Jurij Michailov Smirnov

Обобщение теоремы Вейерштрасса-Стона на пространства близости

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 4, 493–500

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100430`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА-СТОНА НА ПРОСТРАНСТВА БЛИЗОСТИ

Ю. М. СМИРНОВ, Москва

(Поступило в редакцию 13/II 1960 г.)

Посвящено памяти Э. Чеха

В работе рассматриваются пространства близости, порождаемые (на данном вполне регулярном пространстве) семействами ограниченных непрерывных функций и доказывается теорема Вейерштрасса-Стона для пространств близости.

Известная теорема Гельфанда-Шилова (см. [1]) устанавливает взаимно-однозначное соответствие G между бикомпактными расширениями и подкольцами кольца $C(R)$ всех непрерывных ограничнных функций. Позднее оказалось (см. [2]), что существует и взаимно-однозначное соответствие S между бикомпактными расширениями и пространствами близости. Поэтому существует и взаимно однозначное соответствие $\Phi = GS$ между пространствами близости и подкольцами кольца $C(R)$. Краткий эскиз доказательства этого соответствия Φ дан Фоминым в [3], причем основной упор делается на вывод соответствия S.

Цель этой подробной заметки — доказательство обобщенной теоремы Вейерштрасса-Стона (см. теоремы 3 и 3').

Введем некоторые обозначения: если (в данном пространстве близости) множества A, B близки (далеки), то пишем $A\Delta B$ или, соответственно, $A\bar{\Delta}B$; замыкание подмножества M в топологическом пространстве R обозначается через $[M]$ или $R[M]$. Отображение f общего пространства близости P_1 в общее пространство близости P_2 называется Δ-отображением, если из $A\Delta B$ (в P_1) всегда вытекает $f(A)\ \Delta f(B)$ (в P_2).

Пусть дано вполне регулярное пространство R и па нем кольцо $C(R)$ всех ограниченных непрерывных действительных функций. Подкольцом этого кольца будем называть всякое такое замкнутое подмножество C кольца $C(R)$, что сумма и произведение любых двух его функций принадлежит этому же подмножеству C и что оно содержит все константы.

Лемма 1. *Для любых двух функций f и g подкольца C оно содержит:*
1° *всякий многочлен вида* $a_1 f^n + a_2 f^{n-1} + \ldots + a_{n+1}$,
2° *функцию* $|f|$,
3° $\mathrm{Max}\{f, g\}$ и $\mathrm{Min}\{f, g\}$.

Доказательство. 1. Первое утверждение вытекает из алгебраических условий, накладываемых на подкольцо C. 2. Известно, что функция $|x|$ на любом отрезке равномерно приближается многочленами (см. [4], стр. 18) от x. Поэтому для любой ограниченной функции f функция $|f|$ равномерно приближается многочленами от функции f вида 1°.

3. Легко видеть, что

$$\mathrm{Max}\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{и} \quad \mathrm{Min}\{f, g\} = -\mathrm{Max}\{-f, -g\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых множеств A и B пространства R и для всякого подкольца C, $C \subset C(R)$ следующие условия взаимно эквивалентны:*

а) *существует такая функция $f \in C$, что $E^1[f(A)] \cap E^1[f(B)] = \emptyset$;*

б) *существует функция $f \in C$ и числа a, b такие, что*

$$f(A) \leqq a < b \leqq f(B) \qquad \text{или} \quad f(A) \geqq a > b \geqq f(B) ;$$

в) *существуют функция $f \in C$ и числа a, b, $a \neq b$, такие, что $f(A) = a$, $f(B) = b$;*

г) *существует такая функция $f \in C$, что $0 \leqq f \leqq 1$ и что $f(A) = 0$, а $f(B) = 1$ или $f(A) = 1$, $f(B) = 0$.*

Доказательство. Каждое из данных условий сильнее, чем предыдущее. Докажем, что из условия б) следует условие г). Если выполнено условие б) для функции $f \in C$ и чисел a а b, то для функции $f'(x) = \dfrac{f(x) - a}{b - a}$ будет выполнено условие

$$f'(A) \leqq 0 < 1 \leqq f'(B)$$

(при любом из двух возможных случаев), а для функции $g = f' + |f'| \in C$ будет выполнено условие $g(A) = 0 < 2 \leqq g(B)$. Далее, для функции $g'(x) = 2 - g(x)$ выполняется условие $g'(A) = 2 > 0 \geqq g'(B)$, а для функции $h = \dfrac{g' + |g'|}{4} \in C$ выполняются искомые условия $0 \leqq h \leqq 1$ и $h(B) = 0$, $h(A) = 1$, что и требовалось доказать.

Докажем, что из а) вытекает г): Пусть для функции f из C выполняется условие $E^1[f(A)] \cap E^1[f(B)] = \emptyset$, В силу ее ограниченности эти непересекающиеся замыкания являются компактными и, следовательно, $\varrho(E^1[f(A)], E^1[f(B)]) > 0$. Поэтому существует конечное число таких отрезков $[a_i; a_i']$ и $[b_j; b_j']$, что

$$E^1[f(A)] \subset \bigcup_i [a_i; a_i'], \quad E^1[f(B)] \subset \bigcup_j [b_j; b_j']$$

и

$$\varrho([a_i; a_i'], [b_j; b_j']) > \varepsilon > 0 .$$

Пусть $A_i = f^{-1}([a_i; a_i'])$, а $B_j = f^{-1}([b_j; b_j'])$. Фунсция f разделяет каждое множество A_i от каждого множества B_j в смысле условия б). Поэтому в силу доказанной эквивалентности существуют такие функции $g_{ij} \in C$, что

$$0 \leqq g_{ij} \leqq 1 , \quad g_{ij}(A_i) = 1 , \quad \text{а} \quad g_{ij}(B_j) = 0 .$$

Тогда для функций $g_j = \operatorname*{Max}_i g_{ij} \in C$ имеем: $0 \leqq g_j \leqq 1, g_j(A) = 1 > 0 = g_j(B_j)$, и для функции $g = \operatorname{Min} g_j \in C$ получим, аналогично, что $0 \leqq g \leqq 1$, $g(A) = 1$ и $g(B) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Всякое подкольцо C кольца $C(R)$ порождает на пространстве R общее пространство близости P_C, удовлетворяющее условиям* Б1, Б2, Б3, Б4[1]) *и условию непрерывности* БН) *если $x \in [A]$, то $x\Delta A$.*

Указанное пространство близости определяется, естественно, так, что $A\bar{\Delta}B$, как только A и B разделены некоторой функцией из C в смысле одного из эквивалентных условий а), б), в), г) предыдущей леммы.

Доказательство. Из условия разделимости а) вытекают аксиомы Б1, Б3 и Б4. Из условия г) — аксиома Б2. Из непрерывности функций подкольца C — условие БН. Лемма доказана.

Замечание. Условие БН означает непрерывность тождественного отображения пространства R с данной топологией на то же R, но уже с топологией рассматриваемого общего пространства близости (в этой топологии множество A замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все близкие к себе точки).

Лемма 4. *На всяком общем пространстве близости P, определенном на вполне регулярном пространстве R так, что выполняются аксиомы* Б1, Б2, Б3, Б4, БН, *совокупность $C(P)$ всех ограниченных Δ-функций является подкольцом кольца $C(R)$ в принятом выше смысле; при этом пространство $P_{C(P)}$, порожденное кольцом $C(P)$, совпадает с P.*

Доказательство. Всякая Δ-функция (Δ-отображение) непрерывна в естественной топологии пространства близости P. Значит (в силу свойства БН) она непрерывна и на R. Легко показать, что предел равномерно-сходящейся последовательности Δ-функций (Δ-отображений в метри-

[1]) См. [2], стр. 545.

ческое пространство) является Δ-функцией (Δ-отображением), и что естественное отображение пространства близости P в координатную плоскость E^2, получаемое посредством двух каких-либо Δ-функций f_1 и f_2, является Δ-отображением (это верно в соответствующем смысле даже для произвольного множества Δ-функций). Суперпозиция Δ-отображений также является Δ-отображением. Поэтому (так как сумма $x + y$ и произведение xy равномерно-непрерывны на любом прямоугольнике) сумма и произведение любых двух ограниченных Δ-функций будет Δ-функцией. Наконец, константы суть Δ-функции.

Итак, $C(P)$ является подкольцом кольца $C(R)$. Если $A \bar{\Delta} B$ в пространстве P, то как известно, существует ограниченная Δ-функция f на P такая, что $f(A) = 0$, $f(B) = 1$; следовательно $A \bar{\Delta} B$ в пространстве $P_{C(P)}$. Если $A \bar{\Delta} B$ в пространстве $P_{C(P)}$, то по определению существует функция из $C(P)$, разделяющая A и B в смысле условий из леммы 2; следовательно, $A \bar{\Delta} B$ в пространстве P. Итак, P и $P_{C(P)}$ совпадают. Лемма доказана.

Замечание. Произведение неограниченных Δ-функций может не быть Δ-функцией, например, функция x^2.

Теорема 1. *Любое подкольцо C кольца $C(R)$ совпадает с кольцом $C(P_C)$.*

Доказательство. Если $f \in C$ и множества A и B близки в P_C, то $E^1[f(A)] \cap E^1[f(B)] \neq \emptyset$ по определению близости в P_C (см. условие отделимости а) из леммы 2). Итак, $C \subset C(P_C)$. Для доказательства обратного включения $C(P_C) \subset C$ докажем, что всякая ограниченная Δ-функция на P_C равномерно аппроксимируема функциями из C. Пусть дано Δ-отображение f пространства P_C в некоторый отрезок $[a; b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно и пусть N таково, что $\delta = (b - a)/N < \varepsilon$. Множества

$$f^{-1}[a; a + k\delta] \quad \text{и} \quad f^{-1}[a + (k + 1)\,\delta; b]$$

далеки в пространстве P_C (при $k = 0, 1, \ldots, N - 1$). Поэтому существуют (см. условие г) из леммы 2) функции g_k из C, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, такие, что

$$g_k(f^{-1}[a; a + k\delta)] = 0\,, \quad g_k(f^{-1}[a + (k + 1)\,\delta;\ b] = (k + 1)\,\delta\,,$$
$$0 \leqq g_k \leqq (k + 1)\,\delta\,.$$

Положим $g = \operatorname{Max} g_k$. Тогда по лемме 1 g принадлежит кольцу C. Легко установить, что на множестве $f^{-1}[a + (k - 1)\,\delta;\ a + k\delta]$ имеем $(k - 1)\,\delta \leqq \leqq g \leqq k\delta$; следовательно, $|f - g| \leqq \delta < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Соответствие $C \to P_C$ является взаимно-однозначным и сохраняющим порядок в обе стороны соответствием между совокупностью всех подколец C кольца $C(R)$ (в упомянутом выше смысле) и совокупностью всех пространств близости, получаемых из пространства R с помощью непрерывных отображений.*

Перед доказательством уточним, что мы понимаем под непрерывным образом пространства R. В обычном смысле — это такое пространство близости P, что существует непрерывное отображение f пространства R на пространство P с его естественной топологией. Будем считать, что образы P_1 и P_2 пространства R, взятые вместе со своими непрерывными отображениями f_1: $R \to P_1$ и f_2: $R \to P_2$ удовлетворяют отношению порядка $P_1 \geqq P_2$, если существует такое Δ-отображение φ пространства P_1 на пространство P_2, что суперпозиция φf_1 совпадает на R с отображением f_2. Наконец, будем считать два непрерывных образа P_1 и P_2, взятых вместе со своими отображениями f_1 и f_2, совпадающими, если $P_1 \geqq P_2$, и $P_2 \leqq P_1$. Нетрудно проверить, что в этом случае отображения φ и ψ такие, что $f_2 = \varphi f_1$ и $f_1 = \psi f_2$, взаимно-обратны и, следовательно, образы P_1 и P_2, рассматриваемые как пространства, Δ-гомеоморфны. Мы будем считать два непрерывных образа P_1 и P_2 за один, если существует такой Δ-гомеоморфизм φ, что $f_2 = \varphi f_1$. Другими словами, образы P пространства R мы отождествляем с непрерывными разбиениями пространства R, порожденными непрерывными отображениями и взятыми с их естественной близостью: множества A, B близки (далеки), если близки (далеки) их образы $f(A)$ и $f(B)$ при отображении f. Но это и есть те (общие) пространства близости, которые можно определить так, чтобы они удовлетворяли аксиомам Б1, Б2, Б3, Б4, БН на пространстве R (разные точки могут оказаться близкими). Обратное получить просто: объединив в одну все близкие между собой точки, мы получим настоящее пространство близости, являющееся непрерывным образом пространства R; элементами соответствующего разбиения будут являться классы близких между собой точек. Все аксиомы близости будут выполнены. Наконец, порядок, который мы ввели для пространств близости, являющихся непрерывными образами пространства, совпадает с естественным порядком таких общих пространств близости, определенных на R, по которому считается, что $P_1 \geqq P_2$, если всякие два множества A, B близкие в P_1, близки и в P_2, т. е. если тождественное отображение пространства R на себя является Δ-отображением пространства P_1 на P_2.

Доказательство. В силу этих соображений нужно лишь доказать, что соответствие $C \to P_C$, принимаемое только в определенном леммой 3 смысле, является взаимно-однозначным соответствием между всеми подкольцами C и всеми пространствами близости, которые возможно определить на R так, чтобы выполнялись аксиомы Б1, Б2, Б3, Б4, БН (без T_1).

Из леммы 4 вытекает, что это соответствие является соответствием ,,на''. Если $P_C = P_{C'}$, то $C = C(P_C) = C(P_{C'}) = C'$ (в силу теоремы 1). Если $C \geqq C'$ (т. е. $C \supset C'$), то легко видеть, по условиям разделения, что и $P_C \geqq P_{C'}$; значит, если $C > C'$, то $P_C > P_{C'}$. Наконец, если $P \geqq P'$, то очевидно, $C(P) \geqq C(P')$; по лемме 4 имеем $P = P_{C(P)}$, $P' = P_{C(P')}$.

Включение $C(P_C) \subset C$, доказываемое во второй части доказательства теоремы 1, можно усилить в виде следующего обобщения известной теоремы Стона:

Теорема 3. *Если семейство ограниченных непрерывных функций пространства R порождает некоторую близость P, с помощью самого слабого условия разделения а), то всякая Δ-функция на полученном общем пространстве близости равномерно аппроксимируется многочленами от функций данного семейства.*

Доказательство. Наименьшее подкольцо $C = \tilde{D}$ (в нашем смысле) кольца $C(R)$ всех непрерывных ограниченных функций на R, содержащее заданное семейство D и есть как раз замыкание в $C(R)$ множества всех многочленов от функций семейства D. Нетрудно видеть, что семейство D содержится в $C(P_D)$, где P_D — порожденное этим семейством общее пространство близости. Поэтому и $\tilde{D} \subset C(P_D)$. Но так как и D и $C(P_D)$ порождают одно и то же пространство P_D, то $\tilde{D}$ и $C(P_D)$ порождают одно и то же P_D. Значит, $C(P_D) = \tilde{D}$.

Следствие. *Если в подкольце C кольца $C(R)$ некоторое семейство функций D порождает то же общее пространство близости P_C (в смысле условия а)), то всякая функция из C равномерно аппроксимируется многочленами семейства D, т. е. $\tilde{D} = C$.*

Наконец, возможно дальнейшее усиление теоремы 3.

Всякое непустое семейство D ограниченных непрерывных функций с помощью условия разделения а) порождает на пространстве R некое семейство пар далеких множеств (каждая пара состоит из прообразов при некотором отображении каких-нибудь двух далеких множеств прямой). Существует минимальное общее пространство близости P_D, в котором эти пары множеств остаются далекими (см. [5], стр. 62). Будем говорить, что это пространство P_D порождено семейством D.

Теорема 3′. *Если семейство D ограниченных непрерывных функций порождает общее пространство близости P_D в указанном выше смысле, то всякая Δ-функция на этом пространстве равномерно аппроксимируется многочленами от функций семейства D.*

Доказательство. Так как два множества считаются далекими в P_D, если они разделены в смысле а) некоторой функцией из семейства D, то всякая функция f из D является Δ-функцией. Итак, снова имеем $D \subset \tilde{D} \subset$ $\subset C(P_D)$. Пространство близости $P_{\tilde{D}}$, порожденное подкольцом $\tilde{D}$, удовлетворяет отношению $P_{\tilde{D}} \leqq P_D$, а так как P_D есть наименьшее из возможных общих пространств близости, в которых пары множеств, разделенных функциями семейства D, остаются далекими, то $P_{\tilde{D}} = P_D$ и $\tilde{D} = C(P_D)$, что и требовалось доказать.

В заключение найдем те подкольца кольца $C(R)$, которые соответствуют (общим) пространствам близости, совместимым с пространством R, т. е. тем (общим) пространствам близости, топология которых совпадает с данной топологией пространства R.

Теорема 2'. *Пространствам близости, совместимым с топологией данного вполне регулярного пространства R (аксиома T_1 не обязательна) соответствуют те подкольца, которые разделяют точки от не содержащих их замкнутых множест, точнее говоря, подкольца удовлетворяющие следующему условию разделения:*

БТ) *Для любой точки и любого не содержащего ее замкнутого множества пространства R в подкольце C существует функция, разделяющая (в любом из четырех смыслов а), б), в), г)) данную точку от данного множества.*

Доказательство предоставляется читателю.

Литература

[1] *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов:* ,,Коммутативные нормированные кольца''. Успехи матем. наук, *1*, в. 2 (12), 1946, 48—146.

[2] *Ю. М. Смирнов:* ,,О пространствах близости'', Матем. сб. т. *31*, № 3, 1952, 543—574.

[3] *С. В. Фомин:* ,,К вопросу о связи между пространствами близости и бикомпактными расширениями''. Доклады АН СССР, т. *121*, № 2, 1958, 236—238.

[4] *L. H. Loomis*: An introduction to abstract harmonic analysis, 1953 (перевод: *Л. Люмис:* Введение в абстрактный гармонический анализ, Москва, 1956).

[5] *Ю. М. Смирнов:* ,,Исследования по общей и равномерной топологии''. Докторская диссертация, Москва, 1957.

Summary

GENERALIZATION OF THE STONE-WEIERSTRASS THEOREM TO PROXIMITY SPACES

YU. M. SMIRNOV, Moscow

Let R be a completely regular topological space. Then $C(R)$ will denote the ring of all bounded continuous (real-valued) functions on R; a subring $C \subset C(R)$ will always be a closed ring containing all constants. A generalized (i. e. without any separations axioms) proximity space P (on the set R) will be said to be generated by a set $D \subset C(R)$ and will be denoted P_D, provided $A \bar{\delta} B$ (in P) if and only if the closures of $f(A)$, $f(B)$ are disjoint for some $f \in D$. Clearly, every

subring $C \subset C(R)$ generates a generalized proximity space P_C. If P is a generalized proximity space, then $C(P)$ will denote the ring of all bounded Δ-functions on P (if P_1, P_2 are generalized proximity spaces, then a mapping f of P_1 into P_2 is called, as usually, a Δ-mapping if $f(A) \, \Delta \, f(B)$ in P_2 whenever $A \, \Delta \, B$ in P_1).

Theorem 1. *If $C \subset C(R)$ is a subring, then $C = C(P_C)$.*

Consider the class of all pairs P, f where P is a proximity space, f is a continuous mapping of R onto P. Let P_1, f_1 and P_2, f_2 be identified whenever there is a Δ-homeomorphism φ such that $f_2 = \varphi f_1$; we obtain a collection which will be called the family of all proximity spaces derived (continuously) from R. There is a natural one-to-one correspondence between this family and the family of all generalized proximity spaces on the set R such that $x \, \Delta \, A$ whenever x is a cluster point of A in R. This family will be considered with its usual order ($P_1 \geqq P_2$ if and only if $A \, \Delta \, B$ in P_1 implies $A \, \Delta \, B$ in P_2), and this order will be transferred, by the above correspondence, to the family of all proximity spaces derived from R. Finally, the collection of all subrings of $C(R)$ is taken with its inclusion order.

Theorem 2. *The correspondence $C \to P_C$ is a one-to-one order-preserving mapping of the collection of all subrings $C \subset C(R)$ onto the family of all proximity spaces continuously derived from R.*

Theorem 2′. *Let $C \subset C(R)$ be a subring. Then the topology of P_c coincides with that of R if and only if, for any $x \in R$ and any closed $F \subset R$ not containing x, some $f \in C$ separates x from F.*

Theorem 3. *If a set $D \subset C(R)$ generates a generalized proximity space P, then every Δ-function on P can be uniformly approximated by polynomials of functions from D.*

Theorem 3′. *Let $D \subset C(R)$ be non-void; denote P_D the set R endowed with the minimal generalized proximity structure under which $A \, \overline{\Delta} \, B$ whenever, for some $f \in D$, the closures of $f(A)$, $f(B)$ are disjoint. Then every Δ-function on P_D can be uniformly approximated by polynomials of functions from D.*