L'APPLICATION DES VARIÉTÉS À CONNEXION À CERTAINS PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 17 juin 1959, après remaniements le 26 janvier 1960)

On étudie des espaces à connexion généraux en appliquant leur théorie à l'étude, du point de vue de la géométrie différentielle, de surfaces à connexion projective dans l'espace à trois dimensions, et à la théorie de systèmes biparamétriques de droites dans l'espace euclidien à n dimensions. Pour l'étude des espaces de König à connexion affine généralisés on introduit un appareil analytique qui se réduit, dans le cas des espaces à connexion affine, au calcul tensoriel classique.

Qu'il me soit permis de remercier M. A. URBAN de son analyse approfondie du manuscrit et de ses nombreuses remarques critiques.

Lors de l'étude, faite du point de vue de la géométrie différentielle, de différentes variétés dans les espaces à connexion, mais aussi dans des espaces sans connexion, on s'aperçoit d'une certaine affinité des méthodes de recherche. Dans ce qui suit, je veux indiquer ces traits caractéristiques communs qui pourront se révéler utiles surtout pour l'étude des espaces à connexion. Dans la première partie, je généralise le calcul tensoriel classique en en obtenant un appareil de calcul propre à l'étude des espaces de König généralisés; la seconde partie est dédiée en principe à l'étude d'une surface plongée dans l'espace à trois dimensions à connexion projective; la troisième partie traite une manière possible de se rendre maître de la théorie de systèmes biparamétriques généraux de droites dans l'espace euclidien à plusieurs dimensions. C'est avec préméditation que je réunis en un seul travail l'étude d'objets qui paraissent avoir une structure toute différente l'un de l'autre, je considère néanmoins comme utile de formuler de la façon la plus générale possible et d'illustrer sur des exemples, ces idées générales que nous suivons — parfois sans nous en rendre compte — lors de nos recherches. Je sais fort bien que le présent article ne contient pas de résultats concrets essentiels concernant les objets étudiés, je fais remarquer cependant à nouveaux qu'il s'agit ici plutôt d'examiner les méthodes d'étude que d'obtenir quelques résultats isolés concernant une classe étroite de variétés.

I. NOTION DE VARIÉTÉ À CONNEXION, CALCUL TENSORIEL GÉNÉRALISÉ

1. Il existe différentes définitions des espaces à connexion et de leurs généralisations. Je ne veux pas m'occuper ici à les introduire et comparer, mais je procède tout de suite à la définition des *variétés* $A^r_{p,n}$ $(0 \leqq p \leqq n;\ 0 < r;\ n, p, r$ entiers) *à connexion affine*. Je soupçonne que l'on n'a pas étudié jusqu'à présent de variétés introduites d'une manière si générale, et que toutes les variétés à connexion considérées dans la littérature (voir p. ex. [7], [9], [10], [11], [19], [20]) dont tous les espaces locaux sont affins, en sont un cas spécial, du moins dans un certain sens. Pour bien rendre tous les détails, il faudrait cependant un autre travail assez volumineux.

Définition de la variété $A^r_{p,n}$: Soit donné un domaine r-dimensionnel Ω_r de paramètres, à chaque point $(\xi) \equiv (\xi^1, \ldots, \xi^r)$ de Ω_r nous associons un espace affin à n dimensions $A_n(\xi)$ (appelé *espace local*) et son sous-espace $A_p(\xi)$ (appelé *centre local*). Soient maintenant $({}^1\xi)$ et $({}^2\xi)$ deux points du domaine Ω_r, alors à chaque arc $\Gamma \subset \Omega_r$ de points terminaux $({}^1\xi)$, $({}^2\xi)$ nous associons l'affinité (non-singulière) $\boldsymbol{A}_\Gamma : A_n({}^1\xi) \to A_n({}^2\xi)$. J'appelle géométrie de la variété $A^r_{p,n}$ l'étude des propriétés de l'objet que je viens de décrire.

Si je me borne au cas où les affinités $\boldsymbol{A}_\Gamma$ n'ont de sens que pour des arcs $\Gamma \subset \Omega_r$ suffisament lisses, et si j'adopte d'autres hypothèses de restriction que je ne veux pas préciser ici, je peux rendre *la connexion de la variété* $A^r_{p,n}$ (c'est-à-dire le système d'affinités $\boldsymbol{A}_\Gamma$) par une formule analytique. Je choisis dans chaque espace local $A_n(\xi)$ un repère $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_n(\xi)\}$ avec la seule condition que $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_p(\xi)\}$ soit repère du centre $A_p(\xi)$; ensuite soient

$$\Gamma^\alpha_a = \Gamma^\alpha_a(\xi)\,, \quad \Gamma^\beta_{a\alpha} = \Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi)\ ^{1)} \tag{1}$$

des fonctions données sur Ω_r. Si l'arc Γ est donné d'une façon paramétrique par les équations

$$\xi^a = \xi^a(t)\,, \quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t\,; \quad \xi^a({}^1t) = {}^1\xi^a\,, \quad \xi^a({}^2t) = {}^2\xi^a\,, \tag{2}$$

formons le système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \Gamma^\alpha_a(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^a}{\mathrm{d}t}\,J_\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}J_\alpha}{\mathrm{d}t} = \Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^a}{\mathrm{d}t}\,J_\beta \tag{3}$$

pour le point $N = N(t)$ et les vecteurs $J_\alpha = J_\alpha(t)$ de l'espace local $A_n({}^1\xi)$. Considérons la solution du système précédent déterminée par les conditions à l'origine

$$N({}^1t) = M\,, \quad J_\alpha({}^1t) = I_\alpha\,, \tag{4}$$

---

[1]) Les indices parcourent les valeurs suivantes:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, n\,; \quad A, B, C, \ldots = 1, \ldots, p\,;$$
$$a, b, c, \ldots = 1, \ldots, r\,; \quad M, N, P, \ldots = p + 1, \ldots, n\,.$$

$\{M, I_\alpha\}$ étant la base de l'espace $A_n({}^1\xi)$ choisie d'avance. L'affinité $\boldsymbol{A}_\Gamma : A_n({}^2\xi) \rightarrow$ $\rightarrow A_n({}^1\xi)$ sera alors déterminée par les relations

$$\text{(5)} \qquad \boldsymbol{A}_\Gamma\, M({}^2\xi) = N({}^2t)\,, \quad \boldsymbol{A}_\Gamma\, I_\alpha({}^2\xi) = J_\alpha({}^2t)$$

où $\{M({}^2\xi), I_\alpha({}^2\xi)\}$ est la base de l'espace local $A_n({}^2\xi)$ choisie d'avance.

On a l'habitude de dire que la variété $A^r_{p,n}$ est donnée par le système d'équations

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{d}M = \omega^\alpha I_\alpha\,, \quad \mathrm{d}I_\alpha = \omega^\beta_\alpha I_\beta$$

où

$$\omega^\alpha = \Gamma^\alpha_a\, \mathrm{d}\xi^a\,, \quad \omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{a\alpha}\, \mathrm{d}\xi^a\,;$$

il faut entendre par cela qu'il est donné la règle précitée de construction des affinités $\boldsymbol{A}_\Gamma$. J'appelle *objet de connexion* l'ensemble des fonctions Γ^α_a, $\Gamma^\beta_{a\alpha}$.

2. Soit donné un arc $\Gamma \subset \Omega_r$ par les équations (2), ensuite soit donné dans l'espace local $A_n(\xi(t))$ de chaque point de l'arc Γ un ensemble de points $\mathfrak{S}(t)$. Soit Γ_τ le segment de l'arc Γ situé entre les points $({}^1\xi)$ et $(\xi(\tau))$, donc où l'on a ${}^1t \leqq t \leqq \tau$; on peut évidemment parler de l'affinité $\boldsymbol{A}_\tau : A_n(\xi(\tau)) \rightarrow A_n({}^1\xi)$, associée à l'arc Γ_τ. Par le *développement* du champ des ensembles $\mathfrak{S}(t)$ le long de l'arc Γ dans l'espace local $A_n({}^1\xi)$ j'entends le système monoparamétrique des ensembles $\mathfrak{S}'(\tau) = \boldsymbol{A}_\tau\, \mathfrak{S}(\tau)$, ${}^1t \leqq \tau \leqq {}^2t$, de cet espace. Il est clair que je peux développer d'une façon évidente le champ des ensembles $\mathfrak{S}(t)$ dans l'espace local $A_n(\xi(t))$ où $\xi(t)$ est un point arbitraire de l'arc Γ; or si j'ai deux de tels développements $\mathfrak{S}'(\tau)$, $\mathfrak{S}''(\tau)$ dans deux espaces locaux $A_n(\xi(t'))$, $A_n(\xi(t''))$, ${}^1t \leqq t' \leqq$ $\leqq t'' \leqq {}^2t$, et si je désigne par Λ la partie de l'arc Γ comprise entre les points $\xi(t')$ et $\xi(t'')$ (donc $t' \leqq t \leqq t''$), et par $\boldsymbol{A}_\Lambda : A_n(\xi(t'')) \rightarrow A_n(\xi(t'))$ l'affinité associée à Λ, je dois avoir nécessairement $\boldsymbol{A}_\Lambda\, \mathfrak{S}''(\tau) = \mathfrak{S}'(\tau)$, ${}^1t \leqq \tau \leqq {}^2t$.

Dans la littérature courante on n'envisage pratiquement que le cas où les ensembles $\mathfrak{S}(t)$ coïncident avec les centres $A_p(\xi(t))$. Or, on suppose par principe des centres ponctuels ($p = 0$), dans ce cas-là il est convenable d'identifier l'ensemble des centres avec le domaine des paramètres Ω_r, et de parler, pour $\mathfrak{S}(t) = A_0(\xi(t))$, du développement des courbes particulières de la variété $A^r_{0,n}$. Mais il est faux de dire que la théorie de la variété $A^r_{0,n}$ est idéntique à l'étude des développements de ses courbes particulières, car, en un certain point (ξ) donné, il faut étudier à la fois le système des développements de toutes les courbes qui passent par ce point.

3. Je vais donner la réponse au premier problème fondamental de la théorie des variétés $A^r_{p,n}$. Supposons que dans Ω_r les paramètres soient transformés conformément aux équations

$$\text{(7)} \qquad \xi^a = \xi^a(\xi^{a'})\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \xi^{a'} = \xi^{a'}(\xi^a)\,, \quad \det |A^a_{a'}| \neq 0\,,$$

où j'adopte le système de notation habituel

$$\partial_a = \partial / \partial \xi^a \ , \quad A^a_{a'} = \partial_{a'} \xi^a \ , \quad A^{a'}_a = \partial_a \xi^{a'} \ , \tag{8}$$

les repères locaux étant transformés d'après les équations

$$M = M' + \varrho^{\alpha'} I_{\alpha'} \ (\varrho^{M'} = 0) \ , \quad I_\alpha = \sigma^{\alpha'}_\alpha I_{\alpha'} \ (\sigma^{M'}_A = 0) \ , \quad \det |\sigma^{\alpha'}_\alpha| \neq 0 \ . \text{[2]} \tag{9}$$

Introduisons encore les grandeurs $\sigma^\alpha_{\alpha'}$ par les équations

$$\sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \tag{10}$$

de sorte que $I_{\alpha'} = \sigma^\alpha_{\alpha'} I_\alpha$; par différentiation (10) donne

$$\partial_a \sigma^{\alpha'}_\alpha = - \sigma^{\alpha'}_\beta \sigma^{\beta'}_\alpha \partial_a \sigma^\beta_{\beta'} \ , \quad \partial_a \sigma^\alpha_{\alpha'} = - \sigma^\alpha_{\beta'} \sigma^\beta_{\alpha'} \partial_a \sigma^{\beta'}_\beta \ . \tag{11}$$

Je demande maintenant comment il faut choisir, pour les nouveaux paramètres et les nouvelles bases locales, l'objet de connexion, pour que la géométrie de la variété considérée ne change pas. En vertu des équations (6) et des équations analogues

$$\mathrm{d}M' = \Gamma^{\alpha'}_{a'} \mathrm{d}\xi^{a'} I_{\alpha'} \ , \quad \mathrm{d}I_{\alpha'} = \Gamma^{\beta'}_{a'\alpha'} \mathrm{d}\xi^{a'} I_{\beta'} \ , \tag{6'}$$

qui se correspondent par les transformations (7), (9), on peut trouver les équations de transformation de l'objet de connexion:

$$\Gamma^{\alpha'}_{a'\beta'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{\beta'} A^a_{a'} \Gamma^\alpha_{a\beta} - \sigma^\alpha_{\beta'} \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_\alpha \ , \tag{12}$$

$$\Gamma^{\alpha'}_{a'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha A^a_{a'} \Gamma^\alpha_a - \partial_{a'} \varrho^{\alpha'} - \varrho^{A'} \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{A'} A^a_{a'} \Gamma^\alpha_{a\beta} + \varrho^{A'} \sigma^\alpha_{A'} \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_\alpha \ . \tag{13}$$

Vu le caractère bien compliqué des équations précédentes il paraît très peu probable qu'il soit possible de définir pour les variétés $A^r_{p,n}$ des objets, qui représentent une généralisation des tenseurs de torsion et de courbure, connus de la théorie des espaces à connexion affine; or, dans ce qui va suivre, nous montrerons une construction naturelle de tel objets. Considérons les systèmes de fonctions

$$S^\alpha_{ab} = 2\partial_{[b}\Gamma^\alpha_{a]} - 2\Gamma^\beta_{[b}\Gamma^\alpha_{a]\beta} \ , \tag{14}$$

$$R^\alpha_{ab\beta} = 2\partial_{[a}\Gamma^\alpha_{b]\beta} + 2\Gamma^\alpha_{[a|\gamma|}\Gamma^\gamma_{b]\beta} \ , \tag{15}$$

le système des fonctions S^α_{ab}, soit $R^\alpha_{ab\beta}$, soit appelé *objet de torsion*, soit respectivement *tenseur de courbure*. Par un calcul direct on trouve les lois de transformation sous la forme

$$S^{\alpha'}_{a'b'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha A^a_{a'} A^b_{b'} S^\alpha_{ab} - \varrho^{A'} \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{A'} A^a_{a'} A^b_{b'} R^\alpha_{ab\beta} \ , \tag{16}$$

$$R^{\alpha'}_{a'b'\beta'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{\beta'} A^a_{a'} A^b_{b'} R^\alpha_{ab\beta} \ . \tag{17}$$

L'annulement du tenseur de courbure ou encore l'annulement simultané du tenseur de courbure et de l'objet de torsion, ont donc une signification géo-

---

[2]) En ce qui concerne les indices affectés d'accents, j'adopte avec conséquence le système de notation employé p. ex. par M. J. A. Schouten dans *Ricci-Calculus*.

métrique; pour $p = 0$ c'en est le cas aussi de l'annulement du seul objet de torsion. La signification géométrique en question découle immédiatement des équations

$$[\mathrm{d}\omega^\alpha] = [\omega^\beta \omega_\beta^\alpha] - \tfrac{1}{2} S_{ab}^\alpha [\mathrm{d}\xi^a\, \mathrm{d}\xi^b]\,, \tag{18}$$

$$[\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta] = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta] + \tfrac{1}{2} R_{ab\alpha}^\beta [\mathrm{d}\xi^a\, \mathrm{d}\xi^b]\,, \tag{19}$$

si je tiens compte du fait que les équations

$$[\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta] = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]$$

ou respectivement

$$[\mathrm{d}\omega^\alpha] = [\omega^\beta \omega_\beta^\alpha]\,, \quad [\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta] = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]$$

représentent les conditions d'intégrabilité du système $\mathrm{d}I_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta$ ou du système (6) respectivement. *Les équations*

$$S_{ab}^\alpha = R_{ab\alpha}^\beta = 0 \tag{20}$$

sont condition nécessaire et suffisante, pour que la variété considérée $A_{p,n}^r$ soit un système à r paramètres de sous-espaces à p dimensions d'un certain espace affin à n dimensions. La signification des conditions

$$R_{ab\alpha}^\beta = 0 \tag{21}$$

n'est qu'un peu plus compliquée. Tout espace local $A_n(\xi)$ engendre un espace vectoriel $\mathscr{A}_n(\xi)$, les affinités $\boldsymbol{A}_\Gamma$ (qui déterminent la connexion de la variété) induisent une transformation linéaire de ces espaces vectoriels locaux. *L'équation* (21), *c'est la condition nécessaire et suffisante, pour que la transformation linéaire des espaces locaux $\mathscr{A}_n({}^1\xi)$, $\mathscr{A}_n({}^2\xi)$ soit indépendante de l'arc Γ qui joint les points* $({}^1\xi)$, $({}^2\xi)$.

4. La forme des équations (17) nous conduit automatiquement à une définition générale de tenseur, convenable pour nos buts. Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de définir la notion de tenseur sur la variété à connexion, $A_{p,n}^r$, mais qu'il est possible de ce contenter de la variété $AV_{p,n}^r$, définie comme suit (il s'agit en principe de la variété $A_{p,n}^r$ dépourvue de connexion): Soit donné un domaine r-dimensionnel Ω_r de paramètres, à chaque point $(\xi) \equiv (\xi^1, \ldots, \xi^r)$ de Ω_r soit associé un espace affin à n dimensions $A_n(\xi)$ (appelé espace local) et son sous-espace $A_p(\xi)$ (appelé centre). Supposons que nous ayons choisi dans chaque espace local une base, de la manière décrite pour les variétés $A_{p,n}^r$. J'appelle alors *tenseur* $(p/q;\, u/v)$ l'ensemble des fonctions $T_{\beta_1 \ldots \beta_q,\, b_1 \ldots b_v}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p,\, a_1 \ldots a_u}$ qui se transforment, aux changements de paramètres (7) et de bases locales (9), suivant les équations

$$T_{\beta_1' \ldots \beta_q',\, b_1' \ldots b_v'}^{\alpha_1' \ldots \alpha_p',\, a_1' \ldots a_u'} = \sigma_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \ldots \sigma_{\alpha_p}^{\alpha_p'} \sigma_{\beta_1'}^{\beta_1} \ldots \sigma_{\beta_q'}^{\beta_q} A_{a_1}^{a_1'} \ldots \\ \ldots A_{a_u}^{a_u'} A_{b_1'}^{b_1} \ldots A_{b_v'}^{b_v} T_{\beta_1 \ldots \beta_q,\, b_1 \ldots b_v}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p,\, a_1 \ldots a_u}\,. \tag{22}$$

On voit des équations (17) que $R_{ab\beta}^\alpha$ *est un tenseur* (0/1; 0/2).

Simplifions les notations: j'écrirai tenseur (p/q) au lieu de tenseur $(p/q;\,0/0)$, un tenseur $(1/0)$, ou bien $(0/1)$ sera appelé *vecteur contravariant*, ou *covariant* respectivement.

Je ne vais pas m'occuper de l'algèbre tensorielle des tenseurs $(p/q;\,u/v)$, car le Lecteur trouvera lui-même facilement les généralisations correspondantes de la théorie algébrique de tenseurs au sens classique. Mais on peut étendre également l'analyse tensorielle du cas classique au cas considéré. A savoir, on peut définir *la dérivée covariante* d'un tenseur (p/q) par la formule suivante

$$\nabla_a T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \partial_a T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\alpha_i}_{a\alpha} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha\,\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} - \sum_{i=1}^{q} \Gamma^{\beta}_{a\beta_i} T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_{i-1}\beta\,\beta_{i+1}\ldots\beta_q}\,; \tag{23}$$

un calcul direct fait voir que $\nabla_a T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ *est un tenseur* $(p/q;\,0/1)$; le tenseur (p/q)

$$\delta T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \nabla_a T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\,\mathrm{d}\xi^a \tag{24}$$

s'appelle *différentielle covariante du tenseur* (p/q) $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$.

La notion de dérivée covariante peut être réduite d'une manière usuelle à la notion de dérivée covariante d'un vecteur contravariant; citons (en partie pour des raisons pédagogiques) la signification géométrique de la différentielle covariante δv^α et par cela aussi de la dérivée covariante $\nabla_a v^\alpha$ du vecteur v^α. Soit donnée une variété $A^r_{p,n}$ par ses équations fondamentales (6), soit v^α un vecteur contravariant donné sur elle. Dans chaque espace local $A_n(\xi)$ de la variété considérée choisissons deux points $P(\xi)$, $Q(\xi)$, tels que

$$Q(\xi) = P(\xi) + v^\alpha(\xi)\,I_\alpha(\xi)\,. \tag{25}$$

Alors, nous obtenons l'équation formelle

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}P + \nabla_a v^\alpha\,\mathrm{d}\xi^a\,.\,I_\alpha = \mathrm{d}P + \delta v^\alpha\,.\,I_\alpha \tag{26}$$

dont l'explication est la suivante: Fixons un espace local $A_n({}^0\xi)$, un nombre a, $1 \leqq a \leqq r$, considérons ensuite l'arc

$$\xi^c = {}^0\xi^c \quad \text{pour} \quad c \neq a\,, \quad \xi^a = t\,, \tag{27}$$

$$t \in ({}^0\xi^a - \varepsilon,\, {}^0\xi^a + \varepsilon)\,, \quad 0 < \varepsilon \quad \text{arbitraire, suffisamment petit}\,.$$

En développant les courbes $Q(\xi(t))$, $P(\xi(t))$ dans l'espace local $A_n({}^0\xi)$ j'obtiens deux courbes $\overline{Q}(t)$, $\overline{P}(t)$ relativement au même paramètre t. Soit ${}^Q w^\alpha$, resp. ${}^P w^\alpha$, le vecteur tangent à la courbe $\overline{Q}(t)$, resp. $\overline{P}(t)$, au point $\overline{Q}({}^0\xi^a)$, ou $\overline{P}({}^0\xi^a)$ resp., c'est-à-dire

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overline{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\xi)=({}^0\xi)} = {}^Q w^\alpha I_\alpha\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\overline{P}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\xi)=({}^0\xi)} = {}^P w^\alpha I_\alpha\,,$$

alors

$${}^Q w^\alpha - {}^P w^\alpha = (\nabla_a v^\alpha)_{(\xi)=({}^0\xi)}\,. \tag{28}$$

5. Montrons maintenant que *la théorie précédente représente une généralisation effective de la théorie classique des espaces à connexion affinne.* Soit donnée une variété n-dimensionnelle de paramètres Ω_n, à chaque point $(\xi) \in \Omega_n$ soit associé un espace local centro-affin $A_n(\xi)$ à centre ponctuel $M(\xi)$. Choisissons les bases locales $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_n(\xi)\}$ des espaces locaux. Dans Ω_n soit donné un arc paramétrisé (2), j'appelle vecteur tangent à cet arc au point $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t)$ le vecteur

$$I = \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} I_\alpha \tag{29}$$

de l'espace local $A_n(\xi(t))$. J'adopte la suivante convention importante qui lie les transformations des parametres dans Ω_n au choix des bases locales dans les espaces locaux: Avec chaque transformation de paramètres (7) je fais simultanément un changement des bases locales suivant les équations

$$I_\alpha = A_\alpha^{\alpha'} I_{\alpha'}\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad I_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} I_\alpha\,. \tag{30}$$

En vertu de cette convention la notion de vecteur tangent à une courbe paramétrisée a une signification géométrique, ce qui découle des identités

$$I = \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} I_\alpha = A_{\alpha'}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\xi^{\alpha'}}{\mathrm{d}t} I_\alpha = \frac{\mathrm{d}\xi^{\alpha'}}{\mathrm{d}t} I_{\alpha'} = I'\,.$$

Supposons à présent que nous ayons un espace à connexion affine $A_{0,n}^n$ et admettons les hypothèses suivantes:

1° lors de chaque transformation de paramètres (7) les bases locales changent suivant les équations (30), c'est-à-dire suivant les équations (9) où

$$\varrho^A = 0\,, \quad \sigma_\alpha^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'}\,, \quad \sigma_{\alpha'}^{\alpha} = A_{\alpha'}^{\alpha}\,; \tag{31}$$

2° en développant un arc paramétrisé Γ arbitraire (pris au sens expliqué ci-dessus) dans l'espace local $A_n({}^0\xi)$ correspondant à un point $({}^0\xi)$ arbitraire de la variété $A_{0,n}^n$, $({}^0\xi) \in \Gamma$, nous obtenons un arc paramétrisé $\Gamma' \subset A_n({}^0\xi)$; supposons que les vecteurs tangents aux arcs paramétrisés Γ et Γ' coïncident. Les vecteurs tangents à Γ, ou Γ' sont donnés, en vertu de (6) ou (29) respectivement, par

$$I = \delta_\beta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi^\beta}{\mathrm{d}t} I_\alpha\,, \quad \text{ou resp.} \quad I' = \Gamma_\beta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi^\beta}{\mathrm{d}t} I_\alpha$$

de sorte que la dernière hypothèse est équivalente à la condition

$$\Gamma_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha\,. \tag{32}$$

En substituant (31) dans (12) on obtient après simplifications

$$\Gamma_{\gamma'\beta'}^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^{\beta} A_{\gamma'}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - A_\alpha^{\alpha'}\, \partial_{\beta'} A_{\gamma'}^{\alpha}\,, \tag{33}$$

ce qui est l'équation bien connue pour la transformation des composantes de connexion; l'équation (13) se réduit alors à $\delta_{\beta'}^{\alpha'} = \delta_{\beta'}^{\alpha'}$. Le tenseur $R_{ab\beta}^{\alpha}$ est le tenseur de courbure bien connu, et l'objet S^{α}_{ab} se réduit au tenseur de torsion $S^{\alpha}_{\beta\gamma} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$.

6. Soit donné, sur $A^{r}_{p,n}$, un tenseur (0/2) symétrique défini positif $g_{\alpha\beta}$. Chaque espace local $A_n(\xi)$ devient aussi espace euclidien $E_n(\xi)$ si je définis le produit scalaire des vecteurs $I = u^{\alpha}I_{\alpha}$, $I' = v^{\alpha}I_{\alpha}$ par la formule $(I, I') = g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}$. Je dirai que *la connexion de la variété $A^{r}_{p,n}$ est euclidienne* (et je désignerai la variété par $E^{r}_{p,n}$) si le produit scalaire ne change pas par translation, c'est-à-dire si

$$\nabla_a g_{\alpha\beta} \equiv \partial_a g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}_{a\alpha} g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{a\beta} g_{\alpha\nu} = 0 . \tag{34}$$

Formons le tenseur

$$R_{ab\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} R^{\alpha}_{ab\beta} . \tag{35}$$

Si $E^{r}_{p,n}$ est un espace V_n de Riemann (c'est-à-dire si $p = 0$, $r = n$, $S^{\alpha}_{ab} = 0$), les indices $a, \ldots, \alpha, \ldots$ prennent les valeurs $1, \ldots, n$ et le tenseur (35) vérifie les identités fondamentales bien connues

$$R_{(ab)\alpha\beta} = R_{[ab\alpha]\beta} = R_{ab(\alpha\beta)} = R_{ab\alpha\beta} - R_{\alpha\beta ab} = 0 .$$

Dans le cas où $r \neq n$, la seconde et la dernière des identités perdent leur sens, on peut néanmoins démontrer les autres:

$$R_{(ab)\alpha\beta} = R_{ab(\alpha\beta)} = 0 . \tag{36}$$

La première identité découle directement de la définition du tenseur de courbure. A partir de (34) j'obtiens

$$\partial_a \partial_b g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta} \partial_b \Gamma^{\nu}_{a\alpha} + g_{\alpha\nu} \partial_b \Gamma^{\nu}_{a\beta} + g_{\omega\beta} \Gamma^{\nu}_{a\alpha} \Gamma^{\omega}_{b\nu} + \\ + g_{\nu\omega} \Gamma^{\nu}_{a\alpha} \Gamma^{\omega}_{b\beta} + g_{\omega\nu} \Gamma^{\nu}_{a\beta} \Gamma^{\omega}_{b\alpha} + g_{\alpha\omega} \Gamma^{\nu}_{a\beta} \Gamma^{\omega}_{b\nu} ,$$

en échangeant a et b aux deux membres j'obtiens une autre équation et en la soustrayant de la précédente je trouve (36).

A l'aide du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ on peut construire le tenseur (2/0) $g^{\alpha\beta}$ défini par les équations

$$g^{\gamma\alpha} g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} ; \tag{37}$$

les tenseurs $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ servent alors à élever ou abaisser les indices (prenant les valeurs $1, \ldots, n$) de n'importe quel tenseur, de la manière usuelle au calcul tensoriel classique et dont on a déjà profité à la définition (35) du tensor $R_{ab\alpha\beta}$. La différentiation covariante de (37) donne après des modifications faciles

$$\nabla_a g^{\alpha\beta} = 0 . \tag{38}$$

7. Dans ce paragraphe, nous allons considérer seulement des variétés $E^{r}_{0,n}$ dont les centres sont ponctuels; nous allons définir et déduire les équations fondamentales des *vecteurs de Killing.*

Soit donc donnée une variété $E^{r}_{0,n}$ (désignons-la par $\mathfrak{W}_0$) par ses équations fondamentales (6), soit v^{α} un vecteur sur elle. A l'aide du vecteur v^{α}, je vais former de $\mathfrak{W}_0$ tout une série de variétés $\mathfrak{W}_t$, $-\infty < t < \infty$, du même type. Le domaine de paramètres, les espaces locaux et les affinités entre eux qui déterminent la connexion seront les mêmes pour $\mathfrak{W}_0$ comme pour $\mathfrak{W}_t$; la variété $\mathfrak{W}_t$ aura pour centre dans l'espace local $A_n(\xi)$ le point ${}^tP = M + tv^\alpha I_\alpha$. Il est tout à fait clair qu'à chaque arc sur $\mathfrak{W}_0$ il correspond un certain arc sur chaque variété $\mathfrak{W}_t$. On trouve aisément que la variété $\mathfrak{W}_t$ est donnée par les équations

$$\text{(39)} \qquad \mathrm{d}^tP = (\Gamma^\alpha_a + t\nabla_a v^\alpha)\,\mathrm{d}\xi^a\,I_\alpha\,, \quad \mathrm{d}I_\alpha = \Gamma^\beta_{a\alpha}\,\mathrm{d}\xi^a\,I_\beta\,.$$

On voit immédiatement que l'on a pour la différentielle d^ts de l'arc de courbe sur $\mathfrak{W}_t$

$$\text{(40)} \qquad \begin{aligned}(\mathrm{d}^ts)^2 &= (\mathrm{d}^tP, \mathrm{d}^tP) = g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_a\Gamma^\beta_b\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b + \\ &+ tg_{\alpha\beta}\,(\Gamma^\alpha_a\nabla_b v^\beta + \Gamma^\beta_b\nabla_a v^\alpha)\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b + t^2 g_{\alpha\beta}\nabla_a v^\alpha\,\nabla_b v^\beta\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b\,.\end{aligned}$$

La différentiation covariante de l'équation $v^\alpha = g^{\alpha\beta}v_\beta$ donne en vertu de (38) l'égalité $\nabla_a v^\alpha = g^{\alpha\beta}\nabla_a v_\beta$, de sorte que

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_a\nabla_b v^\beta + \Gamma^\beta_b\nabla_a v^\alpha &= g_{\alpha\beta}(g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_a\nabla_b v_\gamma + g^{\alpha\gamma}\Gamma^\beta_b\nabla_a v_\gamma) = \\ &= \Gamma^\alpha_a\nabla_b v_\alpha + \Gamma^\beta_b\nabla_a v_\beta = 2\Gamma^\alpha_{(a}\nabla_{b)}v^\alpha\,.\end{aligned}$$

L'équation (40) prend ainsi sa forme définitive

$$\text{(41)} \qquad (\mathrm{d}^ts)^2 = (\mathrm{d}^0s)^2 + 2t\Gamma^\alpha_{(a}\nabla_{b)}v_\alpha\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b + t^2 g_{\alpha\beta}\nabla_a v^\alpha\nabla_b v^\beta\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b\,.$$

Soit $\Gamma = {}^0\Gamma$ un arc sur $\mathfrak{W}_0$ et ${}^t\Gamma$ l'arc sur $\mathfrak{W}_t$ qui lui correspond. Le vecteur v^α tel que (pour chaque arc Γ) l'arc ${}^0\Gamma$ est de longeur extrémale parmi tous le arcs ${}^t\Gamma$ est appelé vecteur de Killing; *la condition nécessaire et suffisante pour que v^α soit un vecteur de Killing est que*

$$\text{(42)} \qquad \Gamma^\alpha_{(a}\nabla_{b)}v_\alpha = 0\,.$$

Dans le cas où la variété considérée $\mathfrak{W}_0$ est un espace de Riemann V_n, on a (32) et (42) se réduit à l'équation connue

$$\text{(43)} \qquad \nabla_{(a}v_{b)} = 0\,.$$

Le procédé de former des variétés à partir d'une certaine variété $A^r_{p,n}$ donnée, mentionné ci-dessus, sera encore envisagé en détail dans ce qui suit.

II. VARIÉTÉS A CONNEXION PROJECTIVE

8. D'une manière analogue à celle des variétés à connexion affine ou euclidien, on peut définir aussi des *variétés à connexion projective $P^r_{p,n}$*. Citons brièvement leur définition: A chaque point (ξ) d'une variété r-dimensionnelle Ω_r de paramètres soit associé un espace local $P_n(\xi)$ avec un sous-espace (centre) $P_p(\xi)$; à chaque arc $\Gamma \subset \Omega_r$ qui joint deux points $({}^1\xi)$ et $({}^2\xi)$ on associe une projectivité $\boldsymbol{P}_\Gamma : P_n({}^1\xi) \to P_n({}^2\xi)$. D'une manière analytique, on peut déterminer la connexion de la variété $P^r_{p,n}$ en choisissant dans chaque espace local $P_n(\xi)$ une base locale $\{A_0(\xi), \ldots, A_n(\xi)\}$ telle que $\{A_0(\xi), \ldots, A_p(\xi)\}$ soit base du centre $P_p(\xi)$; ensuite on donne un système d'équations formelles[3])

$$\text{(44)} \qquad \mathrm{d}A_i = \omega^j_i A_j\,; \quad \omega^j_i = \Pi^j_{ia}(\xi)\,\mathrm{d}\xi^a\,, \quad \det|\omega^j_i| \neq 0\,.$$

[3]) Pour les indices j'accepte une nouvelle convention: $i, j, \ldots = 0, \ldots, n$.

Supposons que l'arc Γ soit (2), prenons le système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t} = \Pi^j_{ia}(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^a}{\mathrm{d}t}\,B_j \tag{45}$$

et cherchons la solution $B_i = B_i(t)$ située dans $P_n({}^1\xi)$ et déterminée par les conditions à l'origine $B_i({}^1t) = A_i({}^1\xi)$. L'homographie $\boldsymbol{P}_\Gamma$ sera alors donnée par les relations $\boldsymbol{P}_\Gamma\; B_i({}^2t) = A_i({}^2\xi)$. Il serait superflu d'expliquer encore une fois la notion de développement d'un système $\mathfrak{S}(t)$ d'ensembles dans un espace local.

Je passe à présent à certaines notions et remarques fondamentales qui joueront un rôle principal dans nos considérations. Une variété $P^r_{p,n}$ fait naître beaucoup d'autres variétés du même type. Les plus importants sont les deux types de construction suivants (qu'on peut, bien entendue, combiner entre eux):

I. Soit Ω_{r*} un espace r^*-dimensionnel de paramètres ($r^* \leqq r$), à chaque point $(\eta) \in \Omega_{r*}$ soit associé un certain point $(\xi) \in \Omega_r$ par les équations

$$\xi^a = \xi^a(\eta^{a^*})\;,\;[4] \tag{46}$$

dans chaque espace local $P_n(\xi(\eta))$ soit fixé un sous-espace $P^*_{p*}(\eta)$ à p^* dimensions. La variété $P^{r*}_{p*,n}$ à construir a Ω_{r*} pour son domaine paramétrique et les espaces locaux $P_n(\eta)$ aux centres $P^*_{p*}(\eta)$; l'homographie $\boldsymbol{P}^*_{\Gamma*}$ entre les espaces locaux $P_n({}^1\eta)$, $P_n({}^2\eta)$ (leur ensemble détermine la connexion de la variété $P^{r*}_{p*,n}$) déterminée par l'arc

$$\eta^{a^*} = \eta^{a^*}(t)\;;\quad \eta^{a^*}({}^1t) = {}^1\eta^{a^*}\;,\quad \eta^{a^*}({}^2t) = {}^2\eta^{a^*}\;;\quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t \tag{47}$$

est $\boldsymbol{P}_\Gamma : P_n({}^1\xi) \to P_n({}^2\xi)$ où $({}^1\xi) = ({}^1\xi({}^1\eta))$, $({}^2\xi) = ({}^2\xi({}^2\eta))$ et $\Gamma \subset \Omega_r$ a les équations $\xi^a = \xi^a(\eta^{a^*}(t))$, ${}^1t \leqq t \leqq {}^2t$.

La définition exacte précédente peut être exprimée d'une façon intuitive comme suit: Je choisis dans la variété Ω_r des paramètres de la variété originale $P^r_{p,n}$ une certaine sous-variété Ω_{r*} et je considère seulement l'ensemble des espaces locaux de la variété $P^r_{p,n}$ qui correspondent aux points de Ω_{r*}. Dans ces espaces locaux, je change arbitrairement les centres, mais les homographies entre eux, qui déterminent la connexion de la nouvelle variété, restent les mêmes. Le transfer se fait, bien entendu, le long des courbes en Ω_{r*} seulement, or elles se trouvent forcément dans Ω_r aussi.

Si je change les bases locales de telle façon que la nouvelle base de l'espace local $P_n(\eta)$ de la variété $P^{r*}_{p*,n}$ soit $\{B_0(\eta), \ldots, B_n(\eta)\}$ et la base du centre correspondant $P^*_{p*}(\eta)$ soit $\{B_0(\eta), \ldots, B_{p*}(\eta)\}$ de sorte que

$$B_i = \alpha^j_i A_j\;,\quad A_i = \tilde{\alpha}^j_i B_j\;;\quad \alpha^j_i \tilde{\alpha}^k_j = \delta^k_i\;,\quad \det|\alpha^j_i| \neq 0 \tag{48}$$

et si la connexion de la variété $P^r_{p,n}$ est déterminée par les équations (44), il est possible de trouver, par un calcul direct, que la connexion de la variété $P^{r*}_{p*,n}$ est déterminée par les équations

[4]) Les indices $a^*, b^*, \ldots = 1, \ldots, r^*$.

$$(49) \qquad \mathrm{d}B_i = (\alpha_i^k \tilde{\alpha}_l^j \Pi_{ka}^l C_{a^*}^a \,\mathrm{d}\eta^{a^*} - \alpha_i^k \,\mathrm{d}\tilde{\alpha}_k^j)\, B_k \quad \text{où} \quad C_{a^*}^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \eta^{a^*}}.$$

Si les nouveaux centres $P_{p^*}^*$ coïncident avec les centres originaux P_p, nous disons que $P_{p^*,n}^{r*}$ est *plongée* dans $P_{p,n}^r$; si $P_{p^*}^* \subset P_p$, nous disons qu'elle est *faiblement plongée.*

II. J'entends par *dualisation* $P_{p,n}^r{}^*$ d'une variété $P_{p,n}^r$ une variété du type $P_{n-p-1,n}^r$, dont le domaine de paramètres est identique à celui de la variété $P_{p,n}^r$ et dont les espaces locaux $\Pi_n^*(\xi) \equiv P_n^*(\xi)$ et les centres $\Pi_{n-p-1}^*(\xi)$ sont duels aux espaces locaux $P_n(\xi)$ et, respectivement, aux centres $P_p(\xi)$; le centre P_p se dualisant comme un espace plongé dans P_n. L'homographie $\boldsymbol{P}_\Gamma^* : P_n^*({}^1\xi) \to \to P_n^*({}^2\xi)$, l'ensemble de ces homographies déterminant la connexion de la variété $P_{p,n}^r{}^*$, est l'homographie induite par l'homographie $\boldsymbol{P}_\Gamma : P_n({}^1\xi) \to Pn({}^2\xi)$ (l'ensemble des homographies $\boldsymbol{P}_\Gamma$ déterminant la connexion de la variété originale).

Dit d'une façon intuitive: Je laisse la variété $P_{p,n}^r$ inchangée, seuls les espaces locaux (et, naturellement, les centres aussi) seront remplacés par leurs dualisations. On a, bien entendu, $P_{p,n}^r{}^{**} = P_{p,n}^r$.

Considérons enfin l'expression analytique des variétés $P_{p,n}^r{}^*$. Supposons que la variété $P_{p,n}^r$ soit donnée par les équations (44), mais que les repères locaux soient choisis de telle façon que

$$(50) \qquad [A_0, A_1, \ldots, A_n] = 1$$

de sorte que

$$(51) \qquad \omega_i^i \equiv \omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0\,.$$

Si les bases locales $\{A_i\}$ sont déjà fixées, choisissons les bases locales duelles dans $P_n^*(\xi)$

$$(52) \qquad E^i = (-1)^i [A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n]$$

de sorte que nous aurons

$$(53) \qquad [A_i E^j] = \delta_i^j\,.$$

Si nous supposons que la connexion de la variété duelle soit déterminée par les équations $\mathrm{d}E^i = \overline{\omega}_j^i E^j$, alors il résulte de (53) que $\overline{\omega}_i^j = -\,\omega_i^j$, c'est-à-dire que *la connexion de la variété $P_{p,n}^r{}^*$ est donnée par les équations*

$$(54) \qquad \mathrm{d}E^i = -\,\omega_j^i E^j\,.$$

Pour terminer cette partie, j'introduis la notion d'*espace tangent*. Considérons une variété $P_{0,n}^r$, donnée par les équations (44). De l'équation $\mathrm{d}A_0 = (\Pi_{0a}^i A_i)\,.\,.\,\mathrm{d}\xi^a$ il résulte ceci: Fixons un point $A_0({}^0\xi)$ de la variété envisagée et construisons, dans l'espace local correspondant $P_n({}^0\xi)$, les tangentes de toutes les courbes qui sont développements de courbes de la variété passant par le point en question; ces tangentes-là remplissent le sous-espace déterminé par les points

A_0, $\Pi^i_{01}A_i$, ..., $\Pi^i_{0r}A_i$. Cet espace, appelé espace tangent, est à r dimensions au maximum; dans ce qui suit, nous considérons exclusivement le cas, où il est à r dimensions exactement, c'est-à-dire nous supposons que la matrice $\|\Pi^i_{0a}\|$ soit de rang r.

Maintenant, il est déjà facile de définir l'espace tangent $T(^0\xi)$ à une variété $P^r_{p,n}$ dans un de ses espaces $P_p(^0\xi) \subset P_n(^0\xi)$. Soit $\mathfrak{B}$ une variété quelconque du type $P^r_{0,n}$, faiblement plongée dans la variété considérée, soit $\tau_{\mathfrak{B}}$ son espace tangent dans son centre, situé dans $P_p(^0\xi)$; $T(^0\xi)$ sera alors l'enveloppe linéaire de tous les espaces $\tau_{\mathfrak{B}}$.

9. La géométrie différentielle locale étudie, en principe, les variétés $S^{r*}_{p*,n}$, [5]) plongées dans une autre variété $S^r_{p,n}$, ou bien les variétés associées à la variété $S^r_{p,n}$ d'une des manières mentionnées ci-dessus. Je pense que p. ex. l'étude des variétés $S^{r*}_{p*,n}$ (faiblement) plongées dans $S^r_{p,n}$ devrait procéder systématiquement en passant par les trois étapes suivantes:

I. *Etude des variétés $S^{r*}_{p*,n}$ générales.* On peut, en effet, considérer toute variété $S^{r*}_{p*,n}$ comme (faiblement) plongée dans une variété $S^r_{p,n}$; l'étude de $S^{r*}_{p*,n}$ générale est donc en fait identique à l'étude de $S^{r*}_{p*,n} \subset S^r_{p,n}$, elle me semble être toutefois plus simple au point de vue des calculs.

II. *Etude des variétés $S^{r*}_{p*,n}$ dans certaines classes de variétés $S^r_{p,n}$*; soit plus exactement: Les variétés $S^{r*}_{p*,n}$ qui sont (faiblement) plongées dans des variétés $S^r_{p,n}$ d'une classe particulière jouissent de certaines propriétés spéciales dont ne jouit une $S^{r*}_{p*,n}$ générale; il s'agit de les trouver.

III. *Etude des problèmes d'existence*: Existe-t-il des variétés $S^{r*}_{p*,n}$ (faiblement) plongées dans une variété $S^r_{p,n}$ donnée et jouissantes de propriétés données, et quel est leur degré de généralité.

J'espère que je montrerai l'utilité de ces idées déjà dans le présent travail. Dans le reste de ce chapitre, je vais m'occuper de la théorie des surfaces plongées dans un espace à connexion projective, à trois dimensions. Je n'ai élaboré que les commençements de cette théorie, mais je crois que pour la géométrie différentielle projective il serait très utile d'établir une théorie systématique suivant la conception exposée ci-dessus.

10. La géométrie différentielle des surfaces dans des espaces à connexion projective, à trois dimensions, a été étudiée déjà par plusieurs auteurs, citons à titre d'exemple les travaux [1], [4], [8], [15]. Or je crois, que seulement l'application des principes généraux mentionnés conduira à une étude vraiment géométrique de ces surfaces-là. Je vais procéder donc à l'étude des variétés $P^2_{0,3}$ que j'appellerai brièvement *surfaces à connexion projective* au course de ce chapitre (voire surfaces tout court).

Soient ω^1, ω^2 deux formes de Pfaff linéairement indépendantes en différen-

[5]) La lettre S remplace ici n'importe quelle des lettres A, E, P.

tielles $d\xi^1$, $d\xi^2$ de paramètres ξ^1, ξ^2, les équations fondamentales d'une surface π sont alors

(55)
$$dA_i = \omega_i^j A_j\,,\quad \omega_i^j = a_{ia}^j \omega^a\,,\quad \omega^a = f_b^a(\xi^1, \xi^2)\, d\xi^b\,,$$
$$[\omega^1\omega^2] \neq 0\,,\quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0\,.$$ [6])

On a donc spécialement

(56)
$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^a a_{0a}^M A_M\,.$$

Les points $a_{01}^M A_M$, $a_{02}^M A_M$ étant par hypothèse linéairement indépendants, on peut spécialiser les repères de façon à avoir

(57)
$$a_{0a}^M = \delta_a^M\,,\quad \text{c'est-à-dire}\quad dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2\,.$$

Les *asymptotiques* de la surface π seront les courbes dont le plan osculateur coïncide avec le plan tangent en chacun de ses points; elles ont manifestement l'équation différentielle

(58)
$$[A_0 A_1 A_2\, d^2A_0] \equiv \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 \equiv$$
$$\equiv a_{11}^3(\omega^1)^2 + (a_{12}^3 + a_{21}^3)\,\omega^1\omega^2 + a_{22}^3(\omega^2)^2 = 0\,.$$

Je vais étudier seules les surfaces qui ont un réseau d'asymptotiques, alors je peux choisir les points A_1, A_2 sur les tangentes asymptotiques de sorte que l'équation des asymptotiques devient

(59)
$$\omega^1\omega^2 = 0\,.$$

On a donc

(60)
$$a_{11}^3 = a_{22}^3 = 0\,.$$

Si je demande que les conditions (57) + (60) restent satisfaites, les changements admissibles de formes seront

(61)
$$\omega^1 = r\bar{\omega}^1\,,\quad \omega^2 = s\bar{\omega}^2\quad (rs \neq 0)$$

et ceux de bases locales seront

(62)
$$A_0 = \alpha_0^0\bar{A}_0\,,\quad A_1 = \alpha_1^0\bar{A}_0 + \alpha_1^1\bar{A}_1\,,\quad A_2 = \alpha_2^0\bar{A}_0 + \alpha_2^2\bar{A}_2\,,$$
$$A_3 = \alpha_3^0\bar{A}_0 + \alpha_3^1\bar{A}_1 + \alpha_3^2\bar{A}_2 + \alpha_3^3\bar{A}_3\,;\quad \alpha_0^0\alpha_1^1\alpha_2^2\alpha_3^3 = 1\,.$$

Je vais étudier l'influence de (61) + (62) sur les formes ω_i^j. Je demande que les équations transformées aient de nouveau la forme

(63)
$$d\bar{A}_0 = \bar{\omega}_0^0\bar{A}_0 + \bar{\omega}^1\bar{A}_1 + \bar{\omega}^2\bar{A}_2\,,\quad d\bar{A}_M = \bar{\omega}_M^i\bar{A}_i\,,\quad \bar{\omega}_j^i = \bar{a}_{ja}^i\bar{\omega}^a\,.$$

En substituant dans (57) j'obtiens

(64)
$$\alpha_1^1 = r^{-1}\alpha_0^0\,,\quad \alpha_2^2 = s^{-1}\alpha_0^0$$

---

[6]) Ici, en accord avec ce qui précède, $a, b, \ldots = 1, 2$; $i, j, \ldots = 0, \ldots, 3$; $M, N, \ldots = 1, \ldots, 3$.

ce qui donne par substitution en $(55_{2,3})$

(65) $$\bar{a}^3_{12} = (\alpha^0_0)^{-1}\, \alpha^3_3 rs a^3_{12}\,, \quad \bar{a}^3_{21} = (\alpha^0_0)^{-1}\, \alpha^3_3 rs a^3_{21}\,.$$

On a donc aussi

(66) $$\bar{a}^3_{12} + \bar{a}^3_{21} = (\alpha^0_0)^{-1}\, \alpha^3_3 rs (a^3_{12} + a^3_{21})$$

de sorte que l'on peut spécialiser les repères de telle façon que l'on ait

(67) $$a^3_{12} + a^3_{21} = 2\,.$$

Pour les transformations (61) + (62) qui conservent les repères ainsi spécialisés, on a, bien entendu, aussi (64) et

(68) $$\alpha^3_3 = r^{-1} s^{-1} \alpha^0_0\,.$$

L'équation (67) permet de poser

(69) $$\omega^3_1 = a^3_{12}\omega^2 = (1 - h)\,\omega^2\,, \quad \omega^3_2 = a^3_{21}\omega^1 = (1 + h)\,\omega^1\,.$$

La fonction $h = h(\xi^1, \xi^2)$ *sera alors invariante par rapport à* (65) + (68), on l'appellera *torsion* de la surface π considérée.

Dans ce qui suit, je dirai pour abréger, que les repères locaux de la surface π sont *normalement spécialisés,* lorsque les équations suivantes seront vérifiées

(70) $$\begin{aligned} \mathrm{d}A_0 &= \omega^0_0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2\,, \\ \mathrm{d}A_1 &= \omega^0_1 A_0 + \omega^1_1 A_1 + \omega^2_1 A_2 + (1 - h)\,\omega^2 A_3\,, \\ \mathrm{d}A_2 &= \omega^0_2 A_0 + \omega^1_2 A_1 + \omega^2_2 A_2 + (1 + h)\,\omega^1 A_3\,, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega^0_3 A_0 + \omega^1_3 A_1 + \omega^2_3 A_2 + \omega^3_3 A_3\,. \end{aligned}$$

11. Les coefficients a^2_{11}, a^1_{22} vont jouer un rôle très important, c'est pourquoi j'introduis pour eux une notation spéciale:

(71) $$\omega^2_1 = \beta\omega^1 + a^2_{12}\omega^2\,, \quad \omega^1_2 = a^1_{21}\omega^1 + \gamma\omega^2\,.$$

Si nous passons d'une spécialisation normale des repères à une autre, les expressions β et γ changent suivant

(72) $$\bar{\beta} = r^2 s^{-1}\beta\,, \quad \bar{\gamma} = r^{-1} s^2 \gamma\,.$$

J'appelle *élément linéaire projectif* de la surface π la forme

(73) $$F = \frac{\beta(\omega^1)^3 + \gamma(\omega^2)^3}{2\omega^1\omega^2}\,;$$

son invariance découle immédiatement des équations de transformation (61) et (72). Je peux évidemment introduire aussi les formes élementaires de M. Bompiani

(74) $$F_1 = \beta\,\frac{(\omega^1)^2}{\omega^2}\,, \quad F_2 = \gamma\,\frac{(\omega^2)^2}{\omega^1}\,.$$

Je vais regarder de plus près les expressions h, β, γ. Soit donnée, sur la surface π, une couche de courbes non-asymptotiques

(75) $$\omega^2 - \lambda\omega^1 = 0\,,$$

leurs tangentes sont donc les droites $p = [A_0, A_1 + \lambda A_2]$. D'après la construction I. du paragraphe 8 nous formons de la surface considérée une variété $P^2_{1,3}$ en remplaçant les centres ponctuels A_0 par les droites p; j'ai étudié en détail la variété de cette espèce dans mon travail [14], je l'appelle *congruence de droites à connexion projective*. Les surfaces développables de notre congruence L sont évidemment données par l'équation

$$[A_0, A_1 + \lambda A_2, \mathrm{d}A_0, \mathrm{d}(A_1 + \lambda A_2)] = 0\,. \tag{76}$$

Pour toute couche de surfaces développables différente de (75), les points $A_1 + \lambda A_2$, $\mathrm{d}A_0$ seront indépendants, son équation différentielle sera donc

$$[A_0, A_1, A_2, \mathrm{d}(A_1 + \lambda A_2)] = 0$$

c'est-à-dire

$$(1 - h)\,\omega^2 + \lambda(1 + h)\,\omega^1 = 0\,. \tag{77}$$

J'obtiens la proposition que voici: *Soit L la congruence de droites dont une surface focale est la surface π considérée et dont une couche de surfaces développables découpe sur π une couche de courbes non-asymptotiques. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'autre couche de surfaces développables découpe sur π les asymptotiques $\omega^1 = 0$* (*ou bien $\omega^2 = 0$*), *est que $h = 1$* (*ou $h = -1$ respectivement*).

Dans ce qui suit, je me borne aux surfaces pour lesquelles $h^2 \neq 1$. Dans ce cas-là, l'autre couche de surfaces développables découpe sur π la couche

$$\omega^2 - \lambda'\omega^1 = 0 \quad \text{où} \quad \lambda' = \lambda\,\frac{h + 1}{h - 1}\,, \tag{78}$$

ce qui détermine, dans le faisceau des tangentes, en chaque point une projectivité dont les droites doubles sont les deux tangentes asymptotiques; sa caractéristique est

$$H = \frac{h + 1}{h - 1}\,. \tag{79}$$

Cela détermine la signification géométrique de la torsion; *la condition nécessaire et suffisante, pour que la projectivité en question soit une involution, est que $h = 0$* (j'appelle *surfaces sans torsion* les surfaces avec $h = 0$).

Sur l'asymptotique $\omega^2 = 0$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_0 &= (a^0_{01}A_0 + A_1)\,\omega^1\,,\\ \mathrm{d}A_1 &= (a^0_{11}A_0 + a^1_{11}A_1 + \beta A_2)\,\omega^1\,,\\ \mathrm{d}A_2 &= (a^0_{21}A_0 + a^1_{21}A_1 + a^2_{21}A_2 + \overline{1 + h}A_3)\,\omega^1\,, \end{aligned} \tag{80}$$

donc: *La condition nécessaire et suffisante pour que l'asymptotique $\omega^2 = 0$ se développe* (dans l'espace local de n'importe quel de ses points) *en une droite, est $\beta = 0$. Dans le cas où $\beta \neq 0$, la condition nécessaire et suffisante, pour que l'asymptotique $\omega^2 = 0$ se développe en une courbe plane, située nécessairement* *dans le plan tangent, est $h = -1$.* On peut caractériser d'une façon analogue les relations $\gamma = 0$, ou encore $\gamma \neq 0$, $h = 1$, en considérant l'asymptotique $\omega^1 = 0$.

12. Considérons la dualisation π^* de la surface π. Comme les bases locales $\{E^3, E^2, E^1, E^0\}$ ne sont pas normalement spécialisées, je passe aux bases

$$F^3 = (1 - h^2)^{-1} E^3\,, \quad F^2 = -(1 + h)\, E^2\,, \quad F^1 = -(1 - h)\, E^1\,, \quad F^0 = E^0 \tag{81}$$

où l'on aura

$$\begin{aligned} dF^3 &= (.)F^3 + \omega^1 F^2 + \omega^2 F^1\,, \\ dF^2 &= (1 + h)^2(1 - h)\, \omega_3^2 F^3 + \left(\frac{dh}{1 + h} - \omega_2^2\right) F^2 - \\ &\quad - \frac{1 + h}{1 - h}\, \omega_1^2 F^1 + (1 + h)\, \omega^2 F^0\,, \\ dF^1 &= (1 + h)(1 - h)^2\, \omega_3^1 F^3 - \frac{1 - h}{1 + h}\, \omega_2^1 F^2 - \\ &\quad - \left(\frac{dh}{1 - h} + \omega_1^1\right) F^1 + (1 - h)\, \omega^1 F^0\,, \\ dF^0 &= (.)F^3 + (.)F^2 + (.)F^1 + (.)F^0\,. \end{aligned} \tag{82}$$

En comparant les équations (70) et (82) on voit qu'en passant de la surface π à sa dualisation π^* on obtient la substitution

(83

$$\begin{pmatrix} \pi & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \omega^1 & \omega^2 & h & \beta & \gamma \\ \pi^* & F^3 & F^2 & F^1 & F^0 & \omega^1 & \omega^2 & -h & -(1 + h)(1 - h)^{-1}\beta & -(1 - h)(1 + h)^{-1}\gamma \end{pmatrix}.$$

J'obtiens *l'élément linéaire projectif de la dualisation* π^* en appliquant la substitution (83) à (73):

$$F^* = \frac{-(1 + h)^2\, \beta(\omega^1)^3 - (1 - h)^2\, \gamma(\omega^2)^3}{2(1 - h^2)\, \omega^1\omega^2}\,. \tag{84}$$

13. Soient données deux surfaces π et $\bar{\pi}$, dont les repères soient normalement spécialisés; supposons que les deux surfaces soient en transformation asymptotique $T : \bar{\pi} \to \pi$, que l'on peut sans doute exprimer sous la forme

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1\,, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2\,. \tag{85}$$

L'homographie tangente générale de la transformation T est évidemment

$$K\bar{A}_0 = A^0\,, \quad K\bar{A}_1 = \lambda A_0 + A_1\,, \quad K\bar{A} = \mu A_0 + A_2\,,$$
$$K\bar{A}_3 = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3\,.$$

Ici, naturellement, K est une homographie entre les espaces locaux des points des deux surfaces, qui se correspondent en T. Un calcul direct donne

$$(87)\qquad K\bar{A}_0 = A_0\,,\quad K\,\mathrm{d}\bar{A}_0 = \mathrm{d}A_0 + (\bar{\omega}_0^0 - \omega_0^0 + \lambda\omega^1 + \mu\omega^2)\,A_0\,,$$
$$K\,\mathrm{d}^2\bar{A}_0 = \mathrm{d}^2A_0 + 2(\bar{\omega}_0^0 - \omega_0^0 + \lambda\omega^1 + \mu\omega^2)\,\mathrm{d}A_0 + (\,.\,)A_0 +$$
$$+ \Phi_1A_1 + \Phi_2A_2 + \Phi_3A_3$$

où $(t^i_{jk} = \bar{a}^i_{jk} - a^i_{jk})$

$$(88)\qquad \Phi_1 = (t^1_{11} - t^0_{01} - 2\lambda)(\omega^1)^2 + (t^1_{12} - t^0_{02} + t^1_{21} - 2\mu + 2\alpha_1)\,\omega^1\omega^2 +$$
$$+ (\bar{\gamma} - \gamma)(\omega^2)^2\,,$$
$$\Phi_2 = (\bar{\beta} - \beta)(\omega^1)^2 + (t^2_{21} - t^0_{01} + t^2_{12} - 2\lambda + 2\alpha_2)\,\omega^1\omega^2 + (t^2_{22} - t^0_{02} - 2\mu)(\omega^2)^2\,,$$
$$\Phi_3 = 2(\alpha_3 - 1)\,\omega^1\omega^2\,.$$

J'appelle transformation K-linéarisante de la correspondance T la transformation $\mathscr{L}$:

$$t \equiv [A_0, \omega^1A_1 + \omega^2A_2] \to \mathscr{L}t \equiv [A_0, \Phi_1A_1 + \Phi_2A_2 + \Phi_3A_3]\,,$$

qui associe à chaque tangente de la surface π au point A_0 une certaine droite de l'étoile de centre A_0. Ces transformations linéarisantes ont été introduites, pour les correspondances entre des espaces, par E. Čech en [5]; dans notre cas, $\mathscr{L}$ *jouit des propriétés suivantes*:

Soit γ une courbe arbitraire sur π, ayant t pour tangente, soit $\bar{\gamma}$ la courbe sur $\bar{\pi}$ qui correspond à γ, alors les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ ont un contact analytique de premier ordre, et dans le cas où

1. $\mathscr{L}t$ est la droite indéfinie (c'est-à-dire $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$), elles ont un contact analytique de second ordre;

2. Φt coïncide avec t (c'est-à-dire $\Phi_3 = 0$, $\omega^1\Phi_2 - \omega^2\Phi_1 = 0$), elles ont un contact géométrique de second ordre, et il n'existe pas de point tel que leurs projections de ce point aient un contact analytique de second ordre;

3. $\mathscr{L}t$ ne coïncide pas avec t, elles ont un contact analytique d'ordre un exactement, et $\mathscr{L}t$ est le lieu géométrique des points tels que leurs projections de ce point ont un contact analytique de second ordre.

La direction mentionnée est tout de même un peu inexacte: au lieu des courbes $\bar{\gamma}$, γ et $K\bar{\gamma}$ je devrais considérer leur développement dans les espaces locaux. Dans le cas 1. ou 2. t s'appelle *tangente K-principale*, ou *K-caractéristique* respectivement. Si je me borne aux homographies pour lesquelles les droites K-linéarisantes des tangentes sont elles-mêmes tangentes (je l'obtiens en choisissant $\alpha_3 = 1$), l'équation des courbes caractéristiques est $\omega^1\Phi_2 - \omega^2\Phi_1 = 0$, c'est-à-dire

$$(89)\qquad (\bar{\beta} - \beta)(\omega^1)^3 + (t^2_{21} + t^2_{12} - t^1_{11} + 2\alpha_2)(\omega^1)^2\,\omega^2 +$$
$$+ (t^2_{22} - t^1_{12} - t^1_{21} - 2\alpha_1)\,\omega^1(\omega^2)^2 - (\bar{\gamma} - \gamma)(\omega^2)^3 = 0\,.$$

Les surfaces π et $\bar{\pi}$ sont en *déformation projective de second ordre* si pour toute paire de points correspondants $A_0, \bar{A}_0$ il existe une homographie (appelée osculatrice) entre les espaces locaux $P_3(A_0)$, $\bar{P}_3(\bar{A}_0)$ telle que pour n'importe quelle courbe γ sur π qui passe par A_0, les courbes $K\bar{\gamma}^*$, γ^* ont un contact analytique de second ordre ($\bar{\gamma}^*$ et γ^* étant les développements de $\bar{\gamma}$ et γ dans $\bar{P}_3(\bar{A}_0)$ et $P_3(A_0)$ respectivement). Mais alors on a en vertu de (87) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ et à partir de (88) j'obtiens, pour l'homographie osculatrice (86) et les deux surfaces, les conditions que voici

$$\bar{\beta} = \beta \,, \quad \bar{\gamma} = \gamma \,, \tag{90}$$

$$2\lambda = t^1_{11} - t^0_{01} \,, \quad 2\mu = t^2_{22} - t^0_{02} \,, \quad \alpha_3 = 1 \,, \tag{91}$$

$$2\alpha_1 = t^2_{22} - t^1_{12} - t^1_{21} \,, \quad 2\alpha_2 = t^1_{11} - t^2_{12} - t^2_{21} \,. \tag{92}$$

Nous voyons donc que *les propositions suivantes sont équivalentes*:

A. *les surfaces π et $\bar{\pi}$ sont en déformation projective de second ordre*;

B. *il existe des homographies K* (pour chaque paire de points correspondants des deux surfaces), *pour lesquelles chaque tangente est K-principale*;

C. *il existe des homographies K'* (pour chaque paire de points correspondants des deux surfaces), *dont les courbes caractéristiques sont indéfinies*;

D. *les éléments linéaires projectifs des surfaces π et $\bar{\pi}$ coïncident.*

Si les deux surfaces sont en déformation projective, il existe ∞^1 d'homographies osculatrices K (λ, μ, α_1, α_2, α_3 sont déterminés par les équations (91), (92)) et ∞^3 d'homographies K' mentionnées sous C (λ, μ, α_3 sont déterminés par l'équation (91)). On voit également sans difficulté:

Les dualisations des surfaces π et $\bar{\pi}$ sont en déformation projective de second ordre si et seulement si leurs éléments projectifs linéaires coïncident (c'est-à-dire si $F^* = \bar{F}^*$). *La condition nécessaire et suffisante, pour que la surface π soit en déformation projective de second ordre avec sa dualisation π^*, est que*

$$F = F^* \,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \beta = \gamma = 0 \,. \tag{93}$$

Dans le travail [8], on a énoncé la proposition affirmant que toute surface d'un espace à trois dimensions à connexion projective est en déformation projective de second ordre avec une surface de l'espace projectif. Or, *cette proposition n'est pas vraie*, comme on voit aisément à la base de la théorie précedente. En effet, si elle était vraie, alors toute surface π (c'est-à-dire variété $P^2_{0,3}$) serait en déformation projective avec une surface de l'espace projectif, or cela signifierait que n'importe quelle forme (73) saurait être élément linéaire projectif d'une surface de l'espace projectif à trois dimensions (car on peut certainement considérer n'importe quelle forme (73) comme élément projectif linéaire d'une variété $P^2_{0,3}$). J'obtiens ainsi un seul résultat positif: pour répondre à la question de savoir si une surface donnée est en déformation projective de second ordre avec une surface de l'espace projectif, il suffit d'établir si son élément linéaire projectif est réalisable (c'est-à-dire s'il est élément d'une surface de l'espace projectif). Mais j'arrive à une série de problèmes nouveaux: p. ex. caractériser géométriquement les variétés $P^2_{0,3}$ qui sont en déformation projective de second ordre avec une surface de l'espace projectif.

Mentionnons enfin la signification géométrique des courbes $F = 0$ et $F^* = 0$. Considérons de nouveaux deux surfaces π et $\bar{\pi}$ en correspondance asymptotique T (85) et ses homographies tangentes (86), toujours sous l'hypothèse $\alpha_3 = 1$. Les courbes K-caractéristiques sont alors (89); il est sans doute possible de choisir l'homographie K de telle manière (par vérification des équations (92)), que la 3-couche de ces courbes soit apolaire au réseau des courbes asymptotiques. J'obtiens ainsi la signification géométrique des courbes

$$(\bar{\beta} - \beta)(\omega^1)^3 - (\bar{\gamma} - \gamma)(\omega^2)^3 = 0 \tag{94}$$

que j'appellerai *courbes de Segre* de la correspondance asymptotique T. J'appelle *courbes de Darboux* de cette même correspondance les courbes

$$(\bar{\beta} - \beta)(\omega^1)^3 + (\bar{\gamma} - \gamma)(\omega^2)^3 = 0\,. \tag{95}$$

Dans le cas où la surface $\bar{\pi}$ est la dualisation de la surface π (ce qui veut dire que $\bar{\pi} = \pi^*$), on a en vertu de (83)

$$\bar{\beta} = -\frac{1+h}{1-h}\beta\,,\quad \bar{\gamma} = -\frac{1-h}{1+h}\gamma$$

et les courbes de Segre de la correspondance asymptotique $T : \pi \to \pi^*$ sont

$$\beta(1+h)(\omega^1)^3 - \gamma(1-h)(\omega^2)^3 = 0\,,$$

c'est-à-dire en employant (79)

$$H\,\beta(\omega^1)^3 - \gamma(\omega^2)^3 = 0\,. \tag{96}$$

Le birapport des 3-couches $(\omega^1)^3 = 0$, $(\omega^2)^3 = 0$,

$$\beta(\omega^1)^3 + \gamma(\omega^2)^3 = 0 \tag{97}$$

et (96) est égal à $-H$, ce que caractérise géométriquement la 3-couche (97) qui donne les courbes nulles de l'élément projectif linéaire F. Duellement, on peut trouver la signification géométrique des courbes $F^* = 0$.

III. SYSTÈMES À DEUX PARAMÈTRES DE DROITES EN E_n

14. Les seules systèmes à deux paramètres de droites des espaces à plusieurs dimensions qui aient été étudiés jusqu'à présent sont ceux qu'on peut décomposer en deux systèmes de surfaces développables (sans tenir compte du cas limite de congruences paraboliques), une tentative d'étude générale a été faite dans [2], [3]. Je crois que c'est justement l'absence de surfaces focales qui est la raison principale du manque de résultats concernant les systèmes généraux à deux paramètres de droites (que j'appellerai aussi congruences, dans ce qui va suivre). Je vais montrer comment il est possible d'écarter ces difficultés dans le cas de congruences de droites dans E_n (c'est-à-dire dans l'espace euclidien à n dimensions); le Lecteur fera lui-même une comparaison avec les résultats du travail [16].

Soit donnée une congruence L de droites dans E_n ($n \geqq 3$). A chaque droite $p \in L$ j'associe un repère orthonormal $\{M; I_1, \ldots, I_p\}$ tel que $M + tI_1$, $-\infty < t < \infty$, soient les points de la droite p et la différentielle du vecteur I_1 soit une combinaison linéaire des vecteurs I_2, I_3. Pour la congruence L j'ai alors les équations fondamentales

$$\text{(98)} \qquad \mathrm{d}M = \omega^i I_i\,, \quad \mathrm{d}I_1 = \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3\,, \quad \mathrm{d}I_A = \omega_A^i I_i\,,$$
$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ A = 2, \ldots, n)$$

c'est-à-dire les équations de Pfaff (sous l'hypothèse évidente de $[\omega_1^2\omega_1^3] \neq 0$)

$$\text{(99)} \qquad \omega_1^\alpha = 0 \ (\alpha = 4, \ldots, n)\,, \quad \omega^i = a^i\omega_1^2 + b^i\omega_1^3 \ (i = 2, \ldots, n)\,.$$

Il en vient par différentiation extérieure

$$\text{(100)} \qquad [\omega_1^2\omega_2^\alpha] + [\omega_1^3\omega_3^\alpha] = 0\,,$$

$$\text{(101)} \qquad [\omega_1^2(\mathrm{d}a^\alpha - b^\alpha\omega_2^3 + \sum_{i=2}^n a^i\omega_i^\alpha)] + [\omega_1^3(\mathrm{d}b^\alpha + a^\alpha\omega_2^3 + \sum_{i=2}^n b^i\omega_i^\alpha)] = 0\,,$$

$$\text{(102)} \qquad [\omega_1^2(\mathrm{d}a^2 - \omega^1 - \overline{a^3 + b^2}\omega_2^3 - \sum_{\alpha=4}^n a^\alpha\omega_2^\alpha)] +$$
$$+ [\omega_1^3(\mathrm{d}b^2 + \overline{a^2 - b^3}\omega_2^3 - \sum_{\alpha=4}^n b^\alpha\omega_2^\alpha)] = 0\,,$$
$$[\omega_1^2(\mathrm{d}a^3 + \overline{a^2 - b^3}\omega_2^3 - \sum_{\alpha=4}^n a^\alpha\omega_3^\alpha)] +$$
$$+ [\omega_1^3(\mathrm{d}b^3 + \overline{a^3 + b^2}\omega_2^3 - \omega^1 - \sum_{\alpha=4}^n b^\alpha\omega_3^\alpha)] = 0\,.$$

En vertu de (102), j'obtiens

$$\text{(103)} \qquad \delta a^2 = (a^3 + b^2)\, e_2^3 + e^1\,, \quad \delta b^3 = -(a^3 + b^2)\, e_2^3 + e^1\,,$$
$$\delta b^2 = (b^3 - a^2)\, e_2^3\,, \quad \delta a^3 = (b^3 - a^2)\, e_2^3\,.$$

Par des raisonnements tout à fait analogues à ceux de [6], pp. 69—73, il est possible d'obtenir (dans le cas général) une telle spécialisation des repères que l'on ait

$$\text{(104)} \qquad \omega^2 = \varrho \operatorname{cotg} \varphi\omega_1^3\,, \quad \omega^3 = \varrho \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2\,.$$

Les équations (100)—(102) donnent alors

$$(105)\qquad [\omega_1^2\omega_2^\alpha] + [\omega_1^3\omega_3^\alpha] = 0 \quad (\alpha = 4, \dots, n)\,,$$

$$(106)\qquad [\omega_1^2(\mathrm{d}a^\alpha - b^\alpha\omega_2^3 + \varrho \operatorname{tg}\varphi\omega_3^\alpha + \sum_{\beta=4}^{n} a^\beta\omega_\beta^\alpha)] +$$

$$+ [\omega_1^3(\mathrm{d}b^\alpha + a^\alpha\omega_2^3 + \varrho \operatorname{cotg}\varphi\omega_2^\alpha + \sum_{\beta=4}^{n} b^\beta\omega_\beta^\alpha)] = 0 \quad (\alpha = 4, \dots, n)\,,$$

$$(107)\qquad \left[\omega_1\left(\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\omega_2^3 + \omega^1 + \sum_{\alpha=4}^{n} a^\alpha\omega_2^\alpha\right)\right] +$$

$$+ \left[\omega_1^3\left(\frac{\varrho}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi\,\mathrm{d}\varrho + \sum_{\alpha=4}^{n} b^\alpha\omega_2^\alpha\right)\right] = 0\,,$$

$$\left[\omega_1^2\left(\frac{\varrho}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\,\mathrm{d}\varrho - \sum_{\alpha=4}^{n} a^\alpha\omega_3^\alpha\right)\right] +$$

$$+ \left[\omega_1^3\left(\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\omega_2^3 - \omega^1 - \sum_{\alpha=4}^{n} b^\alpha\omega_3^\alpha\right)\right] = 0\,.$$

D'une façon évidente, à la congruence L il est associé son *indicatrice sphérique*, donnée par les équations

$$(108)\qquad \mathrm{d}S = 0\,,\quad \mathrm{d}I_1 = \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3\,,\quad \mathrm{d}I_A = \omega_A^i I_i\,;$$

cette indicatrice est située sur une hypersphère de centre S, elle est décrite par le point $N = S + I_1$. J'appelle *espace faiblement tangent* à la congruence L le long de la droite p (formée de points $M + tI_1$, $-\infty < t < \infty$) l'espace déterminé par le point M et par les vecteurs I_1, I_2, I_3, et qui a une construction géométrique évidente: il contient la droite p et les vecteurs du plan tangent à l'indicatrice sphérique au point correspondant à la droite p.

J'appelle *surface quasifocale* de la congruence L engendrée par la droite $p = p(u, v)$ la surface

$$F = M(u, v) + t(u, v)\, I_1(u, v)$$

jouissant de la propriété suivante: La projection du plan tangent à la surface (F) au point $F(u, v)$ dans l'espace faiblement tangent $\eta_3(u, v)$ le long de la droite $p(u, v)$ dans la direction de l'espace $\eta_{n-4}(u, v)$, totalement perpendiculaire à η_3, passe par la droite p. On a donc pour la surface quasifocale

$$(109)\qquad \mathrm{d}F \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, I_1, I_4, I_5, \dots, I_n)\,.$$

Il découle de

$$\mathrm{d}F \equiv (t\omega_1^2 + \varrho \operatorname{cotg}\varphi\, \omega_1^3)\, I_2 + (\varrho \operatorname{tg}\varphi\, \omega_1^2 + t\omega_1^3)\, I_3$$
$$(\mathrm{mod}\, I_1, I_4, I_5, \dots, I_n)$$

que pour les surfaces quasifocales

$$(110)\qquad t\omega_1^2 + \varrho \operatorname{cotg}\varphi\, \omega_1^3 = 0\,,\quad \varrho \operatorname{tg}\varphi\, \omega_1^2 + t\omega_1^3 = 0\,.$$

En éliminant $\omega_1^3 : \omega_1^2$, j'obtiens $t^2 - \varrho^2 = 0$, de sorte que *la congruence L a* (pour la spécialisation du repère mentionnée) *deux surfaces quasifocales* $F_{1,2} = M \pm \pm \varrho I_1$. Par la spécialisation (104) on a cependant exclu le cas de congruences paraboliques ($F_1 = F_2$).

Il résulte directement de la définition des surfaces quasifocales (et du fait qu'elles sont deux au maximum) que chaque surface focale de la congruence L est aussi sa surface quasifocale. Il n'est cependant pas tout à fait clair que ces surfaces-là définies d'une façon un peu artificielle représentent la plus naturelle généralisation des surfaces focales et que, dans une interprétation convenable, elles jouissent de bien des propriétés des surfaces focales. Je vais donc faire voir dans ce qui suit, comment on peut arriver à elles par une voie plus naturelle quoique apparemment plus compliquée.

15. Soit donnée une variété $P^r_{p,n}$ ($p \geqq 1$) à connexion projective. La variété $P^r_{0,n}$ sera dite sa *variété focale* si elle est faiblement plongée dans $P^r_{p,n}$ (cela veut dire que chaque centre ponctuel de la variété focale $P^r_{0,n}$ se trouve à l'intérieur du centre correspondant de la variété $P^r_{p,n}$) et si l'intersection du centre $P_p(\xi)$ de la variété $P^r_{p,n}$ et de l'espace tangent $T(\xi)$ à la variété $P^r_{0,p}$ au point correspondant est de dimension un au moins; les points de la variété focale sont alors foyers des centre $P_p(\xi)$. La variété $P^r_{p,n}$ soit donnée par ses équations fondamentales

$$(44) \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j \, ; \quad \omega_i^j = \Pi_{ia}^j(\xi)\,\mathrm{d}\xi^a \, , \quad \det|\omega_i^j| \neq 0 \, ;$$

je demande quand la variété $P^r_{0,n}$ dont les espaces locaux et les homographies entre eux sont les mêmes que pour $P^r_{p,n}$, mais dont les centres sont les points $F = x_e A^e$,[7]) est une variété focale. Comme l'espace tangent à la variété $P^r_{0,n}$ est formé de points

$$F = x_e A^e \, , \quad B_a = \partial_a x^e A_e + x^e \Pi_{ea}^i A_i \quad (a = 1, \dots, r) \, ,$$

la matrice

$$\|A_0, \dots, A_p, B_1, \dots, B_r\|$$

doit être de rang plus petit que $p + r + 1$; autrement dit les points

$$C_a = x^e \Pi_{ea}^{p+1} A_{p+1} + x^e \Pi_{ea}^{p+2} A_{p+2} + \dots + x^e \Pi_{ea}^n A_n \quad (a = 1, \dots, r)$$

doivent être linéairement dépendants. Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que $F = x^e A_e$ soit foyer, est que la matrice*

$$(111) \qquad \|x^e \Pi_{ea}^M\| \quad (a = 1, \dots, r;\ M = p + 1, \dots, n)$$

soit de rang plus petit que r. On peut déjà montrer par des calculs directs que les propriétés focales de la variété $P^r_{p,n}$ sont en accord avec les propriétés focales de la variété de ∞^r de sous-espaces S_p de l'espace projectif S_n; voir p. ex. [12].

[7]) Nouvelle convention: $e, f, \dots = 0, \dots, p$.

Une autre notion importante et dont j'aurai besoin dans la suite, est celle de *variété normalisée*. Une variété $P^r_{p,n}$ $(0 \leqq p \leqq n - 1)$ sera dite *fortement normalisée* si je choisis dans chaque espace local $P_n(\xi)$ deux espaces linéairement indépendants $P_k(\xi)$ et $P_{n-k-1}(\xi)$ $(p \leqq k)$ tels que $P_p(\xi) \subset P_k(\xi)$, ($P_p(\xi)$ est le centre dans l'espace local $P_n(\xi)$; pour le cas de $p = k$ voir les travaux précités de Bortolotti); une variété $P^r_{p,n}$ fortement normalisée engendre alors une autre $P^r_{p,k}$ comme suit: les espaces locaux de la variété $P^r_{p,k}$ sont les espaces $P_k(\xi)$ d; centres $P_p(\xi)$, les domaines de paramètres Ω_r des variétés $P^r_{p,k}$ et $P^r_{p,n}$ coïncident soit

$$(2) \qquad \xi^a = \xi^a(t)\,, \quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t\,; \quad \xi^a({}^1t) = {}^1\xi^a\,, \quad \xi^a({}^2t) = {}^2\xi^a\,;$$

un arc dans Ω_r, soit Γ_τ sa partie comprise entre les points ${}^1t$ et τ. Si $\boldsymbol{P}_\tau$: $P_n(\xi(\tau)) \to P_n({}^1\xi)$ est l'homographie entre les espaces locaux aux extrémités de l'arc Γ_τ, déterminée par la connexion de la variété $P^r_{\tau,n}$ et correspondant à l'arc Γ_τ, considérons dans l'espace $P_n({}^1\xi)$ deux systèmes monoparamétriques d'espaces

$$(112) \qquad R(t) = \boldsymbol{P}_t\, P_k(\xi(t))\,, \quad R'(t) = \boldsymbol{P}_t\, P_{n-k-1}(\xi(t))\,; \quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t\,.$$

Soit Λ le système (nécessairement unique) k-paramétrique de courbes sur la variété V_{k+1}, formée d'espace $R(t)$, qui jouit de la propriété que la tangente à une courbe du système Λ à son point d'intersection avec l'espace $R(t)$ coupe l'espace correspondant $R'(t)$. Les courbes du système Λ déterminent une certaine homographie $\boldsymbol{P} : R({}^1t) \to R({}^2t)$ telle que leurs points initiaux et finaux se correspondent; l'homographie entre les espaces locaux $P_k({}^1\xi)$ et $P_k({}^2\xi)$, correspondant à l'arc Γ, sera alors $\boldsymbol{P}_{{}^2t}^{-1}\boldsymbol{P} : P_k({}^1\xi) \to P_k({}^2\xi)$.

Redisons cela d'une manière plus intuitive (quoique inexacte): Supposons d'abord que la variété originale $P^r_{p,n}$ soit la variété de ∞^r de sous-espaces P_p de l'espace projectif P_n. Faisons passer par chaque centre $P_p(\xi)$ un espace $P_k(\xi)$ qui devra être espace local de la nouvelle variété; choisissons ensuite des espaces $P_{n-k-1}(\xi)$ (ne coupant pas $P_k(\xi)$). Pour chaque arc $\Gamma \subset \Omega_r$ (2), j'ai à construir maintenant une projectivité entre les espaces $P_k({}^1\xi)$ et $P_k({}^2\xi)$, leur ensemble déterminera la connexion de la variété $P^r_{p,k}$. Je le fais comme ceci: Je considère les systèmes d'espaces

$$R_k(t) = P_k(\xi(t))\,, \quad R'_{n-k-1}(t) = P_{n-k-1}(\xi(t))\,,$$

correspondant aux points de l'arc Γ et je projette l'espace $R_k({}^1t)$ de l'espace $R'_{n-k-1}(t)$ dans l'espace infiniment proche, etc. jusqu'à ce que j'arrive à l'espace $R'_k({}^2t)$. L'ensemble de ces projections inifinitésimales engendre la projectivité cherchée entre $P_k({}^1\xi)$ et $P_k({}^2\xi)$. Dans le cas d'une variété $P^r_{p,n}$ générale je procède de la même manière avec la seule différence que je fais toutes les considérations citées après le développement dans un espace local.

La variété $P^r_{p,n}$ soit donnée par les équations (44) et fortement normalisée de telle façon que $A_0, \ldots, A_p, A_{p+1}, \ldots, A_k$ soit la base de l'espace P_k et $A_{k+1}, \ldots, A_n$

soit la base de l'espace P_{n-k-1}, alors la variété $P^r_{p,k}$ correspondante est donnée par les équations

$$\mathrm{d}A_u = \omega^v_u A_v \quad (u, v = 0, \ldots, k) . \tag{113}$$

Remarque. Dans ce qui précède, j'emploie la notion de normalisation forte sans se servir du mot de normalisation tout court. Or, on nomme d'habitude normalisation seulement le cas de normalisation forte où l'espace $P_k(\xi)$ est l'espace tangent à la variété $P^r_{p,n}$ le long du centre $P_p(\xi)$.

16. Les deux notions introduites dans ce qui précède ont une application bien importante (à mon avis pas tu dout exploitée jusqu'à présent) dans la théorie de variétés d'espaces dans l'espace euclidien.

Dans l'espace euclidien à n dimensions E_n, soit donnée une variété $\mathscr{E}$ de ∞^r de sous-espaces $E_p(\xi)$ (ce qui est un cas spécial de variété $E^r_{p,n}$); l'espace $E_p(\xi)$ soit formé de points $(A, \ldots = 1, \ldots, p)$

$$X = M(\xi) + t^A\, I_A(\xi) \,, \quad -\infty < t^A < \infty \,. \tag{114}$$

Je change la variété $\mathscr{E}$ en variété $\mathscr{P}$ du type $P^r_{p,n}$ en complétant les espaces euclidiens E_n, $E_p(\xi)$ en espaces projectifs. Maintenant, je normalise fortement la variété $\mathscr{P}$ en fixant Γ_k comme l'extension projective de l'espace E_k déterminé par les points

$$X = M + t^A I_A + t^{Aa}\, \partial_a I_A \,, \quad -\infty < t^A \,, \quad t^{Aa} < \infty \,; \tag{115}$$

l'espace P_{n-k-1} sera le sous-espace à l'infini de l'espace totalement perpendiculaire à E_k. La variété $\mathscr{P}$ engendre ainsi une variété $P^r_{p,k}$. Vu le choix des espaces P_{n-k-1}, les homographies (déterminées par la connexion) entre les espaces locaux de la variété $P^r_{p,k}$ jouissent de la propriété de se réduire aux congruences si l'on se borne aux sous-espaces propres des espaces locaux. En écartant les hyperplans à l'infini des espaces locaux de la variété $P^r_{p,k}$, j'obtiens d'elle une variété $E^r_{p,k}$, associée d'une manière univoque à la variété $\mathscr{E}$ donnée. J'appelle géométrie intérieure de la variété $\mathscr{E}$ la géométrie de la variété $E^r_{p,k}$.

Dit de nouveau d'une façon intuitive: Par chaque espace E_p de la variété $\mathscr{E}$ je fais passer un espace E_k, déterminé par les points (115). Les espaces E_p et E_k seront centres et espaces locaux de la variété $E^r_{p,k}$ dont je vais maintenant fixer la connexion. Soit (2) un arc $\Gamma \subset \Omega_r$ et soit $\mathfrak{S}$ le système d'espaces locaux $E_k(t)$ correspondant aux points de l'arc Γ. Je projette alors l'espace $E_k({}^1t)$ orthogonalement dans l'espace infiniment proche du système $\mathfrak{S}$, en continuant jusqu'à arriver à $E_k({}^2t)$. Les congruences ainsi construites déterminent la connexion de la variété $E^r_{p,k}$.

Il reste à expliquer la signification géométrique de l'espace (115). Soit $E_p({}^0\xi)$ un espace fixé de la variété $\mathscr{E}$. Je forme une variété $\mathscr{E}^S$ comme ceci: je choisis dans $E_p({}^0\xi)$ un point S et je fais passer par lui les espaces $E_p(\xi)$ parallèles aux espaces $E_p(\xi)$ de la variété $\mathscr{E}$. L'espace tangent à la variété $\mathscr{E}^S$ le long de $E_p({}^0\xi)$ sera alors l'espace (115).

Je me suis servi de la méthode que je viens de décrire, dans mon travail [16] où j'ai étudié les congruences de droites dans E_n qui contiennent deux systèmes de surfaces développables. Mais on peut se servir de ces méthodes aussi pour l'étude de systèmes généraux L à deux paramètres de droites, soit plus exactement pour l'étude de leur géométrie intérieure. A chaque congruence L il correspond une certaine variété $E^2_{1,3}$ dont l'étude nous dira beaucoup sur L. Si la congruence L est donnée par le système (98), l'espace (115) sera exactement l'espace η_3, de sorte que la variété $E^2_{1,3}$ correspondante est donnée par les équations

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \omega^1 I_1 + \varrho \operatorname{cotg} \varphi\, \omega_1 I_2 + \varrho \operatorname{tg} \varphi\, \omega_1^2 I_3\,, \\
\mathrm{d}I_1 &= \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3\,, \\
\mathrm{d}I_2 &= -\omega_1^2 I_1 + \omega_2^3 I_3\,, \\
\mathrm{d}I_3 &= -\omega_1^3 I_1 - \omega_2^3 I_2\,.
\end{aligned}
\tag{116}
$$

On trouve aisément que ses surfaces focales (ce qui sont, au sens précité, des variétés $E^2_{0,3}$) sont $F_{1,2} = M \pm \varrho I_1$, elles déterminent donc sur chaque droite $p \in L$ deux points; leur ensemble donne les deux surfaces quasifocales de la congruence L.

Je suppose que les considérations de ci-dessus et les résultats de mon travail [16] donnent l'espoir de la construction d'une théorie générale de systèmes à deux paramètres de droites dans E_n qui généralise d'une façon naturelle la théorie des congruences de droites dans E_3. Dans ce but, il faudra créer une théorie des congruences de droites à connexion euclidienne, c'est-à-dire des variétés $E^2_{1,3}$, et appliquer ensuite cette théorie à la géométrie intérieure des congruences de droites dans E_n. Je remarque pour compléter que la théorie des variétés $E^2_{0,3}$ qui sont surfaces focales d'une variété $E^2_{1,3}$, est étudiée dans la première partie de mon travail [16], cf. aussi [17]. Le travail [13] contient des résultats concernant les variétés $P^2_{1,3}$, le travail [14] étudie les variétés $P^2_{1,3}$ plongées dans une variété $P^4_{1,3}$ fixée.

Remarque. Il faut avertir qu'il n'est pas possible de considérer la théorie de la congruence générale de droites à connexion euclidienne comme la géométrie intérieure d'une congruences L dans E_n. En effet, soit $E^2_{1,3}$ donnée par les équations

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}N = \tau^\alpha J_\alpha\,, \quad \mathrm{d}J_\alpha = \tau_\alpha^\beta J_\beta\,, \quad \tau_\alpha^\beta + \tau_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3)\,, \\
\tau^\alpha = \varrho^\alpha \tau_1^2 + \sigma^\alpha \tau_1^3\,, \quad \tau_2^3 = \gamma \tau_1^2 + \varepsilon \tau_1^3\,, \quad [\tau_1^2 \tau_1^3] \neq 0\,.
\end{gathered}
\tag{117}
$$

Si (117) provient par normalisation naturelle de la congruence de droites (98), il doit y avoir des formes ω^i, ω_i^j telles que

$$
\begin{gathered}
\omega^1 = \tau^1\,, \quad \omega^2 = \tau^2\,, \quad \omega^3 = \tau^3\,, \quad \omega_1^2 = \tau_1^2\,, \quad \omega_1^3 = \tau_1^3\,, \quad \omega_2^3 = \tau_2^3\,, \\
\omega^\alpha = a^\alpha \tau_1^2 + b^\alpha \tau_1^3\,, \quad \omega_1^\alpha = 0 \quad (\alpha = 4, \ldots, n)
\end{gathered}
\tag{118}
$$

et les équations (98) sont complètement intégrables. La différentiation extérieure des équations (118) donne

$$(119)\qquad [d\tau^1] = -[\tau^2\tau_1^2] - [\tau^3\tau_1^3]\,,$$
$$[d\tau_1^2] = -[\tau_1^3\tau_2^3]\,,\quad [d\tau_1^3] = [\tau_1^2\tau_2^3]\,,$$

$$(120)\qquad [\tau_1^2\omega_2^\alpha] + [\tau_1^3\omega_3^\alpha] = 0\,,\quad \sum_{\alpha=4}^{n}[\omega_2^\alpha\omega_3^\alpha] + (.)[\tau_1^2\tau_1^3] = 0\,,$$

$$[\tau_1^2(da^\alpha + \sum_{\beta=4}^{n} a^\beta\omega_\beta^\alpha)] + [\tau_1^3(db^\alpha + \sum_{\beta=4}^{n} b^\beta\omega_\beta^\alpha)] + (.)[\tau_1^2\tau_1^3] = 0\,,$$

$$\sum_{\alpha=4}^{n}[(a^\alpha\tau_1^2 + b^\alpha\tau_1^3)\,\omega_2^\alpha] + (.)[\tau_1^2\tau_1^3] = 0\,,$$

$$\sum_{\alpha=4}^{n}[(a^\alpha\tau_1^2 + b^\alpha\tau_1^3)\,\omega_3^\alpha] + (.)[\tau_1^2\tau_1^3] = 0\,.$$

La congruence (117) ne peut donc pas être arbitraire, mais elle doit satisfaire à (119).

Bibliographie

[1] *E. Bompiani*: Topologia differenziale I—V. Rend. Acc. Lincei, (8) *8*, 1950, 3—8, 8—15, 81—86, 169—175, 271—275.

[2] *E. Bortolotti*: Connessioni nelle varietà luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette. Rend. Cagliari, *3*, 1933, 81—89.

[3] *E. Bortolotti*: Geometria differenziale affine delle congruenze di rette. Rend. Cagliari, *4*, 1934, 1—18.

[4] *E. Cartan*: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris 1937.

[5] *E. Čech*: Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I. Čas. pěst. mat., *74*, 1949, 32—46.

[6] *С. П. Фиников*: Теория конфуэнций. Москва-Ленинград, 1950.

[7] *R. König*: Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Jahresbericht d. Deutsch. Math. Verein., 1920, *28*, 213—228.

[8] *L. Muracchini,* Sulla applicibilità proiettiva delle superficie negli spazi à connessione proiettiva à tre dimensioni. Чех. мат. журнал, *5* (*80*), 1955, 274—288.

[9] *A. Nijenhuis,* On the holonomy groups of linear connections. II. Properties of general linear connection. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, *57*, *A*, N° 1, 17—25; Indagationes math., 1954, *16*, N° 1, 17—25.

[10] *L. Schlesinger*: Parallelverschiebung und Krümmungstensor. Math. Annalen, *99*, 413—434.

[11] *J. A. Schouten*: Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1926, *L*, 142—169.

[12] *C. Segre*: Preliminari di una teorie delle varietà luoghi di spazi. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, *XXX*, 87—121.

A. Švec: Sulla teoria delle congruenze di rette. Boll. UMI, (3) *12*, 1957, 446—457.

[14] *A. Švec*: Congruence de droites dans les espaces réglés à connexion projective, Чех. мат. журнал, *7* (*82*), 1957, 96–114.

[15] *A. Švec*: L'élément linéaire projectif d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective. Чех. мат. журнал, *8* (*83*), 1958, 285—291.

[16] *A. Švec*: Congruences de droites dans E_n. Чех. мат. журнал, *8* (*83*), 1958, 552—562.

[17] *A. Švec*: Remarque sur le tenseur de torsion de l'espace à connexion euclidienne à trois dimensions (en tcheque). Čas. pěst. mat., *84*, 1959, 46—49.

[18] *A. Švec*: Congruences de droites à connexion projective. Ann. Polonici Math., *VIII* (1960), 291—322.

[19] *J. H. C. Whitehead*: On linear connections. Trans. Amer. Math. Soc., 1930, *33*, 191—209.

[20] *J. H. C. Whitehead, B. V. Williams*: A theorem on linear connections. Ann. of Math., 1930, *31*, 151—157.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ СО СВЯЗНОСТЬЮ В НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Многообразие с аффинной связностью $A^r_{p,n}$ ($0 \leqq p \leqq n$; $0 < r$) мы определяем так: Пусть задана r-мерная область параметров Ω_r, пусть каждой ее точке $(\xi) \equiv (\xi^1, \ldots, \xi^r)$ сопоставлено n-мерное аффинное пространство $A_n(\xi)$ (т. наз. локальное пространство) и его подпространство $A_p(\xi)$ (т. наз. центр), пусть каждой дуге $\Gamma \subset \Omega_r$ с концевыми точками $({}^1\xi)$, $({}^2\xi)$ сопоставлено аффинное соответствие A_Γ: $A_n({}^1\xi) \to A_n({}^2\xi)$. Если в каждом локальном пространстве выбрать базис $\{M; J_1, \ldots, J_n\}$ так, что $\{M; J_1, \ldots, J_p\}$ базис центра, то связность дана (подобно тому, как и для пространств аффинной связности) уравнениями (6).[1]) Объект связности Γ^α_a, $\Gamma^\beta_{a\alpha}$ изменяется при изменениях параметров (7) и локальных базисов (9) согласно (12), (13); объект кручения (14) и тензор кривизны (15) преобразуются согласно (16), (17). В случае $S^\alpha_{ab} = R^\alpha_{ab\beta} = 0$ будет $A^r_{p,n}$ многообразием ∞^r пространств A_p в A_n. Мы назовем $(p/q;\ u/v)$-тензором на $A^r_{p,n}$ совокупность функций, которые преобразуются согласно (22); ковариантной производной $(p/q;\ 0/0)$-тензора назовем $(p/q;\ 0/1)$-тензор (23). Указывается геометрический смысл тензора $\nabla_a v^\alpha$. Если $A^r_{n,p}$ обладает евклидовой связностью (т. е. если на нем дан тензор $g_{\alpha\beta}$, для которого имеет место (34)), то мы получаем тождества (36). Дается геометрическое определение векторов Киллинга, охарактеризованных уравнением (42).

[1]) Для индексов имеем $\alpha, \ldots = 1, \ldots, n$; $a, \ldots = 1, \ldots,$; $A, \ldots = 1, \ldots, p$; $i, \ldots = 0, \ldots, n$.

Аналогично можно определить многообразия с проективной связностью $P^r_{p,n}$ уравнениями (44) при условии, что точки $A_0, \ldots, A_p$ являются базисом центра. Показано, каким образом можно из такого многообразия построить дальнейшие многообразия того же типа. По нашему мнению исследование многообразий $S^{r*}_{p*,n}$, погруженных в $S^r_{p,n}$ ($S = A, P, \ldots$), нужно было бы провести по следующему плану: 1. изучение многообразий общего вида $S^{r*}_{p*,n}$; 2. исследование многообразий $S^{r*}_{p*,n}$ в некоторых классах многообразий $S^r_{p,n}$; 3. вопросы погружаемости многообразия $S^{r*}_{p*,n}$ в $S^r_{p,n}$. Сказанное выше документируется на теории поверхностей в трехмерном пространстве проективной связности. Локальные реперы поверхности (т. е. многообразия $P^2_{0,3}$) можно специализировать так, что имеет место (70). Формы (73), (74) (где β и γ даны уравнениями (71)) и функция h (т. наз. кручение) инвариантны. Указан геометрический смысл кручения и равенств $h = \pm 1, \beta = 0, \gamma = 0$. Определяется дуализация π^* поверхности π, проективный линейный элемент которой имеет вид (84). Две поверхности связаны проективным изгибанием, если и только если их проективные линейные элементы равны между собой. На основании этой теоремы опровергается утверждение Мураккини (Muracchini) в [8] о том, что каждая поверхность трехмерного пространства проективной связности состоит в проективном изгибании второго порядка с поверхностью проективного пространства.

Наконец исследуются двухпараметрические системы L прямых в E_n. Значительную роль играют квазифокальные поверхности, определенные так: Если луч $p(u, v)$ конгруэнции образован точками $M(u, v) + tJ(u, v)$, то поверхность $F = M(u, v) + t(u, v)\, J(u, v)$ будет квазифокальной, если проекция касательной плоскости поверхности (F) в точке $F(u, v)$ в пространство $\eta_3(u, v)$ (образованное точкой $M(u, v)$ в векторами $J(u, v)$, $J_u(u, v)$, $J_v(u, v)$) в направлении вполне перпендикулярного к η_3 пространства $\eta_{n-4}(u, v)$ проходит через прямую p. Показано, каким образом можно каждой системе L сопоставить многообразие $E^2_{1,3}$, геометрию которого мы называем внутренней геометрией системы L.