgen durch Einsetzen nach (3.12) in die Relationen (3.8), bzw. (3.9). Die Differentialform ϑ folgt durch Einsetzen nach (3.12) in eine beliebige der Relationen $(3.17)_{1-4}$. Da die Koeffizienten der Gleichungen $(3.14)_1$ und $(3.14)_6$ Minoren der ersten und der zweiten zwei Reihen der Determinante der Kollineation (3.13) sind, so sieht man leicht, dass die Kollineation (3.13) unimodular ist.

Satz 3.3. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die untersuchte abwickelbare Transformation T der Kongruenzen L und ${}^1L$ (von denen keine vom Typ* III *ist) eine projektive Deformation wird, deren Schmiegkollineation reelle, bzw. imaginäre Koeffizienten besitzt, ist, dass ausser den Relationen* (2.31) *noch die Relationen*

$$(3.18)_{1,2} \qquad \alpha = {}^1\alpha,\ \pi = {}^1\pi\,, \quad \textit{bzw.} \quad \alpha = -\,{}^1\alpha,\ \pi = {}^1\pi$$

gelten. Soll die Tangentialkollineation (3.13) *eine Schmiegkollineation* (*mit reellen, bzw. imaginären Koeffizienten*) *werden, so ist es notwendig und hinreichend, dass*

$$(3.19) \qquad \varrho^2 = 1\,, \quad \text{bzw.} \quad \varrho^2 = -\,1 \quad \text{und} \quad a = \bar a = b = \bar b = 0$$

gilt; die Schmiegkollineation wird in den Punktkoordinaten durch die Relationen

$$(3.20) \qquad Hy = \varrho\,{}^1y\,, \quad Hz = \varrho\,{}^1z\,, \quad H\bar y = \varrho^{-1}\,{}^1\bar y\,, \quad H\bar z = \varrho^{-1}\,{}^1\bar z\,,$$

oder in den Geradenkoordinaten durch die Relationen

$$(3.21) \qquad H(yz) = \varrho^2({}^1y\,{}^1z)\,, \quad H(y\bar y) = ({}^1y\,{}^1\bar y)\,, \quad H(y\bar z) = ({}^1y\,{}^1\bar z)\,,$$
$$H(z\bar y) = ({}^1z\,{}^1\bar y)\,, \quad H(z\bar z) = ({}^1z\,{}^1\bar z)\,, \quad H(\bar y\bar z) = \varrho^{-2}({}^1\bar y\,{}^1\bar z)$$

ausgedrückt.

Ist L vom Typ III und wenn $\bar\alpha \equiv 0$ gilt, dann ist ${}^1\bar\alpha \equiv 0$ und also auch die Kongruenz ${}^1L$ ist vom Typ III, sodass die ersten Fokalflächen der beiden Kon-

gruenzen ausarten; statt der Bedingung (3.18) *bekommen wir für diesen Typ der Kongruenzen die Bedingung*

$$\alpha = \varrho^2\, {}^1\alpha\,; \tag{3.22}$$

die Relationen (3.20) *und* (3.21) (*in denen jetzt* ϱ *durch* (3.22) *bestimmt ist*) *bleiben aber formell unabgeändert.*

Beweis. Setzt man in $(3.7)_3$ nach (3.4) und (3.14) ein, so folgen durch Vergleichen der Koeffizienten bei $({}^1y{}^1z), ({}^1y{}^1\bar{y}), \ldots, ({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ sechs Relationen, die nicht unabhängig sind und die in analoger Weise, wie in dem Beweise des Satzes 3.2 auf folgende vier

$$\begin{aligned} &\varrho\bar{b}[G^2(t)\,\mathrm{d}v^2 - (t_2\,\mathrm{d}t_1 - t_1\,\mathrm{d}t_2)^2] + G(t)(\bar{\alpha}\varrho^2 - {}^1\bar{\alpha})\,\mathrm{d}v^2 = 0\,,\\ &\varrho^{-1}b[(t_2\mathrm{d}t_1 - t_1\mathrm{d}t_2)^2 - G^2(t)\,\mathrm{d}v^2] + G(t)(\alpha\varrho^{-2} - {}^1\alpha)\,\mathrm{d}v^2 = 0\,,\\ &\varrho\bar{a}[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 + G(t)\,\mathrm{d}v]^2 + \varrho^{-1}a[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 - G(t)\,\mathrm{d}v]^2 = 0,\\ &\varrho\bar{a}[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 + G(t)\,\mathrm{d}v]^2 - \varrho^{-1}a[t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 - G(t)\,\mathrm{d}v]^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

reduziert werden können. Da $t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1$ und $\mathrm{d}v$ zwei linear unabhängige Differentialformen sind, so folgt $a = \bar{a} = b = \bar{b} = 0$ und $\bar{\alpha}\varrho^2 - {}^1\bar{\alpha} = \alpha\varrho^{-2} - {}^1\alpha = 0$.

Wenn $\bar{\alpha} \equiv 0$ ist, dann ist auch notwendig ${}^1\bar{\alpha} \equiv 0$, und die Relation (3.22) bestimmt ϱ^2. Von den letzten Relationen bekommt man (unter Voraussetzung, dass L und ${}^1L$ nicht vom Typ III sind) die Relationen

$$\frac{\bar{\alpha}}{{}^1\bar{\alpha}} = \varrho^{-2}\,, \quad \frac{\alpha}{{}^1\alpha} = \varrho^2\,.$$

Da α und ${}^1\alpha$ reelle Funktionen sind und $\bar{\alpha} = \pi\alpha$, ${}^1\bar{\alpha} = {}^1\pi{}^1\alpha$ $(\pi^2 = {}^1\pi^2 = 1)$ ist, so folgt $\pi = {}^1\pi$ und $|\alpha| = |{}^1\alpha|$. Wenn $\alpha = {}^1\alpha$, bzw. $\alpha = -\alpha^1$ ist, dann gilt $\varrho^2 = 1$, bzw. $\varrho^2 = -1$, und die Kollineation (3.20) hat, bzw. hat nicht reelle Koeffizienten.

Bemerkung 3.1. Sind L und ${}^1L$ vom Typ III, dann nehmen die Differentialformen ϑ und Θ die Form

$$\vartheta = \left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\mathrm{d}v\,, \quad \Theta = \left[\left(\frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha}\right)' - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + \frac{{}^1\alpha'}{{}^1\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right]\mathrm{d}v^2$$

an und wenn L und ${}^1L$ projektiv sind, dann ist $\vartheta = \Theta \equiv 0$.

Satz 3.4. *Jede übereinstimmend orientierte Transformation T der* 1. *Art der Kongruenzen L und ${}^1L$, die durch die Gleichungen* (2.32) *bestimmt ist* (*unter Voraussetzung* (2.31)), *ist eine asymptotische Deformation erster Ordnung. Sind die Parameterwerte t_1, t_2, v gegeben, so existieren für die korrespondierenden Strahlen g und ${}^1g$ der Kongruenzen L und ${}^1L$ ∞^5 Tangentialkollineationen.*[25])

Zu jeder Kongruenz eines beliebigen von den Typen I, II, III existieren 3

[25]) Vgl. [1], S. 268.

Klassen von Kongruenzen, welche mit L abwickelbar transformiert werden können und zwar: eine Klasse der Kongruenzen des Types I, welche von zwei Funktionen einer Veränderlichen abhängt, eine Klasse der Kongruenzen des Types II und eine Klasse der Kongruenzen des Types III, wobei jede von den zwei letzten Klassen von einer Funktion einer Veränderlichen abhängt.[26]

Zu jeder Kongruenz L des Types IV, bzw. V, bzw. VI existiert eine Klasse abwickelbar transformierter Kongruenzen ^1L desselben Typs, die von einer Funktion einer Veränderlichen abhängig ist.

Beweis. Soll die Transformation (2.32) eine übereinstimmend orientierte abwickelbare Transformation der 1. Art zwischen der Kongruenz L, welche durch das System (1.1) der Differentialgleichungen bestimmt ist, und der Kongruenz ^1L, der ein analoges System entspricht, sein, so ist es notwendig und hinreichend, dass für die Funktionen P, Q, R und ^1P, ^1Q, ^1R in den Systemen die Relationen (2.31) gelten. Dabei sind die Funktionen S, α, ^1S, $^1\alpha$ des Parameters $v = {}^1v$ beliebig wählbare Funktionen.

Nach Satz 3.2 existieren zu jeder solchen abwickelbaren Transformation der untersuchten Kongruenzen unendlich viele Tangentialkollineationen (die in dem erwähnten Satz konstruiert werden); da für jedes Paar g, ^1g der korrespondierenden Strahlen die Tangentialkollineation (3.8), bzw. (3.9) von 5 beliebigen Funktionen $\varrho \neq 0$, a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ abhängig ist, so existieren für jedes Paar gerade ∞^5 Kollineationen.

Ist L durch das System (1.1) bestimmt, dann bestimmt das zu (1.1) analoge System (wobei ^1S, $^1\alpha$ beliebige Funktionen sind und $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ ist) alle Kongruenzen ^1L, die mit L in projektiver asymptotischer Deformation erster Ordnung sind; dieselbe wird durch die Gleichungen (2.32) bestimmt. Die weiteren Behauptungen sind offensichtlich.

Bemerkung 3.2. Ist in den vorliegenden Untersuchungen der Parameter v ein normaler Parameter, dann ist die Gleichheit der Invarianten ε, H, K von L und der entsprechenden Invarianten von ^1L in den korrespondierenden Punkten die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer asymptotischen projektiven Deformation erster Ordnung dieser Kongruenzen. Die Hauptkurven der beiden Kongruenzen sind gleichzeitig reell oder imaginär.

Satz 3.5. *Die Tangentialkollineation* (3.13) ((3.14)) *transformiert die Geraden* (yz), *bzw.* $(\bar{y}\bar{z})$ *der Fokalflächen von L, die in der zweiten, bzw. ersten Fokalebene des Strahles* (A_1A_2) *liegt, in die zweite, bzw. erste Fokalebene des Strahles* $({}^1A_1{}^1A_2)$ *von* ^1L. *Ist* $b = 0$, *bzw.* $\bar{b} = 0$ *dann transformiert die Tangentialkollineation die Geraden* (yz) *und* $(\bar{y}\bar{z})$ *der ersten und zweiten Fokalfläche von L in die Geraden* $({}^1y{}^1z)$ *und* $({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ *der ersten und der zweiten Fokalfläche von* ^1L.

---

[26]) Für die Kongruenzen ^1L des Types III kann entweder die erste oder die zweite Fokalfläche ausarten, je nachdem ob $^1\bar{\alpha} = 0$, oder $^1\alpha = 0$ gilt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Tangentialkollineation (3.13), *bzw.* (3.14) *die Regelschar, welche den Strahl* (A_1A_2) *besitzt in die Regelschar, die den Strahl* $({}^1A_1{}^1A_2)$ *besitzt, überträgt, ist*

$$(3.24) \qquad \varrho^2\bar{a} = a\,, \quad b = \bar{b} = 0 \quad (\varrho \neq 0, \text{ belieb.})\,.$$

Wenn $a = \bar{a} = b = \bar{b} = 0$ $(\varrho \neq 0$, *belieb.*) *ist, dann transformiert die Transformation* (3.13) *alle Strahlen der erwähnten Regelscharen ineinander, welche gerade in der abwickelbaren Transformation einander entsprechen.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus den Gleichungen $(3.14)_1$ und $(3.14)_6$. Aus diesen Gleichungen folgt noch weiter: soll die Tangentialkollineation die Gerade (yz), bzw. $(\bar{y}\bar{z})$ der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche von L in die Gerade $({}^1y{}^1z)$, bzw. $({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche von ${}^1L$ übertragen, so ist es notwendig und hinreichend, dass $b = 0$, bzw. $\bar{b} = 0$ gilt. Die Bedingung $b = \bar{b} = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass die Tangentialkollineation die erwähnten Regelscharen ineinander transformiert.

Die Kollineation (3.13), wobei $b = \bar{b} = 0$, transformiert den Punkt $\sigma_1 y + {} + \sigma_2 z$, bzw. $\sigma_1\bar{y} + \sigma_2\bar{z}$ $(\sigma_1, \sigma_2$ belieb.) in den Punkt

$$(3.25)_1 \qquad [\sigma_1(\varrho - at_1t_2) + \sigma_2 a t_1^2]\,{}^1y + [\sigma_2(\varrho + at_1t_2) - \sigma_1 a t_2^2]\,{}^1z\,,$$

bzw.

$$(3.25)_2 \qquad [\sigma_1(\varrho^{-1} - \bar{a}t_1t_2) + \sigma_2\bar{a}t_1^2]\,{}^1\bar{y} + [\sigma_2(\varrho^{-1} + \bar{a}t_1t_2) - \sigma_1\bar{a}t_2^2]\,{}^1\bar{z}\,.$$

Die notwendige Bedingung dafür, dass die Verbindungsgeraden der angeführten Punkte ein Strahl der Kongruenz ${}^1L$ sei, ist, dass ausser $b = \bar{b} = 0$ noch $(3.24)_1$ gilt, wie durch Vergleichen der Koeffizienten bei $\sigma_1\sigma_2({}^1y{}^1\bar{z})$ und $\sigma_1\sigma_2({}^1z{}^1\bar{y})$ in der Gleichung dieser Geraden folgt. Die in der abwickelbaren Transformation korrespondierenden Strahlen werden nicht durch die Tangentialkollineation ineinander transformiert, sofern $a \neq 0 \neq \bar{a}$ gilt. Die letzte Behauptung in dem Satze folgt aus der Relation (3.14) für $a = \bar{a} = b = \bar{b} = 0$.

Lemma 3.2. *Die Schmiegkollineation* (3.20), *bzw.* (3.21) *der abwickelbaren Transformation* (2.32) *transformiert die den Strahl* (A_1A_2) *enthaltende Regelschar in die den Strahl* $({}^1A_1{}^1A_2)$ *enthaltende Regelschar von* ${}^1L$ *in solcher Weise, dass die in der abwickelbaren Transformation entsprechenden Strahlen ineinander transformiert werden, wobei die Punkte*

$$(3.26) \qquad \varrho\,{}^1y,\ \varrho\,{}^1z\,, \quad \text{bzw.} \quad \varrho^{-1}\,{}^1\bar{y},\ \varrho^{-1}\,{}^1\bar{z}\,,$$

die das Bezugssystem auf den Strahlen $H(yz)$, *bzw.* $H(\bar{y}\bar{z})$ *der Transformierten Regelschar bilden (es ist* $\varrho^2 = \pm 1$ *für alle Typen der Kongruenzen mit Ausnahme des Typs III, wobei nur* $\varrho^2 \neq 0$ *ist).*

Die Hauptpunkte[27]) *der Fokalflächengeraden* (yz), *bzw.* $(\bar{y}\bar{z})$ *von* L *werden in die Hauptpunkte der Geraden* $({}^1y{}^1z)$, *bzw.* $({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ *von* ${}^1L$ *transformiert.*

[27]) Die Definition sh. [7], S. 8.

Beweis. Da die Relation (3.19) gilt, so folgt aus (3.24), dass die Schmiegkollineation, die in dem Satz angeführten Regelscharen ineinander transformiert. Nach $(3.25)_{1,2}$ und (3.20) ersehen wir, dass die Punkte des Bezugssystems der transformierten Regelschar die Punkte (3.26) bilden und dass, die in der abwickelbaren Transformation entsprechenden Kongruenzenstrahlen ineinander transformiert werden. Daraus folgt auch die Behauptung für die Hauptbrennpunkte der Kongruenzen.

Satz 3.6. *Zu jeder beliebigen Segreschen Kongruenz L des Types I oder II existiert genau eine Kongruenz ${}^1L$ des Types II und eine Klasse, die von einer Funktion einer Veränderlichen abhängt, der Kongruenzen des Types I, für welche die abwickelbare Transformation eine projektive Deformation (zweiter Ordnung) ist.*[28]

Sind L und ${}^1L$ des Types II, so artet T in eine projektive Transformation aus.

Zu einer Segreschen Kongruenz des Types III (IV, V, VI) existiert eine von einer Funktion einer Veränderlichen abhängige Klasse von Kongruenzen desselben Types, für welche die Transformation T zu einer projektiven Deformation wird.

Die untersuchten abwickelbaren Transformationen der vorliegenden Kongruenzen ist gleichzeitig eine projektive Deformation längs aller Kongruenzenstrahlen der Regelscharen, die die Strahlen (A_1A_2), bzw. $({}^1A_1{}^1A_2)$ besitzen.

Beweis. Aus den Relationen (2.31), (2.32) und (3.18) folgt, dass in den Systemen der Differentialgleichungen, die die Kongruenzen L und ${}^1L$ (L und ${}^1L$ sind nicht vom Typ III), welche in projektiver Deformation zweiter Ordnung sind, bestimmen, die Funktionen S und ${}^1S$ beliebig wählbar sind; d. b. ist die Funktion S gegeben, so existiert eine von einer Funktion (${}^1S$) einer Veränderlichen abhängige Klasse der Kongruenzen ${}^1L$, welche in projektiver Deformation zweiter Ordnung mit L sind. Wenn ${}^1S \equiv 0$ ist, so gehört die Kongruenz ${}^1L$ einem linearen Komplex an.

Ist L und ${}^1L$ vom Typ II, so gilt $S = {}^1S \equiv 0$ und also sind L und ${}^1L$ projektiv. Ist L vom Typ III, so hängt die erwähnte Klasse von der Funktion ${}^1\alpha$ ab.

Die Schmiegkollineation (3.20) hängt nicht von den Parametern t_1 und t_2 ab, sodass sie eine Schmiegkollineation für ein beliebiges Paar korrespondierender Strahlen der Regelscharen $v = {}^1v$ ist, welche in der abwickelbaren Transformation (2.32) einander entsprechen.

Bemerkung 3.3. Ist in dem vorliegenden Satz der Parameter $v = {}^1v$ ein normaler Parameter, dann ist die Gleichheit der Invarianten

$$(3.27) \qquad \pi = {}^1\pi\,, \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon\,, \quad H = {}^1H\,, \quad |\alpha| = |{}^1\alpha|\,, \quad K = {}^1K$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen den unter-

[28]) Vgl. dasselbe Ergebnis: [2], S. 411 und [3], S. 291.

suchten Kongruenzen (welche nicht vom Typ III sind) eine projektive Deformation existiert. Die Vorzeichen ω, ${}^1\omega$ und die Invarianten S, ${}^1S$ sind beliebig wählbar.

Sind L und ${}^1L$ vom Typ III, dann ist

$$\varepsilon = {}^1\varepsilon\,, \quad \lambda = {}^1\lambda\,, \quad K = {}^1K \tag{3.28}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer projektiven Deformation der Kongruenzen L und ${}^1L$, d. b. aber, dass jede abwickelbare Transformation eine projektive Deformation ist. (Vgl. [1], S. 270.)

Aus den Transformationsformeln (2.5), (2.6), (2.7) sieht man leicht, dass eine Änderung der Orientation der Kongruenz L die gleichzeitige Vorzeichenänderung der Invarianten K und S zur Folge hat, aber die weiteren Invarianten unabgeändert bleiben. Die Invarianten ε und H bleiben auch unabgeändert, wenn die Funktion Q, bzw. gleichzeitig die Funktionen P und R die Vorzeichen abändern; der absolute Wert der Invariante K bleibt nach dieser Transformation unabgeändert; z B. die Transformation

$$\begin{pmatrix} y, & z, \bar{y}, & \bar{z}, & P, Q, & R, S, \alpha, \bar{\alpha} \\ y, & -z, \bar{y}, & -\bar{z}, & -P, Q, & -R, S, \alpha, \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

ist eine Transformation von erwähnter Eigenschaft und es ist offensichtlich, dass die Vorzeichen der Invarianten S und K fest bleiben. Alle vorliegenden Transformationen sind Folgerungen der unimodularen Kollineationen, sodass die ursprüngliche Kongruenz und die transformierte Kongruenz projektiv sind.

Es ist noch die Frage zu beantworten, ob die Vorzeichenänderung nur einer von den Invarianten S und K eine Folgerung irgendeiner projektiven Transformation werden kann. Dies erklärt

Satz 3.7. *Es seien L und ${}^1L$ Kongruenzen des Types I in der abwickelbaren Transformation* (2.32) *und es gelte*

$$\pi = {}^1\pi\,, \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon\,, \quad H = {}^1H\,, \quad |\alpha| = |{}^1\alpha|\,, \quad |K| = |{}^1K|\,, \quad |S| = |{}^1S|\,.$$

Die Kongruenzen L und ${}^1L$ sind projektiv dann und nur dann, wenn

$$\operatorname{sgn}(KS) = \operatorname{sgn}({}^1K\,{}^1S) \tag{3.29}$$

gilt.[29])

Beweis. Es ist klar, dass man voraussetzen kann, dass (2.32) eine übereinstimmend orientierte Transformation der 1. Art ist, sodass $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ gilt. Setzen wir nun voraus, dass für L und ${}^1L$ die Relation $\operatorname{sgn}(S\,{}^1S) = -1$ gilt. Wenn L und ${}^1L$ projektiv sind, dann müssen sie in projektiver Deformation dritter Ordnung sein. Da für die Deformation zweiter Ordnung schon $\vartheta = \Theta = 0$ gilt, so ist (2.32) eine Deformation dritter Ordnung dann und nur dann, wenn eine Kollineation H so existiert, dass

[29]) Vgl. [6], Abs. II, 2.

$$H\,\mathrm{d}^3(A_1A_2) = \mathrm{d}^3({}^1A_1{}^1A_2) + \Theta_1({}^1A_1{}^1A_2)$$

gilt. Setzt man in diese Relation ein, so bekommt man die Bedingungen $(S \neq 0 \neq {}^1S)$ $\pi\alpha^2 = {}^1\pi{}^1\alpha^2$, $\varrho^2\alpha - {}^1\alpha\,\mathrm{sgn}\,(S^1S) = 0$; da schon $\alpha - {}^1\alpha\varrho^2 = 0$, $\pi = {}^1\pi$, $\varrho^2 = \pm 1$ gilt, so muss notwendig $\mathrm{sgn}\,(S^1S) = 1$ sein, was in Widerspruch mit unserer Voraussetzung steht. Der Gegensatz ist evident.

Die Projektive Deformation der Kongruenzen des Types II ist jedesmal trivial. Für die Kongruenzen des Types III bekommen wir $\alpha\varrho^{-2}\,{}^1\alpha = \alpha'\varrho^{-2} - {}^1\alpha' = 0$, sodass die Bedingung dafür, dass die Kongruenzen in projektiver Deformation projektiv seien

$$|\alpha| = c|{}^1\alpha| \quad (c = \text{Konst}) \tag{3.30}$$

ist.

Schliesslich, für die Kongruenzen der Typen IV—VI nimmt diese Bedingung die Form

$$\mathrm{sgn}\, S = \mathrm{sgn}\, {}^1S \tag{3.31}$$

an.

Satz 3.8. *Die Dualisation (als abwickelbare Transformation) der Segreschen Kongruenzen L ist immer eine projektive Deformation. Die Dualisation der Kongruenzen L und L* artet dann und nur dann in eine Projektivität aus, wenn L vom Typ II oder III ist.*[30]) *Die Schmiegkollineation wird dann durch die Korrelation*

$$Hy = \varrho\bar{\eta}\,, \quad Hz = \varrho\bar{\zeta}\,, \quad H\bar{y} = \varrho^{-1}\eta\,, \quad H\bar{z} = \varrho^{-1}\zeta \quad (\varrho^2 = \pm 1) \tag{3.32}$$

repräsentiert.

4. Punkt- und Ebenendeformation.[31])

Satz 4.1. *Es seien C und ${}^1C$ die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen, die durch die ersten, bzw. zweiten Brennpunkte der Kongruenzen L und ${}^1L$ (keine derselben ist vom Typ III) beschrieben sind und welche in der abwickelbaren Transformation* (2.32) *korrespondieren. Der Dilatationskoeffizient der geometrischen Berührung der Kurven HC und ${}^1C$, wobei H die Tangentialkollineation der abwickelbaren Transformation* (2.32) *ist, wird durch die Relationen*

$$j_1 = \frac{\varrho^2\,{}^1\alpha}{\alpha}\,, \quad \text{bzw.} \quad j_2 = \frac{{}^1\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\varrho^2} \tag{4.1}$$

ausgedrückt. Für die Dualisation dieser Kongruenzen folgen die Dilatationskoeffizienten

$$j_1^* = \frac{{}^1\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\varrho^2}\,, \quad \text{bzw.} \quad j_2^* = \frac{{}^1\alpha\varrho^2}{\alpha}\,. \tag{4.2}$$

---

30) Vgl. [2] und [3].

31) Die Begriffe der Punkt- und Ebenendeformation und alle weiteren Begriffe, die in diesem Absatz vorkommen, werden von E. Čech in der Abhandlung [1] eingeführt.

Den Beweis führt man durch eine direkte Ausrechnung durch. Z. B. setzt man in die Formeln ${}^1A_1 = cHA_1$, $\mathrm{d}{}^1A_1 = cj_1H\,\mathrm{d}A_1 + \vartheta HA_1$ ein (ϑ ist eine beliebige Differentialform), so folgt zuerst $c = \frac{1}{\varrho}$ und dann j_1. Für den dualen Fall führen wir an, dass die Tangentialkollineation (3.13), bzw. (3.14) in den Ebenenkoordinaten die Form

$$
\begin{aligned}
(4.3)\quad H\bar{\eta} &= -\frac{\bar{\alpha}}{{}^1\alpha}\,[\bar{b}t_1t_2{}^1\eta + \bar{b}t_2^2\,{}^1\zeta] + \frac{\bar{\alpha}}{{}^1\bar{\alpha}}\,[(\varrho^{-1} - \varrho^{-2}at_1t_2)\,{}^1\bar{\eta} - a\varrho^{-2}t_2^2\,{}^1\bar{\zeta}]\,,\\
H\bar{\zeta} &= \frac{\bar{\alpha}}{{}^1\alpha}\,[\bar{b}t_1^2\,{}^1\eta + \bar{b}t_1t_2{}^1\zeta] + \frac{\bar{\alpha}}{{}^1\bar{\alpha}}\,[a\varrho^{-2}t_1^2\,{}^1\bar{\eta} + (\varrho^{-1} + \varrho^{-2}at_1t_2)\,{}^1\bar{\zeta}]\,,\\
H\eta &= \frac{\alpha}{{}^1\alpha}\,[(\varrho - \varrho^2\bar{a}t_1t_2)\,{}^1\eta - \bar{a}\varrho^2t_2^2\,{}^1\zeta] - \frac{\alpha}{{}^1\bar{\alpha}}\,[bt_1t_2{}^1\bar{\eta} + bt_2^2\,{}^1\bar{\zeta}]\,,\\
H\zeta &= \frac{\alpha}{{}^1\alpha}\,[\varrho^2\bar{a}t_1^2\,{}^1\eta + (\varrho + \varrho^2\bar{a}t_1t_2)\,{}^1\zeta] + \frac{\alpha}{{}^1\bar{\alpha}}\,[bt_1^2\,{}^1\bar{\eta} + bt_1t_2{}^1\bar{\zeta}]
\end{aligned}
$$

animmt.

Da $j_1 = j_2^*$ und $j_2 = j_1^*$ gilt, so folgt durch eine einfache Ausrechnung

Satz 4.2. *$j_1 = 1$, $b = 0$, bzw. $j_2 = 1$, $\bar{b} = 0$ ist die Bedingung dafür, dass die Tangentialkollineation H gleichzeitig die analytischen Berührungen erster Ordnung $A_1 \to {}^1A_1$, $E_4 \to {}^1E_4$, bzw. $A_2 \to {}^1A_2$, $E_3 \to {}^1E_3$ realisiert. Die abwickelbare Transformation* (2.32) *ist eine asymptotische Deformation der* 1. *und* 2. *Art gleichzeitig.*

$|\alpha| = |{}^1\alpha|$, $\pi = {}^1\pi$ ist die Bedingung dafür, dass die abwickelbare Transformation eine Punktdeformation, bzw. eine Ebenendeformation, bzw. eine Fokaldeformation der 1. *oder* 2. *Art ist.*

Satz 4.3. *Die punkthaft, bzw. ebenenhaft assoziierte Kollineation K_0, bzw. K_0^* (l'homografie ponctuellement (planairement) associée) zu der Punkt-, bzw. Ebenendeformation bekommt man aus der Tangentialkollineation durch Einsetzen*

$$(4.4)\quad a = \varrho(S - {}^1S)\,, \quad \bar{a} = \varrho^{-1}(S - {}^1S)\,, \quad b = \bar{b} = 0\,, \quad \varrho^2 = \operatorname{sgn}(\alpha{}^1\alpha)\,,$$

bzw.

$$(4.5)\quad a^* = -\varrho(S - {}^1S)\,, \quad \bar{a}^* = -\varrho^{-1}(S - {}^1S)\,, \quad b^* = \bar{b}^* = 0\,, \quad \varrho^2 = \operatorname{sgn}(\alpha{}^1\alpha)\,.$$

Die Kollineationen K_0 und K_0^* fallen dann und nur dann zusammen, wenn L und ${}^1L$ projektiv sind.

Beweis. Ist C die durch den Punkt $x_1A_1 + x_2A_2$ beschriebene Kurve (x_1 und x_2 sind beliebige feste Funktionen) und ${}^1C$ die durch die Punktverbreitung (l'extension ponctuelle) $T(\varrho^2)$ (ϱ^2 ist eine fest ausgewählte Funktion) der abwickelbaren Transformation T transformierte Kurve (d. i. die durch den

Punkt $\varrho x_1{}^1A_1 + \varrho^{-1} x_2{}^1A_2$ beschriebene Kurve) dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass HC und ${}^1C$ die analytische Berührung erster Ordnung besitzt

$$\alpha x_1^2 \left[(j_1 - 1) T_2 - \left(2G(t) \frac{\varrho b}{\alpha} + j_1 - 1 \right) T_1 \right] +$$
$$+ \bar{\alpha} x_2^2 \left[(j_2 - 1) T_1 + \left(2G(t) \frac{\varrho^{-1}\bar{b}}{\alpha} - j_2 + 1 \right) T_2 \right] -$$
$$- 2x_1x_2\, G(t) \left[2\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + ({}^1S - S)\,\mathrm{d}v + \bar{a}\varrho T_2 - a\varrho^{-1}T_1 \right] = 0\,,$$

wobei

$$T_1 = t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 - G(t)\,\mathrm{d}v\,, \quad T_2 = t_1\,\mathrm{d}t_2 - t_2\,\mathrm{d}t_1 + G(t)\,\mathrm{d}v\,.$$

Da für die Punktdeformation die Funktion ϱ^2 die Relationen $j_1 = j_2 = 1$ bestimmen und also ist $\varrho^2 = \operatorname{sgn}(\alpha^1\bar{\alpha})$, so folgen aus den letzten Relationen direkt die Relationen (4.4). Ganz analog für die Ebenendeformation.

Satz 4.4 *Eine projektive Deformation der Segreschen Kongruenzen L und ${}^1L$ (die nicht vom Typ III sind) ist dann und nur dann singular, wenn L und ${}^1L$ projektiv sind. Die Segreschen Kongruenzen lassen keine demisingulare Deformation zu.*

Beweis. Da die Deformation für $a = \bar{a} = 0$ singular ist, so folgt die Behauptung sofort aus den Relation (4.4). Da $a = \varrho^2\bar{a}$ ($\varrho^2 \neq 0$) gilt, so ist die Deformation der Segreschen Kongruenzen nie eine demisingulare Deformation.

Aus dem vorliegenden Satz folgt (als ein Sonderfall des von E. Čech für allgemeine Kongruenzen bewiessenen Satzes) für die Segreschen Kongruenzen: Die Dualisation der Segreschen Kongruenzen mit nicht ausgearteten Fokalflächen ist eine singulare Deformation dann und nur dann, wenn L vom Typ II ist.

Satz 4.5. *Die charakteristischen Tangenten (in Bezug auf die projektive Deformation) der beiden Fokalflächen werden durch die Differentialgleichung* $\mathrm{d}v^2 = 0$ *bestimmt, sie fallen also mit den Geraden der Fokalflächen zusammen.*

II

1. Einführung. Nach Corrado Segre ist jede Kongruenz mit geradlinigen Fokalflächen im Kleinschen fünfdimensionalen Raum $\bar{P}_5$ durch eine gewisse Torse dargestellt.

In der Abhandlung [6] des Autors ist bewiesen (wir führen nur die Ergebnisse unter Voraussetzung, dass v ein normaler Parameter ist an):

Die Kongruenz L des *Types I*, die durch das System der Differentialgleichungen (I.1.1) bestimmt ist, wird im Raume $\bar{P}_5$ durch eine Torse dargestellt, die als ihre Rückehrkante eine arithmetische Kurve in Normaldarstellung[32]) besitzt, welche durch den Punkt

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \nu |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})] , \quad \nu^2 = 1 \tag{1.1}$$

beschrieben wird und deren Parameter t die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2|S|} \tag{1.2}$$

bestimmt. Die Funktionen des Parameters t

$$K_1 = \left|\frac{\alpha}{S}\right| , \quad K_2 = \frac{1}{|S|} , \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|} , \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|} \tag{1.3}$$

und die Vorzeichen ($\varepsilon_i^2 = 1$)

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega , \quad \varepsilon_2 = \pi\omega , \quad \varepsilon_3 = -\omega, \ \varepsilon_4 = \omega\varepsilon , \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H , \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H , \tag{1.4}$$

von welchen genau drei positiv sind, bilden das vollständige System der Differential-K-Invarianten der orientierten Kurve (1.1), d. i. der Invarianten bezüglich zu der Gruppe der K-Transformationen des Raumes P_5, welche mit der Gruppe der unimodularen Kollineationen des Raumes P_3 isomorph ist; die K-Transformationen transformieren die K-Quadrik Γ^+ in sich.

Die arithmetischen Punkte

$$\begin{aligned}
{}^1N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \lambda |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})] , \\
{}^2N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2 \lambda\alpha (\operatorname{sgn} S)[(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})] , \\
{}^3N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2\pi_3 \lambda\pi\omega\alpha (\operatorname{sgn} S)[(y\bar{z}) - (z\bar{y})] , \\
{}^4N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \lambda\alpha (\operatorname{sgn} S)[R(y\bar{y}) + P(z\bar{z}) - Q(y\bar{z}) - Q(z\bar{y})] , \\
{}^5N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5 \lambda\omega (\operatorname{sgn} S) \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} [R'(y\bar{y}) + \\
&\quad + P'(z\bar{z}) - Q'(y\bar{z}) - Q'(z\bar{y})] , \\
{}^6N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6 \lambda (\operatorname{sgn} SHK) \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} [2(QR' - RQ')(y\bar{y}) + \\
&\quad + 2(PQ' - QP')(z\bar{z}) + (RP' - PR')\overline{(y\bar{z}) + (z\bar{y})}] ,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

---

[32]) D. h. eine Kurve, für welche $x \,.\, x = \varepsilon_1$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,.\, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$) gilt, wobei $x \,.\, x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0$ die Gleichung der positiv orientierten Kleinschen Hyperquadrik (K-Quadrik) Γ^+ ist.

(für welche ${}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i$ gilt und π_i, λ beliebigen Vorzeichen sind) bilden einen Schmiegsimplex der untersuchten Torse, der gleichzeitig ein polares Sechseck der K-Quadrik Γ^+ ist.

Die zu der ursprünglichen assoziierte Kongruenz wird durch die Torse, deren Rückkehrkante eine durch den Punkt ${}^6N$ beschriebene arithmetische Kurve in Normaldarstellung ist, dargestellt; der Parameter dieser Kurve ist durch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = K_4 \tag{1.6}$$

bestimmt.

Die K-Invarianten der assoziierten Kongruenz sind durch die Relationen

$$\tilde{K}_j = \frac{K_{4-j}}{K_4}\,, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i} \quad (j = 1, 2, 3, 4;\ i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{1.7}$$

gegeben.

Die Kongruenz vom *Typ II* ist durch einen Kegel dargestellt, mit dem Scheitel

$$ {}^1x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, {}^1\nu|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})]\,, \quad {}^1\nu^2 = 1 \tag{1.8}$$

(${}^1x$ ist kein K-Punkt[32]) und mit der arithmetischen Leitkurve in Normaldarstellung (diese ist in dem Polarraum $\bar{P}_4$ des Punktes ${}^1x$ eingebettet), welche durch den Punkt

$$ {}^2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, {}^2\nu|\alpha|[(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})]\,, \quad {}^2\nu^2 = 1 \tag{1.9}$$

beschrieben ist und deren Parameter t die Differentialgleichung (v ist ein normaler Parameter)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2|\alpha|} \tag{1.10}$$

bestimmt.

Das System der K-Invarianten bilden die Vorzeichen (1.4) und die Funktionen (des Parameters t)

$$K_1 = \frac{1}{|\alpha|}\,, \quad K_2 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|\alpha|}\,, \quad K_3 = \frac{|K|}{4|\alpha H|}\,. \tag{1.11}$$

Die K-Invarianten der zu der vorliegenden Kongruenz assoziierten Kongruenz sind die Vorzeichen und Funktionen

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i}\,, \quad \tilde{K}_j = \frac{K_{3-j}}{K_3} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6;\ j = 1, 2, 3)\,, \tag{1.12}$$

[32]) D. i. ein Punkt der K-Quadrik Γ^+. Die aus K-Punkten zusammengesetzte Gebilde wollen wir K-Gebilde nennen.

wobei $\tilde{K}_j$ Funktionen des Parameters u sind, der durch die Differentialgleichung

$$\text{(1.13)} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = K_3$$

bestimmt ist.

Eine Kongruenz des *Types III*[34]) wird durch einen Kegel dargestellt, dessen Scheitel der K-Punkt (mit konstanten Koordinaten)

$$\text{(1.14)} \qquad {}^2x = |c\alpha|(\bar{y}\bar{z}) \quad (c \text{ belieb. Konst})$$

und dessen Leitkurve, die durch den arithmetischen K-Punkt

$$\text{(1.15)} \qquad {}^1x = \omega\varepsilon_0 \left|\frac{c}{\alpha}\right| (yz) \qquad (\varepsilon_0^2 = 1)$$

beschriebene K-Kurve (in Normaldarstellung[35])) ist, deren Parameter t die Differentialgleichung (v ist ein normaler Parameter)

$$\text{(1.16)} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left|\frac{c}{\alpha}\right|$$

bestimmt.

Die Funktionen des Parameters t

$$\text{(1.17)} \qquad k_1 = \sqrt{2}\left|\frac{c}{\alpha}\right|, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{c}{\alpha}\right| \sqrt{|H|}\,, \quad k_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left|\frac{cK}{\alpha H}\right|$$

und die Vorzeichen

$$\text{(1.18)} \qquad \varepsilon_3 = -\,\omega\,, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon\,, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H\,, \quad \varepsilon_6 = -\,\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H\,,$$

von denen genau 2 positiv sind, sind K-Invarianten der durch den Punkt (1.15) beschriebenen K-Kurve (wobei c eine beliebige Konstante ist).

Die Funktionen

$$\text{(1.19)} \qquad \frac{k_i}{k_j}\,, \quad \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} : k_j k_l \quad (i, j, l = 1, 2, 3 \text{ beliebig, von einander unabhängig}),$$

die nicht von c abhängige K-Invarianten der vorliegenden Kurve sind, sind K-Invarianten der Torse, die die assoziierte Kongruenz darstellt. Drei beliebige von den K-Invarianten (1.19) und die K-Invarianten (1.18) bilden das vollständige System der K-Invarianten; für diese drei wollen wir

$$\text{(1.20)} \quad \tilde{K}_1 = \left|\frac{k_2}{k_3}\right| = \left|\frac{H}{K}\right| \sqrt{|H|}\,, \quad \tilde{K}_2 = \frac{k_1}{k_3} = 4\left|\frac{H}{K}\right|, \tilde{K}_3 = \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}t} : k_1 k_3 = -\,2\left|\frac{H}{K}\right|\frac{\alpha'}{\alpha}\,.$$

wählen.

---

[34]) Die Kongruenzen vom Typ III werden in der Abhandlung [7] nicht untersucht.

[35]) D. i. für die durch den Punkt ${}^1x$ beschriebene K-Kurve gilt ${}^1x \,.\, {}^2x = \varepsilon_0, \frac{\mathrm{d}^1x}{\mathrm{d}t} \,.\, \frac{\mathrm{d}^1x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_3$ $(\varepsilon_0{}^2 = \varepsilon_3{}^2 = 1)$.

Für die Kongruenzen vom *Typ IV* gelten die Relationen (1.1)—(1.4), wobei in (1.3) $K_4 \equiv 0$ gilt, da $K \equiv 0$ ist. K-Invarianten der assoziierten Kongruenz werden durch die Relationen (1.12) bestimmt, wobei die rechten Seiten dieser Relationen Funktionen von u sind, das eine Lösung der Differentiagleichung (1.13) ist.

Für die Kongruenzen des *Types V* bekommen wir wieder die Relationen (1.1) und (1.2). Die K-Invarianten werden durch die Relationen

$$K_1 = \left|\frac{\alpha}{S}\right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K = \frac{\lambda}{2|S|} \tag{1.21}$$

und

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega\,, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega\,, \quad \varepsilon_3 = -\omega\,, \quad \varepsilon_4 = \omega \tag{1.22}$$

bestimmt; gerade zwei von den Vorzeichen ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind positiv.

Für die Kongruenzen des *Types VI* gelten die Relationen (1.1)—(1.4), wobei in den Relationen (1.3) $K_3 \equiv K_4 \equiv 0$ gilt, da $H \equiv K \equiv 0$ ist; von den Vorzeichen ε_i kommen nur die Vorzeichen $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ in Betracht.

Die K^*-Invarianten der Dualisation der vorliegenden Typen von Kongruenzen sind mit den K-Invarianten der ursprünglichen Kongruenz identisch.

2. Segresche *W*-Kongruenzen in abwickelbarer Transformation. Wir wollen im Weiteren voraussetzen, dass die untersuchten Kongruenzen L und ${}^1L$ den normalen Parameter besitzen; für die K-Invarianten, Parameter usw. der Torsen, die im Raume $\bar{P}_5$ die Kongruenz ${}^1L$ darstellen, gelten die zu den Relationen der Kongruenz L analogen Relationen.

Satz 2.1. *Die abwickelbare Transformation T der Segreschen Kongruenzen L und ${}^1L$, welche durch die Gleichung* (I.2.32) *bestimmt wird, realisiert zwischen den Punkten der Rückkehrkanten, bzw. der Leitkurven der Torsen $\bar{L}$ und ${}^1\bar{L}$ des Raumes $\bar{P}_5$ eine gewisse Korrespondenz $\bar{T}$, die für einzelne Typen der Kongruenzen durch die folgenden Differentialgleichungen bestimmt ist*:

$$(2.1)_{1-9} \qquad \begin{array}{rcll} \mathrm{I} & \longleftrightarrow & \mathrm{I} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1K_2\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{I} & \longleftrightarrow & \mathrm{II} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1K_1\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{I} & \longleftrightarrow & \mathrm{III} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1k_1\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{II} & \longleftrightarrow & \mathrm{II} & K_1\,\mathrm{d}t = {}^1K_1\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{II} & \longleftrightarrow & \mathrm{III} & K_1\,\mathrm{d}t = {}^1k_1\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{III} & \longleftrightarrow & \mathrm{III} & k_1\,\mathrm{d}t = {}^1k_1\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{IV} & \longleftrightarrow & \mathrm{IV} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1K_2\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{V} & \longleftrightarrow & \mathrm{V} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1K_2\,\mathrm{d}^1t\,, \\ \mathrm{VI} & \longleftrightarrow & \mathrm{VI} & K_2\,\mathrm{d}t = {}^1K_2\,\mathrm{d}^1t\,. \end{array}$$

Für die K-Invariantenwerte der in der Korrespondenz $\overline{T}$ entsprechenden Punkte gilt:

$$
(2.2)_{1-9}\quad
\begin{array}{rlll}
\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{I} & K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{II} & K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{III} & K_2 : K_3 : K_4 = {}^1k_1 : {}^1k_2 : {}^1k_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{II} \longleftrightarrow \mathrm{II} & K_1 : K_2 : K_3 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{II} \longleftrightarrow \mathrm{III} & K_1 : K_2 : K_3 = {}^1k_1 : {}^1k_2 : {}^1k_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{III} \longleftrightarrow \mathrm{III} & k_1 : k_2 : k_3 = {}^1k_1 : {}^1k_2 : {}^1k_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{IV} \longleftrightarrow \mathrm{IV} & K_2 : K = {}^1K_2 : {}^1K, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4, 5, 6),\\
\mathrm{V} \longleftrightarrow \mathrm{V} & K_2 : K_3 = {}^1K_2 : {}^1K_3, & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4),\\
\mathrm{VI} \longleftrightarrow \mathrm{VI} & & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i & (i = 3, 4).^{36)}
\end{array}
$$

Umgekehrt, wenn für die K-Invarianten der in der Korrespondenz $\overline{T}$ entsprechenden Punkte der Rückkehrkanten, bzw. der Leitkurven der Torsen $\overline{L}$ und ${}^1\overline{L}$ eine den untersuchten Typen der Kongruenzen angehörige Relation (2.2) gilt, so kann man die den Torsen entsprechenden Segreschen Kongruenzen abwickelbar transformieren.

Den Beweis wollen wir nur für die Kongruenzen des Types I durchführen.

Die Differentialgleichung $(2.1)_1$ bekommen wir aus der Differentialgleichung (1.2) und $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}^1t} = \dfrac{1}{2|{}^1S|}$, wobei wir $v = {}^1v$ eingesetzt haben, da beide von den Kongruenzen einen gemeinsamen normalen Parameter besitzen. Da die Relationen (I.2.31) und (I.2.32) gelten, so folgt durch Vergleichen der K-Invarianten (1.3) mit den analogen K-Invarianten der Rückkehrkante $[{}^1x]$, dass in den korrespondierenden Punkten $(2.2)_1$ gilt.

Setzen wir jetzt voraus, dass für die Punkte, welche in der Korrespondenz $\overline{T}$ (die durch $(2.1)_1$ bestimmt ist) einander entsprechen, die Relation $(2.2)_1$ gilt.

Die absoluten Werte der Projektivdifferentialinvarianten $\alpha, S, H, K, {}^1\alpha, {}^1S, {}^1H, {}^1K$ der Kongruenzen L und ${}^1L$, die durch die Torsen $\overline{L}, {}^1\overline{L}$ dargestellt sind, werden mittels der K-Invarianten durch die Relationen

$$(2.3)\qquad |\alpha| = \frac{K_1}{K_2},\quad |S| = \frac{1}{K_2},\quad |H| = \frac{4K_3^2}{K_2^2},\quad |K| = \frac{16K_3^2K_4}{K_2^3}$$

und

$$(2.4)\qquad |{}^1\alpha| = \frac{{}^1K_1}{{}^1K_2},\quad |{}^1S| = \frac{1}{{}^1K_2},\quad |{}^1H| = \frac{4\,{}^1K_3^2}{{}^1K_2^2},\quad |{}^1K| = \frac{16\,{}^1K_3^2\,{}^1K_4}{{}^1K_3^2}$$

bestimmt.

---

36) Wenn für die Vorzeichen ε_1 und ε_2 (soweit sie definiert sind) $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ gilt, dann soll $\varepsilon_j = {}^1\varepsilon_j$ oder $\varepsilon_j = -{}^1\varepsilon_j$ $(j = 1, 2)$ sein (unabhängig davon ob $\varepsilon_i = {}^1\varepsilon_i$ oder $\varepsilon_i = -{}^1\varepsilon_i$, $i = 3, 4, 5, 6$ gilt); wenn $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ gilt, so ist $\varepsilon_i = \pm\,{}^1\varepsilon_i$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$ wie nach der Relation $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_6 = -1$ folgt.

Der Korrespondenz $\overline{T}$ entspricht allgemein keine abwickelbare Transformation der Kongruenzen L und ${}^1L$. Wenn in den korrespondierenden Punkten der Rückkehrkanten $[x]$ und $[{}^1x]$ die Relationen (2.2) gelten, dann folgt aus (2.3) und (2.4), dass

$$|H| = |{}^1H| , \quad |K| = |{}^1K| \tag{2.5}$$

ist und aus (1.4) und der analogen Relation für die Kurve $[{}^1x]$ bekommen wir

$$(2.6)_1 \qquad \omega = \pm\, {}^1\omega , \quad \pi = {}^1\pi , \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon , \quad \operatorname{sgn} H = \operatorname{sgn} {}^1H$$

bzw.

$$(2.6)_2 \qquad \omega = \pm\, {}^1\omega , \quad \pi = -\, {}^1\pi , \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon , \quad \operatorname{sgn} H = \operatorname{sgn} {}^1H .$$

Aus diesen Relationen folgt unmittelbar die Behauptung.

In dem folgenden Satz wollen wir uns nur auf die Kongruenzen des Types I beschränken.

Satz 2.2. *Es seien $\overline{L}$ und ${}^1\overline{L}$ Torsen des Raumes $\overline{P}_5$, die die Kongruenzen des Types I in abwickelbarer Transformation* (I.2.32) *darstellen. Der Tangentialkollineation* (I.3.13) *der abwickelbaren Transformation* (I.2.32) *entspricht im Raume $\overline{P}_5$ die K-Transformation* (I.3.14).

Wenn für die Werte der Funktionen $\varrho, a, \bar{a}, b, \bar{b}$, die in der K-Transformation (I.3.14) *vorkommen, für die Parameterwerte, die den korrespondierenden Strahlen* (A_1A_2) *und* $({}^1A_1{}^1A_2)$ *entsprechen*

$$\text{a)} \quad \varrho \neq 0 , \quad 0 \neq a \neq \bar{a} \neq 0 , \quad 0 \neq b \neq \bar{b} \neq 0 , \tag{2.7}$$

$$\text{b)} \quad \varrho^2 = \frac{b}{\bar{b}} \neq 0 , \quad 0 \neq a \neq \bar{a} \neq 0 , \quad \text{bzw.} \tag{2.8}$$

$$\varrho^2 = \frac{b}{\bar{b}} = 1 , \quad 0 \neq a \neq \bar{a} \neq 0 ,$$

$$\text{c)} \quad \varrho \neq 0 , \quad 0 \neq a \neq \bar{a} \neq 0 , \quad b = \bar{b} = 0 , \tag{2.9}$$

$$\text{d)} \quad \varrho^2 = \frac{a}{\bar{a}} \neq 0 , \quad 0 \neq b \neq \bar{b} \neq 0 \tag{2.10}$$

gilt, dann

a) *wird der K-Punkt (yz), bzw. $(\overline{y}\overline{z})$, der die Gerade der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche darstellt, in den Punkt $H(yz)$, bzw. $H(\overline{y}\overline{z})$ auf der Verbindungsgeraden des K-Punktes $({}^1A_1{}^1A_2)$ mit dem K-Punkte $({}^1y{}^1z)$, bzw. $({}^1\overline{y}{}^1\overline{z})$ transformiert; der Punkt Hx liegt auf der Verbindungsgeraden der K-Punkte $H(yz)$, $H(\overline{y}\overline{z})$. Die Punkte Hx, ${}^1x$ und die K-Punkte $H(A_1A_2) \equiv ({}^1A_1{}^1A_2)$, $H(yz)$, $H(\overline{y}\overline{z})$, $({}^1y{}^1z)$, $({}^1\overline{y}{}^1\overline{z})$ liegen alle in demselben Raum $\overline{P}_2$. Die Tangenten und die Schmiegräume der Kurven $H[x]$ und $[{}^1x]$ in den Korrespondierenden Punkten fallen nicht zusammen;*

b) *liegt der Punkt Hx auf der Verbindungsgeraden der K-Punkte* $({}^1y{}^1z)$ *und* $({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ *oder fällt er mit dem Punkt* ${}^1x$ *zusammen, wenn* $\pi = {}^1\pi$ *gilt, bzw. wenn* $\pi = -{}^1\pi$ *ist, so fällt er mit dem zu* ${}^1x$ *bezüglich* Γ^+ *harmonischen Punkt (der auf der Tangente im Punkte* ${}^1x$ *zu der Kurve* $[{}^1x]$ *liegt) zusammen;*

c) *wird der K-Punkt* (yz), *bzw.* $(\bar{y}\bar{z})$ *in den Punkt* $({}^1y{}^1z)$, *bzw.* $({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})$ *transformiert. Die erste und die zweite Ecke des Polarschmiegsimplexes der Kurve* $[x]$ *wird in die erste und zweite, bzw. zweite und erste Ecke des Polarschmiegsimplexes der Kurve* $[{}^1x]$ *transformiert, je nach dem ob* $\pi = {}^1\pi$, *bzw.* $\pi = -{}^1\pi$ *gilt. Die Tangenten der Kurven* $H[x]$ *und* $[{}^1x]$ *fallen zusammen, aber die Schmiegräume* $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ *dieser Kurven fallen nicht zusammen.*[37])

d) *gilt noch, ausser der Behauptung in* c), *dass die dritten Ecken des Schmiegsimplexes der Kurven* $H[x]$ *und* $[{}^1x]$ *zusammenfallen, ob* $\pi = {}^1\pi$ *oder* $\pi = -{}^1\pi$ *gilt. Die Kegelschnitte, die K-Bilder der Regelscharen sind, welche die Strahlen* g *und* ${}^1g$ *der Kongruenzen* L *und* ${}^1L$ *enthalten, werden ineinander transformiert.*

Beweis. Alle Behauptungen folgen aus den Gleichungen (I.3.14) der K-Transformation, die der Kollineation (I.3.13) entspricht, aus den Relationen (1.5) und aus den Relationen

$$
\begin{aligned}
(2.11)\qquad Hx &= (.)[\varrho^2({}^1y{}^1z) - \pi\varrho^{-2}({}^1\bar{y}{}^1\bar{z}) + (\varrho b - \varrho^{-1}\bar{b})({}^1A_1{}^1A_2)]\,,\\
{}^1x &= (.)[({}^1y{}^1z) - {}^1\pi({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})]\,,\\
{}^2({}^1N) &= (.)[({}^1y{}^1z) + {}^1\pi({}^1\bar{y}{}^1\bar{z})]\,,\\
H^3N &= (.)[\varrho\bar{a} - \varrho^{-1}a)({}^1A_1{}^1A_2) + (.)^3({}^1N)\,,
\end{aligned}
$$

wobei ${}^i({}^1N)$ die Ecken des Polarschmiegsechseckes der Rückkehrkannte der Torsen ${}^1\bar{L}$ im Punkte ${}^1x \equiv {}^1({}^1N)$ sind.

Analoge Ergebnisse gelten für die Tangentialkollineationen der abwickelbaren Transformationen der anderen Typen der Kongruenzen.

3. Segresche Kongruenzen in projektiver Deformation.

Satz 3.1. *Die Torsen* $\bar{L}$ *und* ${}^1\bar{L}$ *des Raumes* $\bar{P}_5$ *stellen die Segreschen W-Kongruenzen, die projektivbar transformiert werden können, dann und nur dann dar, wenn für die K-Invarianten der in der Korrespondenz* $\bar{T}$ *(diese ist durch die Gleichungen* $(2.1)_{1,2,4,6-9}$ *bestimmt*[38]) *entsprechenden Punkte der Rückkehrkannten, bzw. der Leitkurven dieser Torsen gilt:*

---

[37]) Wenn nur $b = 0$ vorausgesetzt wird, dann wird auch nur der K-Punkt (yz) in den K-Punkt $({}^1y{}^1z)$ transformiert. Analog wenn $\bar{b} = 0$ ist.

[38]) Die abwickelbare Transformation der Typen $I \leftrightarrow III$ und $II \leftrightarrow III$ soll nie eine projektive Deformation sein. Die Differentialgleichung $(2.1)_1$ der Korrespondenz $\bar{T}$ soll für die Kongruenzen der Typen I in der Form $K_j\, \mathrm{d}t = {}^1K_j\, \mathrm{d}^1t$ ($j = 1, 2, 3, 4$, beliebig) geschrieben werden.

$$
\begin{array}{lll}
(3.1) & \mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{I} & K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4 \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \,,^{39)} \\
& \mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{II} & K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = 1 : {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3 \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \,, \\
& \mathrm{II} \longleftrightarrow \mathrm{II} & K_j = {}^1K_j \quad (j = 1, 2, 3) \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \,, \\
& \mathrm{III} \longleftrightarrow \mathrm{III} & k_1 : k_2 : k_3 = {}^1k_1 : {}^1k_2 : {}^1k_3 \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 3, 4, 5, 6) \,, \\
& \mathrm{IV} \longleftrightarrow \mathrm{IV} & K_1 : K_2 : K_3 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3 \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \,, \\
& \mathrm{V} \longleftrightarrow \mathrm{V} & K_1 : K_2 : K = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \,, \\
& \mathrm{VI} \longleftrightarrow \mathrm{VI} & K_1 : K_2 = {}^1K_1 : {}^1K_2 \,, \\
& & \varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \,.
\end{array}
$$

Folgerung. *Jede projektive Deformation der Kongruenzen vom Typ II ist immer trivial.*

Der Beweis ist dem Beweise des Satzes 2.1 analog.

Satz 3.2. *Der Schmiegkollineation* (I.3.20) *der abwickelbaren Transformation T der Kongruenzen des Types I entspricht die K-Transformation* (I.3.21) (*wobei $\varrho^2 = \pm 1$ ist*), *welche die Rückkehrkante $[x]$ der Torse $\bar{L}$ in die Kurve $H[x]$ überführt, die mit der Kurve $[{}^1x]$ den Punkt $Hx \equiv {}^1x$ gemein hat*; *man soll erreichen, dass alle Ecken* (*als arithmetische Punkte*) *der polaren Schmiegsechsecken der Kurven $H[x]$ und $[{}^1x]$ für die untersuchten Punkte zusammenfallen.*

Beweis. Da $|\alpha| = |{}^1\alpha|$, $\pi = {}^1\pi$ und die Relationen (I.2.31) gelten, so folgt aus (1.5), dass man durch eine passende Wahl der Vorzeichen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$, ${}^1\pi_1, {}^1\pi_2, \ldots, {}^1\pi_6, \lambda, {}^1\lambda$ erreichen kann, dass die Ecken (als arithmetische Punkte) des Schmiegsimplexes der Kurve $[x]$ in dem Punkt x mit den Ecken des polaren Schmiegsimplexes der Kurve $[{}^1x]$ in dem korrespondierenden Punkt zusammenfallen.

Analoge Sätze kann man für die Schmiegkollineationen der abwickelbaren Transformationen der anderen Typen der Segreschen Kongruenzen ableiten.

Im Folgenden wollen wir einige Applikationen der vorliegenden Ergebnisse anführen.

---

[39]) Aus diesen Gleichungen folgt wieder, dass die Klasse der Kongruenzen des Types I, die mit einer gegebenen Kongruenz des Types I projektiv deformierbar sind von einer Funktion einer Veränderlichen abhängig ist usw. für die anderen Typen.

Satz 3.3. *Es seien L und ${}^1L$ Kongruenzen vom Typ I, deren Parameter v und ${}^1v$ normale Parameter sind. Die Korrespondenz, in welcher die Strahlen der zu L und ${}^1L$ assoziierten Kongruenz (die dieselben Werte der Parameter besitzen) entsprechen, ist dann und nur dann eine projektive Deformation, wenn für die Projektivdifferentialinvarianten der Kongruenzen L und ${}^1L$*

$$\pi = {}^1\pi\,, \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon\,, \quad H = {}^1H\,, \quad |\alpha| = |{}^1\alpha|\,, \quad |S| = |{}^1S| \tag{3.2}$$

gilt. Soll gleichzeitig die abwickelbare Transformation (I.2.32) *der Kongruenzen L und ${}^1L$ eine projektive Deformation sein, so ist notwendig und hinreichend, dass L und ${}^1L$ (und dadurch auch ihre assoziierten Kongruenzen) projektiv sind.*

Beweis. Die K-Invarianten der Torsen, die die zu L assoziierte Kongruenz darstellt, sind nach (1.7), (1.3) und (1.4):

$$\tilde{K}_1 = 2\left|\frac{H}{K}\right|\sqrt{|H|}\,, \quad \tilde{K}_2 = 4\left|\frac{H}{K}\right|, \quad \tilde{K}_3 = 4\left|\frac{H}{K}\right||\alpha|\,, \tag{3.3}$$
$$\tilde{K}_4 = 4\left|\frac{H}{K}\right||S| \quad \text{und} \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i}\,.$$

Analog werden die K-Invarianten für ${}^1L$ bestimmt. Aus der Bedingung (3.1) bekommen wir gerade (3.2). Aus den Relationen $\pi = {}^1\pi$, $\varepsilon = {}^1\varepsilon$, $H = {}^1H$, $|\alpha| = |{}^1\alpha|$, $K = {}^1K$ (Bemerkung I.3.3) und den Relationen (3.2) folgt die zweite Behauptung.

Analoge Ergebnisse bekommt man für andere Typen der Kongruenzen unter Voraussetzung, dass L und ${}^1L$ von demselben Typ sind, was notwendig ist, damit man die assoziierten Kongruenzen abwickelbar transformieren kann. Die zweite Behauptung in Satz 3.3 gilt sogar schon unter Voraussetzung, dass die beiden Paare der Kongruenzen in einer projektiven Deformation erster Ordnung sind.

Untersuchen wir jetzt die projektive Deformation einer gegebenen Kongruenz und ihrer assoziierten Kongruenz $\tilde{L}$.

Satz 3.4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kongruenz L des Types I projektiv auf ihre assoziierte Kongruenz deformierbar ist, ist, dass die Korrespondenz $\bar{T}$ zwischen dem Parameter t der Rückkehrkantenpunkte der Torsen $\bar{L}$ und dem Parameter u der assoziierten Kongruenz durch die Gleichung*

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \tag{3.4}$$

bestimmt ist und dass für die K-Invarianten

$$K_1 = K_3\,, \quad K_4 = 1\,, \quad \varepsilon_i = -\,\varepsilon_{7-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{3.5}$$

gilt.

Diese Klasse der angegebenen Kongruenzen ist von 2 Funktionen einer Veränderlichen und einem Vorzeichen abhängig und die projektive Deformation artet in eine Projektivität aus.

Beweis. Die Parameter t und u erfüllen die Differentialgleichung (1.6). Sollen die Torsen $\bar{L}$ und $\bar{\bar{L}}$, die die Kongruenzen, welche projektiv deformierbar sind, darstellen, so ist nach $(3.1)_1$ und (1.7) notwend'g und hinreichend, dass

$$K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = K_3 : K_2 : K_1 : 1$$

gilt, d. b. $K_1 = K_3$ und $K_4 = 1$ ist. Aus der Differentialgleichung (1.6) folgt gerade die Differentialgleichung (3.4) der Korrespondenz $\bar{T}$. Die Vorzeichen ε_i und $\tilde{\varepsilon}_i$ müssen entweder die Relationen $\varepsilon_i = \varepsilon_i$ oder $\tilde{\varepsilon}_i = - \tilde{\varepsilon}_i$ erfüllen. In dem ersten Falle folgen nach (1.7) und (1.4) widersprüchliche Relationen $\pi = = \varepsilon \operatorname{sgn} H = \varepsilon \operatorname{sgn} H$, $\varepsilon = -1$; in dem zweiten Fall bekommen wir $\varepsilon = 1$, $\pi = - \operatorname{sgn} H$. Der Relation $\varepsilon = 1$ nach folgt, dass die assoziierte Kongruenz reelle Fokalflächen besitzt, was mit der Behauptung der Bemerkung I.3.2 übereinstimmt.

Die Projektivdifferentialinvarianten der assoziierten Kongruenz drücken die Relationen

$$(3.6) \qquad |\tilde{\alpha}| = \frac{K_3}{K_2}, \quad |\tilde{S}| = \frac{K_4}{K_2}, \quad |\tilde{H}| = \frac{4K_1^2}{K_2^2}, \quad |\tilde{K}| = \frac{16K_1^2}{K_2^3}.$$

aus. Da (3.5) gilt, so folgen durch Vergleichen der Relationen (2.3) und (2.17) die Relationen $|\alpha| = |\tilde{\alpha}|$, $|S| = |\tilde{S}|$, $|H| = |\tilde{H}|$, $|K| = |\tilde{K}|$, sodass die untersuchten Kongruenzen projektiv sind; die Klasse dieser Kongruenzen hängt von den Funktionen K_1, K_2 und dem Vorzeichen π ab.

Bemerkung 3.1. Der vorliegende Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes der Abhandlung [7], S. 23, wobei diejenigen Segreschen Kongruenzen bestimmt werden, deren komplementare Regelscharen, von denen die eine der gegebenen und die andere ihrer assoziierten Kongruenz angehören, projektiv sind.

Drückt man die Bedingungen (3.5) durch die Projektivdifferentialinvarianten aus, unter Voraussetzung, dass die Differentialgleichung der Kongruenz die kanonische Form besitzt (die Systeme (23) und (27) der Abhandlung [7]), so folgt $\varphi = - \pi$, $|S| = |M|$, $|\alpha| = |N|$.

Diese Bedingungen sollen auf verschiedene Weise erfüllt werden, was durch die Orientation beeinflusst wird. Durch eine direkte Ausrechnung, wie in der Abhandlung [7] angegeben ist, folgen für projektive Transformierbarkeit der assoziierten Kongruenzen von verschiedener Orientation die Bedingungen

$$\pi = - \varphi\,, \quad M = S\,, \quad N = \pm\, \varphi\alpha \quad \text{bzw.}$$
$$\pi = - \varphi\,, \quad M = - S\,, \quad N = \pm\, \alpha\,.$$

Für die Kongruenzen der Typen IV—VI sind die analogen Untersuchungen unmöglich, da bei diesen Typen die assoziierten Kongruenzen keine abwickelbare Transformation zulassen. Man sieht leicht, dass man in Satz 3.4 dieselbe Klasse der Kongruenzen enthält, wenn man nur verlangt, dass die assoziierten Kongruenzen in projektiver Deformation erster Ordnung sind. Verlangt man bei den Kongruenzen vom Typ VI, dass die assoziierte Kongruenz der 2. Art[40]) in

[40]) Die Definition sh. [6], S. 610.

projektiver Deformation mit der ursprünglichen Kongruenz sei, so bekommt man eine Klasse, die von einer Funktion einer Veränderlichen und einem Vorzeichen abhängig ist, und die Deformation artet in eine Projektivität aus.

Jetzt werden die Kongruenzen bestimmt, auf welche gewisse andere Kongruenzen und gleichzeitig ihre assoziierten Kongruenzen projektiv deformierbar sind.

Satz 3.5. *Es sei L eine Kongruenz des Typs I. Sollen zu L die Kongruenzen ${}^1L$, welche auf L projektiv deformierbar sind und deren assoziierte Kongruenzen ${}^1\tilde{L}$ auch auf L projektiv deformierbar sind existieren, so ist notwendig und hinreichend, dass*

$$K_1 = K_3\,, \quad \varepsilon_i = -\,\varepsilon_{7-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{3.7}$$

gilt.

Die Klasse der Kongruenzen L hängt von drei Funktionen einer Veränderlichen und einem Vorzeichen ab. Die Klasse der Kongruenzen ${}^1L$ fällt mit der im Satz 3.4. *bestimmten Klasse zusammen.*

Beweis. Aus den Bedingungen, dass ${}^1L$ und ${}^1\tilde{L}$ projektiv auf L transformierbar sind folgt, dass ${}^1L$ und ${}^1\tilde{L}$ projektiv sind, sodass

$$ {}^1K_1 = {}^1K_3\,, \quad {}^1K_4 = 1\,, \quad {}^1\varepsilon_i = -\,{}^1\varepsilon_{7-i} \tag{3.8}$$

gilt; die Kongruenzen ${}^1L$ bilden also die im Satz 3.4 bestimmte Klasse.

Für die K-Invarianten der Kongruenzen L gilt

$$K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_1 : 1\,, \quad \varepsilon_i = \pm\,{}^1\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)\,, \tag{3.9}$$

was aber nur die in einer anderen Weise geschriebene Relation (3.7) ist. Die anderen Behauptungen sind klar.

Ist in Satz 3.5 L vom Typ II, so muss man die Bedingung $K_1 = K_3$ durch $K_2 = 1$ ersetzen. Die Klasse der Kongruenzen vom Typ II, die die angegebene Eingenschaft besitzt, ist von 2 Funktionen einer Veränderlichen und einem Vorzeichen abhängig.

Literatur

[1] *E. Čech*: Transformations développables des congruences des droites, Чехослов. мат. журнал, *6* (*81*), 260—286.

[2] *E. Čech*: Déformation projective des congruences *W*, Чехослов. мат. журнал *6* (*81*), 401—414.

[3] *E. Čech*: Compléments au Mémoire: Déformation projective des congruences *W*, Чехослов. мат. журнал *9* (*84*), 289—296.

[4] *С. П. Фиников*: Теория конгруэнций, Москва, 1950.

[5] *G. Fubini-E. Čech*: Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1926.

[6] *V. Horák*: Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen Raumes und ihre

Applikation auf die Segreschen W-Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes, Чехослов. мат. журнал *9* (*84*), 590—628.

[7] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Publications de la Fac. des Sc. de l'université Masaryk, 1926, No 69, 1—31.

[8] *J. Klapka*: O asymptotické transformaci ploch zborcených a o fleknodálních a komplexových čarách na zborcených plochách čtvrtého stupně, Acta Soc. Sc. naturalium Moravicae, *4*, No 6, 1927,189—225.

Резюме

ПРОЕКТИВНЫЕ ИЗГИБАНИЯ КОНГРУЭНЦИЙ СЕГРЕ W И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПЯТИМЕРНОЕ ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО КЛЕЙНА

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно

В первой части этой работы изучаются проективные изгибания конгруэнций Серге W, т. е. конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями. Данную конгруэнцию мы назовем конгруэнцией Сегре общего вида, если ни сама конгруэнция, ни присоединенная к ней конгруэнция не принадлежат линейному комплексу. Данную конгруэнцию мы обозначим через L, а присоединенную к ней конгруэнцию — через $\tilde{L}$.

Автор исследует шесть типов конгруэнций Сегре:

Тип I: Общая конгруэнция, обладающая общей присоединенной конгруэнцией.

Тип II: Конгруэнция, принадлежащая общему линейному комплексу и обладающая общей присоединенной конгруэнцией.

Тип III: Конгруэнция, принадлежащая специальному линейному комплексу и обладающая общей присоединенной конгруэнцией.

Тип IV: Общая конгруэнция такая, что ее присоединенная конгруэнция принадлежит общему линейному комплексу.

Тип V: Общая конгруэнция такая, что ее присоединенная конгруэнция принадлежит специальному линейному комплексу.

Тип VI: Общая конгруэнция, для которой присоединенная конгруэнция линейна.

Согласно И. Клапка направляющие кривые C_y, C_z, соотв. $C_{\bar{y}}$, $C_{\bar{z}}$, описанные точками y, z, соотв. $\bar{y}, \bar{z}$, фокальных поверхностей конгруэнции L определяются системой дифференциальных уравнений (1.1), где $P, Q, R, S, \alpha, \bar{\alpha}$ — функции параметра v, удовлетворяющего соотношениями $(y, z, y', z') = \omega$, $(\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}') = \bar{\omega}$ ($\omega^2 = \bar{\omega}^2 = 1$, если L не принадлежит типу III, или $\omega^2 = 1$, $\bar{\omega} = 0$, соотв. $\omega = 0$, $\bar{\omega}^2 = 1$, если L принадлежит типу III), а штрихи означают производные по этому параметру. Для различения отдельных типов конгруэнций служат некоторые соотношения для указанных функций; эти соотношения приводятся в вводном параграфе этой работы. Любой луч g конгруэнции L определяется фокусами $A_1 = t_1 y + t_2 z$, $A_2 = t_1 \bar{y} + t_2 \bar{z}$, где t_1, t_2 — произвольные параметры. Порядок, в котором написаны уравнения в системе (1.1), определяет некоторую ориентацию соответственной конгруэнции L. Развертывающиеся поверхности этой конгруэнции определяются дифференциальными уравнениями

$$(1) \qquad t_1 t_2' - t_2 t_1' = \pm (P t_1^2 + 2Q t_1 t_2 + R t_2^2)\,,$$

или в неоднородных параметрах $\left(u = \dfrac{t_2}{t_1}\right)$ уравнениями

$$1') \qquad u' = \pm (P + 2Qu + Ru^2)\,.$$

Пусть ${}^1L$ — ориентированная конгруэнция, которая определяется системой дифференциальных уравнений, получающейся из системы (1.1) путем преобразования

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y, & z, & \bar{y}, & \bar{z}, & P, & Q, & R, & S, & \alpha, & \bar{\alpha}, & \omega, & \bar{\omega}, & t_1, & t_2, & v, & \ldots \\ {}^1y, & {}^1z, & {}^1\bar{y}, & {}^1\bar{z}, & {}^1P, & {}^1Q, & {}^1R, & {}^1S, & {}^1\alpha, & {}^1\bar{\alpha}, & {}^1\omega, & {}^1\bar{\omega}, & \tau_1, & \tau_2, & {}^1v, & \ldots \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнции ${}^1L$ получаются из (1) или (1') тем же преобразованием (2).

Преобразование T: ${}^1v = f(u, v)$, ${}^1u = \varphi(u, v)$ является развертывающимся преобразованием конгруэнций L и ${}^1L$, если переводит развертывающиеся поверхности конгруэнции L в развертывающиеся поверхности конгруэнции ${}^1L$ и, следовательно, дифференциальные уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнции L в дифференциальные уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнции ${}^1L$. Оказывается, что преобразование T конгруэнций Сегре является всегда асимптотическим и не переводит, вообще говоря, прямые асимптотические одной конгруэнции в кривые асимптотические другой конгруэнции. Автор выводит необходимые и достаточные условия для того, чтобы L и ${}^1L$, определенные вообще системами дифференциальных уравнений вида (1.1), были связаны развертывающимся преобразованием. Он показывает, что возможны лишь следующие типы развертывающихся преобразований: $\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{I}$, $\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{II}$, $\mathrm{I} \longleftrightarrow \mathrm{III}$, $\mathrm{II} \longleftrightarrow \mathrm{II}$, $\mathrm{II} \longleftrightarrow \mathrm{III}$, $\mathrm{III} \longleftrightarrow \mathrm{III}$, $\mathrm{IV} \longleftrightarrow \mathrm{IV}$, $\mathrm{V} \longleftrightarrow \mathrm{V}$, $\mathrm{VI} \longleftrightarrow \mathrm{VI}$. При надлежащем выборе арифметических направляющих кривых фокальных поверхностей конгруэнций L и ${}^1L$ можно добиться того, что бы развертывающееся преобразование было дано уравнениями

$$(3) \qquad t_1 = \tau_1,\ t_2 = \tau_2\,, \quad v = {}^1v\,;$$

тогда в системах дифференциальных уравнений, определяющих L и ${}^1L$, обязательно будет

$$P = {}^1P\,, \quad Q = {}^1Q\,, \quad R = {}^1R\,, \tag{4}$$

а функции $\alpha, S, {}^1\alpha, {}^1S$ и знаки $\omega, {}^1\omega, \pi, {}^1\pi$ произвольны. Если изменить ориентацию одной из конгруэнций, то меняется и вид соотношения (4).

Каждое развертывающееся преобразование является проективным асимптотическим изгибанием первого порядка. Была определена степень общности указанных развертывающихся преобразований конгруэнций L и ${}^1L$.

Развертывающиеся преобразования I $\longleftrightarrow$ III и II $\longleftrightarrow$ III никогда не могут быть проективными изгибаниями второго порядка. Для конгруэнции L одного из типов I, II существует в точности одна конгруэнция типа II и класс (зависящий от одной функции одной переменной) конгруэнций типа I, которые связаны проективным изгибанием с конгруэнцией L. Автор находит также общность остальных типов проективного изгибания конгруэнций L и ${}^1L$ и обнаруживает, что проективное изгибание конгруэнций типа II всегда тривиально.

Исследуются свойства касательных и соприкасающихся коллинеаций развертывающегося преобразования конгруэнций L и ${}^1L$; между прочим оказывается, что каждое проективное изгивание конгруэнций Сегре является проективным изгибанием одновременно вдоль всех лучей обоих регулов, которые содержат лучи, соответствующие друг другу в развертывающемся преобразовании.

Автор изучает также дуализацию, как проективное изгибание, и введенные Э. Чехом в работе [1] (см. список литературы) точечные и плоскостные проективные изгибания конгруэнций L и ${}^1L$.

Во второй части этой работы автор опирается на результаты, выведенные им в работе [6]. Каждой конгруэнции Сегре типа I соответствует в пятимерном пространстве Клейна $\overline{P}_5$ некоторая развертывающаяся поверхность, являющаяся развертывающейся поверхностью касательных пространственной кривой, не лежащей в подпространстве пространства $\overline{P}_5$. Выражения K_1, K_2, K_3, K_4 (II.1.3) и знаки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$ (II.1.4) являются проективными K-инвариантами развертывающейся поверхности $\overline{L}$ пространства $\overline{P}_5$, которая в нем представляет данную конгруэнцию L. Если L и ${}^1L$ состоят в развертывающемся преобразовании (в проективном изгибании), то оно определяет некоторое соответствие $\overline{T}$ между точками ребер возраста поверхностей $\overline{L}$ и ${}^1\overline{L}$, причем в соответственных точках имеет место для K-инвариантов соотношение $K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4$, $\varepsilon_i = \pm\, {}^1\varepsilon_i$ ($i = 3, 4, 5, 6$) ($K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4$, $\varepsilon_j = \pm\, {}^1\varepsilon_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 6$)), и наоборот.

Далее автор ищет класс конгруэнций, которые можно развертывающимся преобразованием или проективным изгибанием перевести на их присоединенные конгруэнции. Показано, что в обоих случаях мы получаем тот же самый класс конгруэнций, и развертывающееся преобразование, соотв. проективное изгибание сводится лишь к проективному соответствию, так что мы получаем класс конгруэнций Сегре, который исследовал уже И. Клапка в работе [7]. Определяются классы пар конгруэнций L и ${}^1L$, присоединенные конгруэнции которых $\tilde{L}$ и ${}^1\tilde{L}$ связаны проективным изгибанием, а также другой класс конгруэнций, на которые можно изгибанием перевести иные конгруэнции и одновременно их присоединенные конгруэнции. Изучение этих вопросов проводится также для остальных типов конгруэнций и определяется общность полученных классов конгруэнций с изучаемыми свойствами.