Czechoslovak Mathematical Journal

František Šik

Über subdirekte Summen geordneter Gruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 3, 400–424

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100422`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ÜBER SUBDIREKTE SUMMEN GEORDNETER GRUPPEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Eingelangt am 21. November 1959)

In dieser Abhandlung befassen wir uns mit Charakterisierungen von Verbandsgruppen, die irgendeinen Typ subdirekter Summen geordneter Gruppen darstellen. Diese Charakterisierungen haben einerseits einen konstruktiven Charakter, andererseits sind sie auf den mit der Theorie der Disjunktivität zusammenhängenden Eigenschaften gegründet.

Die Theorie der subdirekten Summen, zu der die der direkten Zerlegungen als einer ihrer Spezialfälle gehört, spielt in den gleichzeitigen algebraischen Untersuchungen eine bedeutungsvolle Rolle. In dem vorliegenden Artikel beschäftigen wir uns mit den Verbandsgruppen (l-Gruppen), die eine der subdirekten Summen einfach geordneter Gruppen sind. Man sagt, daß eine l-Gruppe $\overline{G}$ eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen ist, wenn sie eine l-Untergruppe einer kompletten direkten Summe $\tilde{\sum} G_\nu$ eines Systems $\{G_\nu\}$ von einfach geordneten Gruppen ist. Die l-Gruppe $\overline{G}$ wird fernerhin eine Realisierung jeder zu $\overline{G}$ isomorphen l-Gruppe G genannt. Eine und dieselbe l-Gruppe läßt Realisierungen von verschiedenen Typen zu. Das Kriterium, auf dessen Grunde verschiedene Typen untereinander unterscheidet werden, besteht darin, ob die Realisierung $\overline{G}$ der l-Gruppe G Elemente $x(\ )$ mit der Eigenschaft $x(\mu) \neq 0$, $x(\nu) = 0$ für $\nu, \nu \neq \mu$ besitzt oder nicht. Eine Realisierung ist a) vom Typ β, b) vom Typ α, c) vollständig, wenn sie a) bzw. b) für keinen bzw. jeden Index μ ein Element der beschriebenen Gestalt enthält, c) für jedes μ und zu jedem $x_\mu \in G_\mu$ ein Element $x(\ ) \in \overline{G}$ existiert, so daß $x(\mu) = x_\mu$, $x(\nu) = 0$ für $\nu, \nu \neq \mu$ gilt. Diese Typen werden auf zweierlei Art charakterisiert. In der ersten Methode geht man aus dem bekannten Satz 9, [1] VI § 6, aus, daß eine l-Gruppe genau dann eine Realisierung besitzt, wenn in G ein System von l-Idealen gewißer Art besteht. Die Typen a) b) c) der Realisierungen sind dann durch Systeme derartiger l-Ideale mit einigen zusätzlichen Eigenschaften charakterisiert. In der zweiten Methode benützt man zur Charakterisierung die Disjunktivitätstheorie. Auf diese Weise habe ich in der Arbeit [4] vollständige Realisierungen ausführlich studiert. Die auf den Begriffen der Disjunktivitätstheorie gegründeten Bedingungen sind sehr einfach und natürlich. Der Satz 1 der vorliegenden Arbeit bestätigt, daß eine l-Gruppe G genau dann eine Realisierung besitzt, wenn jede Komponente in G normal ist. Durch ähnliche innere Mittel lassen sich l-Gruppen, die eine Realisierung vom Typ α und vollständige Realisierungen besitzen, charakterisieren. Hingegen kann man entsprechende Aussagen keineswegs über die Realisierungen vom Typ β machen, denn jede l-Gruppe, die irgendeine Realisierung zuläßt, hat auch eine vom Typ β (Anmerkung 5a). Die Allgemeinheit dieses Begriffes erfordert Einschränkungen. Der Begriff wird zweckensprechend, wenn wir zusätzlich verlangen, daß eine gewiße zwischen zwei Koordinaten G_ν, G_μ der gegebenen Realisierung (G_ν) definierte Relation φ keine homomorphe Abbildung einer auf die andere sei (Satz 8). Realisierungen solcher Art nennen wir reduzierte Realisierungen. Jede l-Gruppe, die eine Realisierung besitzt, hat auch eine reduzierte (Satz 7). In Satz 11 ist dann eine innere Charakterisierung (mit Hilfe der Komponenten) der l-Gruppen angegeben, die eine reduzierte Realisierung vom Typ β besitzen. Zuletzt wird bewiesen (Satz 15), daß wir zur Beschreibung der subdirekten Summen einfach geordneter Gruppen mit den Realisierungen vom Typ α und β ausreichen. Zum Schluß der Arbeit ist die vorhergehende Theorie zur Untersuchung der l-Gruppen, in denen jede Komponente ein direkter Faktor ist, benützt.

I. Am Anfang wollen wir den Leser mit den Begriffen und mit den grundlegenden Eigenschaften dieser Begriffe bekannt machen, die nicht in der Literatur geläufig sind. Hier werden nur die wichtigsten eingeführt. Eine ausführlichere Belehrung findet man z. B. in [1] XIV, [3] § 1, [4] § 1.

G sei eine l-Gruppe mit einer additiv geschriebenen (aber nicht notwendig kommutativen) Operation. Unter *einem positiven Teil* a_+ bzw. *negativen Teil* a_- eines Elementes a der l-Gruppe G verstehen wir das Element $a \vee 0$ bzw. $a \wedge 0$. Das Element $a \vee -a$ nennen wir *einen absoluten Wert* $|a|$ des Elementes a. Die gleichzeitig definierten Elemente hängen auf folgende Weise zusammen.

$$a = a_+ + a_- \; ; \quad |a| = a_+ - a_- \; ; \quad a_+ \wedge - a_- = 0 \, .$$

Ist $A \subset G$, dann verstehen wir unter A_+ bzw. A_- die Menge der positiven bzw. negativen Teile aller Elemente der Menge A. Eine Untermenge B einer l-Gruppe G heißt *konvex*, wenn gilt: $a \in B$, $x \in G$, $|a| \geqq |x| \Rightarrow x \in B$. Ein konvexer Normalteiler heißt *ein l-Ideal*. l-Ideale einer l-Gruppe G stellen einen kompletten distributiven Verband dar, dessen Operationen durch den Durchschnitt und die Summe realisiert werden. Eine Zerlegung in G modulo eines l-Ideales J wird eine l-Gruppe, die wir mit G/J bezeichnen und *eine l-Faktorgruppe* nennen, wenn die Anordnung durch folgende Vorschrift positiver Elemente angegeben ist: ein Element $A \in G/J$ ist genau dann positiv, $A \geqq 0$, wenn ein $a \in A$, $a \geqq 0$, existiert. Die Verbandsoperationen in G/J bezeichnen wir in gleicher Weise wie in G.

Zwei Elemente x, $y \in G$ nennen wir *disjunktiv*, wenn $|x| \wedge |y| = 0$ gilt; man bezeichnet mit $x \delta y$. Untermengen A, B in G nennen wir disjunktiv (und bezeichnen mit $A \delta B$), wenn gilt: $a \in A$, $b \in B \Rightarrow a \delta b$. Die Menge A' aller Elemente $x \in G$, für die $x \delta A$ gilt, heißt *das disjunktive Komplement* (in G) der Menge A. Jede Untermenge B in G, zu der eine Untermenge A in G mit der Eigenschaft $A' = B$ existiert, nennen wir *eine Komponente* (in G). Unter *einem komplementären Komponentenpaar* (oder anders ausgedrückt: unter *komplementären Komponenten*) verstehen wir ein solches Komponentenpaar K, L, für das $K = L'$, $L = K'$ gilt. Jede Komponente ist eine konvexe Untergruppe. *Eine echte Komponente* ist eine solche, die eine echte Untergruppe in G ist. Eine Komponente heißt *normal*, wenn sie ein Normalteiler ist. Das System aller Komponenten in G bildet eine komplette Boolesche Algebra, in der das Infimum $\bigwedge K_\nu$ eines Komponentensystems $\{K_\nu\}$ sein Durchschnitt und das Komplement (im Sinne der Booleschen Algebra) einer Komponente ihr disjunktives Komplement ist. Die Null und G sind das kleinste und das größte Element der Algebra. (Die Verbandsoperationen in dieser Algebra bezeichnen wir in gleicher Weise wie in G.)

Hilfssatz 1. *J sei ein l-Ideal in einer l-Gruppe G. Die l-Faktorgruppe G/J ist genau dann einfach geordnet, wenn von je zwei komplementären Komponenten mindestens eine in J enthalten ist.*

Beweis. Die l-Faktorgruppe G/J sei nicht einfach geordnet. Deswegen besteht in G/J ein mit J unvergleichbares Element A. Für ein beliebiges $a \in A$ gilt also $a \parallel 0$ (d. h. a unvergleichbar mit 0). Eines der Elemente a_+, a_- gehört nicht zu J. In dem umgekehrten Fall wäre $a = a_+ + a_- \in J$, was einen Widerspruch beinhaltet. Es sei z. B. a_+ non $\in J$. (Den Fall a_- non $\in J$ untersucht man analog.) Wenn $a_- \in J$ gilt, dann ist auch $a_- = -a_+ + a \in J$, also gehören a_+ und a zu derselben Klasse mod J, d. h. zu A. Das ergibt aber einen Widerspruch mit den Relationen $a_+ \in A \vee J \neq A$. Daraus folgt a_+ non $\in J$, a_- non $\in J$. Für die komplementären Komponenten $(a_+)'$, $(a_+)''$ gilt daher $(a_+)'$ non $\subset J$, $(a_+)''$ non $\subset J$.

Sind K, K' komplementäre Komponenten, K non $\subset J$, K' non $\subset J$, und a, b Elemente in G, $a \in K$, a non $\in J$, $b \in K'$, b non $\in J$, dann gilt für die die Elemente $|a|$ bzw. $|b|$ enthaltenden Klassen A bzw. B in G/J $A > J$, $B > J$, $A \wedge B = J$ und somit $A \parallel B$.

Hilfssatz 2. *Ist J eine maximale Komponente in einer l-Gruppe G und gleichzeitig ein l-Ideal, dann ist die l-Faktorgruppe G/J einfach geordnet.*

Anmerkung. Unter *einer maximalen* (*minimalen*) *Komponente* verstehen wir ein Dualatom (Atom) des Komponentenverbandes.

Beweis. Das disjunktive Komplement J' zu J ist ersichtlich eine minimale

Komponente. Ist K eine beliebige Komponente in G, dann gilt $J' \cap K = 0$ oder $J' \subset K$. Im ersten Fall ist $J' \delta K$,[1]) und somit $J \supset K$, im zweiten gilt $J \supset K'$. Die Behauptung folgt dann aus Hilfssatz 1.

S 1. *G sei eine l-Untergruppe einer l-Gruppe $\mathfrak{G}$, K, K' ein komplementäres Komponentenpaar in G; dann existiert ein komplementäres Komponentenpaar $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{G}$, für das $\mathfrak{K} \cap G = K$, $\mathfrak{K}' \cap G = K'$ gilt* ([4] *Hilfssatz 7*).

Wenn für ein Paar von l-Idealen L, K einer l-Gruppe G $L + K = G$, $L \cap K = 0$ gilt, so heißt L, K *ein komplementäres Paar der direkten Faktoren* (in G). Jedes Element des Paares nennen wir *einen direkten Faktor* (in G), jedes von ihnen ist *ein direktes Komplement* (*ein komplementärer direkter Faktor*) des zweiten. Ein komplementäres Paar direkter Faktoren ist ein komplementäres Komponentenpaar ([3] Hilfssatz 5). Jeder direkte Faktor besitzt also genau ein direktes Komplement.

Es sei ein System $\{G_\nu | \nu \in A\}$ von l-Gruppen gegeben. Bezeichnen wir mit $x(\ )$ eine auf der Menge A definierte Funktion, deren Werte ($\equiv$ Koordinaten) $x(\nu)$ zu G_ν gehören, dann bildet die Menge aller solcher Funktionen eine l-Gruppe, die wir *eine komplette direkte Summe* von l-Gruppen $\{G_\nu\}$ nennen und mit $\tilde{\sum\limits_{\nu \in A}} G_\nu$ bezeichnen wollen, wenn in $\mathfrak{G}$ algebraische Operationen folgenderweise erklärt sind: $x(\ ) \circ y(\ ) = z(\ ) \Leftrightarrow x(\nu) \circ y(\nu) = z(\nu)$ für $\nu \in A$. Dabei bedeutet $\circ$ irgendeine von den Operationen $+$, $\vee$, $\wedge$. Es sei bemerkt, daß wir unter $\overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in M}} G_\nu}$, $M \subset A$, eine l-Untergruppe in $\tilde{\sum\limits_{\nu \in A}} G_\nu$ aller Elemente $x(\ )$ mit der Eigenschaft $x(\nu) = 0$, $\nu \text{ non} \in M$, verstehen. Wenn die Menge M ein einziges Element ν besitzt, dann bezeichnen wir die l-Untergruppe kurz mit $\overline{G}_\nu$; ist $M = \emptyset$, so verstehen wir unter der l-Untergruppe 0. Analog definierten wir $\tilde{\sum\limits_{\nu \in A}} G_\nu = 0$ für $A = \emptyset$.

S 2. *Eine l-Gruppe $\mathfrak{G}$ sei eine komplette direkte Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu | \nu \in A\}$, $\mathfrak{G} = \tilde{\sum\limits_{\nu \in A}} G_\nu$. Dann gilt*:

a) Jede Komponente in $\mathfrak{G}$ ist ein direkter Faktor in $\mathfrak{G}$.

b) K ist genau dann eine Komponente in $\mathfrak{G}$, wenn $K = \overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in M}} G_\nu}$, $M \subset A$, gilt.

c) Das disjunktive Komplement der Komponente $\overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in M}} G_\nu}$ ist $\overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in A - M}} G_\nu}$.

([4] *Hilfssatz 14*).

II. In diesem Absatz geben wir Charakterisierungen von verschiedenen Typen subdirekter Summen einfach geordneter Gruppen an. Die Bestimmung der diese Typen beschreibenden Bedingungen sind auf zwei Methoden gegründet:

[1]) Für zwei konvexe Untergruppen A, B gilt: $A \cap B = 0 \Leftrightarrow A \delta B$ ([3] Lemma 4).

1. Die erste ist konstruktiv, d. h. für eine gegebene l-Gruppe G wird ein System einfach geordneter Gruppen gegeben, so daß G eine subdirekte Summe des Systems ist.

2. Die andere ist auf den Eigenschaften der Komponenten gegründet.

Um diesen Grundsatz überall einhalten zu können, haben wir in den Sätzen 1 und 3 bekannte Bedingungen eingeführt.

Zu den Begriffen und ihren Definitionen bemerken wir folgendes. Die Begriffe einer subdirekten, direkten und kompletten direkten Summe sind bekannt und geläufig. Den Begriff einer vollständig subdirekten Summe habe ich in der Arbeit [4] eingeführt und studiert. Neu sind die Begriffe einer α- und β-subdirekten Summe und ihrer reduzierten Modifikationen.

Definition. *Eine subdirekte Summe* einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu | \nu \in A\}$ ist eine solche l-Untergruppe $\overline{G}$ in $\mathfrak{G} = \sum_{\nu \in A}^{\sim} G_\nu$, in der zu einem beliebigen $\nu \in A$ und einem beliebigen $a_\nu \in G_\nu$ ein $x(\ ) \in \overline{G}$ besteht, so daß $a_\nu = x(\nu)$ gilt.

Es ist leicht eine l-Gruppe zu finden — im weiteren werden einige Beispiele gegeben — die isomorph subdirekten Summen verschiedener Systeme einfach geordneter Gruppen ist. Aus dem Grunde ist der folgende Begriff eingeführt.

Definition. Eine l-Gruppe $\overline{G}$ ist *eine Realisierung* einer l-Gruppe G, wenn $\overline{G}$ eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen und zu G isomorph ist.

Wenn eine l-Gruppe G isomorph einer subdirekten Summe $\overline{G}$ von einfach geordneten Gruppen $\{G_\nu | \nu \in A\}$ ist, so bezeichnen wir diese Realisierung der l-Gruppe G auch mit (G_ν) oder ausführlicher mit $(G_\nu | \nu \in A)$. Die einfach geordneten Gruppen G_ν nennen wir *Koordinaten* der Realisierung (G_ν).

Satz 1. *Folgende Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G hat eine Realisierugn.*

2. *In G besteht ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, so daß $\bigcap J_\nu = 0$ und die l-Faktorgruppe G/J_ν für jedes ν einfach geordnet ist.*

3. *Jede Komponente in G ist normal.*

B e w e i s. Die Äquivalenz zwischen den Bedingungen 1 und 2 wird in Satz 9, [1] VI § 6, bewiesen.

$3 \Rightarrow 1$. Es sei $s \in G$, $s \neq 0$. Bezeichnen wir mit J eines der maximalen l-Ideale, die das Element s nicht enthalten.[2]) Setzen wir voraus, daß die l-Faktorgruppe G/J nicht einfach geordnet ist, dann existieren nach Hilfssatz 1 komplementäre Komponenten K, K', für die K non $\subset J$, K' non $\subset J$ gilt.

[2]) Unter einem maximalen s nicht enthaltenden l-Ideale verstehen wir ein maximales Element in der bezüglich der Inklusion teilgeordneten Menge aller l-Ideale, die s nicht enthalten. Seine Existenz ist durch das Z o r n sche Lemma garantiert.

Es sei mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$ das System aller Klassen in G/J bezeichnet, die mit K bzw. K' ein gemeinsames Element haben. Es gilt $\mathfrak{K}\delta\mathfrak{K}'$ in G/J: $X \in \mathfrak{K}$, $Y \in \mathfrak{K}' \Rightarrow$ es existieren Elemente $x \in X \cap K$, $y \in Y \cap K'$, so daß $|x| \wedge |y| = 0$ gilt $\Rightarrow |X| \wedge |Y| = J$, und daher $\mathfrak{K}\delta\mathfrak{K}'$. Wegen $S \neq J$ gehört nicht die das Element s enthaltende Klasse $S \in G/J$ gleichzeitig zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Es sei z. B. S non $\in \mathfrak{K}$. Dann gilt s non $\in K + J$. $K + J$ ist ein l-Ideal in G mit der Eigenschaft $K + J \supset J$, $K + J \neq J$, was einen Widerspruch ergibt. Daher ist G/J einfach geordnet. Der Bestimmtheit halber bezeichnen wir nun das l-Ideal J mit J_s. Ersichtlich gilt $\bigcap\limits_{0 \neq s \in G} J_s = 0$. Die Gültigkeit der Bedingung 1 folgt dann aus der Äquivalenz $1 \Leftrightarrow 2$.

$1 \Rightarrow 3$. Ist (G_ν) eine Realisierung der l-Gruppe G, dann lassen sich die Komponenten in (G_ν) nach S 1 und S 3 in der Form $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in M}} G_\nu}$ schreiben, also ist jede Komponente in (G_ν) und daher auch in G normal.

Anmerkung 1. a) Zum Beweise $2 \Rightarrow 1$. Ist die Bedigung 2 befriedigt, dann hat G nach dem Beweise zu Satz 9, [1] VI § 6, eine Realisierung (G/J_ν). Der Isomorphismus ψ zwischen G und (G/J_ν) wird folgendermaßen gegeben: Der Durchschnitt aller Klassen X_ν mod J_ν (für alle ν), die ein gegebenes Element $x \in G$ umfassen, enthält nur das Element x; wenn wir mit $X(\ )$ das Element in $\tilde{\sum} G/J_\nu$ mit der Eigenschaft $X(\nu) = X_\nu$ bezeichnen, dann ist $\psi(x) = X(\ )$.

b) Wie aus dem ersten Teile des Beweises zu Satz 1 folgt, kann man jedes J_ν in der Bedingung 2 als ein maximales l-Ideal, das ein gegebenes von Null verschiedenes Element aus G nicht umfaßt, konstruieren. Das System $\{J_\nu\}$ in der Bedingung 2 ist das System aller solcher l-Ideale.

c) Zum Beweise $1 \Rightarrow 2$. Ist (G_ν) eine Realisierung der l-Gruppe G, dann ist das System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen in (G_ν) nach dem Beweise zu Satz 9, [1] VI § 6, so ausgewählt: J_μ ist die Menge aller $x(\ ) \in (G_\nu)$ mit $x(\mu) = 0$.

Für ein späteres Bedürfnis beweisen wir nun eine Beziehung zwischen der ursprünglichen Realisierung (G_ν) und der neuen (G/J_ν). Der Einfachheit halber identifizieren wir die l-Gruppe G mit ihrer Realisierung (G_ν).

Für Elemente $x(\ )$ und $\psi[x(\ )] = X(\ )$, die durch den Isomorphismus ψ einander zugeordnet sind (vgl. Absatz a) dieser Anmerkung), gilt (für ein beliebig ausgewähltes μ und für alle ν, $\nu \neq \mu$):

$$x(\mu) \neq 0\,,\ x(\nu) = 0 \Leftrightarrow X(\mu) \neq J_\mu\,,\ X(\nu) = J_\nu\,.$$

Es ist nämlich: $x(\mu) \neq 0$, $x(\nu) = 0 \Leftrightarrow x(\ )$ non $\in J_\mu$, $x(\ ) \in J_\nu \Leftrightarrow X(\mu) \neq J_\mu$, $X(\nu) = J_\nu$.

Auf eine interessante Weise sind l-Gruppen, die eine Realisierung mit zwei Koordinaten (eine 2-Koordinaten-Realisierung) besitzen, charakterisiert. Mit dieser Frage werden wir uns nun beschäftigen. Es sei bemerkt, daß ich keine ähnliche Charakterisierung gefunden habe, wenn die Realisierung mehr als zwei Koordinaten hat.

Definition. J sei ein l-Ideal einer l-Gruppe G. Die l-Faktorgruppe G/J heißt *stark einfach geordnet*, wenn für ein beliebiges Element a, a non $\in J$, gilt: $a > y$ für jedes $y \in J$ oder $a < y$ für jedes $y \in J$.

Es ist klar, daß eine stark einfach geordnete l-Faktorgruppe einfach geordnet ist.

S 3. *Eine l-Gruppe ist genau dann einfach geordnet, wenn sie keine echte Komponente besitzt* ([4] *Hilfssatz 11*).

Hilfssatz 3. *J sei ein l-Ideal einer l-Gruppe G. G/J ist genau dann stark einfach geordnet, wenn J alle echten Komponenten der l-Gruppe G umfaßt.*

Beweis. Es sei G/J stark einfach geordnet, K eine echte Komponente in G, K non $\subset J$. Dann existieren Elemente x, y in G, $x > 0$, $y > 0$, $x \in K$, x non $\in J$, $x \wedge y = 0$. Die letzte Gleichheit gibt einen Widerspruch mit jeder der Relationen $y \in J$, y non $\in J$.

Jede der echten Komponenten einer l-Gruppe G sei in J enthalten. Es sei ein $a \in G$, a non $\in J$ gewählt. Ist $a \parallel y$ für ein $y \in J$, dann ist $a - y \parallel 0$, $(a - y)_+ > > 0$, $(a - y)_- < 0$, und daher existieren in G komplementäre Komponenten, von denen eine das Element $(a - y)_+$ und andere $(a - y)_-$ enthält. Beide sind in J enthalten, also gilt $a - y = (a - y)_+ + (a - y)_- \in J$. Durch diesen Widerspruch ist bewiesen, daß $a - y > 0$ oder $a - y < 0$ für alle $y \in J$ gilt. Aber für Elemente $y, z \in J$ können nicht die Ungleichungen $a - y > 0$, $a - z < < 0$ gleichzeitig auftreten, denn die das Element a enthaltende Klasse $A \in G/J$ würde ein positives und ein negatives Element enthalten, was unmöglich ist. Also ist $a > y$ für jedes $y \in J$ oder $a < y$ für jedes $y \in J$, w. z. b. w.

Satz 2. *Eine l-Gruppe G hat genau dann eine 2-Koordinaten-Realisierung, wenn sie einfach geordnet ist oder ein l-Ideal J enthält, das eine direkte Summe zweier einfach geordneter l-Ideale in G und G/J stark einfach geordnet ist.*

Beweis. G habe eine 2-Koordinaten-Realisierung. Nach S 1 und S 2 bestehen in G genau zwei (komplementäre) echte Komponenten oder keine. Im zweiten Fall ist G einfach geordnet. Im ersten ist die Summe J dieser Komponenten das gesuchte l-Ideal.

Es existiere in G ein l-Ideal mit den verlangten Eigenschaften. J ist also eine direkte Summe zweier einfach geordneter l-Ideale K, L in G. Also sind K, L (einzige echte) Komponenten in J. Nach Hilfssatz 3 enthält J jede der echten Komponenten in G und deswegen sind K, L Komponenten auch in G (vgl. S 1). Denn K, L sind l-Ideale in G, $K \cap L = 0$,so ist $(G/K, G/L)$ eine Realisierung der l-Gruppe G.

Definition. Eine subdirekte Summe G einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$

heißt *vollständig subdirekt*, wenn $G \supset \overline{G}_\nu$ für alle ν gilt ([4] S. 27). Die Realisierung (G_ν) heißt dann vollständig.

Satz 3. *Folgende Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G hat eine vollständige Realisierung.*

2. *In G existiert ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, so daß $\bigcap J_\nu = 0$, die l-Faktorgruppe G/J_ν für jedes ν einfach geordnet und für ein beliebiges μ $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu + J_\mu = G$ ist.*[3])

3. *Jede von Null verschiedene Komponente enthält einen minimalen direkten Faktor in C.*

Beweis der Äquivalenz der Bedingungen 1 und 3 wurde in [4], Satz 2, durchgeführt.

$1 \Rightarrow 2$. G habe eine vollständige Realisierung. Der Einfachheit halber setzen wir $G = (G_\nu | \nu \in A)$ voraus. Für ein festes $\mu \in A$ definieren wir $J_\mu = \{x(\ )|x(\ ) \in G, x(\mu) = 0\}$. Dann ist die Bedingung 2 erfüllt.

$2 \Rightarrow 1$. Die Bedingung 2 sei erfüllt. G hat eine Realisierung (G/J_ν). (Satz 1.) Wir sollen beweisen, daß für ein beliebiges $X_\mu \in G/J_\mu$ ein $y \in G$ existiert, so daß $y \in X_\mu \cap \bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu$ gilt. Zu einem beliebigen $x \in X_\mu$ existieren Elemente $z \in J_\mu$, $y \in \bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu$, so daß $x = y + z$ gilt. Dann gehört das Element $y = x - z$ zur Klasse X_μ, also ist $y \in X_\mu \cap \bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu$.

Anmerkung 2. a) Ist die Bedingung 2 des Satzes 3 erfüllt, dann bilden J_μ und $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu$ eine direkte Zerlegung der l-Gruppe G.

b) Ist die Bedingung 2 des Satzes 3 erfüllt, dann ist (G/J_ν) eine vollständige Realisierung der l-Gruppe G.

Definition. Eine subdirekte Summe G einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ heißt *α-subdirekt*, wenn $G \cap \overline{G}_\nu \neq 0$ für jedes ν gilt. Die Realisierung (G_ν) heißt dann *vom Typ α*.

Hat G eine Realisierung vom Typ α, dann ist offenbar $G \neq 0$.

Satz 4. *Folgende Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G hat eine Realisierung vom Typ α.*

2. *In G existiert ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, so daß G/J_ν für jedes ν einfach geordnet, $\bigcap J_\nu = 0$ und $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu \neq 0$ für jedes μ ist.*

3. *Jede echte Komponente ist in einer maximalen normalen Komponente enthalten.*

---

[3]) Besteht die Menge $\{J_\nu\}$ nur aus einem Elemente, dann verstehen wir unter $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu$ die ganze l-Gruppe G. Überall im weiteren verstehen wir unter dem Durchschnitte eines leeren Systems von Untergruppen in G die ganze l-Gruppe G.

Anmerkung 3. Ist die Bedingung 3 erfüllt, dann ist jede maximale normale Komponente eine maximale Komponente. Ist nämlich K eine der maximalen normalen Komponenten, L eine echte Komponente, $K \subset L$, dann besteht nach 3 eine maximale normale Komponente N, so daß $L \subset N$ gilt. Aus der Maximalität der Komponente K folgt $K = N$ und somit $L = K$.

Beweis zu Satz 4. 3 $\Rightarrow$ 2. Ist das disjunktive Komplement eines beliebigen Elementes $x \in G$, $x \neq 0$, gleich Null, dann besteht in G keine echte Komponente und deswegen ist G einfach geordnet (vgl. S 3). Die Behauptung ist dann offensichtlich. Das disjunktive Komplement L eines Elementes $x \in G$, $x \neq 0$, sei nun von Null verschieden. Eine der maximalen normalen L umfassenden Komponenten bezeichnen wir mit J_0. Es gilt x non $\in J_0$. In dem ungekehrten Fall würde J_0 außer L auch L' enthalten (denn L' ist die kleinste der das Element x besitzenden Komponenten), daher würde $J_0 = G$ im Widerspruch mit der Voraussetzung gelten. Es sei mit $\{J_\nu\}$ das System aller maximalen normalen Komponenten in G und mit J der Durchschnitt $\bigcap J_\nu$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 2 und nach Anmerkung 3 ist G/J_ν einfach geordnet. Weiter gilt $J = 0$, denn J enthält nach dem vorangehenden nur 0 und schwache Eiheiten (vgl. [1] XIV § 6; *eine schwache Einheit* ist ein Element, dessen disjunktives Komplement gleich Null ist). Würde aber J eine der schwachen Einheiten enthalten, dann wäre $J = G$, was einen Widerspruch beinhaltet. Daraus folgt $J = 0$. Wählen wir einen beliebigen Index μ, so muß nach Hilfssatz 1 das disjunktive Komplement J'_μ in allen J_ν für $\nu \neq \mu$ enthalten sein und somit $\bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu \supset J'_\mu \neq 0$.

2 $\Rightarrow$ 1. G hat nach Satz 1 eine Realisierung (G/J_ν). Wählen wir einen Index μ und ein Element x, $0 \neq x \in \bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu$ und bezeichnen wir mit X_μ die Klasse in G mod J_μ, die das Element x enthält, dann gilt $X_\mu \neq J_\mu$. Das Bild des Elementes x bezüglich des Isomorphismus ψ (siehe Anmerkung 1a) ist das Element $X(\ )$, $X(\ ) \in (G/J_\nu)$, für das $X(\mu) = X_\mu \neq J_\mu$, $X(\nu) = J_\nu$ für alle ν, $\nu \neq \mu$, gilt. Daraus folgt $X(\ ) \in (G/J_\nu) \cap \overline{G/J_\mu}$, $X(\ ) \neq 0$ und damit ist (G/J_ν) eine Realisierung vom Typ α der l-Gruppe G.

1 $\Rightarrow$ 3. $(G_\nu | \nu \in A)$ sei eine Realisierung vom Typ α einer l-Gruppe G. Ist K eine der echten Komponenten in (G_ν), dann ist nach S 1 und S 2 $K = (G_\nu) \cap \cap \overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in M}}} G_\nu$, wobei $M \subset A$, $M \neq A$ ist. Für ein beliebiges $\mu \in A - M$ ist das disjunktive Komplement L der Menge $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu (\neq 0)$ eine der maximalen Komponenten in (G_ν) und es gilt $K \subset L$. Wenn wir bemerken, daß jede Komponente in (G_ν) nach Satz 1 normal ist und $G \simeq (G_\nu)$ gilt, so wird die Behauptung bewiesen.

Anmerkung 4. a) Als ein System $\{J_\nu\}$ läßt sich in der Bedingung 2 das System aller maximaler Komponenten in G nehmen (das folgt aus dem Beweise 3 $\Rightarrow$ 2 und aus der Anmerkung 3).

b) In den späteren Überlegungen über reduzierte Realisierungen benützen wir folgenden aus der Bedingung 2 hervorgehenden Schluß:

Keine zwei l-Ideale des Systemes $\{J_\nu\}$ sind bezüglich der Inklusion vergleichbar.

c) Ist die Bedingung 2 erfüllt, dann ist (G/J_ν) eine Realisierung vom Typ α der l-Gruppe G.

d) Beispiel einer l-Gruppe, die eine Realisierung vom Typ α, aber keine vollständige hat. Eine solche l-Gruppe ist in [4] Beispiel V, S. 43, eingeführt. Sie ist so definiert: G_k, $k = 1, 2, 3$, seinen einfach geordnete Gruppen. In der direkten Summe der (ungeordneten) Gruppen $\{G_k\}_1^3$ definieren wir eine Teilordnung, wie folgt: Ist a_k, $b_k \in G_k$, dann ist $(a_1, a_2, a_3) \leqq (b_1, b_2, b_3)$, wenn $a_1 < b_1$ oder $a_1 = b_1$, $a_i \leqq b_i$, $i = 2, 3$, gilt.

$\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ sind von Null verschiedene l-Ideale in G, die die Bedingung 2 des Satzes 4 befriedigen, also ist G eine α-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen. Die l-Gruppe G hat keine vollständige Realisierung, denn $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ sind ihre echten Konponenten, dagegen hat sie nur unechte direkte Faktoren.

S 4. *Es sei $(G_\nu|\nu \in A)$ eine Realisierung vom Typ α einer l-Gruppe G. Ist $M \subset A$, dann ist $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum_{\nu\in M}} G}$, $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum_{\nu\in A-M}}} G_\nu$ ein komplementäres Komponentenpaar in G.*

Der Beweis ist übereinstimmend mit dem zu Hilfssatz 15 [4].

Satz 5. *Folgende Bedingungen sind auf eine l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G hat eine Realisierung mit einer endlichen Koordinatenanzahl.*
2. *G hat eine Realisierung vom Typ α mit einer endlichen Koordinatenanzahl.*
3. *Die Vereinigung einer beliebigen Kette von echten Komponenten ist eine der echten normalen Komponenten.*

Beweis. $3 \Rightarrow 2$. Die Bedingung 3 des Satzes 4 ist offensichtlich erfüllt. G hat also eine Realisierung (G_ν) vom Typ α. Ist das System $\{G_\nu\}$ nicht endlich, ordnen wir die Menge von Indizen ν in eine transfinite Folge vom Typ ϱ ohne das letzte Element. Nach S 4 ist $K_\mu = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum_{\nu<\mu}} G_\nu}$ für ein beliebiges μ, $\mu \leqq \varrho$, eine Komponente. $\{K_\mu|\mu < \varrho\}$ ist eine bezüglich der Inklusion geordnete aufsteigende Kette von echten Komponenten. Nach der Voraussetzung ist $\bigcup_{\mu<\varrho} K_\mu$ eine der echten (normalen) Komponenten. Hingegen beweisen wir die Gleichheit $\bigcup_{\mu<\varrho} K_\mu = G$. Zu diesem Ziele genügt es zu beweisen, daß für ein $a(\ )$, $a(\ ) \in (G_\nu)$, $a(\ )\ \delta \bigcup_{\mu<\varrho} K_\mu$, die Relation $a(\ ) = 0$ gilt. Für ein $a(\ )$, sei die vorhergehende Bedingung befriedigt. Zu einem beliebigen Index ν existiert ein Index μ, so daß $\nu < \mu < \varrho$ ist. Wählen wir ein $x(\ )$ in (G_ν), so daß $x(\nu) \neq 0$, $x(\alpha) = 0$ für alle α, $\alpha \neq \nu$, gilt. Weil $x(\ ) \in K_\mu$ ist, muß auch $x(\ )\ \delta a(\ )$ und deswegen $|x(\nu)| \wedge |a(\nu)| = 0$, $a(\nu) = 0$, $a(\ ) = 0$ sein. Der Widerspruch beweist, daß das System $\{G_\nu\}$ endlich ist.

Beweis der Implikation $2 \Rightarrow 1$ liegt auf der Hand.

$1 \Rightarrow 3$. In G besteht nach S 1 und S 2 nur eine endliche Anzahl von Komponenten und jede Komponente ist nach Satz 1 normal. Daraus folgt 3.

Definition. Eine subdirekte Summe G einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ heißt *β-subdirekt*, wenn $G \cap \overline{G}_\nu = 0$ für jedes ν gilt. Die Realisierung (G_ν) heißt vom Typ β.

Anmerkung 5. a) Jede subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen hat eine Realisierung vom Typ β.

Beweis. Ist $(G_\nu | \nu \in A)$ eine Realisierung einer l-Gruppe G, so ersetzen wir jede Koordinate G_ν durch ihre zwei Kopien $G_\nu, G_{\nu'}$. Jedem Elemente $x(\ ) \in \in (G_\nu)$ ordnen wir eine auf der Menge $A \cup A'$ von Indizen ν und ν' folgenderweise definierte Funktion $x^*(\ )$ zu: $x^*(\nu') = x^*(\nu) = x(\nu)$. Die Menge aller $x^*(\ )$ bildet offenbar eine Realisierung vom Typ β der l-Gruppe G.

b) Man findet leicht ein Beispiel einer l-Gruppe, die gleichzeitig eine Realisierung vom Typ α, eine vom Typ β und eine, die weder vom Typ α noch β ist, besitzt.

Beispiel. Betrachten wir ein System einfach geordneter Gruppen $\{G_k | k = = 1, 2, 3, 4\}$, wobei G_1 und G_3 bzw. G_2 und G_4 Kopien derselben einfach geordneten Gruppe G_a bzw. G_b bedeuten. G sei die l-Untergruppe aller Elemente $x(\ )$ in $\tilde{\sum\limits_{k=1,\ldots,4}} G_k$, für die $x(1) = x(2)$, $x(3) = x(4)$ gilt. G ist offensichtlich eine β-subdirekte Summe des Systems $\{G_k | k = 1, 2, 3, 4\}$. G hat aber eine weitere Realisierung (G_1, G_2, G_b), die weder vom Typ α noch β ist und schließlich ist G isomorph der direkten Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_a, G_b\}$, die eine Realisierung vom Typ α der l-Gruppe G darstellt.

c) Aus der Anmerkung 5a folgt unmittelbar die folgende Behauptung:

Eine l-Gruppe hat genau dann eine Realisierung vom Typ β, wenn sie eine Realisierung hat.

Eine subdirekte Summe G einfach geordneter Gruppen läßt sich durch die Existenz eines Systems von l-Idealen in G mit den in der Bedingung 2 des Satzes 1 eingeführten Eigenschaften charakterisieren. Nach Anmerkung 1a ist (G/J_ν) eine Realisierung der l-Gruppe G. Aber diese Realisierung muß nicht vom Typ β sein. In dem folgenden Satz wird eine Modifikation der erwähnten Bedingung 2 gefunden, so daß (G/J_ν) eine Realisierung vom Typ β der l-Gruppe G ist.

Satz 6. *Eine l-Gruppe G hat genau dann eine Realisierung vom Typ β, wenn in G ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen besteht, so daß G/J_ν für jedes ν einfach geordnet ist und für ein beliebiges μ $\bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu = 0$ gilt.*

Ist die Bedingung erfüllt, so ist (G/J_ν) eine Realisierung vom Typ β der l-Gruppe G.

Beweis. (G_ν) sei eine Realisierung vom Typ β der l-Gruppe G. Wie man leicht erkennt (siehe auch [1] VI, § 6), ist die Menge aller Elemente $x(\ )$, $x(\ ) \in (G_\nu)$, für die $x(\nu) = 0$ (für ein gegebenes ν) gilt, ein l-Ideal in $(G\nu)$. Sie sei mit J_ν bezeichnet. Für die Menge $\{J_\nu\}$ aller dieser l-Ideale gilt $\bigcap J_\nu = 0$, $(G_\nu)/J_\nu \simeq G_\nu$. Setzen wir die Existenz eines Indices μ voraus, für das $\bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu \neq 0$ gilt. Dann existiert ein Element $x(\ )$ in (G_ν), für das $x(\mu) \neq 0$, $x(\nu) = 0$ für alle $\nu, \nu \neq \mu$, gilt, und daraus folgt $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu \neq 0$ also ein Widerspruch mit der Voraussetzung.

In der l-Gruppe G existierte ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen mit den im Satz beschriebenen Eigenschaften. Dann ist (G/J_ν) eine Realisierung der l-Gruppe G (siehe Anmerkung 1a). Wir beweisen, daß diese Realisierung vom Typ β ist. Setzen wir voraus, daß für ein Index μ $(G/J_\nu) \cap \overline{G/J}_\mu \neq 0$ ist. Für ein beliebiges Element $X(\ )$, $X(\ ) \neq 0$, dieser Menge gilt $X(\nu) = 0$ für alle ν, $\nu \neq \mu$, $X(\mu) \neq 0$; deswegen gilt für das Element x in G, $x = \psi^{-1}[X(\ )] : x \neq 0, x \in J_\nu$ für alle $\nu, \nu \neq \mu$; also ist $\bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu \neq 0$, was einen Widerspruch mit der Voraussetzung beinhaltet. Der Satz ist bewiesen.

Folgerung. *Eine Realisierung (G_ν) einer l-Gruppe G ist genau dann vom Typ β, wenn für $x(\ )$, $y(\ )$ in (G_ν) gilt: $x(\nu) = y(\nu)$ für alle $\nu, \nu \neq \mu \Rightarrow x(\mu) = y(\mu)$.*

Beweis. G habe eine Realisierung (G_ν) vom Typ β. Ist $x(\ )$, $y(\ ) \in (G_\nu)$, $x(\nu) = y(\nu)$, für alle $\nu, \nu \neq \mu$, $x(\mu) \neq y(\mu)$, dann gilt für das Element $z(\ ) = x(\ ) - y(\ )$: $z(\nu) = 0$ für alle $\nu, \nu \neq \mu$, $z(\mu) \neq 0$, also ist $z(\ ) \in (G_\nu) \cap \overline{G}_\mu$. Dieser Widerspruch beweist den ersten Teil der Behauptung.

(G_ν) sei eine Realisierung der l-Gruppe G, in der gilt: $x(\nu) = y(\nu)$ für alle $\nu, \nu \neq \mu \Rightarrow x(\mu) = y(\mu)$. Ist nicht diese Realisierung vom Typ β, dann existiert ein Index μ, so daß $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu \neq 0$ gilt. Für ein beliebiges Element $x(\ )$, $0 \neq x(\ ) \in (G_\nu) \cap \overline{G}_\mu$, gilt $x(\nu) = 0$ für alle $\nu, \nu \neq \mu$, $x(\mu) \neq 0$. Setzen wir $y(\ ) = 0$, so erhalten wir einen Widerspruch mit der Voraussetzung. Dadurch ist der letzte Teil des Beweises erbracht.

III. Die mit dem Begriffe der Realisierung vom Typ β zusammenhängenden Schwierigkeiten führen uns zu folgender Definition.

Definition. Eine Realisierung $(G_\nu | \nu \in A)$ einer l-Gruppe G heißt *reduziert*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: zu beliebigen $\beta, \gamma \in A$, $\beta \neq \gamma$, besteht ein Element $x(\ )$ in (G_ν), so daß $x(\beta) > 0$, $x(\gamma) < 0$ gilt.

Satz 7. *Wenn die l-Gruppe eine Realisierung hat, so hat sie auch eine reduzierte.*

Beweis. $(G_\nu | \nu \in A)$ sei eine Realisierung einer l-Gruppe G. Wir definieren auf A eine Relation $\leftrightarrow$ nach der Vorschrift:

$(\leftrightarrow)$ $\beta \leftrightarrow \gamma$ *genau dann, wenn für ein beliebiges Element $x(\ )$ in (G_ν) gilt:* $x(\beta) > 0 \Rightarrow x(\gamma) \geqq 0$.

Die Relation $\leftrightarrow$ ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch.

Unter einer Kette in A verstehen wir eine nichtleere Untermenge in A, in der beliebige zwei Elemente bezüglich der Relation $\leftrightarrow$ verknüpft sind. Alle Ketten in A bilden eine bezüglich der Inklusion teilweise geordnete Menge. Unter einer maximalen Kette verstehen wir ein maximales Element dieser teilweise geordneten Menge. Es sei bemerkt, daß nach dem Zornschen Lemma jedes Element in A in einer maximalen Kette enthalten ist.

Es sei mit M eine der maximalen Ketten in A bezeichnet. Ist $x(\ ) \in (G_\nu)$, bezeichnen wir mit $x_M(\ )$ eine auf M (wobei $M \subset A$ ist) definierte Funktion, für die $x_M(\nu) = x(\nu)$, $\nu \in M$, gilt. Das System G_M aller (verschiedener) Elemente $x_M(\ )$ — M fest ausgewählt — bildet eine einfach geordnete Gruppe, wenn wir in G_M eine Addition koordinatenweise $x_M(\nu) + y_M(\nu) = (x + y)_M(\nu)$ und eine Teilordnung nach der Regel: $x_M(\ ) \geqq 0 \Leftrightarrow x(\nu) \geqq 0$, $\nu \in M$, einführen. Es ist klar, daß G_M eine teilweise geordnete Gruppe ist. Beweis der Einfachheit der Anordnung in G_M: Ist $x_M(\ ) \parallel 0$, dann existieren Indizen β, γ in M, so daß $x(\beta) > 0$, $x(\gamma) < 0$ gilt. Das ergibt aber einen Widerspruch mit der Beziehung $\beta \leftrightarrow \gamma$.

Es sei nun mit $\{G_M\}$ das System einfach geordneter Gruppen G_M, wobei M die Menge aller maximaler Ketten in A durchläuft, bezeichnet. Wir beweisen, daß (G_M) eine der reduzierten Realisierungen von G bedeutet.

Einem beliebigen Elemente $x(\ )$ in (G_ν) ordnen wir das Element $X(\ )$ in $\tilde{\sum} G_M$ zu, für das $X(M) = x_M(\ )$ ist. Diese Zuordnung ist offensichtlich eine isomorphe Abbildung der l-Gruppe (G_ν) auf eine l-Untergruppe (G_M) in $\tilde{\sum} G_M$. (G_M) ist demnach eine Realisierung der l-Gruppe G. Zum Beweise, daß die Realisierung (G_M) reduziert ist, setzen wir voraus, daß für gewiße M, N und für jedes $X(\ )$ in (G_M) gilt: $x_M(\ ) > 0 \Rightarrow x_N(\ ) \geqq 0$. Zum Beweise der Behauptung genügt es nun zu zeigen, daß für beliebige $\beta, \gamma \in A$, $\beta \in M$, $\gamma \in N$ die Relation $\beta \leftrightarrow \gamma$ gilt. Es seien Elemente $\beta \in M$, $\gamma \in N$ und $x(\ ) \in (G_\nu)$ gewählt. Ist $x(\beta) > 0$, dann ist $x_M(\ ) > 0$ (wie aus der einfachen Anordnung in G_M folgt). Daraus folgt $x_N(\ ) \geqq 0$, also ist $x(\nu) \geqq 0$, $\nu \in N$, und weiter $x(\gamma) \geqq 0$. Dadurch ist $\beta \leftrightarrow \gamma$ bewiesen und der Beweis erbracht.

Ist eine l-Gruppe G eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, so definierten wir eine Relation φ zwischen den Elementen der Gruppe G_μ und G_ν:

(φ) *Für ein $x_\mu \in G_\mu$, $x_\nu \in G_\nu$ gilt $x_\mu \ \varphi \ x_\nu$, wenn ein Element $x(\ )$ in G existiert, so daß $x(\mu) = x_\mu$ und $x(\nu) = x_\nu$ gilt.*

In dem folgenden Satz befassen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen den Relationen $\leftrightarrow$ (die am Anfang des Beweises zu Satz 7 aufgestellt wurde) und φ. In diesem Satz wird gleichzeitig eine notwendige und hinreichende Bedingung dazu gegeben, daß eine Realisierung reduziert ist.

Satz 8. *G sei eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu | \nu \in A\}$. Wenn $\mu \leftrightarrow \nu$ für μ, ν in A gilt, dann ist entweder φ eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G_μ auf die einfach geordnete Gruppe G_ν oder ist φ^{-1} eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G_ν auf die einfach geordnete Gruppe G_μ. Ist φ eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G_μ auf die einfach geordnete Gruppe G_ν, dann gilt $\mu \leftrightarrow \nu$.*

Beweis der ersten Behauptung. Setzen wir voraus, daß φ^{-1} keine Abbildung von G_ν auf G_μ ist. Wir beweisen, daß φ eine Abbildung von G_μ auf G_ν ist. Nach der Vorautssezung existieren Elemente $x(\ )$, $y(\ )$ in G, so daß die Beziehungen $x(\mu) > y(\mu)$, $x(\nu) = y(\nu)$ gelten. Ist φ keine Abbildung, dann existieren Elemente $z(\ )$, $u(\ )$ in G, so daß $z(\mu) = u(\mu)$, $z(\nu) > u(\nu)$ zu gelten braucht. Daraus folgt $u(\mu) - y(\mu) + x(\mu) - z(\mu) > 0$, $u(\nu) - y(\nu) + x(\nu) - z(\nu) < 0$, was der Relation $\mu \leftrightarrow \nu$ widerspricht. Also ist φ eine Abbildung von G_μ auf G_ν. Es ist klar, daß φ homomorph ist.

Ist φ^{-1} eine Abbildung, dann ist es offensichtlich eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G_ν auf die einfach geordnete Gruppe G_μ. Die Zweite Behauptung ist klar.

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 8 ist der

Satz 9. *Jede der Realisierungen vom Typ α einer l-Gruppe G ist reduziert.*

Beweis. (G_ν) sei eine nicht reduzierte Realisierung vom Typ α einer l-Gruppe G. Dann existieren Indizen μ, ν, so daß die Abbildung φ eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G_μ auf die einfach geordnete Gruppe G_ν ist. Wegen $(G_\nu) \cap \overline{G}_\nu \neq 0$ existiert ein $x(\ )$ in (G_ν), so daß die Beziehungen $x(\nu) > 0$, $x(\alpha) = 0$ für alle α, $\alpha \neq \nu$, also auch für μ gelten, d. h. $x(\mu) = 0$. Daraus folgt aber $x(\nu) = 0$. Der Widerspruch beweist den Satz.

Satz 10. *Genau dann besitzt eine l-Gruppe G eine reduzierte Realisierung wenn in G ein System $\{J_\nu\}$ bezüglich der Inklusion unvergleichbarer l-Ideale besteht, für das gilt: $\bigcap J_\nu = 0$, G/J_ν ist eine einfach geordnete Gruppe für jedes ν.*

Beweis. Ist (G_ν) eine reguzierte Realisierung einer l-Gruppe G, dann existiert nach Satz 1 in G ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, für die gilt: $\bigcap J_\nu = 0$, G/J_ν ist eine einfach geordnete Gruppe (für jedes ν). J_ν können wir dabei nach der Anmerkung 1c so wählen, daß J_ν der Kern des Homomorphismus $x(\ ) \to x(\nu)$, der ein Element $x(\ )$ in (G_ν) auf dessen Koordinate $x(\nu)$ in G_ν abbildet, ist. G/J_ν ist isomorph der einfach geordneten Gruppe G_ν. Entgegen der Voraussetzung sei $J_\nu \supset J_\mu$. Dann ist aber die Abbildung, die einem beliebigen Elemente X_μ in G/J_μ das Element X_ν in G/J_ν, $X_\mu \subset X_\nu$, zuordnet, eine homomorphe Abbildung der einfach geordneten Gruppe G/J_μ auf die einfach geordnete Gruppe G/J_ν. Also ist G_ν ein homomorphes Bild der einfach geordneten Gruppe G_μ bezüglich der Abbildung φ aus Satz 8 und (G_ν) ist keine reduzierte Realisierung.

Wenn umgekehrt in G ein System von l-Idealen mit den entsprechenden Eigenschaften besteht, dann ist nach Satz 1 (G/J_ν) eine Realisierung der l-Gruppe G. Es sei ein $x \in G$ gewählt und mit X_μ bzw. X_ν das Element der Gruppe G/J_μ bzw. G/J_ν bezeichnet, das x umfaßt. Ist φ (siehe Satz 8) gegen die Behauptung eine Abbildung von G/J_μ auf G/J_ν, $\varphi(X_\mu) = X_\nu$, dann ist $X_\mu \subset X_\nu$, $J_\mu \subset J_\nu$. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt den Satz.

Der Satz 1 bestimmt, daß in einer l-Gruppe G ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen mit gewißen Eigenschaften besteht, wenn G eine Realisierung besitzt. Wir befassen uns nun mit der Frage, wie sich mit Hilfe des Systems $\{J_\nu\}$ ein neues System $\{K_\alpha\}$ von l-Idealen in G konstruieren läßt, so daß (G/K_α) eine reduzierte Realisierung der l-Gruppe G darstellen würde. Eine entsprechende Konstruktion wird im folgenden beschrieben.

In einer l-Gruppe G bestehe ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, so daß $\bigcap J_\nu = 0$ gilt und G/J_ν für alle ν eine einfach geordnete Gruppe ist. Wir beweisen vorerst eine Hilfsbehauptung:

(*) *Für den Durchschnitt K einer beliebigen (bezüglich der Inklusion geordneten) Kette I von l-Idealen gilt, daß G/K einfach geordnet ist, wenn G/J für jedes $J \in I$ einfach geordnet ist.*

Beweis. L, L' sei ein komplementäres Komponentenpaar in G. Nach Hilfssatz 1 enthält jedes $J \in I$ die Komponente L oder L'. Man erkennt leicht, daß alle $J \in I$ dieselbe von den Mengen L und L' umfassen. $K = \bigcap\limits_{J \in I} J$ enthält deshalb L oder L' und aus Hilfssatz 1 folgt die Behauptung (*).

Es sei mit Ω_1 die Menge $\{J_\nu\}$ und mit ϱ_0 eine Ordinalzahl bezeichnet, deren Möchtigkeit größer als card G ist. Setzen wir voraus, daß für η, $\eta < \varrho < \varrho_0$, alle Mengen Ω_η schon konstruiert sind. In der bezüglich der Inklusion geordneten Menge $\bigcup\limits_{\eta<\varrho} \Omega_\eta$ von l-Idealen konstruieren wir alle maximalen Ketten von l-Idealen und den Durchschnitt aller l-Ideale in jeder solchen Kette. Die Menge aller dieser Durchschnitte bezeichnen wir mit Γ_ϱ; dann ist $\Omega_\varrho = \Gamma_\varrho \cup \bigcup\limits_{\eta<\varrho} \Omega_\eta$. So sind mittels einer transfiniten Konstruktion die Mengen Ω_ϱ für jedes ϱ, $\varrho < \varrho_0$, konstruiert. Es ist klar, daß ein Index ϱ existiert, so daß $\Gamma_\varrho \subset \bigcup\limits_{\eta<\varrho} \Omega_\eta$ gilt. Für dieses ϱ gilt deshalb $\bigcup\limits_{\eta<\varrho} \Omega_\eta = \Omega_\varrho = \Omega_{\varrho+1} = \ldots$. Für einen Index ϱ mit der genannten Eigenschaft gilt offensichtlich folgende Behauptung:

(**) *Jedes l-Ideal K, $K \in \Gamma_\varrho$, ist in einem J_ν enthalten und jedes J_ν enthält ein K aus Γ_ϱ.*

Es ist klar, daß die Menge Γ_ϱ die in Satz 10 verlangten Eigenschaften besitzt. Bezeichnen wir mit $\{K_\alpha\}$ die Menge Γ_ϱ, dann ist nach Satz 1 (G/K_α) eine Realisierung der l-Gruppe G; nach Satz 10 ist diese Realisierung reduziert. Dadurch ist die Konstruktion erbracht. Das Ergebnis fassen wir in einem Satz zusammen:

Hilfssatz 4. *Besteht in einer l-Gruppe G ein System* $\{J_\nu\}$ *von l-Idealen mit den Eigenschaften* $\bigcap J_\nu = 0$, G/J_ν *ist einfach geordnet für jedes* ν, *dann läßt sich in G ein System* $\{K_\alpha\}$ *von l-Idealen mit ähnlichen Eigenschaften finden, das zusätzlich folgende Eigenschaften erfüllt: l-Ideale des Systems* $\{K_\alpha\}$ *sind bezüglich der Inklusion unvergleichbar und zu jedem* K_α *besteht ein* J_ν *und auch zu jedem* J_ν *besteht ein* K_α, *so daß* $K_\alpha \subset J_\nu$ *gilt.*

Satz 11. *Folgende Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G hat eine reduzierte Realisierung vom Typ* β;

2. *In G besteht ein System* $\{J_\nu\}$ *bezüglich der Inklusion unvergleichbarer l-Ideale mit den Eigenschaften:* $\bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu = 0$ *gilt für ein beliebiges* μ, G/J_ν *ist einfach geordnet für jedes* ν.

3. *Jede Komponente in G ist normal und in G existiert keine maximale Komponente.*

Beweis. $3 \Rightarrow 2$. Nach Satz 1 besteht in G ein System $\{J_\nu\}$ von l-Idealen, das die Bedingungen des Hilfssatzes 4 erfüllt. Deshalb existiert ein System $\{K_\alpha\}$ bezüglich der Inklusion unvergleichbarer l-Ideale, für das gilt: $\bigcap K_\alpha = 0$, G/K_α ist einfach geordnet. Setzen wir die Existenz eines Indices β voraus, für den $\bigcap\limits_{\alpha \neq \beta} K_\alpha = \dot{L} \neq 0$ gilt. Da aus $L \cap K_\beta = 0$ die Beziehung $L \delta K_\beta$ folgt, so gilt $K_\beta \subset L'$. Aus Hilfssatz 1 folgt weiter $K_\beta = L'$. Nach Anmerkung la hat G eine Realisierung (G/K_α) und es gilt $\psi(G) = (G/K_\alpha)$. Offenbar gilt $\psi(K_\beta) = J$, wobei J die Mengè aller Elemente $X(\ )$ in (G/K_α) bedeutet, für die $X(\beta) = 0$ gilt. J ist offensichtlich eine maximale Komponente in (G/K_α), was einen Widerspruch ergibt.

$2 \Rightarrow 1$. Nach Satz 1 hat G eine Realisierung (G/J_ν). Wenn wir die Bezeichung aus Anmerkung 1a benützen, dann wird mittels der Abbildung ψ auf ein Element $X(\ )$, dessen Koordinaten $X(\nu) = J_\nu$ für $\nu, \nu \neq \mu$, $X(\mu) \neq J_\mu$ sind, das Element $x \in G$ abgebildet, für das $x \in X(\mu) \cap \bigcap\limits_{\nu \neq \mu} J_\nu = 0$ gilt. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt, daß die l-Gruppe $\psi(G) = (G/J_\nu)$ kein Element $X(\ )$ der beschriebenen Art besitzt, d. h. die Realisierung (G/J_ν) ist vom Typ β; nach Satz 10 ist sie reduziert.

$1 \Rightarrow 3$. $(G_\nu | \nu \in A)$ sei eine reduzierte Realisierung vom Typ β der l-Gruppe G. Gegen die Behauptung setzen wir voraus, daß K eine maximale Komponente in (G_ν) ist. Nach S 1 und S 2 ist $K = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum_{\nu \in M}} G_\nu}$, $K' = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum_{\nu \in A - M}} G_\nu}$, wobei $M \subset A$, $M \neq A$ ist. Die Menge $A - M$ kann nicht nur einen Index μ besitzen, denn in diesem Fall würde $0 \neq K' = (G_\nu) \cap \overline{G}_\mu = 0$ gelten, was einen Widerspruch ergibt. Zu den ausgewählten $\beta, \gamma \in A - M$, $\beta \neq \gamma$, besteht ein Element $y(\ ) \in (G_\nu)$, so daß $y(\beta) > 0$, $y(\gamma) < 0$ gilt. Ein beliebiges Element der Klasse $K + y(\ )$ in $(G_\nu)/K$ ist dann mit Null unvergleichbar; dagegen ist $(G_\nu)/K$

einfach geordnet. Der Widerspruch bestätigt, daß in G keine maximale Komponente besteht.

Folgerung 1. *Hat eine l-Gruppe eine reduzierte Realisierung vom Typ β, dann ist jede ihrer Realisierungen vom Typ β.*

Beweis. (G_ν) sei eine Realisierung der l-Gruppe G und es sei $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu = K \neq 0$ für ein μ. Das disjunktive Komplement der Menge K ist offenbar eine maximale Komponente in G.

Folgerung 2. *Ist in einer l-Gruppe G jede Komponente normal, dann besteht in G keine maximale Komponente oder besteht eine solche maximale Komponente, daß der Durchschnitt der um diese Komponente verminderten Menge aller maximaler Komponenten nicht gleich Null ist.*

Beweis. Die l-Gruppe G hat nach den Sätzen 1 und 7 eine reduzierte Realisierung $\overline{G}$. Ist $\overline{G}$ vom Typ β, dann besitzt sie keine maximale Komponente (Satz 11). Ist die Realisierung nicht vom Typ β, dann besteht in G mindestens eine maximale Komponente. Ist der Durchschnitt der um irgendeine Komponente verminderten Menge aller maximaler Komponenten gegen die Behauptung gleich Null, dann ist die Menge aller maximaler Komponenten ein System von l-Idealen in G, das die Bedingung 2 des Satzes 11 befriedigt. Deshalb hat G eine reduzierte Realisierung vom Typ β. Nach Folgerung 1 zu Satz 11 ist die Realisierung $\overline{G}$ auch vom Typ β, was einen Widerspruch ergibt. Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkung 6. Aus Satz 11 und aus seiner Folgerung 1 ist es klar, daß der Begriff „eine reduzierte β-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen" unabhängig vom Systeme der einfach geordneten Gruppen $\{G_\nu\}$ ist. Eine ähnliche Invarianz fehlt bei dem Begriffe „eine β-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen".

In der Behandlung [4], S. 29, habe ich einen Begriff einer Spitze eingeführt, welchen wir nun benützen. Ein Element x einer l-Gruppe G ist *eine Spitze eines Elementes a*, $0 < a \in G$, wenn x ein minimales Element in G mit den Eigenschaften $a \geqq x > 0$, $(a - x) \wedge x = 0$, ist.

Ein Element $x \in G$, $x > 0$, heißt *eine Spitze*, wenn es eine Spitze eines Elementes $a \in G$, $a > 0$, ist.

Satz 12. *Wenn eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen keine Spitze besitzt, dann ist jede ihrer Realisierungen vom Typ β.*

Der Beweis liegt auf der Hand.

Beispiel einer l-Gruppe, die eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen ist und die keine Spitze besitzt. Das ist die Menge aller reeller Funktionen auf dem Intervalle $(0,1)$, die linksseitig stetig und rechtsseitig stetig bis auf eine endliche Anzahl von Punkten sind. Das Addieren und die Teilordnung werden auf gewöhnliche weise aufgefaßt. Diese l-Gruppe ist kommutativ, so daß sie eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen nach Satz 1 ist. Für den Beweis der Nichtexistenz einer Spitze vgl. [4], Beispiel VI, S. 46.

IV. Diesen Absatz widmen wir den Untersuchungen der l-Gruppen, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist.

L, L' sei ein komplementäres Paar direkter Faktoren in einer l-Gruppe G. Zu einem beliebigen Elemente $x \in G$ existiert genau ein Paar von Elementen y, y', für die $y \in L$, $y' \in L'$, $x = y + y'$ gilt. Das Element y nennen wir *eine Projektion* des Elementes x in den direkten Faktor L ([3], S. 5). In Bezug darauf, daß L' eindeutig durch den direkten Faktor L bestimmt wird, ist auch die Projektion des Elementes x in L eindeutig bestimmt. Unter der Projektion einer Menge A verstehen wir die Menge der Projektionen aller Elemente in A.

Definition. Eine l-Untergruppe G einer l-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *halbkonvex* in $\mathfrak{G}$, wenn die Projektion der l-Gruppe G in einen beliebigen direkten Faktor $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}$ in der l-Gruppe G enthalten ist, sobald $G \cap \mathfrak{K}$, $G \cap \mathfrak{K}'$ ein komplementäres Komponentenpaar in G dargestellt (vgl. [4] § 3).[4])

Diese Definition stimmt mit der in [4] § 3 aufgestellten Definition einer halbkonvexen l-Untergruppe überein, sobald G eine vollständig subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ und $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$ ist. Satz 4, Anmerkung 1 und Beispiel II aus der Arbeit [4] gelten, wenn wir den dortigen Begriff der Halbkonvexität durch den neuen ersetzen.

Satz 13. a) *Hat eine l-Gruppe G eine Realisierung (G_ν) und ist (G_ν) halbkonvex in $\tilde{\sum} G_\nu$, dann ist jede Komponente in G ein direkter Faktor.*

b) *Ist jede Komponente einer l-Gruppe G ein direkter Faktor, dann hat G eine Realisierung und jede Realisierung (G_ν) der l-Gruppe G ist halbkonvex in $\tilde{\sum} G_\nu$.*

Beweis. Der Einfachheit halber setzen wir $G = (G_\nu)$.

a) Ist L, L' ein komplementäres Komponentenpaar in G, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ ein komplementäres Komponentenpaar in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, für das $L = G \cap \mathfrak{K}$, $L' = G \cap \mathfrak{K}'$ gilt (siehe S 1), dann gilt für die Projektionen y, y' eines Elementes $x \in G$ in $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ $x = y + y'$, und nach der Voraussetzung ist $y \in L$, $y' \in L'$. Daraus geht $L + L' = G$ hervor. Wie man nun unmittelbar einsieht, ist L, L' ein komplementäres Komponentenpaar in G.

b) Der erste Teil folgt aus Satz 1. Beweis des zweiten Teiles. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ sei ein komplementäres Komponentenpaar in $\mathfrak{G}$, so daß $L = G \cap \mathfrak{K}$, $L' = G \cap \mathfrak{K}'$ ein komplementäres Komponentenpaar in G bildet. Weil $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ komplementäre direkte Faktoren in $\mathfrak{G}$ darstellen (S 2), so existiert zu einem beliebigen $x \in G$ genau ein Paar von Elementen y, y', so daß $y \in \mathfrak{K}$, $y' \in \mathfrak{K}'$, $x = y + y'$ gilt. Weil L, L' ein komplementäres Paar von direkten Faktoren in G darstellt, so bestehen Elemente z, z' in G, so daß $z \in L$, $z' \in L'$, $x = z + z'$ gilt. Aus diesen

[4]) $\mathfrak{K}'$ bedeutet das disjunktive Komplement in $\mathfrak{G}$ der Komponente $\mathfrak{K}$.

und vorangehenden Beziehungen folgt $y = z$, $y' = z'$, also ist $y \in L$. Deshalb ist die Projektion von G in $\mathfrak{K}$ in der l-Gruppe G enthalten.

Satz 14. *G sei eine α-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu | \nu \in A\}$. Jede Komponente in G ist genau dann ein direkter Faktor, wenn für ein beliebiges Element $x(\ ) \in G$ und für eine beliebige Untermenge $M \subset A$ gilt, daß das folgenderweise definierte Element $y(\ )$ zu G gehört: $y(\mu) = 0$ für $\mu \in M$, $y(\nu) = x(\nu)$ für $\nu \in A - M$.*

Beweis der Notwendigkeit. Nach Satz 13 ist G halbkonvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$. Nach S 2 und S 4 läßt sich jedes Paar $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ von komplementären direkten Faktoren in $\mathfrak{G}$, für die $K = G \cap \mathfrak{K}$, $K' = G \cap \mathfrak{K}'$ ein komplementäres Komponentenpaar in G darstellen, in der Form $\mathfrak{K} = \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M}} G_\nu$, $\mathfrak{K}' = \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in A-M}} G_\nu$, wobei $M \subset A$ ist, aufschreiben. Deshalb gehört zu G die Projektion eines beliebigen Elementes $x(\ ) \in G$ in $\mathfrak{K}'$. Diese Projektion ist offensichtlich das in der Bedingung erklärte Element $y(\ )$.

Beweis der umgekehrten Implikation. Das Element $y(\ )$ aus der Bedingung ist offensichtlich die Projektion des Elementes $x(\ )$ in den direkten Faktor $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M}} G_\nu$ aus $\mathfrak{G}$. Auf Grund des Satzes S 2 ist G halbkonvex in $\mathfrak{G}$. Aus Satz 13 geht dann die Behauptung hervor.

Folgerung. *G sei eine l-Gruppe in der jede Komponente ein direkter Faktor ist. Dann besitzt G eine Realisierung und jede Realisierung vom Typ α der l-Gruppe G ist vollständig.*

Auf Grund dieser Folgerung genügt es, wenn wir die Betrachtungen von l-Gruppen, in denen jede Komponente ein direkter Faktor ist, nur auf die beschränken, die keine Realisierung vom Typ α besitzen; alle anderen sind vollständig subdirekte Summen einfach geordneter Gruppen. Eine weitere Beschränkung liefert Folgerung 2 des Satzes 15.

V. Eine l-Gruppe G habe eine Realisierung $(G_\nu | \nu \in N)$. Eine Gruppe G_μ nennen wir *eine α-Koordinate* bzw. *β-Koordinate* dieser Realisierung, wenn $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu \neq 0$ bzw. $= 0$ gilt. A bzw. B sei die Menge von Indizen aller α- bzw. β-Koordinaten. Die l-Gruppen $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in A}} G_\nu$ bzw. $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in B}} G_\nu$ heissen *der α- bzw. β-Teil* der gegebenen Realisierung. Es ist klar, daß der α- bzw. β-Teil der Realisierung (G_ν) eine α- bzw. β-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{H_\nu | \nu \in A\}$ bzw. $\{H_\nu | \nu \in B\}$, wobei $H_\nu \subset G_\nu$ für alle ν ist, darstellt.

Satz 15. *(G_ν) sei eine reduzierte Realisierung einer l-Gruppe G. Dann ist der Durchschnitt J aller maximaler Komponenten in (G_ν) gleich dem β-Teile und sein disjunktives Komplement ist gleich dem α-Teile der gegebenen Realisierung.*

J hat eine Realisierung vom Typ β $(H_\nu | \nu \in B)$, wobei $H_\nu \subset G_\nu$ ist; $(G_\nu)/J$ hat eine Realisierung vom Typ α $(G_\nu | \nu \in A)$.

Beweis. Ist $A = \emptyset$, dann existiert in G keine maximale Komponente (Satz 11), also ist $J = (G_\nu)$ (siehe die Fußnote zu Satz 3). Daraus folgt die Behauptung.

Es sei $A \neq \emptyset$. Zu einem $\alpha \in A$ wählen wir ein Element $x(\ ) \in \overline{G}_\alpha$, $x(\ ) \neq 0$; dann ist das disjunktive Komplement $K_\alpha = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \neq \alpha} G_\nu}$ des Elementes $x(\ )$ eine maximale Komponente in (G_ν). Wir beweisen, daß wir auf eine ähnliche Weise wie K_α eine beliebige maximale Komponente in (G_ν) erhalten. Zu jedem Paar von Indizen α, β, $\alpha \neq \beta$, besteht ein Element $x(\ ) \in (G_\nu)$, so daß $x(\alpha) > 0$, $x(\beta) < 0$ gilt. Wenn für eine maximale Komponente K gilt, daß die α- und β-Koordinaten aller Elemente aus K lauter Nullen sind, dann ist die Klasse $x(\ ) + K \in (G_\nu)/K$ eine Menge mit Null unvergleichbarer Elemente aus (G_ν), also ist $(x(\ ) + K) \parallel K$. Wegen der einfachen Anordnung in $(G_\nu)/K$ (Hilfssatz 2) erhalten wir einen Widerspruch. Setzen wir also voraus, daß sich eine maximale Komponente K in der Form $K = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, wobei die Menge $N - M$ einen einzigen Index $\beta \in B$ besitzt, aufschreiben läßt. Dann besitzt aber das disjunktive Komplement der Komponente K nur Elemente $x(\ )$ mit der Eigenschaft $x(\nu) \neq 0$ für $\nu \neq \beta$, und deshalb nur $x(\ ) = 0$. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch. Dadurch ist bestätigt, daß wir alle maximalen Komponenten auf eine oben beschriebene Weise erhalten. Daraus folgt $J = (G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in B} G_\nu}$. Das disjunktive Komplement zu J ist also $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in A} G_\nu}$, d. h. es ist der α-Teil der gegebenen Realisierung der l-Gruppe G.

Bezeichnen wir mit H_ν, $\nu \in B$, die Menge der ν-Koordinaten aller Elemente in J, so ist H_ν eine Untergruppe in G_ν und J ist eine β-subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen $\{H_\nu | \nu \in B\}$.

Zum Beweise, daß $(G_\nu)/J$ eine Realisierung vom Typ α $(G_\nu | \nu \in A)$ besitzt, definieren wir eine Abbildung χ der l-Gruppe (G_ν) in $\tilde{\sum}_{\nu \in A} G_\nu$, folgendermaßen: $\chi[X(\ )] = \bar{x}(\ ) \in \tilde{\sum}_{\nu \in A} G_\nu$, wobei $\bar{x}(\nu) = x(\nu)$ für alle $\nu \in A$ ist. Die Abbildung χ ist offensichtlich homomorph und isoton. Der Kern dieser Abbildung ist J. Daraus folgt daß $(G_\nu)/J$ eine Realisierung vom Typ α $(G_\nu | \nu \in A)$ besitzt.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen in Satz 15 gilt: Ist der β-Teil J der Realisierung (G_ν) ein direktor Faktor in (G_ν), dann hat J eine Realisierung vom Typ β $(G_\nu | \nu \in B)$; der α-Teil der Realisierung (G_ν) ist das direkte Komplement von J und hat eine Realisierung vom Typ α $(G_\nu | \nu \in A)$.*

Beweis. J sei ein direkter Faktor in (G_ν). Wählen wir ein beliebiges Element $x_\nu \in G_\nu$ für ein $\nu \in B$, so existiert ein Element $x(\ ) \in (G_\nu)$, für das $x(\nu) = x_\nu$ erfüllt ist. Da das Paar $J' = (G_\nu) \cap \overline{\sum_{\nu \in A} G_\nu}$, $J = (G_\nu) \cap \overline{\sum_{\nu \in B} G_\nu}$ eine direkte Zerlegung in (G_ν) darstellt, so existieren Elemente $x_1(\ ) \in J'$, $x_2(\ ) \in J$, so daß $x(\ ) = x_1(\ ) + x_2(\ )$ gilt. Es gilt also $x_1(\nu) = x(\nu)$, $x_2(\nu) = 0$ für $\nu \in A$, $x_1(\nu) = 0$, $x_2(\nu) = x(\nu)$ für $\nu \in B$. Daraus schliessen wir $H_\nu = G_\nu$ für $\nu \in B$, $(G_\nu)/J \cong J'$.

Satz 16. *Eine direkte Summe von l-Gruppen, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist, ist eine l-Gruppe mit derselben Eigenschaft.*

Beweis. Eine l-Gruppe G sei die direkte Summe $\dot{\sum} G_\nu$ von l-Gruppen $\{G_\nu\}$, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist. Die l-Gruppe G besitzt also eine Realisierung (Satz 1). L, L' sei ein komplementäres Komponentenpaar in G. Nach Satz 1 sind L, L' l-Ideale in G. Für ein beliebiges μ gilt, daß $\overline{G}_\mu \cap L$, $\overline{G}_\mu \cap L'$ ein komplementäres Komponentenpaar in $\overline{G}_\mu$ darstellt: Für ein $x \in \overline{G}_\mu$ sei $x\delta(\overline{G}_\mu \cap L)$ erfüllt; weil $x\delta(\sum_{\nu \neq \mu} \overline{G}_\nu \cap L)$ gilt, folgt daraus $x\delta[(\overline{G}_\mu \cap L) + \sum_{\nu \neq \mu} (\overline{G}_\nu \cap L)]$. Im Verbande von l-Idealen in G gilt $\overline{G}_\mu \cap L + \sum_{\nu \neq \mu} (\overline{G}_\mu \cap L) = (\sum_\nu \overline{G}_\nu) \cap L = G \cap L = L$, also ist $x \in \overline{G}_\mu \cap L'$. Daher stellen $\overline{G}_\mu \cap L$, $\overline{G}_\mu \cap L'$ ein komplementäres Komponentenpaar in G dar. Daraus geht $G = \sum_\nu \overline{G}_\nu = \sum_\nu (\overline{G}_\nu \cap L + \overline{G}_\nu \cap L') = \sum_\nu (\overline{G}_\nu \cap L) + \sum_\nu (\overline{G}_\nu \cap L') = (\sum_\nu \overline{G}_\nu) \cap L + (\sum_\nu \overline{G}_\nu) \cap L' = L + L'$ hervor.

Eine unmittelbare Folgerung der vorangehenden Sätze ist die folgende Charakterisierung der l-Gruppen, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist.

Folgerung. *Ist jede Komponente einer l-Gruppe G ein direkter Faktor, dann hat G eine Realisierung und jede reduzierte Realisierung der l-Gruppe G ist eine direkte Summe ihres α- und β-Teiles und beide Teile sind l-Gruppen, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist.*

Hat eine l-Gruppe G eine reduzierte Realisierung, ist die Realisierung die direkte Summe ihres α- und β-Teiles und sind beide Teile l-Gruppen, in welchen jede Kemponente ein direkter Faktor ist, dann ist in G jede Komponente ein direkter Faktor.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Satz 1, aus Satz 15 und aus seiner Folgerung. Die zweite liefert Satz 16.

Bei der Betrachtung der l-Gruppen, in welchen jede Komponente ein direkter Faktor ist, kann man sich auf Grund der vorangehenden Folgerung und der Folgerung des Satzes 14 nur auf solche Gruppen beschränken, die eine Realisierung nur vom Typ β besitzen.

VI. Mit dem Thema der vorliegenden Arbeit hängen Probleme zusammen, welche J. Jakubík in [5] vorgelegt hat. Aus Satz 2 unseres Artikels folgt die Lösung des ersten von ihnen. Vor der Formulierung des Problems ist es notwendig den Zusammenhan zwischen den Begriffen aus [5] und den unseren zu untersuchen.

Ist $\emptyset \neq A \subset G_+$, dann verstehen wir unter $K'(A)$ die Menge aller Elemente $y \in G_+$, für die $y\delta A$ gilt. Es sei $K(A) = K'[K'(A)]$. Mit (P) sei die folgende Bedingung ([5], S. 150) bezeichnet:

(P) *Ist $A \subset G_+$, dann existieren für ein beliebiges $x \in G_+$ Elemente $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$, so daß $x \leqq y \vee z$ gilt.*

D 1. *Die Menge aller Paare $K(A)$, $K'(A)$ ist genau die Menge der Paare der Positivitätsbereiche aller komplementären Komponentenpaare in G.*[5])

Beweis. Für ein beliebiges A, $\emptyset \neq A \subset G_+$, folgt aus Hilfssatz 7 [3] $[K(A) - K(A)]\ \delta[K'(A) - K'(A)]$. Weiter gilt: $x\delta[K(A) - K(A)] \Rightarrow x_+\delta K(A)$, $x_-\delta K(A) \Rightarrow x_+, -x_- \in K'''(A) = K'(A) \Rightarrow x = x_+ + x_- \in K'(A) - K'(A)$. $Q = K'(A) - K'(A)$ ist also das disjunktive Komplement der Menge $P = K(A) - K(A)$. Ist $B = K'(A)$, dann gilt $P = K'(B) - K'(B)$, also ist P eine Komponente. Schließlich gilt $Q_+ = K'(A)$, $P_+ = K(A)$. Für zwei komplementäre Komponenten P, Q in G gilt $P_+\delta Q_+$. Ist $z \in G_+$, $z\delta P_+$, dann ist $z \in Q_+$. Daraus folgt $Q_+ = K'(P_+)$. Analog erhält man $P_+ = K'(Q_+)$, und somit $P = K''(P_+) = K(P_+)$.

D 2. *Die Bedingung* (P) *ist äquivalent mit der Bedingung*

(P') *Jede Komponente ist ein direkter Faktor.*

Beweis. (P) $\Rightarrow$ (P'). Ex sei $0 \leqq a \leqq b \vee c$, $b \in K(A)$, $c \in K'(A)$. Nach D I existieren komplementäre Komponenten P, Q in G, für die $P_+ = K(A)$, $Q_+ = K'(A)$ gilt. Weiter gilt $a = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \wedge b \in K(A)$, $a \wedge c \in K'(A)$. Daraus folgt $G_+ = P_+ + Q_+$, $G = P + Q$.

Die umgekehrte Behauptung ist evident.

In der Behandlung [5] wurde die Frage nach der Gültigkeit der folgenden Behauptung vorgelegt:

Eine l-Gruppe, die die Bedingung (P) *erfüllt, ist eine subdirekte Summe einfach geordneter Gruppen.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus D 2 und aus Satz 1.

Zum Schluß führen wir einige Probleme, die eine Beziehung zu der in der vorliegenden Arbeit studierten Problematik haben. Die Probleme sind größtenteils in Form hypothetischer Sätze formuliert.

1. Eine l-Gruppe G hat genau dann eine Realisierung vom Typ α, wenn in G gilt.

a) Jedes Element $a \in G$, $a > 0$, hat eine Spitze.

b) Ist $x \geqq y > 0$ und ist x eine Spitze, dann ist y eine Spitze.

[5]) Die Menge A_+ heißt der Positivitätsbereich der l-Untergruppe A in G

2. Wenn eine l-Gruppe G eine Realisierung hat, so hat sie genau dann eine reduzierte Realisierung vom Typ β, wenn G keine Spitze besitzt.

Die Bedingung ist hinreichend (Satz 12). Ist die Hypothese richtig, dann kann auf Grund des Satzes 12 und der Folgerung 1 des Satzes 11 folgende Behauptung ausgesprochen werden:

Wenn keine l-Gruppe G eine Realisierung hat, so besitzt G genau dann keine Spitze, wenn jede ihrer Realisierungen vom Typ β ist.

3. Wenn eine l-Gruppe eine Realisierung vom Typ α besitzt, dann ist jede reduzierte Realisierung der l-Gruppe G vom Typ α.

Wir erhalten nur eine formale Verschärfung der Bedingung, wenn wir fordern, daß die Realisierung reduziert sein. Nach Satz 9 ist nämlich jede Realisierung vom Typ α reduziert. Die Forderung „reduziert sein" in der Behauptung ist hingegen notwendig in Bezug auf die Anmerkung 5a.

4. Hat eine l-Gruppe eine vollständige Realisierung, dann ist jede reduzierte Realisierung der l-Gruppe vollständig.

5. Sind G und $\overline{G}$ subdirekte Summen eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ und gilt $G \simeq \overline{G}$, dann gilt $G = \overline{G}$.

Diese Hypothese braucht nicht allgemein zu gelten. Unter welchen zusätzlichen Bedingungen gilt sie? (Eine Voraussetzung über Typen dieser Summen, die Realisierungen sind reduziert, G ist normal, halbkonvex oder konvex in $\tilde{\sum} G_\nu$ u. s. w.)

6. Wir wollen l-Gruppen charakterisieren, die gleich der Summe aller ihrer echten Komponenten sind. Allgemeiner sollen wir die Struktur der Summe H aller echten Komponenten in G untersuchen. Die Struktur der l-Gruppe G ist dann bekannt, denn G/H ist nach Hilfssatz 3 stark einfach geordnet.

7. Wir sollen einen zu Satz 2 ähnlichen Satz über subdirekte Summen mit mehr als zwei Koordinaten finden. Als Ausgangspunkt für die Untersuchungen können außer Satz 2 auch die Betrachtungen von G. Birkhoff über die Struktur abelscher l-Gruppen, die endliche Ketten von l-Idealen besitzen, dienen (siehe [2]).

Literatur

[1] *G. Birkhoff*: Lattice Theory. New York, rev. ed. 1948.

[2] *G. Birkhoff*: Lattice-ordered groups. Annals of Math. *43* (1942), 298—331.

[3] *Ф. Шик:* К теории структурно упорядоченных групп. Чехосл. мат. журнал, *6* (*81*) (1956), 1—25.

[4] *F. Šik*: Über Summen einfach geordneter Gruppen. Чехосл. мат. журнал, *8* (*83*) (1958), 22—53.

[5] *Я. Якубик:* Об одном классе структурно упорядоченных групп. Časopis pro pěstování mat., *84* (1959), 150—161.

Резюме

О ПОЛУПРЯМЫХ СУММАХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ФРАНТИШЕК ШИК (František Šik), Брно

В предлагаемой работе исследуются структурно упорядоченные группы (l-группы), являющиеся полупрямыми суммами просто упорядоченных групп. О l-группе $\overline{G}$ мы скажем, что она является *полупрямой суммой* просто упоря доченных групп, если она представляет собой l-подгруппу полной прямой суммы $\tilde{\sum} G_\nu$ какой-либо системы $\{G_\nu\}$ просто упорядоченных групп. l-группу $\overline{G}$ мы, далее, назовем *реалзацией* каждой l-группы G, изоморфной $\overline{G}$. Одна и та же l-группа может иметь реализации различных типов. Критерием, на основании которого можно отличить друг от друга разные типы, является то обстоятельство, не содержит ли реализация $\overline{G}$ l-группы G или содержит (и в какой мере) элементы $x(\ )$ такого рода, что $x(\mu) \neq 0$, $x(\nu) = 0$ для ν, $\nu \neq \mu$. *Реализация* будет a) *типа* β, b) *типа* α, c) *полной*, если она a) не содержит ни для каких индексов μ элемент описанного рода, b) для любого μ содержит элемент описанного рода, c) при любом μ и для каждого $x_\mu \in G_\mu$ существует элемент $x(\ ) \in \overline{G}$ такой, что $x(\mu) = x_\mu$, $x(\nu) = 0$ для ν, $\nu \neq \mu$.

Эти типы можно охарактеризовать двумя способами. Первый метод основывается на известной теореме 9, [1], VI, § 6 (см. также условие 2 теоремы 1 настоящей работы), которая гласит, что l-группа имеет реализацию, если и только если в G существует система l-идеалов с определенными свойствами. Типы a), b), c) реализаций тогда характеризуются такими системами l-идеалов с дополнительными свойствами (теоремы 1, 3, 4, 6, 10, 11). Во втором методе для исследования используется теория дизъюнктивности.

Два непустых множества $A, B \subset G$ называются *дизъюнктивными*, если для любых $x \in A$, $y \in B$ чмеет место соотношение $|x| \wedge |y| = 0$. Если под A' понимать множество всех элементов, дизъюнкивных с A, тогда под *компонентой* в l-группе G мы будем подразумевать каждое множество A', где A — любая непустая часть в G. Множество A'' назовем *дизъюктивным дополнением* компоненты A'. l-группа G имеет реализацию, если и только если каждая компонента в G является нормальной подгруппой в G (теорема 1).

Подобными же внутренними средствами можно охарактеризовать l-группы, которые имеют реализации типа α и полные реализации. Аналогичного утверждения относительно реализаций типа β высказать, однако, нельзя, так как каждая допускающая реализацию l-группа обладает также реализацией типа β (замечание 5a). Этот произвол можно устранить, введя

требование, чтобы некоторое отношение φ, определенное между любыми двумя составляющими G_ν, G_μ данной реализации, не было гомоморфным отображением одной из них на другую (теорема 8). Такого рода реализации мы называем *приведенными*. Справедлива теорема 7, гласящая, что l-группа обладает приведенной реализацией, если она обладает реализацией. l-группа G обладает приведенной реализацией типа β, если и только если каждая компонента в G есть нормальная подгруппа и если в G не существует максимальная компонента. Далее исследуются l-группы, каждая компонента которых является прямым фактором. Каждая компонента l-группы G будет прямым фактором, если и только если G имеет реализацию и если хоть одна реализация (G_ν) полувыпукла в $\tilde{\sum} G_\nu$ (теорема 13).

Наконец, в теореме 15 доказывается, что для описания полупрямых сумм просто упорядоченных групп можно обойтись только реализациями типов α и β. Если l-группа G обладает реализацией (G_ν), то группу G_μ мы назовем *α-составляющей* или *β-составляющей* этой реализации, смотря по тому, имеет ли место $(G_\nu) \cap \overline{G}_\mu \neq 0$ или $= 0$. Если A, соотв. B — множество индексов всех α-составляющих, соотв. β-составляющих, то l-группу $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in A} G_\nu}$, соотв. $(G_\nu) \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in B} G_\nu}$ мы назовем *α-частью*, соотв. *β-частью* реализации (G_ν). Если (G_ν) — приведенная реализация l-группы G, то пересечение J всех максимальных компонент в (G_ν) равно β-части, а его дизъюнктивное дополнение равно α-части данной реализации. J обладает реализацией типа β $(H_\nu \mid \nu \in B)$, где $H_\nu \subset G_\nu$; $(G_\nu)/J$ обладает реализацией типа $\alpha(G_\nu \mid \nu \in A)$ (теорема 15).

В заключении решена одна проблема, предложенная Я. Якубиком [5] и выдвинуто несколько дальнейших проблем.