Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Sur le problème de la stratification des congruences de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 299–303

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100411

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

SUR LE PROBLÈME DE LA STRATIFICATION DES CONGRUENCES DE DROITES

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 4 juin 1959)

Dans l'espace projectif S_5, on introduit et l'on étudie une nouvelle généralisation de la notion de congruence de droites stratifiable. Le présent travail est, dans une certaine mesure, inspiré par l'article [1].

1. Soient L_i $(i = 1,2)$ deux systèmes p-paramètriques de sous-espaces $S^i_{m_i} = S^i_{m_i}(u^1, \ldots, u^p)$ de l'espace projectif S_n. Supposons que les systèmes L_1, L_2 soient en correspondance donnée par l'égalité des paramètres et que les espaces $S^1_{m_1}(u)$ et $S^2_{m_2}(u)$ ne se coupent pas (on a donc nécessairement $m_1 + m_2 + 1 \leqq n$; je suppose $m_1, m_2 \geqq 1$, $p \geqq 2$). Je dirai que *le couple* (L_1, L_2) *est stratifiable dans le sens de* L_i *vers* L_j $(i \neq j)$ s'il existe une infinité ∞^{m_i} de variétés p-dimensionnelles telles que pour chaque point $x \in S^i_{m_i}(u)$ il en existe une qui passe par lui et qui soit telle que l'intersection de son espace tangent S_p au point x avec l'espace $S^j_{m_j}$ est de dimension m_j dans le cas de $p \geqq m_j$ et de dimension $p - 1$ dans le cas de $p < m_j$. Le couple (L_1, L_2) sera dit *stratifiable* s'il est stratifiable dans les deux sens. Dans la littérature, on n'a étudié jusqu'à présent que les cas de $m_1 = m_2 = p - 1$.

2. Dans ce qui suit, je vais envisager un couple stratifiable (L_1, L_2) dans S_5 où $n = 5$, $p = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, L_1 étant une congruence de droites (je supposerai le cas non-parabolique où il est possible de décomposer L_1 de deux façons différentes en surfaces développables). Soient $p = p(u, v)$ les droites de L_1 et $\sigma = \sigma(u, v)$ les espaces de L_2. Pour chaque pair $p(u, v)$, $\sigma(u, v)$ je choisis le repère local A_i de telle façon que A_1, A_2 soient les foyers de la droite p, $\sigma = [A_3A_4A_5A_6]$ et que $A_3(A_4)$ soit le point d'intersection du plan focal au point $A_1(A_2)$ avec l'espace σ. Les équations fondamentales deviennent alors

$$(1) \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j\,, \quad \omega_i^i = 0\,, \quad [\mathrm{d}\omega_i^j] = [\omega_i^k \omega_k^j] \quad (i, j, \ldots = 1, \ldots, 6)$$

et

$$(2) \qquad \omega_1^4 = \omega_1^5 = \omega_1^6 = \omega_2^3 = \omega_2^5 = \omega_2^6 = 0\,,$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} &[\omega_1^2\omega_2] + [\omega_1\omega_3^4] = 0\,, \quad [\omega_1\omega_3^5] = 0\,, \quad [\omega_1\omega_3^6] = 0\,, \\ &[\omega_2^1\omega_1] + [\omega_2\omega_4^3] = 0\,, \quad [\omega_2\omega_4^5] = 0\,, \quad [\omega_2\omega_4^6] = 0 \end{aligned}$$

où l'on a

$$\omega_1 = \omega_1^3, \quad \omega_2 = \omega_2^4, \quad [\omega_1\omega_2] \neq 0 \,. \tag{4}$$

Par un choix particulier convenable du repère on peut obtenir

$$\omega_3^5 = \omega_1, \quad \omega_3^6 = 0, \quad \omega_4^5 = 0, \quad \omega_4^6 = \omega_2 \,, \tag{5}$$

$$[\omega_1 (2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0 \,, \quad [\omega_2(2\omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_6^6)] = 0 \,, \tag{6}$$

$$[\omega_3^4\omega_2] + [\omega_1\omega_5^6] = 0 \,, \quad [\omega_4^3\omega_1] + [\omega_2\omega_6^5] = 0 \,.$$

Les surfaces stratifiantes de la congruence L_1 soient $M = A_1 + tA_2$. Alors on doit avoir $\mathrm{d}M = \varphi M + (.)\, A_3 + (.)\, A_4 + (.)\, A_5 + (.)\, A_6$, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}t = t^2\omega_2^1 + t(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \omega_1^2. \tag{7}$$

Soient $N = A_3 + t_1A_4 + t_2A_5 + t_3A_6$ les surfaces stratifiantes du système L_2 de sorte qu'il faut qu'on ait $\mathrm{d}N = \psi N + (.)\, A_1 + (.)\, A_2$, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}t_1 = t_1^2\omega_4^3 + t_1t_2\omega_5^3 + t_1t_3\omega_6^3 + t_1(\omega_3^3 - \omega_4^4) - t_2\omega_5^4 - t_3\omega_6^4 - \omega_3^4 \,, \tag{8}$$

$$\mathrm{d}t_2 = t_1t_2\omega_4^3 + t_2^2\omega_5^3 + t_2t_3\omega_6^3 + t_2(\omega_3^3 - \omega_5^5) - t_3\omega_6^5 - \omega_1 \,,$$

$$\mathrm{d}t_3 = t_1t_3\omega_4^3 + t_2t_3\omega_5^3 + t_3^2\omega_6^3 - t_1\omega_2 - t_2\omega_5^6 + t_3(\omega_3^3 - \omega_6^6) \,.$$

Les systèmes (7), (8) doivent être completement intégrables; un calcul direct montre que *le couple stratifiable* (L_1, L_2) *est donnè par le systéme fermé* (2) + (5)

$$\omega_3^2 = 0 \,, \quad \omega_4^1 = 0 \tag{9}$$

et

$$[\omega_1^2\omega_2] + [\omega_1\omega_3^4] = 0 \,, \quad [\omega_2^1\omega_1] + [\omega_2\omega_4^3] = 0 \,, \tag{10}$$

$$[\omega_3^4\omega_2] + [\omega_1\omega_5^6] = 0 \,, \quad [\omega_4^3\omega_1] + [\omega_2\omega_6^5] = 0 \,,$$

$$[\omega_1(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0 \,, \quad [\omega_2(2\omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_6^6)] = 0 \,,$$

$$[\omega_1\omega_5^1] = [\omega_1\omega_6^1] = [\omega_1\omega_3^1] = [\omega_2\omega_5^2] = [\omega_2\omega_6^2] = [\omega_2\omega_4^2] = 0 \,, \tag{11}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] + [\omega_1\omega_5^2] = 0 \,, \quad [\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] + [\omega_2\omega_6^1] = 0 \,. \tag{12}$$

Le couple stratifiable (L_1, L_2) *dépend donc de 14 fonctions d'une variable.*

3. J'introduis dans l'espace S_5^*, dual à l'espace S_5, les bases duales par les relations

$$A_iE^j = \delta_i^j \quad (i, j = 1, \ldots, 6) \tag{13}$$

avec

$$\mathrm{d}E^j = -\, \omega_i^jE^i \,. \tag{14}$$

Le système L_2 engendre dans S_5^* un système L_2^* à deux paramètres de droites $[E_1, E_2]$. Si à partir de (11) j'ai

$$\omega_5^1 = a\omega_1, \ \omega_5^2 = b\omega_2, \ \omega_6^1 = c\omega_1, \ \omega_6^2 = e\omega_2, \ \omega_3^1 = f\omega_1, \ \omega_4^2 = g\omega_2 \,, \tag{15}$$

alors

$$(16)\qquad dE^1 = -\omega_1^1 E^1 - \omega_2^1 E^2 - \omega_1(fE^3 + aE^5 + cE^6)\,,$$
$$dE^2 = -\omega_1^2 E^1 - \omega_2^2 E^2 - \omega_2(gE^4 + bE^5 + eE^6)\,.$$

L_2^* est une congruence de droites qui est en correspondance développable avec L_1 (ce qui veut dire que les surfaces développables de L_2^* et L_1 se correspondent les unes aux autres).

De même, les intersections des espaces tangents de la congruence L_1 le long des droites $p(u, v)$ avec les espaces correspondantes $\sigma(u, v)$ engendrent dans S_5 un système L à deux paramètres formé des droites $[A_3, A_4]$. On a

$$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 + \omega_1(fA_1 + A_5),\, dA_4 = \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + \omega_2(gA_2 + A_6),$$

donc L *est une congruence de droites et est en correspondance développable avec* L_1; *ses foyers sont les points d'intersection des plans focaux de la congruence* L_1 *avec les espaces correspondants du système* L_2.

Pour la surface stratifiante $M = A_1 + tA_2$ de la congruence L_1, j'obtiens

$$(18)\qquad dM = (.)\, M + \omega_1 A_3 + \omega_2 t A_4\,,$$
$$d^2M = (.)\, M + (.)\, A_3 + (.)\, A_4 + (\omega_1)^2\,(fA_1 + A_5) +$$
$$+ (\omega_2)^2\, t(gA_2 + A_6)\,;$$

pour la surface stratisfiante $N = A_3 + t_1A_4 + t_2A_5 + t_3A_6$ du système L_2 il vient

$$(19)\qquad dN = (.)\, N + (f + at_2 + ct_3)\, \omega_1 A_1 + (gt_1 + bt_2 + et_3)\, \omega_2 A_2\,,$$
$$d^2N = (.)\, N + (.)\, A_1 + (.)\, A_2 + (f + at_2 + ct_3)\,(\omega_1)^2\, A_3 +$$
$$+ (gt_1 + bt_2 + et_3)\,(\omega_2)^2\, A_4\,.$$

Toutes les surfaces stratifiantes (des deux systèmes L_1 et L_2) *sont surfaces à réseau conjugué qui est engendré sur chacune d'elles par une surface développable de la congruence* L_1 *ou par le systéme* ∞^1 *d'espaces* $\sigma(u, v)$ *auquel il correspond après la dualisation une surface développable de la congruence* L_2^*.

4. Le couple (L_1, L_2) sera dit *fortement stratifiable* si les espaces tangents de la congruence L coïncident avec les espaces correspondants $\sigma(u, v)$, c'est-à-dire

$$(20)\qquad \omega_3^1 = \omega_4^2 = 0\,.$$

Un calcul direct montre que *les couples fortement stratifiables sont donnés par le système fermé* (2) + (5) + (9) + (20) + (10) *et*

$$(21)\qquad \omega_5^2 = \omega_6^1 = 0\,,$$

$$(22)\qquad [\omega_1\omega_5^1] = [\omega_2\omega_6^2] = 0\,,$$

$$(23)\qquad [\omega_5^1\omega_1^2] + [\omega_5^6\omega_6^2] = 0\,,\quad [\omega_6^2\omega_2^1] + [\omega_6^5\omega_5^1] = 0\,.$$

Un couple fortement stratifiable (L_1, L_2) *dépend de dix fonctions d'une variable.*

Il vient de (10) et (22)

$$\omega_1^2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_2\omega_2, \ \omega_3^4 = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_2, \ \omega_5^6 = \alpha_4\omega_1 - \alpha_3\omega_2 , \tag{24}$$

$$\omega_2^1 = \beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2, \ \omega_4^3 = \beta_2\omega_1 - \beta_3\omega_2, \ \omega_6^5 = \beta_3\omega_1 - \beta_4\omega_2 ,$$

$$\omega_5^1 = \varrho\omega_1 , \quad \omega_6^2 = \sigma\omega_2 \tag{25}$$

et de (23)

$$\varrho\alpha_4 - \sigma\alpha_4 = 0 , \ \sigma\beta_1 - \varrho\beta_4 = 0 . \tag{26}$$

En différentiant extérieurement (25) j'obtiens (à l'aide de $(10_{5,6})$)

$$[\omega_1(\mathrm{d}\varrho + 3\varrho\overline{\omega_{11} - \omega_{33}})] = 0 , \quad [\omega_2 (\mathrm{d}\sigma + 3\sigma\overline{\omega_{22} - \omega_{44}})] = 0 . \tag{27}$$

Il est possible de particulariser les repères de façon à avoir

$$\varrho = \sigma = 1 \tag{28}$$

et

$$[\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] = [\mathrm{d}\omega_1] = 0 , \ [\omega_2(\omega_{44} - \omega_{22})] = (\mathrm{d}\omega_2] = 0 . \tag{29}$$

Je peux poser directement

$$\omega_1 = \mathrm{d}u , \quad \omega_2 = \mathrm{d}v . \tag{30}$$

Les quasiasymptotiques γ_{23} des surfaces (A_1) et (A_2) sont

$$\alpha_4(\omega_1)^3 - \alpha_2(\omega_2)^3 = 0 , \ \beta_1(\omega_1)^3 - \beta_4(\omega_2)^3 = 0 , \tag{31}$$

donc en vertu de (26), (28) et (30)

$$\mathrm{d}u^3 - \mathrm{d}v^3 = 0 \tag{32}$$

Dans mon travail [2] j'ai appelé surface R une surface à réseau conjugué dans l'espace S_{2n+1} qui admet des déformations projectives C_{n+1}. J'ai montré qu'une surface $x = x(u, v)$ à réseau conjugué est une surface R si les paramètres u, v peuvent être choisis de telle façon que $\mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 0$ soit le réseau conjugué et que les quasiasymptotiques γ_{23} de cette surface et d'une de ses transformées de Laplace se correspondent et soient données par l'équation (32). J'appelle congruence R une congruence dont une surface focale est R (il en est alors de même pour l'autre). J'obtiens ainsi: *La congruence L_1 d'un couple fortement stratifiable (L_1, L_2) est une congruence R.* Ce dernier théorème montre que la manière introduite de stratification des congruences de droites a été choisie très convenablement; cela révèle aussi la nécessité d'une étude détaillée de ces questions.

Bibliographie

[1] *Р. М. Гейдельман:* Расслоение двухпараметрических семейств прямых в многомерном проективном пространстве; ДАН СССР, 1953, т. *XCIII*, № 6, 957—960.

[2] *A. Švec:* Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire, Чех. мат. ж. *9 (84)*, 1959, 243—264.

Резюме

К ПРОБЛЕМЕ РАССЛОЕНИЯ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть в S_5 задана непараболическая конгруэнция L_1 прямых $p(u, v)$ и двухпараметрическая система L_2 пространств $S_3(u, v)$, пусть L_2 образует в двойственном пространстве S_5^* систему прямых L_2^*. Пара (L_1, L_2) будет расслояемой, если существует система ∞^1 (соотв. ∞^3) поверхностей так, что через каждую точку прямой $p(u, v)$ (соотв. пространства $S_3(u, v)$) проходит одна поверхность системы и ее касательная плоскость в этой точке пересекает $S_3(u, v)$ в прямой (соотв. проходит через прямую $p(u, v)$). Линии пересечения касательных пространств конгруэнции L_1 вдоль прямых $p(u, v)$ с пространствами $S_3(u, v)$ образует систему L ∞^2 прямых $q(u, v)$. Пара (L_1, L_2) расслояема сильно, если она расслояема и $S_3(u, v)$ — касательное пространство системы L вдоль прямой $q(u, v)$. Имеют место утверждения:

1. Расслояемая (соотв. сильно расслояемая) пара (L_1, L_2) зависит от 14 (соотв. 10) функций одного переменного.

2. L и L^* являются у расслояемой пары (L_1, L_2) прямолинейными конгруэнциями, находящимися в развертывающемся соответствии с L_1; фокусы конгруэнции L являются точками пересечения фокальных плоскостей конгруэнции L_1 с соответствующими пространствами системы L_2.

3. Расслояющими поверхностями систем L_1, L_2 являются поверхности с сопряженной сетью, которую на каждой из них высекает развертывающаяся поверхность конгруэнции L_1, соотв. той системой ∞^1 пространств $S_3(u, v)$, которой после дуализации соответствует развертывающаяся поверхность конгруэнции L_2^*.

4. Фокальные поверхности конгруэнции L_1 сильно расслояемой пары (L_1, L_2) допускают проективное изгибание C_3; значение результата вытекает из сравнения с [2].