Václav Havel

Zur Geometrie der Translationsebenen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 3, 432–439

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100424

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ZUR GEOMETRIE DER TRANSLATIONSEBENEN

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Eigegangen am 13. Juli 1959)

Herrn Prof. Dr. Ing. František Kadeřávek zu seinem 75. Geburtstag gewidmet

In dem Artikel untersucht man eine Reihe von Konfigurationsbedingungen, die unter Fano-Ebenen die Translations- oder Alternativebenen charakterisieren.

1. KONFIGURATIONSBEDINGUNGEN FÜR DIE TRANSLATIONSEBENEN

Der Gegenstand unserer Untersuchungen sei zuerst die *affine Ebene* $\mathscr{A}$ ([8], S. 10), welche die folgende *Bedingung von Fano* erfüllen soll: Haben die Punkte A, B, C, D aus $\mathscr{A}$ eine allgemeine Lage, so sind die Punkte $AB \cap CD$, $AC \cap BD$, $AD \cap BC$ nicht kollinear.

Sind die Punkte $A_1, \ldots, A_m$ aus $\mathscr{A}$ kollinear und untereinander verschieden, so sagen wir, dass sie ein *zulässiges m-Tupel* bilden.

Die uneigentliche Gerade der Ebene $\mathscr{A}$ bezeichnen wir mit n; den uneigentlichen Punkt der Geraden g bezeichnen wir N_g. Das Symbol d_0 bedeute *die kleine affine Desargues-Bedingung* ([8], S. 87).

Weiter formulieren wir folgende Konfigurationsbedingungen für $\mathscr{A}$:[1])

Bedingung S°. Sind $A \neq B$ (veränderliche) Punkte, so existiert zu jedem Punkt P non $\in AB$ ein Punkt Q; $Q \neq A, B, P$; $PQ \parallel AB$; derart, dass der Schnittpunkt $S^\circ_{AB} = PN_{BQ} \cap QN_{AP}$ auf AB unabhängig von der Wahl des Punktes P liegt. (Von den Punkten A, B, P, Q, S°_{AB} sagen wir dann, dass sie sich in der S°-Lage befinden.)

Bedingung S^1 (*die erste Bedingung von Baer*). Sind $A \neq B$ (veränderliche) Punkte, so folgt dieser Schluss: 1. Der Diagonalenschnittpunkt S^1_{AB} eines beliebigen Parallelogrammes $ALBM$ ist unabhängig von der Wahl des Punktes L non $\in AB$ und 2. der Punkt S^1_{AB} geht bei einer beliebigen Perspektivität σ in den Punkt $S^1_{A\sigma B\sigma}$ über.[2])

[1]) Sofern nicht anders angeführt wird handelt es sich um eigentliche Punkte und Geraden.

[2]) Ein *Parallelogramm* ist ein geordnetes Quadrupel von untereinander verschiedenen Punkten A, B, C, D; $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$; A non $\in BC$. Die *Perspektivität* ist in [8], S. 8 definiert; wir beschränken uns nur auf Perspektivitäten mit uneigentlichen Zentrum. Die Perspektivität der Geraden g_1 auf die Gerade g_2, mit dem Zentrum C, bezeichnen wir $\{C; g_1, g_2\}$.

Bedingung S^2 (*die zweite Bedingung von Baer*). Zu jedem Punktepaar $A \neq B$ kann der Punkt S^2_{AB} so zugeordnet werden, dass 1. $S^2_{AB} = S^2_{BA} \in AB$ gilt und 2. beliebige Perspektivität σ dem Punkte S^2_{AB} den Punkt $S^2_{A^\sigma B^\sigma}$ zuordnet.

Bedingung S^3 (*die Bedingung von Forder*). Sind $A \neq B$ (veränderliche) Punkte, so folgt dieser Schluss: 1. Für ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ ist der Punkt $S^3_{AB} = AB \cap N_{AD}(AC \cap BD)$ unabhängig von der Wahl des Punktes C non $\in AB$ und 2. beliebige Perspektivität σ bildet den Punkt S^3_{AB} in den Punkt $S^3_{A^\sigma B^\sigma}$ ab.

Bedingung S^4. Für jeden Punkt S existiert eine zentrale Symmetrie mit dem Zentrum S (d. h. eine involutorische zentrale Kollineation mit dem Zentrum S und mit der uneigentlichen Achse n).

Den gegenseitigen Zusammenhang der Bedingungen d_0, S^i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) drück folgender Satz aus:

Satz 1. *In der Ebene $\mathscr{A}$ gilt die Äquivalenz* $\mathsf{d}_0 \Leftrightarrow \mathsf{S}^i$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$. (Die Ebene $\mathscr{A}$, in der die Bedingung d_0 gilt, heisst *Translationsebene.*)

Beweis. Wir beweisen zuerst die Implikation $\mathsf{S}^0 \Rightarrow \mathsf{S}^1$. Es gelte also S^0; bei einer gegebenen Perspektivität $\sigma\{C; p, q\}$ geht der Punkt $S^\circ_{AB}(A, B \in p; A \neq B)$ in den Punkt $S^\circ_{A^\sigma B^\sigma}$ über. In der Tat, setzen wir o. B. d. A. voraus, dass p non $\parallel q$, $A = p \cap q$. Ist $P = (S^\circ_{AB})^\sigma$, so hat das Punktsystem $A, B, P, Q = PN_p \cap S^\circ_{AB}N_q, S^\circ_{AB}$ die S°-Lage. Aus der Konstruktion des Punktes Q folgt, dass auch die Punkte $A^\sigma, B^\sigma, S^\circ_{AB}, Q, P$ die S°-Lage haben. Also ist $P = S^\circ_{A^\sigma B^\sigma}$.

Nun untersuchen wir ein Punktsystem A, B, P, Q, S°_{AB} in der S°-Lage; der Punkt P nehme jede Lage ausserhalb AB an. Weiter setzen wir $L = AP \cap \cap BQ$, $M = AN_{BQ} \cap NB_{AP}$. Der Punkt L nimmt also auch jede Lage ausserhalb AB an. Wir behaupten: $S^\circ_{LM} = S^\circ_{AM}S^\circ_{BL} \cap LM = S^\circ_{AB}$. In der Tat, wird umgekehrt $S^\circ_{LM} \neq S^\circ_{AB}$ vorausgesetzt, so folgt S°_{LM} non $\in AB$, S°_{LM} non $\parallel AM$. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass die Punkte $L, M, S^\circ_{AL}, S^\circ_{AM}, S^\circ_{LM}$ eine S°-Lage haben. Aus $S^\circ_{LM} = S^\circ_{AB}$ folgt dann $S^\circ_{AB} = S^1_{AB}$; es gilt also S^1.

Die Beweise der Implikationen $\mathsf{S}^1 \Rightarrow \mathsf{S}^2$, $\mathsf{S}^1 \Rightarrow \mathsf{S}^3$, $\mathsf{S}^3 \Rightarrow \mathsf{S}^1$ werden ganz analog durchgeführt.

Wir beweisen die Implikation $\mathsf{S}^2 \Rightarrow \mathsf{S}^\circ$. Es gelte also S^2. Sind A, B, L allgemein gelegene Punkte, dann führt die Perspektivität $\{N_{BL}; AB, AD\}$ den Punkt S^2_{AB} in den Punkt S^2_{AD} über, weiter entspricht in der Perspektivität $\{N_{AL}; BA, BD\}$ dem Punkte S^2_{AB} der Punkt S^2_{BD} und endlich geht bei der Perspektivität $\{N_{AB}; DA, DB\}$ der Punkt S^2_{DA} in den Punkt S^2_{DB} über.

Es sei nun P ein beliebiger Punkt ausserhalb AB; dann existiert ein Punkt H, so dass $P = S^2_{AH}$ gilt. Tatsächlich, H ist das Bild des Punktes B in der Perspektivität $\{N_{PS^2_{AB}}; AB, AP\}$ (nach $\mathsf{S}^2 2$). Die Untersuchungen über die Punkte

A, B, L wenden wir noch auf die Punkte A, B, H an. Daraus folgt dann $S^2_{AB} = S^{\circ}_{AB}$ und S° ist bewiesen.

Wir beweisen nun die Implikationen $\mathsf{d}_0 \Rightarrow \mathsf{S}^2$, $\mathsf{S}^1 \Rightarrow \mathsf{d}_0$. Es gelte d_0. In der Ebene $\mathscr{A}$ ist d_0 äquivalent mit der (n, n)-Transitivität der Ebene $\mathscr{A}$ ([1], Satz 6,2).[3]) Wir bezeichnen τ_{AB} jene Translation, die den Punkt A in den Punkt B überführt. Sind die Punkte $A \neq B$ gegeben, so definieren wir den Punkt S^2_{AB} derart, dass wir den Punkt C non ϵ AB wählen und $S^2_{AB} = AC \cap CN_{AB^{\tau_{AC}}}$ setzen. Man überzeugt sich leicht, dass der Punkt S^2_{AB} nicht von der Wahl des Punktes C non ϵ AB abhängt und dass die beiden Teilschlüsse von S^2 erfüllt sind.

Es gelte S^1.[4]) Haben wir Parallelogramme $AA'B'B$, $CC'B'B$; C non ϵ AB, C' non ϵ $A'B'$. Nach Voraussetzung ist also $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Aber es ist auch $AC \parallel A'C'$. Tatsächlich, die Perspektivität $\{N_{S^1_{AB'}S^1_{B'C}}; B'A, B'C\}$ bildet A in C und die die Perspektivität $\{N_{S^1_{AB}S^1_{BC'}}; BA', BC'\}$ bildet A' in C' ab. Aus den Relationen $S^1_{AB'}, S^1_{B'C} \parallel AC, S^1_{BA'}, S^1_{BC'} \parallel A'C'$ folgt $AC \parallel A'C'$. Es gilt also d_0, w. z. b. w.

Wir beweisen weiter die Äquivalenz $\mathsf{S}^1 \Leftrightarrow \mathsf{S}^4$. Es gelte S^1. Wir wählen einen beliebigen Punkt S und ordnen jedem Punkt $A \neq S$ den Punkt A' derart zu, dass $S = S^1_{AA'}$; den Punkt S und alle uneigentliche Punkte erklären wir als selbstentsprechend. Es kann leicht bewiesen werden, dass die definierte Abbildung eine Symmetrie mit dem Zentrum S ist.

Es gelte S^4. Zu den Punkten $A \neq B$ existiert dann genau eine Symmetrie, welche A in B überführt. Wir wählen ein beliebiges Parallelogramm $ALBM$; dann ist $S = AB \cap LM$ das Zentrum einer bestimmten Symmetrie σ und dies ist die gesuchte Symmetrie, denn der Punkt A^σ lässt sich wie durch das Punkepaar L, L^σ, so durch das Punktepaar $L^\sigma, (L^\sigma)^\sigma = L$ konstruieren; $ALA^\sigma L^\sigma$ ist dann ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt S und die Parallelogramme $ALBM$, $ALA^\sigma L^\sigma$ mit gemeinsamen Scheiteln A, L und gemeinsamen Diagonalenschnittpunkt S fallen zusammen, so dass $A^\sigma = B$, $L^\sigma = M$ gilt. Die Gültigkeit von S^1 folgt schon.

Wir zeigen nun, wie man d_0 direkt aus S^4 ableiten kann.[5]) Es gelte wieder S^4. Zuerst ein Hilfssatz: *Es sei $ALBM$ ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt S. Bestimmt man den Punkt K derart, dass $SMKB$ wieder ein Parallelogramm ist, so ist auch $ASKM$ ein Parallelogram.*

Den Beweis führen wir mit Hilfe des Widerspruchs durch. Es sei SK non $\parallel$ AM. In der Symmetrie mit dem Zentrum S entsprechen sich einander

[3]) Die Ebene $\mathscr{A}$ ist *(n,n)-transitiv*, wenn sie einfach transitiv mit Rücksicht auf die volle Translationsgruppe ist. Eine *Translation* ist als eine zentrale Kollineation mit uneigentlichem Zentrum und uneigentlicher Achse definiert.

[4]) Wir wiederholen den Beweis von H. G. Forder nach ([3], S. 6).

[5]) Für den Beweis des Satzes 1 ist diese Herleitung schon überflüssig; wir interessieren uns um diese Dinge darum, da es sich um eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von H. S. M. Coxeter und E. S. Mendelsohn ([7], Theorem 16) handeln wird.

die Punkte $SK \cap AM$, $SK \cap BL$. Diese Punkte entsprechen sich jedoch auch in der Symmetrie mit dem Zentrum $SK \cap BM \neq S$. Dies ist der gesuchte Widerspruch, denn es existiert gerade eine Symmetrie, welche den Punkt $SK \cap AM$ in den Punkt $SK \cap BL$ abbildet.

Es seien $X \neq X'$ zwei Punkte, die sich bei der Symmetrie σ entsprechen. Die Symmetrie mit dem Zentrum X' bezeichnen wir σ'. Wir behaupten dann, dass $\tau = \sigma\sigma'$ eine Translation mit $X^\tau = X'$ ist. Es handelt sich nämlich um das Produkt von zwei Symmetrien, so dass jeder uneigentliche Punkt bei τ ein Fixpunkt ist; also ist τ eine zentrale Kollineation mit der uneigentlichen Achse n. Es sei weiter Y ein Punkt ausserhalb XX'. Aus unserem Hilfssatz folgt dann $XX' \parallel YY^\tau$, so dass $N_{XX'}$ das Zentrum der Kollineation τ ist. Die Ebene $\mathscr{A}$ ist daher (n,n)-transitiv, also gilt d_0.

Wir formulieren nun folgende Konfigurationsbedingungen für $\mathscr{A}$:

Bedingung B_0 (*die Bedingung von Klingenberg*). Ist $A_1B_1A_2B_2$ ein (veränderliches) Parallelogramm mit C_1 non $\in A_1B_1$, C_2 non $\in A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, so gilt $A_1C_2 \parallel A_2C_1$, $B_1C_2 \parallel B_2C_1$. (Von den Punkten A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 sagen wir dann, dass sie die B_0-Lage haben.)

Bedingung Q_0. Es sei $ABCD$ ein (veränderliches) Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt U; es seien A', U, C'; B', U, D' zwei zulässige Punktetripel mit $A' \in AB$, $B' \in BC$, $C' \in CD$, $D' \in DA$. Dann ist $A'B'C'D'$ wieder ein Parallelogramm. (Von dem Punktsystem A, B, C, D, A', B', C', D' sagen wir dann, dass es die Q_0-Lage besitzt.)

Die Beziehungen zwischen den Bedingungen B_0, Q_0, d_0 folgen aus diesem Satz:

Satz 2. *In der Ebene $\mathscr{A}$ sind die Bedingungen B_0, Q_0, d_0 einander äquivalent.*

Beweis. Es gelte d_0, also auch S^1. Es seien die Voraussetzungen für B_0 erfüllt, wobei C_1 non $\in A_1A_2$, C_1 non $\in B_1B_2$. Wir setzen $U = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $C_2' = C_1U \cap B_2C_2$. Aus der Relation $U = S^1_{A_1A_2} = S^1_{B_1B_2}$ folgt, dass $B_1C_1B_2C_2'$ ein Parallelogramm ist. Ähnlich folgt aus $U = S^1_{C_1C_2'} = S^1_{A_1A_2}$, dass $A_1C_1A_2C_2'$ ein Parallelogramm ist. Nach Voraussetzung ist jedoch $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, so dass $C_2' = C_2$. Hieraus folgt nun schon sehr einfach $A_1C_2 \parallel A_2C_1$, $B_1C_2 \parallel B_2C_1$.

Wenn $C_1 \in A_1A_2$ bzw. $C_1 \in B_1B_2$ ist, dann folgt $A_1C_2 \parallel A_2C_1$, $B_1C_2 \parallel B_2C_1$ direkt aus S^1. Es gilt also B_0.

Es gelte B_0. Wir beweisen einen Hilfssatz: *Sind $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$; $A_1, B_1, C_1^*, A_2, B_2, C_2^*$ zwei Punktesysteme in der B_0-Lage mit $C_1 \neq C_1^*, C_2 \neq C_2^*$, so ist $C_1C_1^* \parallel C_2C_2^*$.*

Zum Beweis setzen wir $A_1C_1 \neq A_2C_2$, $B_1C_1 \neq B_2C_2$ voraus. Nach B_0 ist dann $A_1C_1A_2C_2$ ein Parallelogramm. Nach Voraussetzung gilt jedoch auch $A_1C_2^* \parallel A_2C_1^*$, $A_1C_1^* \parallel A_2C_2^*$. Also kann man auf das Punktsystem A_1, C_1, C_1^*,

A_2, C_2, C_2^* die Schlussweise von B_0 indirekt anwenden und es gilt dann $C_1C_1^* \parallel$ $\parallel C_2C_2^*$, w. z. b. w. Im übrigen ist o. B. d. A. $A_1C_1 = A_2C_2$, $B_1C_1^* = B_2C_2^*$; daraus ist jedoch $C_1C_1^* \parallel C_2C_2^*$ leicht durch zweimalige Anwendung von B_0 ersichtlich. Der Hilfssatz ist bewiesen.

Haben wir nun ein Punktsystem $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ in der B_0-Lage, wobei C_1 non $\in B_1B_2$. Wir setzen $S = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $S'' = B_1B_2 \cap C_1C_2$. Ist $S \neq S''$, so konstruieren wir noch den Punkt $S' = B_1B_2 \cap A_1N_{A_2S''}$. Das Punktsystem $A_1, B_1, S', A_2, B_2, S''$ besitzt die B_0-Lage, so dass $A_1S'' \parallel A_2S'$. Unserem Hilssatz nach ist $C_1S' \parallel C_2S''$, was im Widerspruch damit ist, dass C_1, S'', C_2 ein zulässiges Tripel ist. Also ist $S = S' = S''$ d. h. die Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sind konkurrent. Für den Fall $C_1 \in B_1B_2$ ist derselbe Schluss trivial, so dass $\mathsf{S}^1 1$ bewiesen ist.

Wir wählen nun das Punktsystem $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ in der B_0-Lage speziell so, dass $A_1A_2 \parallel B_iC_i$, $B_1B_2 \parallel A_iC_i$ $(i = 1, 2)$. Nach dem Vorangehenden geht dann die Gerade C_1C_2 durch den Punkt $S = A_1A_2 \cap B_1B_2$, so dass die Perspektivität $\{N_{A_1B_2}; A_1A_2, B_1B_2\}$ den Diagonalenschnittpunkt des Parallelogrammes $A_1B_1A_2B_2$ in den Diagonalenschnittpunkt des Parallelogrammes $SA_2C_2B_2$ überführt. Es gilt daher $\mathsf{S}^1 2$.

Nebenbei haben wir Folgendes bewiesen: (*) *Es gelte* d_0 *bzw.* B_0 *und das Punktsystem* $A_1B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ *habe die* B_0*-Lage, wobei* $C_1 \neq C_2$. *Dann sind die Geraden* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *konkurrent.*

Um den Beweis des Satzes 2 abzuschliessen ist es notwendig zu beweisen, dass auch die Äquivalenz $\mathsf{B}_0 \Leftrightarrow \mathsf{Q}_0$ gilt.

Es gelte B_0. Es sei ein Punktsystem $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ in der B_0-Lage gegeben, dessen Punkte weder auf einer Seite noch auf einer der Diagonalen des Parallelogrammes $A_1B_1A_2B_2$ liegen. Ist $K = A_1C_1 \cap B_2C_2$, $L = B_1C_1 \cap$ $\cap A_2C_2$, so ist C_1LC_2K ein Parallelogramm und durch Anwendung von (*) erhalten wir die Relation $C_1C_2 \cap KL = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Hieraus folgt indirekt Q_0.

Es gelte Q_0. Es sei ein Punktsystem $A, B, C, D, A', B', C', D'$ in der G_0-Lage gegeben, wobei $A \neq A' \neq B \neq B' \neq C$. Wir fixieren die Punkte A', C' und lassen die Punkte $B'D'$ jede mögliche Lage annehmen. Dann hängt der Punkt $U = A'C' \cap B'D'$ nicht von der Wahl der Punkte B', D' ab. Hieraus folgt $\mathsf{S}^1 1$.

Wir wählen endlich ein Punktsystem $A, B, C, D, A', B', C', D'$ in der G_0-Lage speziell so, dass $A'B' \parallel AC$, $B'C' \parallel BD$. Die Perspektivität $\{N_{BD}; C'A', C'D'\}$ führt den Diagonalenschnittpunkt des Parallelogrammes $A'B'C'D'$ in den Diagonalenschnittpunkt des Parallelogrammes $UC'DD'$ über. Es gilt daher $\mathsf{S}^1 2$. Satz 2 ist hiermit bewiesen.

2. KONFIGURATIONSBEDINGUNGEN FÜR ALTERNATIVE EBENEN

Im Weiteren wollen wir die *projektive Ebene* $\mathscr{P}$ ([8], S. 7) betrachten, welche ebenfalls die Fano-Bedingung erfüllen soll. Wir bezeichnen mit D bzw. d die *Desargues-Bedingung* bzw. die *kleine Desargues-Bedingung* ([8], S. 79 bzw. S. 89). Ausserdem formulieren wir weitere Konfigurationsbedingungen für $\mathscr{P}$:

Bedingung H°. Ist A, B, C ein (veränderliches) zulässiges Punktetripel, so existiert zu jedem Punkt P non $\in AB$ und jeder Geraden c; $C \in c \neq AB$; ein Punkt Q derart, dass C, P, Q ein zulässiges Tripel ist und der Punkt $(AP \cap c)\, Q \cap (BQ \cap c)\, P$ in AB unabhängig von der Wahl des Paares P, c liegt. (Vom System A, B, C, c sagen wir dann, dass es sich in der H°-Lage befindet.)

Bedingung H^1. Ist A, B, C ein (veränderliches) zulässiges Punktetripel, so ist für ein beliebiges Viereck $ALBM$[6]) mit zulässigem Tripel $AL \cap BM$, $BL \cap AM, C$ der Punkt $AB \cap LM$ unabhängig von der Wahl der Punkte L, M.

Bedingung H^2. Jedem zulässigen Punktetripel A, B, C ist der Punkt H_{ABC} derart zugeordnet, dass 1. $H_{ABC} = H_{BAC}$ gilt und 2. beliebige Perspektivität σ[7]) den Punkt H_{ABC} in den Punkt $H_{A^\sigma B^\sigma C^\sigma}$ abbildet.

Bedingung H^3 (*die Bedingung des vierten harmonischen Punktes*). Es sei A, B, C ein (veränderliches) zulässiges Punktetripel. Dann ist für ein beliebiges zulässige Punktetripel A, V, W (mit W non $\in AB$) der Punkt $A(CV \cap BW) \cap$ $\cap\, BV$ unabhängig von der Wahl der Punkte V, W.

Bedingung H^4. Zu jedem Punkte S und jeder Geraden o; S non $\in o$; existiert eine harmonische Kollineation mit dem Zentrum S und der Achse o (d. h. eine involutorische zentrale Kollineation mit dem Zentrum S und der Achse o).

Bedingung R (*die Bedingung von Reidemeister*). Es seien $ABCD$, $A'B'C'D'$ (veränderliche) Vierecke und es gelte:

1. $A \neq A'$; $B \neq B'$; $C \neq C'$; $D \neq D'$; $AB \neq A'B'$; $BC \neq B'C'$; $CD \neq C'D'$; $DA \neq D'A'$;
2. die Geraden AA', BB', CC', DD' sind konkurrent, mit gemeinsamem Punkt S; die Geraden AB, CD, $A'B'$, $C'D'$ sind konkurrent, mit gemeinsamem Punkt E; die Geraden BC, DA, $D'C'$ sind ebenfalls konkurrent, mit gemeinsamem Punkt F. — Dann ist $F \in B'C'$.

Erweitert man die Voraussetzungen in R um die Voraussetzung der Kollinearität der Punkte S, E, F und behält man die Folgerung $F \in B'C'$ bei, so bekommt man die Bedingung r (*die kleine Bedingung von Reidemeister*).

Erweitert man ähnlich die Voraussetzungen in R um die Voraussetzung

---

[6]) Ein Viereck ist ein geordnetes Punktequadrupel allgemeiner Lage.

[7]) Das Zentrum der Perspektivität ist jetzt mit keiner Bedingung beschränkt.

$BC = D'A'$ und behält man wieder die Folgerung $F \in B'C'$ bei, so bekommt man die Bedingung B (*die Bedingung von Bol*).

Bedingung Q. Es sei $ABCD$ ein (veränderliches) Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt U; es sei $A'B'C'D'$ ein zweites Viereck; es seien A', U, C'; B', U, D' zwei zulässige Tripel und es gelte $A' \in AB$, $B' \in BC$, $C' \in CD$, $D' \in DA$. Dann bilden die Punkte $AB \cap CD$, $BC \cap DA$, $A'B' \cap C'D'$, $B'C' \cap D'A'$ ein zulässiges Quadrupel.

Aus der projektiven Ebene $\mathscr{P}$ bildet man eine affine Ebene $\mathscr{A}_n$, indem man eine Gerade n aus $\mathscr{P}$ als uneigentlich erklärt ([8], S. 9); man sagt dann, dass $\mathscr{A}_n$ aus $\mathscr{P}$ durch *Relativisation* entsteht.

Durch geeignete Relativisation der Ebene $\mathscr{P}$ kann man zu einer solchen affinen Ebene $\mathscr{A}_n$ gelangen, dass S^i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ bzw. B bzw. Q bzw. D (hinsichtlich $\mathscr{P}$) in H^i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ bzw. B_0 bzw. Q_0 bzw. D_0 (hinsichtlich $\mathscr{A}_n$) übergeht. Auf einfache Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

Satz 3. *Es seien $n_1 \neq n_2$ zwei Geraden der Ebene $\mathscr{P}$ und es gelte in beiden Ebenen $\mathscr{A}_{n_1}$, $\mathscr{A}_{n_2}$ die Bedingung d_0 bzw. S^i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ bzw. Q_0 bzw. B_0. In der Ebene $\mathscr{P}$ gilt dann die Bedingung d bzw. H^i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ bzw. Q bzw. B.* (Die Ebene $\mathscr{P}$, in welcher d gilt, heisst *alternativ* oder auch *Moufang-Ebene.*)

Beweis. Einen Teil des Satzes 3 (für die Bedingung d_0) hat L. A. Skornjakov bewiesen ([10], S. 177). Das Resultat von Skornjakov benützen wir nun: Gleichzeitig mit S^i bzw. Q_0 bzw. B_0 gilt in $\mathscr{A}_{n_1}$ und $\mathscr{A}_{n_2}$ auch die Bedingung d_0. Also gilt d_0 in jeder affinen Ebene $\mathscr{A}_n$, wo n eine beliebige Gerade der Ebene $\mathscr{P}$ ist. Also gilt auch S^i bzw. Q bzw. B in jeder Ebene $\mathscr{A}_n$.

Es ist leicht einzusehen, dass aus der Gültigkeit von S^4 in jeder Ebene $\mathscr{A}_n$ die Gültigkeit von H^4 in $\mathscr{P}$ folgt.

Es gelte S° in jeder Ebene $\mathscr{A}_n$. Es seien A, B, C, c_1; A, B, C, c_2 zwei Systeme aus $\mathscr{P}$ in der H°-Lage, wobei $c_1 \neq c_2$. Es sei weiter τ eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum A und der Achse AB, welche c_1 in c_2 überführt. Das Punktsystem A, B, C, P, Q aus $\mathscr{A}_{c_1}$ in der S°-Lage geht durch die Abbildung τ in das Punktsystem A, B, C, P^τ, Q^τ aus $\mathscr{A}_{c_2}$ in der S°-Lage über. Dabei haben die Geraden $(AP \cap c_1)\,Q$, $(AP^\tau \cap c_2)\,Q^\tau$ einen gemeinsamen Punkt auf AB, denn dieser ist bei τ Fixpunkt. Hieraus folgt die Gültigkeit von H° in $\mathscr{P}$.

Ganz analog kann man (mit Hilfe der Äquivalenz der Bedingungen S^i, b_0, Q_0 in jeder Ebene $\mathscr{A}_n$) auch den übrigen Teil des Satzes 3 beweisen.

Satz 3 hat diese unmittelbare Folgerung:

Satz 4. *In der Ebene $\mathscr{P}$ sind die Bedingungen H^i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, B, Q, d gleichwertig.*

Schlussbemerkung. Bekanntlich sind in der projektiven Ebene die Bedingungen R und D äquivalent ([6], § 4). Hat eine endliche projektive

Ebene einen Primzahlpotenzgrad, so sind sogar r und d äquivalent ([4], Theorem 2.5). Es bleibt offen, ob r und d auch in den übrigen projektiven Ebenen dasselbe bedeuten oder nicht (das Problem von G. Pickert; [9], S. 7).

Literatur

[1] *R. Baer:* Homogeneity of projective planes. Am. J. Math. *64* (1942), 137—152.

[2] *R. Baer:* The fundamental theorems of elementary geometry. Trans. Am. Math. Soc. *56* (1944), 94—129.

[3] *H. G. Forder:* Coordinates in geometry. Auckl. Univ. Coll. Bull. No. *41,* Math. Ser. No. 1, 1953, 1—32.

[4] *A. M. Gleason:* Finite Fano planes. Am. J. Math. *78* (1956), 797—807.

[5] *M. Ito:* A note on non-Desargues projective plane. Proc. Jap. Acad. *34* (1958), 420—421.

[6] *W. Klingenberg:* Beziehungen zwischen einigen affinen Schliessungsätzen. Hamb. Abh. *18* (1952), 120—143.

[7] *N. S. Mendelsohn:* Non-desarguesian projective plane geometry which satisfy the harmonic point axiom. Can. J. Math. *8* (1956), 532—562.

[8] *G. Pickert:* Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[9] *G. Pickert:* Die Assoziativität der Multiplikationen und Aditionen in einer projektiven Ebene. Conv. Intern. Ret. Geom. Proiett., Palermo-Messina 1957, 1—11.

[10] *Л. А. Скорняков:* Право-альтернативные тела. Изв. Ак. Наук СССР, сер. мат. *15* (1951), 177—184.

[11] *A. Zaddach:* Bemerkungen über spezielle Anti-Fano-Ebenen. Arch. d. Math. *7* (1956), 425—429.

Резюме

К ГЕОМЕТРИИ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

В статье доказывается синтетическим методом, что данная аффинная плоскость, удовлетворяющая условию Фано, является трансляционной, если и только если выполняется одно из следующих условий: S^i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) (различные аффинные специализации аксиомы о четвертой гармонической точке и некоторых родственных условий), B_0 (аффинная специализация условия Боля), Q_0 (аксиома о двух параллелограммах). Переходом к проективной плоскости далее доказывается, что данная проективная плоскость, удовлетворяющая условию Фано, является альтернативной, если и только если выполняется какое-либо из следующих условий: H^i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) (аксиома четвертой гармонической точки и родственные условия), B (условие Боля), Q (условие о двух четырехугольниках).