Jan Mařík; Miloš Ráb

Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x) \cdot y$ im nichtoszillatorischen Fall

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 4, 501–522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100431

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN VON LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' = A(x) . y$ IM NICHTOSZILLATORISCHEN FALL

JAN MAŘÍK, Praha und MILOŠ RÁB, Brno

Eingelangt am 26. Juni 1959; in neuer Bearbeitung eingelangt am 14. Dezember 1959

Mit einfachen Mitteln werden verschiedene Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x) . y$ im Intervall $\langle a, \infty)$ abgeleitet, und zwar unter der einzigen Voraussetzung, daß jede nichttriviale Lösung nur endlichviele Nullstellen hat. Unter weiteren Voraussetzungen über die Funktion A wird dann ein Satz bewiesen, der eine Reihe von asymptotischen Formeln anzugeben ermöglicht.

EINLEITUNG

Mit den asymptotischen Eigenschaften von Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad y'' = A(x) . y , \quad A(x) \quad \text{stetig für} \quad a \leqq x < \infty ,$$

befaßten sich schon mehrere Autoren. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Fall, daß $A(x)$ für große x „angenähert konstant" ist, gewidmet; die in dieser Richtung erreichten Ergebnisse sind Spezialfälle allgemeiner Sätze über Systeme von linearen Differentialgleichungen.

Bei der Anwendung von Methoden, welche für eine Differentialgleichung 2. Ordnung spezifisch sind, zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen dem oszillatorischen und nichtoszillatorischen Fall, wo die Ergebnisse etwas tiefer sind. Das wird hauptsächlich dadurch verursacht, daß in diesem Fall jede nichttriviale Lösung y in einem Intervall $\langle b, \infty)$ von Null verschieden ist, so daß man einige Integralidentitäten, in welchen y im Nenner steht, benutzen kann. In dieser Weise werden im 1. Kapitel manche Eigenschaften von Lösungen der Gleichung (1) ohne weitere Voraussetzungen über $A(x)$ abgeleitet.

Trotzdem zeigt sich eine gewisse Analogie zwischen den Ergebnissen, die im oszillatorischen und nichtoszillatorischen Fall erreicht wurden; das betrifft besonders die asymptotischen Formeln für die Lösungen. In der letzten Zeit erschienen einige Arbeiten ([1], [2], [4], [11], [14], [15]), in welchen asymptotische Formeln für Lösungen der Gleichung (1) im oszillatorischen Fall angegeben sind. Manche von diesen Ergebnissen sind als Spezialfälle im folgenden Satze enthalten ([11], S. 515—516):

Es sei h eine positive Funktion, welche eine stetige 2. Ableitung im Intervall $\langle a, \infty)$ hat und die Bedingung

$$\int_a^\infty |h(x)\, h''(x) - A(x)\, h^2(x) - h^{-2}(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$$

erfüllt. Dann hat die allgemeine Lösung der Gleichung (1) *die Gestalt*

$$y(x) = h(x) \left[y_0 \sin \left\{ \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right],$$

$$y'(x) = h'(x) \left[y_0 \sin \left\{ \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{h(x)} \left[y_0 \cos \left\{ \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{h^2(t)} + \varphi_0 \right\} + o(1) \right].$$

Im 2. Kapitel wird ein analogischer Satz für den nichtoszillatorischen Fall bewiesen und im letzten Kapitel wird eine Reihe von Folgerungen abgeleitet.

1. ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN

1. Bezeichnungen. Es sei E_1 die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen. In der ganzen Arbeit ist $a \in E_1$ und $J = \langle a, \infty)$. Ist q eine nichtnegative ganze Zahl, so bedeutet C_q das System aller reellen Funktionen, welche eine stetige Ableitung q-ter Ordnung in J haben; C_0 ist also die Gesamtheit aller in J stetigen Funktionen. Die Zeichen $\rightarrow$, lim, lim sup usw. beziehen sich immer auf den Fall, daß die unabhängige Veränderliche gegen ∞ strebt. Anstatt $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ werden wir oft einfach $\int_a^b f$ schreiben. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir in Beziehungen wie z. B. „$f'(x) = g(x)$, $f(x) > h(x)$ $(b_1 \leqq x \leqq b)$" das x auslassen und nur „$f' = g$, $f > h$ in $\langle b_1, b_2\rangle$" usw. schreiben.

Wenn $B \in C_0$ ist und wenn jede nichttriviale Lösung der Gleichung

$$y'' = B(x) \,.\, y \tag{2}$$

nur endlichviele Nullstellen in J hat, so nennen wir die Gleichung (2) nichtoszillatorisch. Es sei weiter A eine fest gewählte Funktion aus C_0; im 1. Kapitel werden wir voraussetzen, daß die Gleichung (1) nichtoszillatorisch ist. Anstatt „Lösung der Gleichung (1)" werden wir oft nur „Lösung" sagen.

2. Lemma. *Es sei $f \in C_0$, $f > 0$ und $I = \int_a^\infty f^{-2} < \infty$. Wenn wir $F(x) = \int_x^\infty f^{-2}$, $g = fF$, $G(x) = I^{-1} + \int_a^x g^{-2}$ setzen, so ist $FG = 1$, $\int_a^\infty g^{-2} = \infty$.*

Beweis. Es ist $(F^{-1})' = -F'F^{-2} = (fF)^{-2} = g^{-2} = G'$, $F^{-1} = G + c$, $c = (F(a))^{-1} - G(a) = 0$, also $FG = 1$, $\lim G = \lim F^{-1} = \infty$ und $\int\limits_a^\infty g^{-2} = \infty$.

3. Lemma. *Es sei $g \in C_0$, $g > 0$ und $\int\limits_a^\infty g^{-2} = \infty$. Wir setzen $G(x) = c + \int\limits_a^x g^{-2}$ ($c \in E_1$), $f = gG$. Für jedes x mit $G(x) > 0$ gelten dann die Beziehungen $F(x) = \int\limits_x^\infty f^{-2} < \infty$ und $F(x)\,G(x) = 1$.*

Beweis. Wir wählen ein festes x mit $G(x) > 0$ und für jedes $t > x$ setzen wir $F_1(t) = \int\limits_x^t f^{-2}$. Im Intervall $\langle x, \infty)$ haben wir dann $-(G^{-1})' = G'G^{-2} = (gG)^{-2} = f^{-2} = F_1'$, $F_1 = c_1 - G^{-1}$, $c_1 = F_1(x) + G^{-1}(x) = G^{-1}(x)$. Aus $G \to \infty$ folgt nun $F(x) = \lim F_1 = c_1 = G^{-1}(x)$.

4. Bemerkung. Sind u, v beliebige Lösungen von (1), so ist $W = u'v - uv'$ eine Konstante; es ist genau dann $W = 0$, wenn u, v linear abhängig sind. Wenn u im Intervall $\langle b, \infty)$ keine Nullstelle hat, so ist die Funktion $w(x) = u(x) \int\limits_b^x \frac{1}{u^2}$ eine Lösung in $\langle b, \infty)$.

5. Definition. Es sei v eine Lösung. Wir sagen, daß v eine Hauptlösung ist, wenn es eine Zahl $b \geqq a$ gibt mit der Eigenschaft, daß $v(x) \neq 0$ für jedes $x \geqq b$ ist und daß das Integral $\int\limits_b^\infty v^{-2}$ divergiert.

Bemerkung. Den Begriff der Hauptlösung („principal solution") haben P. Hartman und A. Wintner ([7], S. 481) eingeführt. Die Existenz einer Hauptlösung hat P. Hartman ([5], S. 703) bewiesen; einige Eigenschaften der Hauptlösungen haben P. Hartman und A. Wintner ([8], S. 633) abgeleitet.

6. Satz. *Wenn eine Lösung in $\langle b, \infty)$ keine Nullstelle hat, so gibt es eineHauptlösung, die in $\langle b, \infty)$ auch keine Nullstelle hat.*

Beweis. Es sei u eine Lösung mit $u(x) \neq 0$ für $x \geqq b$. Wir können annehmen, daß $\int\limits_b^\infty u^{-2} < \infty$ ist. Dann ist nach Lemma 2 die Funktion $v(x) = u(x) \int\limits_x^\infty u^{-2}$ eine Hauptlösung und es ist offenbar $v \neq 0$ in $\langle b, \infty)$.

7. Satz. a) *Es existiert eine Hauptlösung und je zwei Hauptlösungen sind linear abhängig.* b) *Es seien u, v nichttriviale Lösungen und es sei $u(x)\,v(x) \neq 0$ für $x \geqq b$. Dann ist die Funktion $\frac{u}{v}$ in $\langle b, \infty)$ monoton und der Grenzwert $\lim \frac{u}{v}$ ist genau dann unendlich, wenn v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung ist. Setzen wir noch $W = u'v - uv'$, so gelten in diesem Fall die Beziehungen $\lim \frac{u}{Wv} = \infty$ und $\int\limits_b^\infty \frac{W}{uv} = \infty$.*

Beweis. In $\langle b, \infty)$ hat man $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{W}{v^2}$, also

$$\frac{u(x)}{v(x)} = c + \int_b^x \frac{W}{v^2} .$$

Wenn v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung ist, so haben wir $W \neq 0$, $\frac{u(x)}{W\, v(x)} = \frac{c}{W} + \int_b^x \frac{1}{v^2} \to \infty$ und aus den Beziehungen $\left(\log\left|\frac{u}{v}\right|\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{W}{uv}$, $\left|\frac{u}{v}\right| \to \infty$ folgt leicht $\int_b^\infty \frac{W}{uv} = \infty$. Damit ist b) bewiesen.

Die Existenz einer Hauptlösung folgt aus Satz 6. Ist nun v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung, so gilt

$$\frac{u(x)}{W} = v(x)\left(\frac{c}{W} + \int_b^x \frac{1}{v^2}\right)$$

und nach Lemma 3 ist u keine Hauptlösung.

8. **Definition.** Es sei $\mathfrak{F}_A$ die Menge aller Funktionen $\frac{uv}{W}$, wo v eine Hauptlösung, u eine von v unabhängige Lösung und $W = u'v - uv'$ ist.

Bemerkung. Auf Grund von Satz 7 gibt es zu jedem $f \in \mathfrak{F}_A$ ein $b \geqq a$ derart, daß $f > 0$ in $\langle b, \infty)$ und $\int_b^\infty f^{-1} = \infty$ ist.

9. **Satz.** *Es sei f eine Funktion aus $\mathfrak{F}_A$ und w eine Hauptlösung. Dann ist $\mathfrak{F}_A$ die Gesamtheit aller Funktionen der Gestalt $f + cw^2$ $(c \in E_1)$.*

Beweis. Es seien u, v unabhängige Lösungen, v eine Hauptlösung, $W = u'v - uv'$, $f = \frac{uv}{W}$. Es sei $f_1 \in \mathfrak{F}_A$, $f_1 = \frac{u_1 v_1}{W_1}$, wo u_1, v_1, W_1 ähnliche Eigenschaften haben. Es gibt Zahlen α, β, γ mit $u_1 = \alpha u + \beta v$, $v_1 = \gamma v$, $\alpha\gamma \neq 0$. Es ist leicht zu sehen, daß $W_1 = \alpha\gamma W$ und $f_1 = \frac{\alpha\gamma uv + \beta\gamma v^2}{\alpha\gamma W} = f + \frac{\beta}{\alpha W} v^2$ ist. Weiter gibt es ein δ mit $v = \delta w$; demnach ist $f_1 = f + cw^2$ mit $c = \frac{\beta\delta^2}{\alpha W}$.

Ist umgekehrt ein $c \in E_1$ gegeben, so haben wir offensichtlich $f + cw^2 = \frac{(\delta^2 u + Wcv)\, v}{\delta^2 W} \in \mathfrak{F}_A$.

10. Satz. *Es sei $B \in C_0$, $B \leqq A$ und die Gleichung* (2) *sei nichtoszillatorisch. Es sei weiter v eine Hauptlösung von* (1), *V eine Hauptlösung von* (2), *$V \neq 0$ in* (b, ∞), $b_1 > b$, $f \in \mathfrak{F}_A$, $F \in \mathfrak{F}_B$, $F(b_1) \geqq 0$. *Dann ist*

$$v \neq 0\,, \quad \left|\frac{V}{v}\right|' \geqq 0 \quad in \quad (b, \infty)\,, \tag{3}$$

$$F > 0\,, \quad \left(\frac{F - f}{v^2}\right)' \geqq 0 \quad in \quad (b_1, \infty) \tag{4}$$

und

$$\liminf \frac{F}{f} \geqq 1\,.$$

Beweis. Es sei $x_0 > b$ und es sei y eine nichttriviale Lösung von (1) mit $y(x_0) = 0$. Weil V in $\langle x_0, \infty)$ keine Nullstelle hat, ist nach dem Sturmschen Vergleichungssatz $y \neq 0$ in (x_0, ∞); nach Satz 6 ist auch $v \neq 0$ in (x_0, ∞). Da aber x_0 nur der Bedingung $x_0 > b$ unterworfen ist, haben wir $v(x) \neq 0$ für alle $x > b$. Wir können also voraussetzen, daß die beiden Funktionen v, V in (b, ∞) positiv sind.

Es sei nun u eine durch die Bedingungen $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = \dfrac{1}{v(x_0)}$ bestimmte Lösung von (1). Es ist $u'v - uv' = u'(x_0)\, v(x_0) = 1$ und $u(x) > 0$ für $x > x_0$; in (x_0, ∞) haben wir daher $\left(\dfrac{v}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}$, $\dfrac{v(x)}{u(x)} = c + \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{u^2}$. Weil aber nach Satz 7 $c = \lim \dfrac{v}{u} = 0$ ist, erhalten wir die Relation

$$v(x) = u(x) \int_x^\infty \frac{1}{u^2}\,. \tag{5}$$

Wenn wir noch eine Lösung U von (2) durch die Bedingungen $U(x_0) = 0$, $U'(x_0) = \dfrac{1}{V(x_0)}$ bestimmen, so gilt natürlich auch

$$V(x) = U(x) \int_x^\infty \frac{1}{U^2}\,. \tag{6}$$

Wir setzen nun $g = u'U - uU'$. Es ist $g(x_0) = 0$; in $\langle x_0, \infty)$ gilt $g' = u''U - - uU'' = (A - B)\, uU \geqq 0$ und folglich auch $g \geqq 0$. Daraus ergibt sich leicht, daß $\left(\dfrac{u}{U}\right)' \geqq 0$ in (x_0, ∞) ist. Für $x_0 < x < t$ bekommen wir also

$$\frac{u(x)}{U(x)} \leqq \frac{u(t)}{U(t)}\,,$$

so daß $\left(\dfrac{u(x)}{u(t)}\right)^2 \leqq \left(\dfrac{U(x)}{U(t)}\right)^2$ ist; aus (5) und (6) folgt jetzt

$$(7) \qquad u(x)\,v(x) = \int_x^\infty \left(\frac{u(x)}{u(t)}\right)^2 \mathrm{d}t \leqq \int_x^\infty \left(\frac{U(x)}{U(t)}\right)^2 \mathrm{d}t = U(x)\,V(x)\,.$$

Für jedes $x > x_0$ gilt weiter

$$(8) \qquad \frac{u(x)}{U(x)} \geqq \lim_{t \to x_0+} \frac{u(t)}{U(t)} = \frac{u'(x_0)}{U'(x_0)} = \frac{V(x_0)}{v(x_0)}\,;$$

(7) und (8) liefern die Ungleichung

$$(9) \qquad \frac{V(x_0)}{v(x_0)} \leqq \frac{V(x)}{v(x)}\,.$$

Weil x_0, x beliebige Punkte mit $b < x_0 < x$ sind, ist (3) bewiesen.

Da $uv \in \mathfrak{F}_A$ ist, gibt es nach Satz 9 ein c mit $f = uv + cv^2$; es ist offenbar $c = \dfrac{f(x_0)}{v^2(x_0)}$, also

$$(10) \qquad f = uv + f(x_0) \left(\frac{v}{v(x_0)}\right)^2.$$

Ebenso gilt

$$(11) \qquad F = UV + F(x_0) \left(\frac{V}{V(x_0)}\right)^2.$$

Ist $F(x_0) \geqq 0$, so haben wir nach (11) $F > 0$ in (x_0, ∞). Es ist also $F > 0$ in (b_1, ∞). Für $b_1 < x_0 < x$ gilt daher wegen (7), (9), (10), (11) $F(x) - f(x) \geqq F(x_0) \left(\dfrac{V(x)}{V(x_0)}\right)^2 - f(x_0) \left(\dfrac{v(x)}{v(x_0)}\right)^2 \geqq F(x_0) \left(\dfrac{v(x)}{v(x_0)}\right)^2 - f(x_0) \left(\dfrac{v(x)}{v(x_0)}\right)^2$, also $\dfrac{F(x) - f(x)}{v^2(x)} \geqq \dfrac{F(x_0) - f(x_0)}{v^2(x_0)}$. Damit ist auch (4) bewiesen.

Es gibt ein $b_2 > b_1$ derart, daß $f > 0$ in $\langle b_2, \infty)$ ist. Setzen wir $c = \dfrac{F(b_2) - f(b_2)}{v^2(b_2)}$, so ist in (b_2, ∞) $\dfrac{F - f}{v^2} \geqq c$, also $\dfrac{F}{f} \geqq 1 + \dfrac{cv^2}{f} = 1 + \dfrac{cv^2 W_1}{u_1 v_1}$, wo v_1 eine Hauptlösung, u_1 eine von v_1 unabhängige Lösung, $W_1 = u_1' v_1 - u_1 v_1'$ und $\dfrac{u_1 v_1}{W_1} = f$ ist. Nach Satz 7 ist aber $\dfrac{v}{v_1} =$ konst., $\dfrac{v}{u_1} \to 0$, also $\dfrac{cv^2 W_1}{u_1 v_1} \to 0$. Daraus folgt die Beziehung $\liminf \dfrac{F}{f} \geqq 1$.

11. Satz. *Es sei v eine Hauptlösung und u eine von v unabhängige Lösung der Gleichung* (1). *Wir setzen $W = u'v - uv'$, $f = \dfrac{uv}{W}$. Dann gibt es zu jedem $f_1 \in \mathfrak{F}_A$ ein $c \in E_1$ derart, daß in einem Intervall (b, ∞) die Beziehungen*

$$(12) \qquad f_1 = f\left[1 + c\,\frac{v}{u}\right],$$

$$(13) \qquad f_1' = f'\left[1 + c\,\frac{v}{u}\right] - c\,\frac{v}{u}$$

bestehen, und es gilt

$$(14) \qquad \limsup |f_1'| = \limsup |f'| \,.$$

Beweis. Nach Satz 9 gibt es ein $c_1 \in E_1$ mit $f_1 = f + c_1 v^2$. Wenn wir $c = c_1 W$ setzen, so haben wir $f\left[1 + c\,\frac{v}{u}\right] = f + \frac{uv}{W} \cdot c_1 W \cdot \frac{v}{u} = f + c_1 v^2 = f_1$ und $f_1' = f'\left[1 + c\,\frac{v}{u}\right] + \frac{uv}{W} \cdot c \cdot \frac{-W}{u^2} = f'\left[1 + c\,\frac{v}{u}\right] - c\,\frac{v}{u}$. Damit ist (12) und (13) bewiesen. Da aber nach Satz 7 $\frac{v}{u} \to 0$ ist, folgt (14) leicht aus (13).

12. Definition. Es sei $B \in C_0$. Wir nennen die Gleichung (2) regelmäßig, wenn sie nichtoszillatorisch ist und wenn es ein $f \in \mathfrak{F}_B$ mit

$$(15) \qquad \limsup |f'| < 1$$

gibt.

Bemerkung. Wenn (15) für ein $f \in \mathfrak{F}_A$ gilt, so gilt (15) nach Satz 11 für alle $f \in \mathfrak{F}_A$.

13. Satz. *Es sei v eine Hauptlösung, u eine von v unabhängige Lösung und die Gleichung* (1) *sei regelmäßig. Dann bestehen die Beziehungen*

$$(16) \qquad 0 < \liminf |u'v| \leqq \limsup |u'v| < \infty \,,$$

$$(17) \qquad 0 < \liminf |uv'| \leqq \limsup |uv'| < \infty \,,$$

$$(18) \qquad \lim u = \lim u' = \pm \infty \,,$$

$$(19) \qquad \lim \frac{1}{v} = \lim \frac{-1}{v'} = \pm \infty \,.$$

Ist u_1 eine weitere von v unabhängige Lösung, so gilt

$$(20) \qquad \lim \frac{u_1'}{u'} = \lim \frac{u_1}{u} \,.$$

Beweis. Setzen wir $W = u'v - uv'$, $f = \frac{uv}{W}$, so ist

$$(21) \qquad 2u'v = W(1 + f') \,, \quad -2uv' = W(1 - f') \,.$$

Auf Grund von (15) und (21) gibt es eine Zahl $b \geqq a$ und positive Zahlen c_j derart, daß in $\langle b, \infty)$ die Relationen

$$c_1 < \frac{u'v}{W} < c_2 \,, \quad c_3 < \frac{-uv'}{W} < c_4$$

bestehen. Insbesondere ist in $\langle b, \infty)$ $uvu'v' \neq 0$; da nach Satz 7 $\frac{u}{Wv} \to \infty$ ist, gilt in $\langle b, \infty)$

$$uu' = \frac{u'v}{W} \cdot \frac{uW}{v} > 0\,, \quad vv' = -\frac{-uv'}{W} \cdot \frac{vW}{u} < 0\,.$$

Wegen $(v^2)' = 2vv' < 0$ gilt $|v| \to \lambda$ mit $\lambda = \inf_{x \geqq b} |v(x)|$. Gesetzt, es sei $\lambda > 0$. Dann bestehen in $\langle b, \infty)$ die Beziehungen $|u'| \leqq \frac{c_2|W|}{|v|} \leqq \frac{c_2|W|}{\lambda}$ und $|u(x)| \leqq \leqq |u(b)| + (x - b)\frac{c_2|W|}{\lambda}$; also ist $\int_b^\infty |u^{-1}| = \infty$ und auf Grund von $|v'| \geqq \frac{c_3|W|}{|u|}$ erhalten wir $\int_b^\infty |v'| = \infty$, was vermöge $\int_b^\infty |v'| = |\int_b^\infty v'| = |\lim v - v(b)| < \infty$ nicht zutrifft. Mithin ist $v \to 0$; daraus folgt $|u'| \geqq \frac{c_1|W|}{|v|} \to \infty$, $|u| \to \infty$, $|v'| \leqq \leqq \frac{c_4|W|}{|u|} \to 0$ und wegen $uu' > 0$, $vv' < 0$ gilt (18) und (19).

Schließlich haben wir $u_1 = \alpha u + \beta v$, also $\frac{u_1'}{u'} = \alpha + \beta \frac{v'}{u'} \to \alpha = \lim \frac{u_1}{u}$, womit auch (20) bewiesen ist.

14. Bemerkung. Aus (18) und (19) folgt, daß jede Lösung einer regelmäßigen Gleichung in einem Intervall $\langle b, \infty)$ monoton ist. Eine positive Lösung y ist dann abnehmend oder wachsend, je nachdem y eine Hauptlösung ist oder nicht.

15. Satz. *Es sei $h \in C_2$, $h > 0$; wir setzen*

$$B = \frac{h''}{h} + \frac{1}{h^4}\,, \tag{21}$$

$$H(x) = \int_a^x h^{-2} \quad (x \in J)\,. \tag{22}$$

Dann bilden die Funktionen $he^{\pm H}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung (2) *und he^{-H} ist genau dann eine Hauptlösung von* (2), *wenn die Beziehung*

$$\int_a^\infty h^{-2} = \infty \tag{23}$$

besteht; unter der Bedingung (23) *ist*

$$\frac{h^2}{2} \in \mathfrak{F}_B\,. \tag{24}$$

Die Relation

$$\limsup |hh'| < 1 \tag{25}$$

besteht dann und nur dann, wenn (23) *gilt und* (2) *regelmäßig ist.*

Beweis. Es ist $(he^{\pm H})'' = \left[\left(h' \pm \frac{1}{h}\right) e^{\pm H}\right]' = \left[h'' \mp \frac{h'}{h^2} + \left(h' \pm \frac{1}{h}\right)\left(\pm \frac{1}{h^2}\right)\right] .$ $. e^{\pm H} = \left(h'' + \frac{1}{h^3}\right) e^{\pm H} = Bhe^{\pm H}$; die Funktionen $U = he^{H}$, $V = he^{-H}$ sind also Lösungen von (2). Setzen wir noch $W = U'V - UV'$, so bekommen wir

$$W = (h'e^H + \frac{1}{h} e^H)\, he^{-H} - he^H(h'e^{-H} - \frac{1}{h} e^{-H}) = 2 .$$

Nach Satz 7 ist V genau dann eine Hauptlösung, wenn der Grenzwert $\lim \frac{U}{V} =$ $= \lim e^{2H}$ unendlich ist; dafür ist aber die Bedingung (23) notwendig und hinreichend. Wenn also (23) gilt, so hat man $\frac{h^2}{2} = \frac{UV}{W} \in \mathfrak{F}_B$ und wegen $\left(\frac{h^2}{2}\right)' = hh'$ ist (2) dann und nur dann regelmäßig, wenn (25) gilt.

Wenn umgekehrt (25) erfüllt ist, so haben wir $h^2(x) = h^2(a) + \int_a^x 2hh' \leqq$ $\leqq c_1 + c_2(x - a)$; daraus folgt leicht (23). Damit ist alles bewiesen.

16. Satz. *Es seien u, v unabhängige Lösungen von* (1), $W = u'v - uv'$; *die Funktion $\frac{uv}{W}$ sei positiv in $\langle b, \infty)$. Setzen wir*

$$h(x) = \sqrt{\frac{2u(x)\, v(x)}{W}}, \quad H(x) = \int_b^x \frac{W}{2uv} \quad (x \geqq b)\,,$$

so gilt

$$h'' = Ah - h^{-3} \tag{26}$$

und es gibt Zahlen c, d derart, daß in $\langle b, \infty)$ die Beziehungen

$$u = che^{H}\,, \quad v = dhe^{-H} \tag{27}$$

bestehen.

Beweis. Es ist $\left(\log \left|\frac{u}{v}\right|\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = 2H'$, $\log \left|\frac{u}{v}\right| = c_1 + 2H, \frac{u}{v} = c_2 e^{2H}$, $uv = c_3 h^2$; daraus folgt leicht (27). Setzen wir jetzt $U = he^H$, so ist $A = \frac{U''}{U}$ und nach Satz 15 gilt die Beziehung $\frac{U''}{U} = \frac{h''}{h} + \frac{1}{h^4}$. Damit ist auch (26) bewiesen.

17. Satz. *Es sei $f \in \mathfrak{F}_A$, $f > 0$ in $\langle b, \infty)$. Setzen wir $h(x) = \sqrt{2f(x)}$, $H(x) =$ $= \int_b^x \frac{1}{2f}$ $(x \geqq b)$, so ist*

$$H \to \infty\,, \tag{28}$$

es gilt (26) *und die Funktionen* $he^{\pm H}$ *bilden ein Fundamentalsystem von* (1) *in* $\langle b, \infty)$; he^{-H} *ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Es sei v eine Hauptlösung, u eine von v unabhängige Lösung, $W = u'v - uv'$, $f = \frac{uv}{W}$. Nach Satz 7 gilt (28) und das Übrige folgt aus Satz 16.

2. ASYMPTOTISCHE FORMELN

18. Lemma. (Siehe A. Wintner, [13], S. 55.) *Es sei* $p \in C_1$, $q \in C_0$, $p > 0$, $\int_a^\infty \frac{1}{p(x)} \left(\int_a^x |q| \right) \mathrm{d}x < \infty$. *Dann gibt es eine Funktion* $\varphi \in C_2$ *mit den Eigenschaften*

$$(p\varphi')' = q\varphi\,, \quad \varphi \to 1\,. \tag{29}$$

Beweis. Wir wählen ein $b > a$ derart, daß $\int_b^\infty \frac{1}{p(x)} \left(\int_b^x |q| \right) \mathrm{d}x < \frac{1}{2}$ ist, bestimmen eine Funktion $z \in C_2$ durch die Bedingungen $z(b) = 1$, $z'(b) = 0$, $(pz')' = qz$ und setzen $f(x) = 1 + \max\limits_{b \leqq t \leqq x} |z(t) - 1|$. Es ist $p(x)\, z'(x) = \int_b^x qz$ und $|z(t)| \leqq f(x)$ $(b \leqq t \leqq x)$; daraus folgt

$$\frac{|z'(x)|}{f(x)} \leqq \frac{1}{p(x)} \int_b^x |q|\,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die obere Ableitung $\bar{f}$ höchstens gleich $|z'|$ ist, und wegen $\overline{\log f} = \frac{\bar{f}}{f} \leqq \frac{|z'|}{f}$ gilt $\log f(x) \leqq \int_b^x \frac{|z'|}{f} \leqq \int_b^\infty \frac{1}{p(x)} \left(\int_b^x |q| \right) \mathrm{d}x < \frac{1}{2}$, $f(x) < \sqrt{e}$, $\int_b^\infty |z'| < \frac{\sqrt{e}}{2}$, $\lim z = z(b) + \int_b^\infty z' > 1 - \frac{\sqrt{e}}{2} > 0$. Jetzt setzen wir $\varphi = (\lim z)^{-1}.\, z$.

19. Bezeichnung. Es seien f, g Funktionen in J. Dann bedeutet das Symbol $f \sim g$, daß es eine Funktion φ in J gibt, welche die Bedingungen

$$f = \varphi g\,, \quad \varphi \to 1$$

erfüllt.

20. Satz. *Es sei* $B \in C_0$, *die Gleichung* (2) *sei nichtoszillatorisch,* V *sei eine Hauptlösung und* U *eine von* V *unabhängige Lösung der Gleichung* (2). *Weiter setzen wir voraus, daß* A *die Bedingung*

$$\int_a^\infty |A - B|\, UV < \infty \tag{30}$$

erfüllt. Dann ist auch die Gleichung (1) *nichtoszillatorisch und es gibt ein Fundamentalsystem* u, v *von* (1) *mit*

$$u \sim U\,, \quad v \sim V\,; \tag{31}$$

v *ist eine Hauptlösung.*

Die Gleichung (1) *ist genau dann regelmäßig, wenn* (2) *regelmäßig ist. Wenn in diesem Fall* y *und* Y *Lösungen von* (1) *und* (2) *mit* $y \sim Y$ *sind, so gilt auch*

$$y' \sim Y'\,. \tag{32}$$

Beweis. Wir können annehmen, daß U und V in einem Intervall $\langle b, \infty)$ positiv sind und daß $V(x) = U(x) \int_x^\infty U^{-2}$ für $x \geqq b$ ist. Setzen wir $p = U^2$, $q = (A - B)\, U^2$, so gilt $\displaystyle\int_b^\infty \frac{1}{p(t)} \left(\int_b^t |q(x)|\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_b^\infty |q(x)| \left(\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{p(t)} \right) \mathrm{d}x = \int_b^\infty |A(x) - B(x)|\, U(x)\, V(x)\, \mathrm{d}x < \infty$. Es gibt also eine Funktion φ mit den Eigenschaften (29) und wegen $0 = p\varphi'' + p'\varphi' - q\varphi = U^2\varphi'' + 2UU'\varphi' + (B - A)\, U^2\varphi$ haben wir $U\varphi'' + 2U'\varphi' = (A - B)\, U\varphi$, $(U\varphi)'' = U''\varphi + 2U'\varphi' + U\varphi'' = U''\varphi + (A - B)\, U\varphi = AU\varphi$, so daß $u = U\varphi$ eine Lösung von (1) ist.

Wir wählen nun ein $b_1 \geqq b$ derart, daß $u(x) > 0$ für $x \geqq b_1$ ist, und setzen

$$v(x) = u(x) \int_x^\infty u^{-2}\,, \quad \psi(x) = \frac{v(x)}{V(x)} \qquad (x \geqq b_1)\,.$$

Dann ist v eine Hauptlösung von (1) und es gilt $\psi(x) = \dfrac{u(x)}{U(x)} \cdot \dfrac{\int_x^\infty u^{-2}}{\int_x^\infty U^{-2}} \to 1$; damit ist (31) bewiesen.

Nunmehr setzen wir voraus, daß die Gleichung (2) regelmäßig ist. Nach Satz 13 gibt es Zahlen $b_2 \geqq b_1$, $\delta > 0$ derart, daß in $\langle b_2, \infty)$ die Ungleichungen

$$U' > 0,\ V' < 0,\ U'V \geqq \delta$$

gelten. Somit ist in $\langle b_2, \infty)$

$$u' = U'\varphi + U\varphi' = U' \left(\varphi + \frac{U\varphi'}{U'} \right). \tag{33}$$

Zunächst wollen wir zeigen, daß

$$\frac{U\varphi'}{U'} \to 0 \tag{34}$$

ist. Es sei also $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $b_3 \geqq b_2$ mit

$$\int_{b_3}^\infty |A - B|\, UV\varphi < \varepsilon\delta\,. \tag{35}$$

Jetzt wählen wir ein $x > b_3$. Nach (29) ist $[p\varphi']_{b_3}^x = \int\limits_{b_3}^x q\varphi$, d. h.

$$U^2(x)\,\varphi'(x) = U^2(b_3)\,\varphi'(b_3) + \int\limits_{b_3}^x (A - B)\,U^2\varphi\,.$$

Dividieren wir dies durch $U(x)\,U'(x)$, so erhalten wir

$$\frac{U(x)\,\varphi'(x)}{U'(x)} = \frac{U^2(b_3)\,\varphi'(b_3)}{U(x)\,U'(x)} + \frac{1}{U(x)\,U'(x)} \int\limits_{b_3}^x (A - B)\,U^2\varphi\,. \tag{36}$$

Für jedes $t \in (b_3, x)$ ist

$$\frac{V(t)}{U(t)} = \int\limits_t^\infty U^{-2} > \int\limits_x^\infty U^{-2} = \frac{V(x)}{U(x)}\,,$$

also

$$\frac{U(t)}{U(x)} < \frac{V(t)}{V(x)}\,, \quad \frac{|A(t) - B(t)|\,U^2(t)\,\varphi(t)}{U(x)\,U'(x)} \leqq \frac{|A(t) - B(t)|\,U(t)\,\varphi(t)}{U'(x)} \cdot \frac{V(t)}{V(x)} \leqq$$

$$\leqq \frac{|A(t) - B(t)|\,U(t)\,V(t)\,\varphi(t)}{\delta}\,.$$

Auf Grund von (35) bekommen wir nun die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{U(x)\,U'(x)} \int\limits_{b_3}^x (A - B)\,U^2\varphi\right| \leqq \int\limits_{b_3}^x \frac{|A(t) - B(t)|\,U^2(t)\,\varphi(t)}{U(x)\,U'(x)}\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\delta} \int\limits_{b_3}^x |A - B|\,UV\varphi \leqq \varepsilon\,,$$

so daß wegen (36)

$$\left|\frac{U(x)\,\varphi'(x)}{U'(x)}\right| \leqq \frac{|U^2(b_3)\,\varphi'(b_3)|}{U(x)\,U'(x)} + \varepsilon$$

ist. Nach Satz 13 hat man aber $UU' \to \infty$; für alle genügend große x ist demnach $\left|\dfrac{U(x)\,\varphi'(x)}{U'(x)}\right| < 2\varepsilon$. Damit ist (34) bewiesen.

Wenn wir jetzt $\lambda = \varphi + \dfrac{U\varphi'}{U'}$ setzen, so ist $\lambda \to 1$ und nach (33) haben wir $u' = U'\lambda$. Da $u'v - uv' = U'V - UV' = 1$ ist, so gilt $uv' = u'v - U'V + {}$ $+ UV'$ und folglich

$$\frac{v'}{V'} = \frac{u'v - U'V + UV'}{uV'} = \frac{U'V\lambda\psi - U'V + UV'}{UV'\varphi} = \frac{U'V}{UV'} \cdot \frac{\lambda\psi - 1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}\,.$$

Weil nach Satz 13 die Beziehung $\limsup \left|\dfrac{U'V}{UV'}\right| < \infty$ besteht, haben wir $\dfrac{v'}{V'} \to 1$; so kommt

$$u' \sim U'\,, \quad v' \sim V'\,.$$

Es sei nun $y = c_1 u + c_2 v$, $Y = c_3 U + c_4 V$, $y \sim Y$. Wir können uns auf den Fall $|c_3| + |c_4| > 0$ beschränken. Es ist $\frac{U}{V} \to \infty$ und nach Satz 13 haben wir $\frac{U'}{V'} \to -\infty$. Ist $c_3 = 0$, so gilt $c_4 \neq 0$ und $\frac{y}{Y} = \frac{c_1}{c_4} \cdot \frac{u}{U} \cdot \frac{U}{V} + \frac{c_2}{c_4} \frac{v}{V}$. Aus $\frac{y}{Y} \to 1$ folgt jetzt $c_1 = 0$, $c_2 = c_4$ und $\frac{y'}{Y'} = \frac{v'}{V'} \to 1$. Ist $c_3 \neq 0$, so haben wir $\frac{y}{Y} =$

$$= \frac{\frac{c_1 u}{c_3 U} + \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{V}{U}}{1 + \frac{c_4}{c_3} \cdot \frac{V}{U}} \to \frac{c_1}{c_3}\,,$$ also $c_1 = c_3$. Daraus ergibt sich

$$\frac{y'}{Y'} = \frac{c_1 u' + c_2 v'}{c_3 U' + c_4 V'} = \frac{\frac{u'}{U'} + \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{v'}{V'}\,\frac{V'}{U'}}{1 + \frac{c_4}{c_3} \cdot \frac{V'}{U'}} \to 1.$$

Damit ist (32) bewiesen.

Wir setzen jetzt $f = uv$, $F = UV$. Dann ist $f \in \mathfrak{F}_A$, $F \in \mathfrak{F}_B$ und $F' = U'V + UV' = 2U'V - 1$, $f' = 2u'v - 1 = 2U'V\lambda\psi - 1$, so daß $\limsup f' = 2 \limsup U'V - 1 = \limsup (2U'V - 1) = \limsup F'$ und ähnlicherweise $\liminf f' = \liminf F'$ ist. Mithin ist auch (1) regelmäßig.

Ist umgekehrt (1) regelmäßig, so folgt aus (30) die Ungleichung $\int\limits_a^\infty |B - A| \,.\, uv < \infty$ und nach dem eben Bewiesenen ist auch (2) regelmäßig. Damit ist der Beweis vollendet.

Bemerkung. Den ersten Teil von Satz 20 hat auch A. Halanay in [16] bewiesen.

21. Satz. *Es sei $h \in C_2$, $h > 0$,*

$$\limsup |hh'| < 1\,, \tag{37}$$

$$\int\limits_a^\infty |hh'' + h^{-2} - Ah^2| < \infty\,. \tag{38}$$

Setzen wir noch $H(x) = \int\limits_a^x h^{-2}$, so ist $H \to \infty$, die Gleichung (1) ist regelmäßig und hat ein Fundamentalsystem u, v mit

$$u \sim he^H\,, \quad v \sim he^{-H}\,,$$

$$u' \sim \frac{1 + hh'}{h} \,.\, e^H\,, \quad v' \sim -\frac{1 - hh'}{h} \,.\, e^{-H}\,;$$

v ist eine Hauptlösung.

Beweis. Es sei $B = \frac{h''}{h} + \frac{1}{h^4}$. Nach Satz 15 ist $H \to \infty$, (2) ist regelmäßig und die Funktionen $U = he^H$, $V = he^{-H}$ bilden ein Fundamentalsystem von (2), wobei V eine Hauptlösung ist. Ferner haben wir $(B - A)\, UV = \left(\frac{h''}{h} + \frac{1}{h^4} - A\right) h^2$, so daß wegen (38) $\int_a^\infty |(A - B)\, UV| < \infty$ ist. Jetzt wenden wir Satz 20 an.

3. FOLGERUNGEN

22. Satz. (Siehe auch [10] und [12].) *Wir setzen* $\log_0 x = x$, $M_0(x) = 1$, $\log_{n+1} x = \log(\log_n x)$, $M_{n+1}(x) = M_n(x) \log_n x$, $Z_n(x) = \sum_{i=1}^n (M_i(x))^{-2}$ *für* $n = 0, 1, \dots$ *(also* $Z_0(x) = 0$*). Wenn für eine nichtnegative ganze Zahl* m *die Beziehung* $\int_a^\infty |M_{m+1}[A + \frac{1}{4} Z_m]| < \infty$ *besteht, dann hat die Gleichung* (1) *ein Fundamentalsystem* u, v *mit* $u \sim \log_m . \sqrt{M_m}$, $v \sim \sqrt{M_m}$; v *ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Die Funktionen $U = \log_m . \sqrt{M_m}$, $V = \sqrt{M_m}$ bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' = -\frac{1}{4} Z_m(x) \,.\, y$; V ist eine Hauptlösung und $UV = M_{m+1}$. Jetzt wenden wir Satz 20 an.

23. Satz. *Es sei* $\alpha > -\frac{1}{4}$, $\beta_j = \frac{1 + \varepsilon_j \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$ $(\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)$. *Wenn die Funktion* A *der Bedingung*

$$\int_a^\infty x \left| A(x) - \frac{\alpha}{x^2} \right| \mathrm{d}x < \infty$$

genügt, dann hat die Gleichung (1) *ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_j(x) \sim x^{\beta_j} \quad (j = 1, 2)\,; \tag{39}$$

y_2 *ist eine Hauptlösung. Wenn* $\alpha > 0$ *ist, so gilt außer* (39) *noch*

$$y_j'(x) \sim \beta_j x^{\beta_j - 1} \quad (j = 1, 2)\,. \tag{40}$$

(Für $\alpha = 0$ siehe E. Hille [9].)

Beweis. Setzen wir $B(x) = \frac{\alpha}{x^2}$, so bilden die Funktionen $z_j(x) = x^{\beta_j}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung (2); z_2 ist eine Hauptlösung und es gilt $z_1(x)\, z_2(x) = x$, $z_1' z_2 - z_1 z_2' = \beta_1 - \beta_2 = \sqrt{1 + 4\alpha}$. Da die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 4\alpha}}$ zu $\mathfrak{F}_B$ gehört, ist für $\alpha > 0$ die Gleichung (2) regelmäßig. Unsere Behauptung folgt nun aus Satz 20.

24. Bemerkung. Die Voraussetzung (38) kann durch die Forderungen

$$\int_a^\infty |hh''| < \infty\,, \tag{41}$$

(42) $$\int_a^\infty |h^{-2} - Ah^2| < \infty$$

erfüllt werden.

25. Satz. *Es seien* $k, s \in E_1$, $k > 0$, $s < \frac{1}{2}$. *Wenn die Funktion* A *der Bedingung*

$$\int_a^\infty x^{-2s}|k^2 - A(x) \,.\, x^{4s}| \,\mathrm{d}x < \infty$$

genügt, dann hat die Gleichung (1) *ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_j(x) \sim x^s \exp\left\{\varepsilon_j \frac{k}{1-2s}\, x^{1-2s}\right\},$$

$$y_j'(x) \sim \varepsilon_j k x^{-s} \exp\left\{\varepsilon_j \frac{k}{1-2s}\, x^{1-2s}\right\} \quad (\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)\,;$$

y_2 *ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Wenn wir $h(x) = \frac{x^s}{\sqrt{k}}$ setzen, so ist $h(x)\, h''(x) = \frac{s(s-1)}{k}\, x^{2s-2}$ und $\frac{1}{h^2(x)} - A(x)\, h^2(x) = \frac{x^{-2s}}{k}\,(k^2 - A(x) \,.\, x^{4s})$. Wir sehen, daß die Bedingungen (41) und (42) erfüllt sind. Weil $h(x)\, h'(x) = \frac{s}{k}\, x^{2s-1} \to 0$ ist, können wir Satz 21 anwenden.

Bemerkung. Für $s = 0$ bekommen wir das bekannte Ergebnis [3]:

Wenn für eine positive Konstante k *die Bedingung* $\int_a^\infty |A(x) - k^2| \,\mathrm{d}x < \infty$ *erfüllt ist, so hat die Gleichung* (1) *ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit* $y_j(x) \sim \sim \exp(\varepsilon_j kx)$, $y_j'(x) \sim \varepsilon_j k \exp(\varepsilon_j kx)$ $(\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)$.

26. Lemma. *Es sei* $h \in C_2$, $h > 0$, $\alpha \in E_1$, $\alpha \neq 1$ *und es gelte*

(43) $$\int_a^\infty |hh'' + \alpha h'^2| < \infty\,.$$

Wenn $\int_a^\infty h'^2 < \infty$ *ist, so haben wir*

(44) $$\int_a^\infty |hh''| < \infty\,,\quad \int_a^\infty h^{-2} = \infty\,,\quad hh' \to 0\,;$$

wenn $\int_a^\infty h'^2 = \infty$ *ist, so gilt*

(45) $$\int_a^\infty h^{-2} < \infty\,,\quad |\alpha| \leqq 1$$

und es ist entweder

(46) $$\alpha = -1\,,\quad 0 < \lim \frac{\log h(x)}{x} = \lim \frac{\log h'(x)}{x} < \infty$$

oder

$$(47)\qquad |\alpha| < 1\,, \quad 0 < \lim \frac{h(x)}{x^{\frac{1}{1+\alpha}}} = (1+\alpha) \lim \frac{h'(x)}{x^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}} < \infty\,.$$

Beweis. Aus der Beziehung

$$(48)\qquad (hh')' = hh'' + \alpha h'^2 + (1-\alpha)\, h'^2$$

ergibt sich die Existenz eines endlichen oder unendlichen Grenzwertes

$$\lim hh' = \lambda$$

und aus $hh' = \left(\frac{h^2}{2}\right)'$ folgt

$$(49)\qquad \lambda = \lim \frac{h^2(x)}{2x} \geqq 0\,.$$

Es sei zunächst

$$(50)\qquad \int_a^\infty h'^2 < \infty\,.$$

Dann ist $\lambda < \infty$ und nach (49) gilt $\int_a^\infty h^{-2} = \infty$. Wäre $\lambda \neq 0$, so hätten wir $\lim x(h'(x))^2 = \lim \frac{x}{h^2(x)} \cdot \lim (h(x)\, h'(x))^2 = \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda^2 \neq 0$, was wegen (50) unmöglich ist. Damit ist (44) bewiesen.

Es sei jetzt $\int_a^\infty h'^2 = \infty$. Dann ist $\lambda = \infty$; in einem Intervall (b, ∞) haben wir demnach

$$(51)\qquad hh' > 1$$

und wegen (48) ist

$$(52)\qquad \alpha < 1\,.$$

Setzen wir $f = \log h'h^\alpha$, so gilt

$$hh'' + \alpha h'^2 = hh' \left(\frac{h''}{h'} + \alpha\, \frac{h'}{h}\right) = hh'f'$$

und auf Grund von (51), (43) erhalten wir $\int_b^\infty |f'| \leqq \int_b^\infty hh'|f'| < \infty$. Daraus folgt die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim f$ und eines positiven endlichen Grenzwertes

$$\lim h'h^\alpha = l\,.$$

Für $\alpha = -1$ ist daher $\lim \frac{\log h(x)}{x} = \lim \frac{h'(x)}{h(x)} = l$, $\log \frac{h'(x)}{x} = \frac{\log h(x)}{x} +$

$+ \dfrac{\log (h'(x)\, h^{-1}(x))}{x} \to l$, so daß die Beziehungen (45) und (46) bestehen. Für $\alpha \neq -1$ ist

$$\lim \frac{h^{1+\alpha}(x)}{(1+\alpha)\, x} = \lim h'(x)\, h^{\alpha}(x) = l\,,$$

also

$$\alpha > -1 \tag{53}$$

und

$$h'(x) \sim \frac{h(x)}{(1+\alpha)\, x}\,.$$

Setzen wir noch $c = (l(1+\alpha))^{\frac{1}{1+\alpha}}$, so ist

$$h(x) \sim c x^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{54}$$

und

$$h'(x) \sim \frac{c}{1+\alpha}\, x^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}\,. \tag{55}$$

Aus (52 —(55) folgt leicht (47); wegen $|\alpha| < 1$ ist $\dfrac{1}{1+\alpha} > \dfrac{1}{2}$ und laut (54) gilt $\int\limits_a^{\infty} h^{-2} < \infty$, so daß auch (45) besteht.

27. Satz. *Es sei* $h \in C_2$, $h > 0$, $\alpha \in E_1$, $\alpha \neq 1$, $\int\limits_a^{\infty} |hh'' + \alpha h'^2| < \infty$, $\int\limits_a^{\infty} |h^{-2} - Ah^2| < \infty$ *und es sei entweder* $|\alpha| > 1$ *oder*

$$\int\limits_a^{\infty} h^{-2} = \infty\,. \tag{56}$$

Dann gilt (56) *und die Gleichung* (1) *hat ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_j \sim h e^{\varepsilon_j H}\,, \quad y_j' \sim \varepsilon_j h^{-1} e^{\varepsilon_j H} \quad (\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ H(x) = \int\limits_a^{x} h^{-2})\,; \tag{57}$$

y_2 *ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Unsere Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 26 und Satz 21.

28. Satz. *Es sei* $k > 0$, $\beta \neq 2$ $(k, \beta \in E_1)$, $A \in C_2$, $A > 0$ *und es gelte*

$$\int\limits_a^{\infty} A^{-3} |AA'' - \beta A'^2| < \infty\,, \quad \int\limits_a^{\infty} |A - k^2| < \infty\,.$$

Dann hat die Gleichung (1) *ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_j(x) \sim A^{-\frac{1}{2}}(x) \exp\left\{\frac{\varepsilon_j}{k}\int\limits_a^{x} A\right\}, \quad y_j'(x) = \varepsilon_j \frac{A^{\frac{1}{2}}(x)}{k} \cdot \exp\left\{\frac{\varepsilon_j}{k}\int\limits_a^{x} A\right\}$$

$$(\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)\,;$$

y_2 *ist eine Hauptlösung.*

Beweis. Setzen wir $h = k^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}$, so ist $h^{-2} - Ah^2 = k^{-1}(A - k^2)$, so daß (42) erfüllt ist. Wegen $\int_a^\infty |A - k^2| < \infty$ und $h^{-2} = Ak^{-1}$ gilt $\int_a^\infty A = \infty = \int_a^\infty h^{-2}$. Weiter haben wir $\alpha = 2\beta - 3 \neq 1$ und

$$hh'' + \alpha h'^2 = k\left(\frac{3}{4} A^{-3} A'^2 - \frac{1}{2} A^{-2} A'' + \frac{\alpha}{4} A'^2 A^{-3}\right) = -\frac{k}{2} \cdot A^{-3}(AA'' - \beta A'^2)\,,$$

so daß $\int_a^\infty |hh'' + \alpha h'^2| < \infty$ ist. Jetzt wenden wir Satz 27 an.

29. Lemma. *Es sei g eine beschränkte Funktion aus C_2. Wenn g konvex oder konkav ist, so gilt $\int_a^\infty |g''| < \infty$.*

Beweis. Weil g' monoton ist, existiert ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim g' = l$. Da aber g beschränkt ist, haben wir $l = 0$, so daß $\int_a^\infty |g''| = \left|\int_a^\infty g''\right| = |g'(a)| < \infty$ ist.

30. Satz. *Es sei $h \in C_2$, $h > 0$ und es sei $\int_a^\infty |h^{-2} - Ah^2| < \infty$. Weiter setzen wir voraus, daß eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Die Funktion h ist beschränkt und es gibt ein $\gamma \in (0, 2)$ derart, daß h^γ konvex oder konkav ist.*

2. *Die Funktionen h, h^{-1} sind beschränkt und es gibt ein $\gamma \neq 0$ derart, daß h^γ konvex oder konkav ist.*

3. *Es ist $\int_a^\infty h'^2 < \infty$ und es gibt eine Zahl $\gamma < 0$ derart, daß h^γ konvex ist.*

Dann ist $\int_a^\infty h^{-2} = \infty$ und die Gleichung (1) hat ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit den Eigenschaften (57), wobei y_2 eine Hauptlösung ist.

Beweis. Wegen $(h^\gamma)'' = \gamma h^{\gamma-2}((\gamma - 1)\, h'^2 + hh'')$ haben wir

$$(\gamma - 1)\, h'^2 + hh'' = \gamma^{-1} h^{2-\gamma} (h^\gamma)'' \,. \tag{58}$$

Daraus folgt nach Lemma 29, daß unter der Bedingung 1 die Beziehung

$$\int_a^\infty |(\gamma - 1)\, h'^2 + hh''| < \infty \tag{59}$$

besteht. Weil in diesem Fall offenbar $\int_a^\infty h^{-2} = \infty$ ist, können wir Satz 27 mit $\alpha = \gamma - 1 \neq 1$ anwenden.

Es sei nun die Bedingung 2 erfüllt. Für $(h^\gamma)'' \geqq 0$ ist auch $(h^{2\gamma})'' \geqq 0$; für $(h^\gamma)'' \leqq 0$ ist auch $(h^{\frac{1}{2}\gamma})'' \leqq 0$. Wir können also $\gamma \neq 2$ voraussetzen. Aus (58) und aus Lemma 29 ergibt sich jetzt unsere Behauptung wie oben.

Es sei schließlich $\int\limits_a^\infty h'^2 < \infty$, $\gamma < 0$ und h^γ konvex. Wegen (58) haben wir $\left(\frac{h^2}{2}\right)'' = h'^2 + hh'' = (2-\gamma)\, h'^2 + \gamma^{-1} h^{2-\gamma}(h^\gamma)''$. Wenn $\int\limits_a^\infty h^{2-\gamma}(h^\gamma)'' = \infty$ wäre, so bekämen wir $\left(\frac{h^2}{2}\right)' \to -\infty$, was unmöglich ist; mithin gilt

$$\int\limits_a^\infty |(\gamma - 1)\, h'^2 + hh''| = |\gamma^{-1}| \int\limits_a^\infty h^{2-\gamma}(h^\gamma)'' < \infty$$

und wir können wieder Satz 27 anwenden.

31. Satz. *Es sei $A \in C_2$, $A > 0$. Wir setzen voraus, daß eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:*

a) *Es gibt ein $\beta \neq \frac{3}{2}$ mit $\int\limits_a^\infty |A^{-\frac{3}{2}}A'' - \beta A^{-\frac{5}{2}}A'^2| < \infty$ und es gilt entweder $\beta > \frac{3}{2}$ oder $\beta < 1$ oder $\int\limits_a^\infty A^{\frac{1}{2}} = \infty$.*

b) *Die Funktion A^{-1} ist beschränkt und es gibt ein $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ derart, daß $A^{-\gamma}$ konvex oder konkav ist.*

c) *Die Funktionen A, A^{-1} sind beschränkt und es gibt ein $\gamma \neq 0$ derart, daß A^γ konvex oder konkav ist.*

d) *Es ist $\int\limits_a^\infty A^{-\frac{5}{2}}A'^2 < \infty$ und es gibt ein $\gamma > 0$ derart, daß A^γ konvex ist.*

Dann ist $\int\limits_a^\infty A^{\frac{1}{2}} = \infty$ und die Gleichung (1) hat ein Fundamentalsystem y_1, y_2 mit den Eigenschaften

$$y_j(x) \sim A^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\{\varepsilon_j \int\limits_a^x A^{\frac{1}{2}}\}, \quad y_j'(x) \sim \varepsilon_j\, A^{\frac{1}{4}}(x) \exp\{\varepsilon_j \int\limits_a^x A^{\frac{1}{2}}\}$$

$(\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)$; y_2 ist eine Hauptlösung.

Beweis. Setzen wir $\alpha = 4\beta - 5$, so gilt $\beta \in (1, \frac{3}{2})$ genau dann, wenn $|\alpha| < 1$ ist. Für $h = A^{-\frac{1}{4}}$ bekommen wir jetzt

$$hh'' + \alpha h'^2 = -\tfrac{1}{4}A^{-\frac{5}{2}}(-\tfrac{5}{4}A'^2 + AA'') + \frac{\alpha}{16}A^{-\frac{5}{2}}A'^2 = -\tfrac{1}{4}(A^{-\frac{3}{2}}A'' - \beta A^{-\frac{5}{2}}A'^2).$$

Da $h^{-2} = A^{\frac{1}{2}}$, $h'^2 = \frac{1}{16}A^{-\frac{5}{2}}A'^2$ und $h^{-2} - Ah^2 = 0$ ist, können wir Satz 27 und 30 anwenden.

Bemerkung 1. Für $\beta = \frac{3}{2}$ haben P. Hartman und A. Wintner den folgenden Satz bewiesen ([6], S. 82):

Es sei $A \in C_2$, $A > 0$, $A'A^{-\frac{3}{2}} \to 0$, $\int_a^\infty A^{\frac{1}{2}} = \infty$ *und*

$$(60) \qquad \int_a^\infty |A''A^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}A'^2A^{-\frac{5}{2}}| < \infty\,.$$

Dann hat die Gleichung (1) *ein Fundamentalsystem* y_1, y_2 *mit*

$$y_j(x) \sim A^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\{\varepsilon_j \int_a^x A^{\frac{1}{2}}[1 + \tfrac{1}{16}A'^2A^{-3}]^{\frac{1}{2}}\} \quad (\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1)\,.$$

Anstatt $A \in C_2$ *und* (60) *kann man auch nur* $A \in C_1$, $\int_a^\infty |\mathrm{d}(A'A^{-\frac{3}{2}})| < \infty$ *voraussetzen.*

Bemerkung 2. Der Fall $(A^{-\gamma})'' \geqq 0$ $(0 < \gamma < \frac{1}{2})$ wird von V. Doležal in [4], S. 454 behandelt.

Literatur

[1] *F. V. Atkinson*: Asymptotic formulae for linear oscillations. Proceedings Glasgow Math. Association *3* (1957), 105—111.

[2] *R. Bellman*: Boundedness of the solutions of second order linear differential equations. Duke Math. J. *22* (1955), 511—513.

[3] *M. Bôcher*: On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic. Trans. Amer. Math. Soc. *1* (1900), 40—52.

[4] *V. Doležal*: Asymptotické vzorce pro řešení diferenciální rovnice $y'' + f(t)\,y = 0$, Časopis pro pěst. mat. *83* (1958), 4, 451—465.

[5] *P. Hartman*: Differential equations with non-oscillatory solutions. Duke Math. J. *15* (1948), 697—709.

[6] *P. Hartman, A. Wintner*: Asymptotic integrations of linear differential equations, Amer. J. Math. *77* (1955), 45—86.

[7] *P. Hartman, A. Wintner*: On the assignment of asymptotic values for the solutions of linear differential equations of second order. Amer. J. Math. *77* (1955), 475—483.

[8] *P. Hartman, A. Wintner*: Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations. Amer. J. Math. *71* (1949), 627—649.

[9] *E. Hille*: Non oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 234—252.

[10] *Л. Д. Николенко:* Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)\,y = 0$. Докл. Акад. наук СССР *110* (1956), 6, 929—931.

[11] *M. Ráb*: Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + A(x)\,y = 0$. Чех. мат. журнал *8* (*83*) (1958), 513—519.

[12] *M. Ráb*: Poznámka k otázce o oscilačních vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$. Časopis pro pěst. mat. *82* (1957), 342—348.

[13] *A. Wintner*: Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range, Duke Math. J. *15* (1948), 55—67.

[14] *A. Wintner*: On the normalization of characteristic differentials in continuous spectra. Physical Review. *72* (1947), 516—517.

[15] *M. Zlámal*: Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Чех. мат. журнал *6* (*81*), 1956, 75—93.

[16] *A. Halanay*: Comportarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiitor de ordinul al doilea de tip neoscilator, Comunicările Acad. Rep. pop. Romîne *9* (1959), 11, 1121—1128.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' = A(x) \, . \, y$ В СЛУЧАЕ НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага и МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

В главе 1 изучается уравнение

$$y'' = A(x)\, y\,, \tag{1}$$

где A — непрерывная в интервале $\langle a, \infty)$ функция, при единственном предположении, что всякое нетривиальное решение уравнения (1) имеет только конечное число корней. Решение y уравнения (1) называется **главным**, если существует такое $b \geqq a$, что $y(x) \neq 0$ для всех $x \geqq b$ и что $\displaystyle\int_b^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y^2(x)} = \infty$. Доказывается, что главное решение всегда существует и что всякое другое главное решение является его кратным.

Символ $\mathfrak{F}_A$ обозначает в дальнейшем систему всех функций вида $\dfrac{uv}{W}$, где v — главное решение, u — от v независимое решение и $W = u'v - uv'$.

Пусть теперь B — непрерывная в интервале $\langle a, \infty)$ функция такая, что $B(x) \geqq A(x)$ для всех $x \geqq a$; пусть v — главное решение уравнения (1), V — главное решение уравнения

$$y'' = B(x)\, y\,. \tag{2}$$

Если $v(x) \neq 0$ для $x > b$, то и $V(x) \neq 0$ для $x > b$, и функция $\left|\dfrac{v}{V}\right|$ является неубывающей в интервале (b, ∞). Если $f \in \mathfrak{F}_A$, $F \in \mathfrak{F}_B$, то $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{F(x)} \geqq 1$.

Скажем, что уравнение (1) **правильно**, если существует $f \in \mathfrak{F}_A$ такое, что $\limsup\limits_{x\to\infty} |f'(x)| < 1$. Пусть, далее, y — нетривиальное решение правильного уравнения. Если решение y главно, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{y(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{y'(x)} = \pm\,\infty$; если y не главно, то $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \pm\,\infty$.

Если f, g — такие функции, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то будем писать $f \sim g$. Основной результат главы 2 можно теперь сформулировать так:

Пусть A, B — непрерывные в интервале $\langle a, \infty)$ функции; пусть уравнение (2) имеет неколеблющиеся решения, пусть U, V — его независимые решения и V — главное решение. Пусть, далее,

$$\int_a^\infty |(A(x) - B(x))\, U(x)\, V(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Тогда существуют независимые решения u, v уравнения (1) такие, что $u \sim U$, $v \sim V$; v — главное решение. Если уравнение (2) правильно и если y, Y — такие решения уравнений (1) и (2), что $y \sim Y$, то имеем также $y' \sim Y'$.

В главе **3** приведены некоторые следствия этой теоремы; наиболее важное из них можно сформулировать следующим образом:

Пусть A — положительная функция с непрерывной второй производной в интервале $\langle a, \infty)$. Предположим, что выполняется какое-нибудь из следующих четырех условий:

1. Существует число $\beta \neq \frac{3}{2}$ такое, что

$$\int_a^\infty |A^{-\frac{3}{2}}(x)\, A''(x) - \beta A^{-\frac{5}{2}}(x)\, A'^2(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

причем или $\beta < 1$, или $\beta > \frac{3}{2}$, или $\int_a^\infty A^{\frac{1}{2}}(x)\, \mathrm{d}x = \infty$.

2. Функция A^{-1} ограничена, и существует такое $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, что функция $(A^{-\alpha})''$ не меняет знака.

3. Функции A, A^{-1} ограничены, и существует такое число $\alpha \neq 0$, что функция $(A^{\alpha})''$ не меняет знака.

4. Имеем $\int_a^\infty A^{-\frac{5}{2}}(x)\, A'^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty$, и существует такое число $\alpha > 0$, что $(A^{\alpha})'' \geqq 0$.

Тогда $\int_a^\infty A^{\frac{1}{2}}(x)\, \mathrm{d}x = \infty$, уравнение (1) правильно и имеет фундаментальную систему y_1, y_2 такую, что

$$y_j(x) \sim A^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\{\varepsilon_j \int_a^x A^{\frac{1}{2}}(t)\, \mathrm{d}t\}\,, \quad y_j'(x) \sim \varepsilon_j A^{\frac{1}{4}}(x) \exp\{\varepsilon_j \int_a^x A^{\frac{1}{2}}(t)\, \mathrm{d}t\}$$

$$(\varepsilon_1 = 1\,, \quad \varepsilon_2 = -1)\,;$$

y_2 — главное решение.