Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jůza

Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 3, 440–456

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100425`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

SUR LES VARIÉTÉS REPRÉSENTANT UNE GÉNÉRALISATION DES SURFACES RÉGLÉES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 29 septembre 1959)

Dans cet article, l'auteur étudie les variétés à $(n + 1)$ dimensions qui sont systèmes à une paramètre d'espaces linéaires à n dimensions dans l'espace projectif à $(nk + k - 1)$ dimensions. Il démontre des théorèmes analogues à ceux valables pour les surfaces réglées. Pour terminer, l'auteur envisage (pour $k = 2$) les déformations projectives de telles variétés.

M. E. ČECH a appliqué dans son travail [2] de nouvelles méthodes d'étude des surfaces réglées dans S_3. Il a étudié en détail les surfaces réglées dans S_3 et leurs déformations projectives dans son travail [6]. Il a ensuite généralisé ses résultats au cas des surfaces dans des espaces de dimension impaire ([3], [6], tome II., § 112, pp. 650—655), en se servant de la notion, due à E. BOMPIANI, de quasiasymptotiques, introduite dans le travail [1]. Dans le résumé français au travail [2], il a généralisé quelques résultats au cas des systèmes de ∞^1 d'espaces S_n dans l'espace S_{2n+1}. M. A. ŠVEC a étudié, dans ses travaux [7], [8], des transformations représentant une généralisation des déformations projectives, pour le cas des surfaces dans les espaces de dimension impaire.

Le présent travail a pour but de généraliser certains des résultats précités au cas variétés formé par ∞^1 d'espaces S_n dans des espaces S_{nk+k-1} et d'étudier des déformations projectives de telles vàriétés dans des espaces S_{2n+1}.

1. Supposons que nous ayons, dans un espace projectif à m dimensions, une variété $V_{n,m}$ formée par ∞^1 d'espaces projectifs $S_n(v)$ à n dimensions. Nous appellerons les espaces $S_n(v)$ espaces générateurs. Une variété $V_{n,m}$ pourra être donnée par $(n + 1)$ courbes $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ (telles que pour tout v les points $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ soient linéairement indépendants) comme l'ensemble des points x que l'on peut écrire sous forme de $x = t^i y_i(v)$. [1]) On a alors $S_n(v) =$

[1]) On somme toujours par rapport à un indice figurant une fois comme supérieur et une fois comme inférieur, de zéro à n. Si la sommation doit se faire dans d'autres limites, nous écrirons chaque fois le signe de sommation. Dans tout l'article, nous considérons uniquement des nombres réels et des fonctions réelles de variables réelles, admettant un nombre suffisant de dérivées.

$= [y_0(v), \ldots, y_n(v)]$. Les courbes $y_i(v)$ seront appellées courbes directrices de la variété $V_{n,m}$.

Nous appellerons une variété $V_{n,kn+k-1}$ non-dévéloppable si l'on a

$$(1) \qquad [y_0, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n', \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] \neq 0 .$$

Dans ce qui quit, nous n'envisageons que les variétés non-développables $V_{n,kn+k-1}$, $n \geqq 1$, $k \geqq 2$.

Ayons donc une telle variété $V_{n,kn+k-1}$ déterminée par les courbes directrices $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ et supposons que nous ayons sur cette variété une courbe $x(v) = t^i(v)\, y_i(v)$ passant par le point $x(v_0)$. Tous les espaces p-osculateurs ($1 \leqq p \leqq k - 1$ de la courbe $x(v)$ au point $x(v_0)$ sont situés dans l'espace

$$(2) \quad \Omega(x(v_0)) = [y_0(v_0), \ldots, y_n(v_0), \ldots, y_0^{(k-2)}(v_0), \ldots, y_n^{(k-2)}(v_0), t^i(v_0) y_i^{(k-1)}(v_0)] ,$$

que nous appellerons *espace* $(k - 1)$-*osculateur de la variété* $V_{n,kn+k-1}$ *au point* $x(v_0)$. L'union des espaces $(k - 1)$-osculateurs de tous les points d'un espace générateur est, d'après (1), l'espace S_{kn+k-1} entier.

Si nous avons sur $V_{n,kn+k-1}$ une courbe $x(v)$, alors son espace $(k - 1)$-osculateur en chacun de ses points sera situé dans l'espace correspondant $\Omega(x(v))$; si pour tout v c'est l'espace k-osculateur même de cette courbe au point $x(v)$ qui est situé dans $\Omega(x(v))$, alors nous dirons de la courbe qu'elle est *quasiasymptotique.*[2]) Pour qu'une courbe $x(v) = t^i(v)\, y_i(v)$ soit quasiasymptotique, il faut et il suffit en vertu de (2) que la matrice

$$(y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, t^i y_i^{(k-1)}, t^i y_i^{(k)} + k t^{i\prime} y_i^{(k-1)})$$

soit de rang $(n + 1)(k - 1) + 1$, car

$$x^{(k-1)} = t^i y_i^{(k-1)} + \ldots , \quad x^{(k)} = t^i y_i^{(k)} + k t^{i\prime} y_i^{(k-1)} + \ldots ;$$

il faut donc et il suffit que tous les déterminants

$$A^{jl} = [y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, t^i y_i^{(k-1)} + \\ + k t^{i\prime} y_i^{(k-1)}, y_0^{(k-1)}, \ldots, \widehat{y}_j^{(k-1)}, \widehat{y}_l^{(k-1)} \ldots, y_n^{(k-1)}] , \quad j < l ,$$ [3])

s'annulent. Or

$$A^{jl} = k t^j t^{l\prime} f^{jl} + k t^l t^{j\prime} f^{lj} + t^j t^i g_i^{jl} + t^l t^i g_i^{lj} ,$$

où

$$f^{\alpha\beta} = [y_0, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_\alpha^{(k-1)}, y_\beta^{(k-1)}, y_0^{(k-1)}, \ldots, \widehat{y}_\alpha^{(k-1)}, \widehat{y}_\beta^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] ,$$
$$g_i^{\alpha\beta} = [y_0, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_\alpha^{(k-1)}, y_i^{(k)} , y_0^{(k-1)}, \ldots, \widehat{y}_\alpha^{(k-1)}, \widehat{y}_\beta^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] .$$

---

[2]) Dans le cas des variétés $V_{n,2n+1}$, nous parlerons au lieu de courbes quasiasymptotiques aussi tout simplement de courbes asymptotiques.

[3]) Le symbole $\widehat{y}_j^{(k-1)}$ ou d'autres symboles analogues signifient que la ligne correspondante du déterminant fait défaut.

Si nous posons

$$f = [y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}, y_0^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}] ,$$

$$h_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{f} g_i^{\alpha\beta} ,$$

alors pour $j < l$ nous avons $f^{jl} = (-1)^{j+l-1} . f = - f^{lj}$ et nous voyons que *la courbe $x = t^i y_i$ est quasiasymptotique si et seulement si les fonctions t^α vérifient le système d'équations différentielles*

$$(3) \qquad t^j t^{l\prime} - t^l t^{j\prime} = (-1)^{j+l}\{t^j t^i h_i^{jl} + t^l t^i h_i^{lj}\} , \quad j < l .$$

2. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que *par chaque point de notre variété il passe une et une seule courbe quasiasymptotique.* Dans ce but, nous établirons tout d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *Si le système* (3) *admet $t^0, \ldots, t^n$ pour solution, il admet aussi $\varrho t^0, \ldots, \varrho t^n$, où ϱ est une fonction arbitraire.*

La démonstration de ce lemme se fait par substitution directe.

Avant d'énoncer notre lemme 2 nous établissons les relations que voici:

Si $\alpha < \beta$, alors

$$g_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+1}[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_0^{(k)}, \ldots, \widehat{y_\beta^{(k)}}, \ldots, y_n^{(k)}] ,$$

si $\alpha > \beta$, alors

$$g_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha}[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_0^{(k)}, \ldots, \widehat{y_\beta^{(k)}}, \ldots, y_n^{(k)}] .$$

Si l'on a donc $\alpha < \beta$, $\gamma < \beta$, ou bien $\alpha > \beta$, $\gamma > \beta$, on aura $g_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\gamma} g_i^{\gamma\beta}$, donc aussi $h_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\gamma} h_i^{\gamma\beta}$; si l'on a $\alpha < \beta < \gamma$, ou bien $\gamma < \beta < \alpha$, on aura $g_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\gamma+1} g_i^{\gamma\beta}$, donc aussi $h_i^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\gamma+1} h_i^{\gamma\beta}$.

Choisissons maintenant un nombre entier q, $0 \leqq q \leqq n$, et considérons le système d'équations différentielles:

$$(4a) \qquad t^{j\prime} = (-1)^{j+q+1}\{t^j t^i h_i^{jq} + t^i h_i^{qj}\} \quad \text{pour} \quad j < q ,$$

$$(4b) \qquad t^{l\prime} = (-1)^{l+q}\{t^i h_i^{ql} + t^l t^i h_i^{lq}\} \quad \text{pour} \quad l > q .$$

Lemme 2. *Ayons $(n + 1)$ fonctions $t^0, t^1, \ldots, t^n$, où $t^q \equiv 1$. Les fonctions $t^0, \ldots, t^n$ satisfont au système* (3) *si et seulement si les fonctions $t^0, \ldots, t^{q-1}, t^{q+1}, \ldots \ldots, t^n$ vérifient le système* (4).

Démonstration. I. Il est évident que le système (4) est, sous l'hypothèse de $t^q \equiv 1$, conséquence du système (3).

II. Supposons que les fonctions $t^0, \ldots, t^{q-1}, t^{q+1}, \ldots, t^n$, vérifient le systèmes (4) et calculons $t^j t^{l\prime} - t^l t^{j\prime}$, $j < l$.

a) si $j = q$, ou bien $l = q$, les équations correspondantes du système (3) seront évidemment satisfaites.

b) Soit $j < l < q$. Alors d'après (4a) et en vertu des relations auxiliaires établies ci-dessus, nous avons

$$t^j t^{l'} - t^l t^{j'} = (-1)^{l+q+1}\{t^l t^j t^i h_i^{lq} + t^j t^i h_i^{ql}\} + (-1)^{j+q}\{t^l t^j t^i h_i^{jq} + t^l t^i h_i^{qj}\} =$$
$$= (-1)^{l+q+1}\{t^l t^j t^i h_i^{lq} + (-1)^{j+q+1} t^j t^i h_i^{jl}\} + (-1)^{j+q}\{(-1)^{j+l} t^l t^j t^i h_i^{lq} +$$
$$+ (-1)^{q+l}\, t^l t^i h_i^{lj}\} = (-1)^{j+l}\{t^j t^i h_i^{jl} + t^l t^i h_i^{lj}\}\,,$$

et donc les équations correspondantes du système (3) sont vérifiées.

c) D'une manière analogue, nour trouvons que les équations en question du système (3) sont vérifiées même dans les cas de $j < q < l$ et $q < j < l$; la démonstration du lemme 2 sera par là achevée.

Choisissons maintenant un nombre v_0; nous allons faire voir que *par chaque point $t_0^i y_i(v_0)$ de l'espace $[y_0(v_0), \ldots, y_n(v_0)]$ il passe une et une seule courbe quasi-asymptotique.*

Es effet, soit $t_0^q \neq 0$. Nous multiplions les nombres t_0^i par un facteur scalaire de sorte que nous ayons $t_0^q = 1$. Il existe alors une et une seule solution $t^0(v), \ldots, t^{q-1}(v),\ t^{q+1}(v), \ldots, t^n(v)$ du système (4) vérifiant les conditions initiales $t^i(v_0) = t_0^i$, $i = 0, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n$. En vertu de nos lemmes, $\varrho(v)\, t^0(v), \ldots, \varrho(v)\, t^{q-1}(v),\ \varrho(v),\ \varrho(v)\, t^{q+1}(c), \ldots, \varrho(v)\, t^n(v)$ seront justement toutes les solutions du système (3) qui passent par le point donné. *Par chaque point de la variété $V_{n,kn+k-1}$ il passe donc en effet une et une seule courbe quasiasymptotique.*

Il s'ensuit du théorème démontré qu'*il est possible de prendre les courbes quasiasymptotiques pour courbes directrices $y_0, \ldots, y_n$.*

3. Soit maintenant $y_0, \ldots, y_n$ un système arbitraire de courbes directrices de la variété $V_{n,kn+k-1}$. Comme nous supposons (1) satisfait, il faut que l'on ait

$$y_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} a_{i,l}^j y_j^{(l)}\,. \tag{5}$$

Dans le cas où les y_i sont les courbes quasiasymptotiques, et dans ce cas seulement, nous aurons

$$y_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} a_{i,l}^j y_j^{(l)} + b_i y_i^{(k-1)}\,. \tag{6}$$

A présent, nous allons essayer de simplifier les équations (6) encore davantage en choisissant d'une manière convenable les facteurs scalaires des points y_i.

Supposons que les courbes directrices $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ de la variété $V_{n,kn+k-1}$ soient quasiasymptotiques et que nous ayons

$$\bar{y}_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} \bar{a}_{i,l}^j \bar{y}_j^{(l)} + \bar{b}_i \bar{y}_i^{(k-1)}\,.$$

Considérons un autre système de courbes directrices $y_i = \varrho_i \bar{y}_i$ où les fonctions ϱ_i vérifient les équations différentielles

$$k \frac{\varrho_i'}{\varrho_i} + \bar{b}_i = b \, ,$$

b étant une fonction arbitraire. Alors nous trouvons aisément que

$$y_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} a_{i,l}^j y_j^{(l)} + b y_i^{(k-1)} \, . \tag{7}$$

Nous appellerons *système canonique* tout système de courbes directrices qui vérifie (7). Chaque variété $V_{n,kn+k-1}$ admet donc un système canonique de courbes directrices.

Pour les courbes directrices canoniques on a $g_i^{\alpha\beta} = 0$ pour $i \neq \beta$, $g_\beta^{\alpha\beta} = - g_\alpha^{\beta\alpha}$ (ne pas sommer en α, β), donc aussi $h_i^{\alpha\beta} = 0$ pour $i \neq \beta$, $h_\beta^{\alpha\beta} = - h_\alpha^{\beta\alpha}$ (ne pas sommer), de sorte que les équations du système (3), dont la solution donne les courbes quasiasymptotiques, deviennent

$$t^j t^{l\prime} - t^l t^{j\prime} = 0 \, .$$

Or, ce système a pour solution $t^i =$ const, et en vertu des lemmes 1 et 2, toutes les autres solutions en dérivent par multiplication par un facteur. Si donc le système des courbes directrices est canonique, la courbe $x(v) = t^i(v)\, y_i(v)$ sera quasiasymptotique si et seulement si les rapports des fonctions $t^i(v)$ restent constants.

Supposons par contre que les courbes directrices de la variété $V_{n,kn+k-1}$ soient telles que le courbe $x(v) = t^i y_i(v)$ soit quasiasymptotique dans le cas des t^i constants. Il es évident que les courbes $y_i(v)$ doivent être dans ce cas elles-mêmes quasiasymptotiques, de sorte que (6) est nécéssairement vérifié. Ensuite les courbes $y_j(v) + y_l(v)$ sont aussi quasiasymptotiques, donc la matrice $(y_0, \ldots y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_j^{(k-1)} + y_l^{(k-1)}, y_j^{k)} + y_l^{(k)})$ doit être de rang $(n+1)(k-1)+1$. Or, cela signifie que l'on doit avoir

$$[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_j^{(k-1)} + y_l^{(k-1)}, y_j^{(k)} + y_l^{(k)},$$
$$y_0^{(k-1)}, \ldots, \widehat{y}_j^{(k-1)}, \widehat{y}_l^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] = 0 \, ,$$

d'où nous obtenons en nous servant de (6)

$$(b_l - b_j)[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-2)}, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_j^{(k-1)}, y_l^{(k-1)},$$
$$y_0^{(k-1)}, \ldots, \widehat{y}_j^{(k-1)}, \widehat{y}_l^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] = 0 \, .$$

Il s'en ensuit en vertu de (1) que l'on a $b_l - b_j = 0$ pour tout l, j. Donc (7) a lieu et les courbes directrices sont canoniques.

Le système canonique de courbes directrices $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ est donc caractérisé par le fait que la courbe $x(v) = t^i(v)\, y_i(v)$ est quasiasymptotique si et seulement si les rapports des fonctions $t^i(v)$ restent constants.

Le système canonique de courbes directrices nous définit une homographie entre les espaces générateurs de la variété $V_{n,kn+k-1}$. Cette homographie associe au point $t^i y_i(v_1)$ de l'espace $[y_0(v_1), \ldots, y_n(v_1)]$ le point $t^i y_i(v_2)$ de l'espace $[y_0(v_2), \ldots, y_n(v_2)]$. Cette homographie, manifestement indépendante du choix des courbes directrices canoniques, sera appelée *homographie quasiasymptotique*.

4. Soit maintenant $y_0, \ldots, y_n$ un système canonique de courbes directrices. Définissons les courbes $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ par les relations

$$\bar{y}_i = \alpha_i^j y_j \,, \quad \det(\alpha_i^j) \neq 0 \,. \tag{8}$$

Nous nous posons la question de savoir comment doivent être les fonctions α_i^j pour que les courbes $\bar{y}_i$ forment elles-aussi un système canonique.

Comme le système $y_0, \ldots, y_n$ est canonique, et que les courbes $\bar{y}_i$ doivent être quasiasymptotiques, les rapports des coefficients dans chacune des équations (8) doivent rester constants, donc $\alpha_i^j = \lambda_i^j \varrho_i$, $\lambda_i^j = \text{const}$. Si nous calculons par contre y_i à partir de (8), nous obtenons

$$y_i = \frac{1}{\varrho_0}\,\mu_i^0 \bar{y}_0 + \ldots + \frac{1}{\varrho_n}\,\mu_i^n \bar{y}_n \,,$$

où μ_i^j sont les mineurs de la matrice (λ_i^j) divisés par $\det(\lambda_i^j)$, donc des constantes. Or, les courbes $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ doivent être canoniques et les courbes y_i sont quasiasymptotiques; il en résulte que les rapports des fonctions $\varrho_0, \ldots, \varrho_n$ doivent rester constants. Il faut donc que l'on ait

$$\alpha_i^j = \lambda_i^j \varrho(v) \,, \quad \lambda_i^j = \text{const} \,. \tag{9}$$

Il est évident qu'en multipliant tous les λ_i^j par un facteur convenable (le même pour tous) et en divisant $\varrho(v)$ par le même facteurs nous pouvons obtenir

$$\det(\lambda_i^j) = \pm 1 \,. \tag{10}$$

Par contre, il est clair que tous les systèmes de courbes directrices que l'on peut obtenir à partir d'un système canonique fixe à l'aide de (8) avec (9) et (10) vérifiés, seront canoniques.

Chaque tel changement de système canonique peut être décomposé en deux changements élémentaires:

$$\bar{y}_i = \lambda_i^j y_j \,, \quad \lambda_i^j = \text{const} \,, \quad \det(\lambda_i^j) = \pm 1 \,; \tag{11}$$

$$\bar{y}_i = \varrho y_i \,, \quad \varrho \neq 0 \,. \tag{12}$$

Si nous effectuons le changement (12), nous aurons

$$[\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n, \ldots, \bar{y}_0^{(k-1)}, \ldots, \bar{y}_n^{(k-1)}] = \varrho^{k(n+1)}\,[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] \,.$$

Par un choix convenable de la fonction ϱ nous pouvons donc obtenir un système canonique de courbes directrices $y_0, \ldots, y_n$, pour lequel

$$[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] = \pm 1 \,. \tag{13}$$

Un tel système canonique de courbes directrices sera dit *normalisé*. La normalisation des courbes directrices dépend du systéme de coordonnées dans S_{kn+k-1}, néanmoins il n'y aura pas d'inconvénient.

Si $y_0, \ldots, y_n$ est un système normalisé de courbes directrices, nous obtenons en différentiant (13)

$$[y_0, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_0^{(k)}, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] + \ldots +$$
$$+ [y_0, \ldots, y_n^{(k-2)}, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_{n-1}^{(k-1)}, y_n^{(k)}] = 0 ,$$

donc en vertu de (7)

$$(n+1)\, b[y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] = 0 ,$$

de sorte que $b = 0$.

Dans le cas d'un système normalisé de courbes directrices, les équations (7) deviennent

$$y_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} a_{i,l}^j y_j^{(l)} . \tag{14}$$

De l'autre côté, il est clair que si nous avons un système de fonctions $a_{i,l}^j$, $0 \leqq j \leqq n$, $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq l \leqq k-2$, et que $y_0, \ldots, y_n$ soient des solutions du système (14) qui vérifient la relation (13) pour une certaine valeur initiale alors ce seront aussi des courbes directrices normalisées d'une certaine variété $V_{n,kn+k-1}$. Nous trouvons aisément aussi que les fonctions $a_{i,l}^j$, des équations (14) ne dépendent pas du choix du système de coordonnées dans S_{kn+k-1}.

5. Soit $y_0, \ldots, y_n$ un système normalisé de courbes directrices et soient $\bar{y}_0, \ldots, \ldots, \bar{y}_n$ les courbes définies par la relation (11). Alors on a aussi

$$\bar{y}_i^{(p)} = \lambda_i^j y_j^{(p)} , \quad p = 1, 2, \ldots , \tag{15}$$

de sorte que

$$[\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n, \ldots, \bar{y}_0^{(k-1)}, \ldots, \bar{y}_n^{(k-1)}] = (\det(\lambda_j^i))^k [y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] =$$
$$= \pm [y_0, \ldots, y_n, \ldots, y_0^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}] .$$

Donc, $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ est aussi un système normalisé de courbes directrices. Nous trouvons aisément que nous pouvons passer à l'aide de la relation (11) à n'importe quel système normalisé.

Supposons que (14) soit vérifié par les courbes y_i et que les courbes $\bar{y}_i$ satisfassent d'une manière analogue à

$$\bar{y}_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} \bar{a}_{i,l}^j \bar{y}_j^{(l)} . \tag{16}$$

Nous allons trouver la relation qui existe entre les fonctions $a_{i,l}^j$ et $\bar{a}_{i,l}^j$.

Dans ce but, choisissons des nombres Λ_j^h de telle manière que nous ayons

$$\lambda_i^j \Lambda_j^h = \delta_i^h \tag{17}$$

de sorte qu'en vertu de (11) et (15) nous aurons $y_h^{(p)} = \Lambda_h^i \bar{y}_i^{(p)}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$; il en résultera

$$\bar{y}_j^{(k)} = \lambda_i^\alpha y_\alpha^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_i^\alpha a_{\alpha,l}^\beta y_\beta^{(l)} = \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_i^\alpha a_{\alpha,l}^\beta \Lambda_\beta^j \bar{y}_j^{(l)} ,$$

d'où en comparant avec (16) nous trouverons

$$\bar{a}_{i,l}^j = \lambda_i^\alpha \Lambda_\beta^j a_{\alpha,l}^\beta . \tag{18}$$

6. Soit $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ un système normalisé de courbes directrices. Effectuons un changement de paramètre $v = v(\bar{v})$, (nous ne considérons que de tels changements pour lesquels $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} > 0$, notre variété sera donc orientée.) Les courbes $y_0(v(\bar{v})), \ldots, y_n(v(\bar{v}))$ continuent à être canoniques, mais, en général, elles ne seront plus normalisées. Procédons cependant à la transformation

$$\bar{y}_i(\bar{v}) = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{-\frac{1}{2}(k-1)} y_i(v(\bar{v})) . \tag{19}$$

Les courbes $\bar{y}_i(\bar{v})$ sont de nouveau canoniques et, de plus, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}^p\bar{y}_i}{\mathrm{d}\bar{v}^p} = \frac{\mathrm{d}^p y_i}{\mathrm{d}v^p}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{-\frac{1}{2}(k-1)+p} + \sum_{j<p} (\cdot)\, \frac{\mathrm{d}^j y_i}{\mathrm{d}v^j} ,$$

donc

$$\left[\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}\bar{y}_0}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-1}}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}\bar{y}_n}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-1}}\right] = \left[y_0, \ldots, y_n, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}y_0}{\mathrm{d}v^{k-1}}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}y_n}{\mathrm{d}v^{k-1}}\right] .$$

$$\cdot \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{(n+1)\{-\frac{1}{2}k(k-1)+1+2+\ldots+(k-1)\}} = \left[y_0, \ldots, y_n, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}y_0}{\mathrm{d}v^{k-1}}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}y_n}{\mathrm{d}v^{k-1}}\right],$$

donc les courbes $\bar{y}_i(v)$ sont aussi normalisées.

Il est aisé de voir que si nous avons sur $V_{n,kn+k-1}$ deux systèmes normalisés de courbes directrices aux paramètres de même orientation, nous pouvons toujours passer de l'un à l'autre en effectuant d'abord un changement de paramètre moyennant (19) et ensuite une transformation (11).

Supposons maintenant que nous ayons sur $V_{n,kn+k-1}$ un système normalisé de courbes directrices $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ et qu'il vérifie (14). Passons à l'aide de (19) au paramètre $\bar{v}$ et au système normalisé de courbes directrices $\bar{y}_0(\bar{v}), \ldots, \ldots, \bar{y}_n(\bar{v})$ vérifiant (16). Nous allons trouver la relation qui existe entre les fonctions $a_{i,k-2}^j$ et $\bar{a}_{i,k-2}^j$.

Dans ce but, nous remarquons d'abord que

$$\frac{\mathrm{d}^\nu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\nu} = \frac{\mathrm{d}^\nu y_i}{\mathrm{d}v^\nu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha_{\nu,\mu}\, \frac{\mathrm{d}^\mu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu} , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}^\nu y_i}{\mathrm{d}v^\nu} = \frac{\mathrm{d}^\nu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\nu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{-\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \beta_{\nu,\mu}\, \frac{\mathrm{d}^\mu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu} , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots , \tag{21}$$

où $\alpha_{\nu,\mu}$, $\beta_{\nu,\mu}$ représentent des fonctions qui ne nous intéressent pas spécialement et dont nous ne signalons que la propriété d'être indépendant d'i.

En vertu de (19) nous avons ensuite

$$\frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\bar{v}^k} = \frac{\mathrm{d}^k y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^k}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \varphi_\mu \frac{\mathrm{d}^\mu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu}, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^\nu y_j}{\mathrm{d}\bar{v}^\nu} = \frac{\mathrm{d}^\nu \bar{y}_j}{\mathrm{d}\bar{v}^\nu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \psi_\mu \frac{\mathrm{d}^\mu y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

où les fonctions φ_μ, ψ_μ ne dépendent pas non plus d'i.

En substituant (20) dans (22) et à l'aide de (14) nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\bar{v}^k} = \frac{\mathrm{d}^k y_i}{\mathrm{d}v^k}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \gamma_\mu \frac{\mathrm{d}^\mu y_i}{\mathrm{d}v^\mu} =$$

$$= \gamma_{k-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}y_i}{\mathrm{d}v^{k-1}} + \left\{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} a^j_{i,k-2} + \gamma_{k-2}\,\delta^j_i\right\}\frac{\mathrm{d}^{k-2}y_j}{\mathrm{d}v^{k-2}} + \sum_{\mu=0}^{k-3}\sum_{j=0}^{n} (.)\,\frac{\mathrm{d}^\mu y_j}{\mathrm{d}v^\mu}$$

(ne pas sommer en $k-1$, $k-2$), où les fonctions γ_μ ne dépendent pas d'i et $(.)$ désigne les coefficients qui ne nous intéressent pas.

A partir de là nous obtenons en vertu de (21) et (23)

$$\frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\bar{v}^k} = p_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}y_i}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-1}} + \left\{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{-\frac{1}{2}k+\frac{5}{2}} a^j_{i,k-2} + p_2\delta^j_i\right\}\frac{\mathrm{d}^{k-2}y_j}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-2}} + \sum_{\mu=0}^{k-3}\sum_{j=0}^{n} (.)\,\frac{\mathrm{d}^\mu y_j}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu} =$$

$$= p_3\frac{\mathrm{d}^{k-1}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-1}} + \left\{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{2} a^j_{i,k-2} + r\delta^j_i\right\}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\bar{y}_j}{\mathrm{d}\bar{v}^{k-2}} + \sum_{\mu=0}^{k-3}\sum_{j=0}^{n} (.)\,\frac{\mathrm{d}^\mu \bar{y}_j}{\mathrm{d}\bar{v}^\mu},$$

où les fonctions p_1, p_2, p_3, r ne dépendent pas d'i. Comme le système de courbes directrices $\bar{y}_0(\bar{v}), \ldots, \bar{y}_n(\bar{v})$ est normalisé, il faut y avoir $p_3 \equiv 0$, d'où par comparaison avec (16) on voit que pour la transformation (19) la relation

$$\bar{a}^j_{i,k-2}(\bar{v}) = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 a^j_{i,k-2}(v(\bar{v})) + r(\bar{v})\,\delta^j_i \tag{24}$$

a lieu $r(\bar{v})$ étant une fonction déterminée par la transformation en question, et qui ne nous intéresse pas spécialement.

7. A présent, nous allons étudier certaines expressions qui caractèriseront plus tard notre variété.

Posons

$$j = \frac{1}{n+1}\,a^i_{i,k-2}\,. \tag{25}$$

En effectuant la transformation (11) nous obtenons d'après (18) et (17):

$$\bar{j} = \frac{1}{n+1}\, \bar{a}^i_{i,k-2} = \frac{1}{n+1}\, a^\alpha_{\alpha,k-2} = j\,,$$

donc la fonction j reste invariante lors des transformations (11). Si nous effectuons (19), nous obtenons d'après (24):

$$\bar{j} = \frac{1}{n+1}\, \bar{a}^i_{i,k-2} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 a^i_{i,k-2} + \frac{1}{n+1}\, r\delta^i_i = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 j + r\,.$$

Donc, lors de la transformation (19) j change suivant la formule

$$\bar{j} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 j + r \tag{26}$$

où r est la même fonction que dans (24).

Posons ensuite

$$c^j_i = a^j_{i,k-2} - j\delta^j_i\,. \tag{27}$$

En effectuant (11) nous obtenons d'après (18) et (17):

$$\bar{c}^j_i = \bar{a}^j_{i,k-2} - j\delta^j_i = \lambda^\alpha_i c^\beta_\alpha \Lambda^j_\beta\,;$$

après (19) nous obtenons d'après (24) et (26):

$$\bar{c}^j_i = \bar{a}^j_{i,k-2} - \bar{j}\delta^j_i = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 (a^j_{i,k-2} - j\delta^j_i) = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 c^j_i$$

Donc, pour la transformation (11) nous avons

$$\bar{c}^j_i = \lambda^\alpha_i c^\beta_\alpha \Lambda^j_\beta \tag{28}$$

tandis que pour la transformation (19)

$$\bar{c}^j_i = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2 c^j_i\,. \tag{29}$$

Remarquons encore que nous avons

$$c^i_i = 0\,. \tag{30}$$

Si nous avons maintenant des functions j, c^j_i, $a^j_{i,l}$, $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n$, $0 \leqq l \leqq k-3$, telles que (30) *a lieu, nous pouvons déterminer, à l'aide de* (27), *les fonctions $a^j_{i,k-2}$ d'une manière univoque. Les équations* (14) *définissent alors une variété $V_{n,kn+k-1}$ pour laquelle $y_0, \ldots, y_n$ sont des courbes directrices normalisées. Cette variété est déterminée univoquement à des homographies près.*

8. Soit maintenant $y_0, \ldots, y_n$ un système canonique de courbes directrices (pas nécessairement normalisé). Chaque point analytique $x \in [y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ peut être exprimé, et d'une seule façon, sous la forme $x = t^i y_i(v)$. Nous pouvons donc considérer $t^0, \ldots t^n$ comme coordonnées homogènes du point x dans l'espace $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$. Si $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ est un autre système canonique de courbes

directrices, nous avons d'une manière analogue $x = t^i\bar{y}_i(v)$. En passant de $\{y_i\}$ à $\{\bar{y}_i\}$ moyennant (11) nous obtenons

$$t^j = \lambda^j_i \bar{t}^i\,, \quad \bar{t}^i = \Lambda^i_j t^j\,. \tag{31}$$

En passant de $\{y_j\}$ à $\{\bar{y}_j\}$ moyennant (12) nous aurons

$$t^i = \varrho \bar{t}^i\,, \quad \bar{t}^i = \frac{1}{\varrho}\, t^i\,. \tag{32}$$

Soit maintenant $y_0, \ldots, y_n$ un système normalisé de courbes directrices et soit $H(v)$ une homographie analytique[4]) de l'espace $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ telle que $H(v)\,(t^i y_i(v)) = \tau^i y_i(v)$ avec

$$\tau^i = c^i_j(v)\, t^j\,. \tag{33}$$

En vertu de (30) la somme des valeurs propres de l'homographie $H(v)$ est égale à zéro.

Si nous effectuons la transformation (11), l'homographie correspondante sera donné par les relations $\bar{\tau}^i = \bar{c}^i_j \bar{t}^j$. En vertu de (28), (31) et (17) nous obtenons

$$\bar{\tau}^i = \bar{c}^i_j \bar{t}^j = (c^\beta_\gamma t^\gamma)\, \Lambda^i_\beta = \Lambda^i_\beta \tau^\beta\,,$$

d'où en comparant avec (31) nous voyons que l'homographie $H(v)$ ne change pas lors de la transformation (11).

Les formules (19), (29) et (32) font voir ensuite que lors d'un changement de paramètre l'homographie H subit au plus une multiplication par un facteur scalaire, donc, du point de vue géométrique, elle ne change pas non plus.

Soit ensuite $H_l(v)$, $l = 0, 1, \ldots, k-3$, une homographie analytique de l'espace $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ telle que $H_l(v)(t^i y_i(v)) = \tau^i_l y_i(v)$ avec

$$\tau^i_l = a^i_{j,l} t^j\,. \tag{34}$$

A partir des formules (18) et (31) nous déduisons facilement que même l'homographie H_l ne change pas non plus lors de la transformation (11). Bien entendu, en général, en changeant le paramètre nous ferons changer H_l aussi.

Remarquons encore que nous pouvons, à l'aide des homographies quasi-asymptotiques, transporter toutes les homographies $H(v)$, $H_l(v)$ dans un espace générateur fixe. *Toute variété non-développable $V_{n,kn+k-1}$ à paramètre donné détermine donc la fonction j et les systèmes monoparamétriques d'homographies analytiques $H(v)$, $H_0(v), \ldots, H_{k-3}(v)$ de l'espace projectif à n dimensions, la somme des valeurs propres des homographies $H(v)$ étant toujours égale à zero. Par contre, ces homographies et la fonction j déterminent univoquement à des homographies près la variètè $V_{n,nk+k-1}$.*

9. Soit de nouveau $y_0, \ldots, y_n$ un système normalisé de courbes directrices sur $V_{n,nk+k-1}$, soit ensuite $x_0 = t^i y_i(v_0)$ un point et $x(v) = t^i y_i(v)$, $t^i = \text{const}$, une

[4]) C'est-à-dire une application linéaire des points analytiques d'un espace projectif.

courbe quasiasymptotique passant par le point x_0. Soit enfin $\Omega(x_0)$ l'espace $(k-1)$-osculateur de la variété $V_{n,kn+k-1}$ au point x_0. Nous appellerons le point x_0 *flecnodal* si l'espace $(k+1)$-osculateur de la courbe $x(v)$ au point x_0 est situé dans $\Omega(x_0)$.

Pourque le point x_0 soit flecnodal, il faut et il suffit que la matrice $(y_0(v_0), \ldots$ $\ldots, y_n(v_0), \ldots, y_0^{(k-2)}(v_0), \ldots, y_n^{(k-2)}(v_0), x^{k-1}(v_0), x^{k+1}(v_0))$ soit de rang $(k-1)\,.$ $.\,(n+1)+1$, ce qui a lieu d'après (1) si et seulement si le système d'équations $[y_0(v_0), \ldots, y_n^{(k-2)}(v_0), x^{k-1}(v_0), x^{k+1}(v_0), y_0^{(k-1)}(v_0), \ldots, \widehat{y_j^{(k-1)}}(v_0), \widehat{y_p^{(k-1)}}(v_0), \ldots,$ $y_n^{(k-1)}(v_0)] = 0$, $j \neq p$, est vérifié.

Comme en vertu de (14) nous avons

$$x^{k-1} = t^i y_i^{(k-1)} \,, \quad x^k = t^i y_j^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-2} t^i a_{i,l}^j y_j^{(l)} \,,$$

$$x^{(k+1)} = t^i a_{i,k-2}^j \, y_j^{(k-1)} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{k-2} (\cdot)\, y_j^{(l)} \,,$$

ce système prend la forme (pour la définition de f^{jp} voir paragraphe 1):

$$t^j t^i a_{i,k-2}^p(v_0)\, f^{jp}(v_0) - t^p t^i a_{i,k-2}^j(v_0)\, f^{jp}(v_0) = 0 \,,$$

d'où en divisant par $f^{jp}(v_0)$ nous obtenons le système

$$t^j t^i a_{i,k-2}^p(v_0) - t^p t^i a_{i,k-2}^j(v_0) = 0 \,.$$

Comme d'après (27)

$$t^j t^i a_{i,k-2}^p - t^p t^i a_{i,k-2}^j = t^j t^i c_i^p - t^p t^i c_i^j \,,$$

nous trouvons que le point x_0 est flecnodal si et seulement si le système d'équations

$$t^j t^i c_i^p(v_0) - t^p t^i c_i^j(v_0) = 0$$

est vérifié. Or, cela signifie que la matrice

$$\begin{Vmatrix} t^0, \ldots, & t^n \\ c_i^0 t_i, \ldots, & c_i^n t_i \end{Vmatrix}$$

est de rang 1. Il s'en ensuit en vertu de (33) que *les points flecnodaux dans l'espace générateur* $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ *sont les points doubles de l'homographie* $H(v)$ *et ceux-là seulement.*

10. Ecrivons $\Delta = \det(c_i^j)$. Si nous passons moyennant la transformation (11) à un autre système normalisé de courbes directrices, la formule (28) montre que Δ ne change pas. Donc pour un paramètre donné Δ reste invariant. Si nous changeons de paramètre suivant la relation $v = v(\bar{v})$, la formule (29) montre que l'on a dans ce cas

$$\bar{\Delta} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{2n+2} \Delta \,. \tag{35}$$

Si nous nous bornons au cas où $\Delta \neq 0$ et que nous posions

(36) $$\bar{v} = \int \Delta^{\frac{1}{2n+2}} dv ,$$

alors pour le paramètre $\bar{v}$ nous aurons $|\bar{\Delta}| = 1$. Si nous exigeons en même temps que l'on ait $\frac{dv}{d\bar{v}} > 0$, l'égalité $|\bar{\Delta}| = 1$ pourra être vérifiée d'une seule façon. Le paramètre $\bar{v}$ satisfaisant à cette condition-là sera appelé *arc projectif*.

Si nous choisissons l'arc projectif comme paramètre, les homographies $H_0, \ldots$ $\ldots, H_{k-3}$ *seront déterminées, l'orientation du paramètre étant donnée, univoquement par la variété* $V_{n,kn+k-1}$. *Par contre, si nous avons une fonction* $j(v)$ *et des systèmes monoparamétriques d'homographies analytiques* $H(v), H_0(v), \ldots, H_{k-3}(v)$, *la somme des valeurs propres de l'homographie* $H(v)$ *étant toujours égale à zéro et son déterminant étant égal à* ± 1, *alors cela détermine une et une seule variété non-développable* $V_{n,kn+k-1}$, v *étant l'arc projectif correspondant.* Les homographies $H, H_0, \ldots, H_{k-3}$ seront dites *homographies déterminantes* de la variété $V_{n,kn+k-1}$.

11. A présent, nous allons étudier les déformations projectives des variétés envisagées, en nous bornant au cas des variétés $V_{n,2n+1}$.

Ayons donc deux variétés non-développables $V_{n,2n+1}$, $\bar{V}_{n,2n+1}$ de cette espèce. Soient $y_0(v), \ldots, y_n(v)$ les courbes directrices de la variété $V_{n,2n+1}$, soient $\bar{y}_0(v), \ldots$ $\ldots, \bar{y}_n(v)$ celles de $\bar{V}_{n,2n+1}$. Supposons que nous ayons alors

(37) $$y_i'' = a_i^j y_j ,$$

(38) $$\bar{y}_i'' = \bar{a}_i^j \bar{y}_j ,$$

de façon que les deux systèmes de courbes directrices soient normalisés et que les courbes $y_i(v)$, $\bar{y}_i(v)$ elles mêmes soient asymptotiques. La variété $V_{n,2n+1}$ est déterminée par l'invariant $j(v)$ et par un seul système monoparamétrique d'homographies déterminantes $H(v)$; d'une manière analogue, la variété $\bar{V}_{n,2n+1}$ sera déterminée par $\bar{j}(v)$ et $\bar{H}(v)$.

Soit φ la correpondance entre $V_{n,2n+1}$ et $\bar{V}_{n,2n+1}$ pour laquelle les lignes asymptotiques et les espaces générateurs se correspondent mutuellement et les espaces générateurs correspondants sont en homographie. Pour un choix convenable des courbes directrices normalisées et des paramètres sur les deux variétés nous aurons $\varphi(t^i y_i(v)) = t^i \bar{y}^i(v)$. Supposons en même temps que v soit l'arc projectif sur $V_{n,2n+1}$ de façon que les fonctions c_i^j définies par (27)[5]) vérifient $\det(c_i^j) = \pm 1$. Nous allons chercher les conditions sous lesquelles φ est *une déformation projective spéciale de second ordre*,[6]) c'est-à-dire qu'il existe des homographies $K(v)$ de l'espace S_{2n+1} telles que les variétés $\varphi V_{n,2n+1} = \bar{V}_{n,2n+1}$, $K(v)\, V_{n,2n+1}$ aient un contact analytique de second ordre en tout point $\varphi(x) =$ $= K(v)(x) \in [\bar{y}_0(v), \ldots, \bar{y}_n(v)]$.

[5]) où nous avons, bien entendu, a_i^j au lieu de $a^j_{i.k-2}$.
[6]) Voir [4], p. 83.

Si $K(v)$ est une telle homographie, il faut que l'on ait pour un choix convenable de son facteur scalaire (les valeurs de toutes ces fonctions étant prises au point v):

$$Ky_i = \bar{y}_i \,, \tag{39a}$$

$$Ky'_i = \bar{y}'_i + \varrho_i \bar{y}_i \,, \tag{39b}$$

$$Ky''_i = \bar{y}''_i + 2\varrho_i \bar{y}'_i + \sigma_i \bar{y}_i \,, \tag{39c}$$

car les courbes $\bar{y}_i$ et $K(v)\, y_i$ doivent avoir au point $\bar{y}_i(v)$ un contact analytique de second ordre.

En combinant (37) et (38) avec (39c) nous obtenons

$$a_i^j K y_j = \bar{a}_i^j \bar{y}_j + 2\varrho_i \bar{y}'_i + \sigma_i \bar{y}_i \,,$$

et, d'après (39a),

$$a_i^j \bar{y}_j = \bar{a}_i^j \bar{y}_j + 2\varrho_i \bar{y}'_i + \sigma_i \bar{y}_i \,,$$

c'est-à-dire

$$(\bar{a}_i^j - a_i^j + \delta_i^j \sigma_i)\, \bar{y}_j + 2\varrho_i \bar{y}'_i = 0 \,.$$

Comme $[\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n, \bar{y}'_0, \ldots, \bar{y}'_n] \neq 0$, il en résulte

$$\varrho_i = 0 \,, \quad i = 0, \ldots, n \,, \tag{40}$$

$$a_i^j - \bar{a}_i^j = \delta_i^j \sigma_i \,. \tag{41}$$

Si nous posons ensuite $x = y_0 + \ldots + y_n$, $\bar{x} = \bar{y}_0 + \ldots + \bar{y}_n$, les courbes $K(v)\, x$ et $\bar{x}$ devront avoir de nouveau un contact analytique de second ordre au point $\bar{x}(v)$ de façon que (eu égard à (39a), (39b) et (40)), on doit avoir

$$Kx = \bar{x} \,, \; Kx' = \bar{x}' \,, \; Kx'' = \bar{x}'' + \sigma \bar{x} \,.$$

Il s'en ensuit d'après (37), (38) et (39):

$$(a_0^j + \ldots + a_n^j)\, \bar{y}_j = (\bar{a}_0^j + \ldots + \bar{a}_n^j)\, y_j + \sigma(\bar{y}_0 + \ldots + \bar{y}_n) \,,$$

de sorte que

$$a_0^j + \ldots + a_n^j = \bar{a}_0^j + \ldots + \bar{a}_n^j + \sigma \,, \quad j = 0, \ldots, n \,.$$

Comme nous avons d'après (41) $a_i^j = \bar{a}_i^j$ pour $i \neq j$, nous en déduisons

$$a_i^i - \bar{a}_i^i = \sigma \quad \text{(ne pas sommer en } i) \,,$$

donc en (41) nous avons $\sigma_0 = \ldots = \sigma_n = \sigma$. Pour que la transformation φ et l'homographie $K(v)$ aient le long de l'espace $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ un contact de second ordre, il faut que l'on ait (40) et

$$a_i^j - \bar{a}_i^j = \delta_i^j \sigma \,. \tag{42}$$

D'après (25) nous avons

$$j = \frac{1}{n+1}\, a_i^i = \frac{1}{n+1}\, (\bar{a}_i^i + (n+1)\, \sigma) = \bar{j} + \sigma \,.$$

Donc

$$\sigma = j - \bar{j} \tag{43}$$

et les équations (39) deviennent

$$Ky_i = \bar{y}_i \,, \tag{44a}$$

$$Ky_i' = \bar{y}_i' \,, \tag{44b}$$

$$Ky_i'' = \bar{y}_i'' + (j - \bar{j})\,\bar{y}_i \,. \tag{44c}$$

D'après (27), (42) et (43) nous avons ensuite

$$c_i^j - \bar{c}_i^j = (a_i^j - j\delta_i^j) - (\bar{a}_i^j - \bar{j}\delta_i^j) = (a_i^j - \bar{a}_i^j) + (\bar{j} - j)\,\delta_i^j = \delta_i^j\sigma - \delta_i^j\sigma = 0 \,.$$

Il faut donc y avoir

$$c_i^j = \bar{c}_i^j \,. \tag{45}$$

Cela signifie que $\det(c_i^j) = \det(c_i^j) = \pm 1$, donc *$v$ est l'arc projectif même sur $\bar{V}_{n,2n+1}$*.

Ayons par contre une correspondance φ entre $V_{n,2n+1}$ et $\bar{V}_{n,2n+1}$, soit $\varphi(t^i\bar{y}_i(v)) = t^i\bar{y}_i(v)$, et supposons que (45) soit valable et que v soit l'arc projectif sur l'une (et donc en vertu de (45) aussi sur l'autre) variété. Définissons les homographies $K(v)$ à l'aide de (44a), (44b). Nous allons montrer que φ est une déformation projective spéciale de second ordre, et qui a le long de l'espace $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$ l'homographie osculatrice $K(v)$.

Pour le démontrer considérons la courbe

$$x(\tau) = t^i(\tau)\, y_i(v(\tau)) \,, \quad v(\tau_0) = v_0 \,,$$

associée par la correspondance φ à la courbe

$$\bar{x}(\tau) = t^i(\tau)\, \bar{y}_i(v(\tau)) \,.$$

D'après (37) et (27) nous avons

$$\begin{aligned} x'' &= t^{i''}y_i + (2v't^{i'} + v''t^i)\, y_i' + v'^2 t^i y_i'' = \\ &= t^{i''}y_i + (2v't^{i'} + v''t^i)\, y_i' + v'^2 t^i(c_i^j + j\delta_i^j)\, y_j \,, \end{aligned}$$

et d'une manière analogue d'après (38) et (45)

$$\bar{x}'' = t^{i''}\bar{y}_i + (2v't^{i'} + v''t^i)\,\bar{y}_i' + v'^2 t^i(c_i^j + \bar{j}\delta_i^j)\,\bar{y}_j \,.$$

Maintenant, d'après (44a) et (44b) nous obtenons (les valeurs des fonctions étant prises au point v_0):

$$Kx'' = t^{i''}\bar{y}_i + (2v't^{i'} + v''t^i)\,\bar{y}_i' + v'^2 t^i(c_i^j + j\delta_i^j)\,\bar{y}_j = \bar{x}'' + v'^2(j - \bar{j})\,\bar{x} \,.$$

Les courbes $\bar{x}$, $K(v_0)\,x$ ont donc au point $\bar{x}(\tau_0) \in [\bar{y}_0(v_0), \ldots, \bar{y}_n(v_0)]$ un contact analytique de second ordre et $K(v_0)$ est donc l'homographie osculatrice de la correspondance φ au point $x(\tau_0)$.

Pour que la correspondance φ entre deux variétés non-développables $V_{n,2n+1}$ et $\bar{V}_{n,2n+1}$ qui met en homographie les espaces générateurs et conserve les courbes *asymptotiques soit une déformation projective spéciale de second ordre, il faut et il suffit qu'elle associe l'arc projectif à l'arc projectif et qu'elle conserve le système d'homographies déterminantes $H(v)$.*

Littérature

[1] *E. Bompiani*: Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *37*, 1914, 305—331.

[2] *E. Čech*: Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *53*, 1924, 31—37.

[3] *E. Čech*: Géometrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions I., Bulletin international de l'Académie des Sciences des Bohême, 1924, 6 pages.

[4] *E. Čech*: Sur la déformation projective des surfaces développables, Изв. мат. инст., София, т. *III*, кн. 2, 81—97.

[5] *E. Čech*: Projektivní diferenciální geometrie, Praha 1926.

[6] *G. Fubini — E. Čech*: Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1927.

[7] *A. Švec*: Sur la déformation projective des surfaces réglées, Czechoslovak Math. Journal, *5* (*80*), 1955, 355—361.

[8] *A. Švec*: Quelques remarques au sujet de la théorie des surfaces réglées dans des espaces projectifs de dimension impaire, Czechosl. Math. J., *10*(*85*), 1960, 309—315.

Резюме

МНОГООБРАЗИЯ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ОБОБЩЕНИЕМ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

Пусть в проективном пространстве размерности $kn + k - 1$ дано n кривых $y_1(v), \ldots, y_n(v)$, причем имеет место соотношение (1). Тогда множество точек x, которые можно записать в виде $x = t^i y_i(v)$, будем называть *неразвертывающимся многообразием* $V_{n,kn+k-1}$. Кривые $y_i(v)$ будем называть *направляющими кривыми*, пространства $[y_1(v), \ldots, y_n(v)]$ при фиксированном v — *образующими пространствами*.

Возьмем такого рода многообразие $V_{n,kn+k-1}$. Его $(k - 1)$ — соприкасающимся пространством в точке $t^i y_i(v_0)$ мы называем пространство (2). Кривую $x(v) = t^i(v)\, y_i(v)$ на $V_{n,kn+k-1}$ назовем *квазиасимптотической*, если в каждой точке $x(v_0)$ ее k-соприкасающееся пространство лежит в $(k - 1)$-соприкасающимся пространстве многообразия $V_{n,kn+k-1}$ в той же точке $x(v_0)$. Через каждую точку многообразия проходит в точности одна квазиасимптотическая кривая.

Напрявляющие кривые можно подобрать на $V_{n,kn+k-1}$ так, что имеют место соотношения (13) и (14). Такое семейство направляющих кривых мы назовем *нормированным*. Возьмем нормированное семейство неправляющих кривых и определим функцию $j(v)$ формулой (52) и числа c_i^j формулой (27). Тогда $\det(c_i^j)$ не зависит от выбора нормированного семейства направляющих кривых на $V_{n,kn+k-1}$, но изменяется при изменениии параметра v. В общем случае можно ввести такой параметр v, при котором $\det(c_i^j) = \pm 1$. Этот параметр мы назовем *проективной дугой*.

Пусть выполняется (14), (27) и пусть параметром является проективная дуга. Пусть $H(v)$ — арифметическая коллинеация пространства $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$, которая точке $t^i y_i(v)$ ставит в соответствие точку $c_j^i(v)\, t^j y_i(v)$, и пусть $H_e(v)$, $e = 0, 1, \ldots, k - 3$ — арифметическая коллинеация этого пространства, которая точке $t^i y_i(v)$ ставит в соответствие точку $a^i_{j,e}(v)\, t^j y_i(v)$. *Тогда коллинеации $H(v), H_0(v), \ldots, H_{k-3}(v)$, а также функция $j(v)$, определяемая формулой* (25), *не зависят от выбора нормированного семейства направяющих кривых и, наоборот, эти коллинеации и функция j определяют в точности одно многообразие $V_{n,kn+k-1}$.*

Самосопряженными точками коллинеации $H(v)$ являются как раз те точки пространства $[y_0(v), \ldots, y_n(v)]$, в которых $(k - 1)$-соприкасающееся пространство многообразия $V_{n,kn+k-1}$ содержит не только k-соприкасающееся пространство, но даже $(k + 1)$-соприкасающееся пространство квазиасимптотической кривой, проходящей через эту точку.

Пусть мы имеем два неразвертывающихся многообразия $V_{n,2n+1}$, $\overline{V}_{n,2n+1}$ и соответствие φ между ними, при котором квазиасимптотическим линиям отвечают квазиасимптотические линии, образующим пространствам — образующие пространства и соответствующие друг другу образующие пространства отображаются друг на друга коллинеарно. Соответствие φ мы назовем *специальным проективным изгибанием второго порядка*, если существуют коллинеации $K(v)$ пространства S_{2n+1} такие, что многообразия $\varphi V_{n,2n+1} = \overline{V}_{n,2n+1}$, $K(v)\, V_{n,2n+1}$ имеют аналитическое касание второго порядка в каждой точке

$$\varphi(x) = K(v)\, x \in [\bar{y}^0(v), \ldots, \bar{y}_n(v)]\,.$$

Оказывается, что *соответствие φ будет специальным проективным изгибанием второго порядка, если и только если при нем проективной дуге соответствует проективная дуга и арифметические коллинеации $H(v)$ на соответствующих друг другу образующих пространствах одинаковы.*