Miroslav Laitoch

О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 258–270

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100408`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ (Miroslav Laitoch), Оломоуц

(Поступило в редакцию 25/II 1959 г.)

В 1956 г. О. Борувка опубликовал исследование о преобразованиях решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка[1]) с точки зрения нужд современной теории дифференциальных уравнений. В частности, он использовал эту теорию для доказательства теоремы о существовании и однозначности решения для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка $-\{X, t\} + Q(X) \,.\, X'^2 = q(t)$. В настоящей статье мы покажем на основании результатов теории непрерывных групп,[2]) как можно распространить результаты, касающиеся преобразований решений и содержащиеся в упомянутом исследовании, на случай самосопряженного линейного дифференциального уравнения третьего порядка, соотв., первого порядка. Далее мы используем расширенный метод Флоке[3]) для определения характера фундаментальной системы нормальных решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка и приведем теорему о существовании и однозначности решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $-\dfrac{X''}{X'} + Q(X) \,.\, X' = q(t)$.

1. Пусть $X(t)$ и $x(T)$ — две взаимно обратные функции, определенные соответственно в интервалах i и I. Два числа $t \in i$, $T \in I$ мы называем сопряженными (относительно функций X, x), если они удовлетворяют равенствам $T = X(t)$, $t = x(T)$. Мы говорим, что число t (T) сопряжено (относительно функций X, x) с числом T (t).

Предположим, что функции X, x обладают производными до третьего порядка. Тогда значения производных X', X'', X''' функции X и значения производных $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ функции x для двух сопряженных чисел $t \in i$, $T \in I$ связаны соотношениями

---

[1]) См. [2]. [2]) Сравни [4], гл. IV. [3]) См. [5].

$$(\tau): \qquad X' = \frac{1}{\dot{x}}, \quad X'' = -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}, \quad X''' = 3\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^5} - \frac{\dddot{x}^4}{\dot{x}^4};$$

$$\dot{x} = \frac{1}{X'}, \quad \ddot{x} = -\frac{X''}{X'^3}, \quad \dddot{x} = 3\frac{X''^2}{X'^5} - \frac{X'''}{X'^4}.$$

2. Рассмотрим самосопряженные линейные дифференциальные уравнения третьего порядка

$$(\omega): \qquad y''' + 2\omega(t)\,.\,y' + \omega'(t)\,.\,y = 0\,,$$

$$(\Omega): \qquad Y''' + 2\Omega(T)\,.\,Y' + \Omega'(T)\,.\,Y = 0\,,$$

где функция ω' непрерывна в интервале j, а Ω' в интервале I.

К дифференциальным уравнениям (ω), (Ω) присовокупим следующие четыре уравнения:

$$(\Omega, \omega): \qquad \{X, t\} + \tfrac{1}{2}\Omega(X)\,.\,X'^2 = \tfrac{1}{2}\omega(t)\,,$$

$$(\omega, \Omega): \qquad \{x, T\} + \tfrac{1}{2}\omega(x)\,.\,\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}\Omega(T),$$

$$(\omega, \omega): \qquad \{X, t\} + \tfrac{1}{2}\omega(X)\,.\,X'^2 = \tfrac{1}{2}\omega(t)\,,$$

$$(\Omega, \Omega): \qquad \{x, T\} + \tfrac{1}{2}\Omega(x)\,.\,\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}\Omega(T)\,,$$

причем $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T}$, $X' = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ и, далее, $\{X, t\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{X'''(t)}{X'(t)} - \dfrac{3}{4}\dfrac{X''^2(t)}{X'^2(t)}$, $\{x, T\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \dfrac{3}{4}\dfrac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)}$, X и x означают искомые функции.

Если X — решение дифференциального уравнения (Ω, ω), определенное в интервале $i \subset j$, то, как известно[4]), обратная функция x, определенная в интервале $I = X(i)$, будет решением дифференциального уравнения (ω,Ω).

Пусть $t_0 \in i$ — произвольное число. Обозначим через X_0, $X_0'(\neq 0)$, X_0'', X_0''' значения функций X, X', X'', X''' для числа t_0. Одновременно положим $T_0 = X(t_0)(= X_0) \in I$ и обозначим через x_0, $\dot{x}_0(\neq 0)$, $\ddot{x}_0$, $\dddot{x}_0$ значения функций $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$ в точке T_0. Числа X_0', X_0'', X_0''' и $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$, $\dddot{x}_0$ преобразуются друг в друга по формулам (τ).

В следующих теоремах мы приведем соотношения между решениями дифференциальных уравнений (ω), (Ω) и (Ω, ω), (ω, Ω), соотв. (Ω, Ω), (ω, ω).

Теорема 2.1. *Пусть U — решение дифференциального уравнения (Ω), а X — решение дифференциального уравнения (Ω, ω), выполняющее в точке $t_0 \in i$ начальные условия $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X_0'(\neq 0)$, $X''(t_0) = X_0''$. Тогда функция $u = \dfrac{U[X(t)]}{X'(t)}$, определенная в интервале i, является решением*

[4]) См. [2], стр. 330.

дифференциального уравнения (ω), *определяемым начальными условиями*

$$(1)\qquad u(t_0) = \frac{U(X_0)}{X_0'}, \quad u'(t_0) = U'(X_0) - U(X_0) \cdot \frac{X_0''}{X_0'^2},$$

$$u''(t_0) = U''(X_0) \cdot X_0' - U'(X_0) \cdot \frac{X_0''}{X_0'} + U(X_0) \cdot \left(\frac{2X_0''^2}{X_0'^3} - \frac{X_0'''}{X_0'^2}\right).$$

Доказательство. Функция u обладает в каждой точке $t \in i$ производными первого, второго и третьего порядков, которые даны формулами

$$u' = U'(X) - U(X) \cdot \frac{X''}{X'^2},$$

$$u'' = U''(X) \cdot X' - U'(X) \cdot \frac{X''}{X'} + U(X) \cdot \left(\frac{2X''^2}{X'^3} - \frac{X'''}{X'^2}\right),$$

$$u''' = U'''(X) \cdot X'^2 + U'(X) \cdot \left(\frac{3X''^2}{X'^2} - \frac{2X'''}{X'}\right) - U(X) \cdot \left(\frac{6X''^3}{X'^4} - \frac{6X''X'''}{X'^3} + \frac{X^{\mathrm{IV}}}{X'^2}\right).$$

Так как функция U удовлетворяет дифференциальному уравнению (Ω), а функция X — уравнению (Ω, ω), для любого $t \in i$ получаются равенства

$$U'''(X) + 2\Omega(X) \cdot U'(X) + \Omega'(X) \cdot U(X) = 0,$$

$$\{X, t\} = -\tfrac{1}{2}\Omega(X) \cdot X'^2 + \tfrac{1}{2}\omega(t).$$

Так как

$$2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X, t\} = \frac{X^{\mathrm{IV}}}{X'} - \frac{4X''X'''}{X'^2} + \frac{3X''^3}{X'^3},$$

получаем при помощи предыдущих формул

$$\left(2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X, t\} \equiv\right) \frac{X^{\mathrm{IV}}}{X'} - \frac{4X''X'''}{X'^2} + \frac{3X''^3}{X'^3} =$$

$$= -\Omega'(X) \cdot X'^3 - 2\Omega(X) \cdot X'X'' + \omega'(t).$$

Отсюда следует

$$u'''(t) + 2\omega(t) \cdot u'(t) \cdot + \omega'(t) \cdot u(t) \equiv$$

$$\equiv U'''(X) \cdot X'^2 + U'(X) \cdot \left(\frac{3X''^2}{X'^2} - \frac{2X'''}{X'}\right) - U(X) \cdot \left(\frac{6X''^3}{X'^4} - \frac{6X''X'''}{X'^3} + \frac{X^{\mathrm{IV}}}{X'^2}\right) +$$

$$+ 2\omega(t) \cdot \left[U'(X) - U(X) \cdot \frac{X''}{X'^2}\right] + \omega'(t)\,\frac{U(X)}{X'} \equiv$$

$$\equiv U'''(X) \cdot X'^2 + 4U'(X) \cdot \left[\frac{3}{4}\,\frac{X''^2}{X'^2} - \frac{1}{2}\,\frac{X'''}{X'} + \frac{1}{2}\,\omega(t)\right] +$$

$$+ 4U(X) \cdot \frac{X''}{X'^2} \cdot \left[-\frac{3}{2}\,\frac{X''}{X'^2} + \frac{3}{2}\,\frac{X'''}{X'} - \frac{1}{4}\,\frac{X^{\mathrm{IV}}}{X''} - \frac{1}{2}\,\omega(t) + \right.$$

$$+\frac{1}{4}\frac{X'}{X''}\cdot\left(\frac{X^{\mathrm{IV}}}{X'}-\frac{4X''X'''}{X'^2}+\frac{3X''^3}{X'^3}+\Omega'(X)\,.\,X'^3+2\Omega(X)\,.\,X'X''\right)\Bigg]\equiv$$

$$\equiv X'^2\,.\,[U'''(X)+2\Omega(X)\,.\,U'(X)+\Omega'(X)\,.\,U(X)]+$$

$$+4U(X)\frac{X''}{X'^2}\cdot\left[-\frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2}+\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'}-\frac{1}{2}\omega(t)+\frac{1}{2}\Omega(X)\,.\,X'^2\right]\equiv 0\,.$$

Итак, функция u является решением дифференциального уравнения (ω) и, очевидно, удовлетворяет указанным начальным условиям.

Теорема 2.2. *Решение U дифференциального уравнения* (Ω), *рассмотренное в теореме 2.1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению u обратному соотношению $U=\dfrac{u[x(T)]}{\dot{x}(T)}$, где x обозначает функцию, обратную к X. Решение U удовлетворяет следующим начальным условиям:*

$$U(T_0)=\frac{u(x_0)}{\dot{x}_0},\quad U'(T_0)=u'(x_0)-u(x_0)\,.\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2},$$

$$U''(T_0)=u''(x_0)\,.\,\dot{x}_0-u'(x_0)\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}+u(x_0)\,.\left(\frac{2\ddot{x}_0^2}{\dot{x}_0^3}-\frac{\dddot{x}_0}{\dot{x}_0^2}\right).$$

Доказательство. По предыдущей теореме 2.1 нам известно, что функция $\bar{U}=\dfrac{u[x(T)]}{\dot{x}(T)}$, определенная в интервале I, является решением дифференциального уравнения (Ω), определяемым начальными условиями

$$\bar{U}(T_0)=\frac{u(x_0)}{\dot{x}_0},\quad \bar{U}'(T_0)=u'(x_0)-u(x_0)\,.\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2},$$

$$\bar{U}''(T_0)=u''(x_0)\,.\,\dot{x}_0-u'(x_0)\,.\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}+u(x_0)\,.\left(\frac{2\ddot{x}_0^2}{\dot{x}_0^3}-\frac{\dddot{x}_0}{\dot{x}_0^2}\right).$$

Ввиду этих формул и ввиду формул (1) и (τ), получаем

$$\bar{U}(T_0)=\frac{u(x_0)}{\dot{x}_0}=\frac{U(X_0)}{X_0'}\,.\,X_0'=U(X_0)=U(T_0)\,,$$

$$\bar{U}'(T_0)=u'(x_0)-u(x_0)\,.\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2}=$$

$$=U'(X_0)-U(X_0)\,.\,\frac{X_0''}{X_0'^2}+\frac{U(X_0)}{X_0'}\,.\,\frac{X_0''}{X_0'}=U'(X_0)=U'(T_0)\,,$$

$$\bar{U}''(T_0)=u''(x_0)\,.\,\dot{x}_0-u'(x_0)\,.\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}+u(x_0)\,.\left(\frac{2\ddot{x}_0^2}{\dot{x}_0^3}-\frac{\dddot{x}_0}{\dot{x}_0^2}\right)=$$

$$=U''(X_0)-U'(X_0)\,.\,\frac{X_0''}{X_0'^2}+U(X_0)\cdot\left(\frac{2X_0''}{X_0'^4}-\frac{X_0'''}{X'^3}\right)+\left[U'(X_0)-U(X_0)\cdot\frac{X_0''}{X_0'^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{X_0''}{X_0^{2\prime}}+\frac{U(X_0)}{X_0'}\cdot\left(\frac{X_0'''}{X_0'^2}-\frac{X_0''^2}{X_0'^3}\right)=U''(X_0)=U''(T_0)\,.$$

Итак, $\bar{U}(T_0) = U(T_0)$, $\bar{U}'(T_0) = U'(T_0)$, $\bar{U}''(T_0) = U''(T_0)$. Отсюда следует тождество $\bar{U}(T) = U(T)$ в интервале J.

В случае, когда уравнение (Ω) тождественно с уравнением (ω), предыдущие теоремы можно сформулировать так:

Пусть u — решение дифференциального уравнения (ω), а X — решение дифференциального уравнения (ω, ω), которое в точке $t_0 \in i$ удовлетворяет начальным условиям $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0(\neq 0)$, $X''(t_0) = X''_0$. Тогда функция

$$y = \frac{u[X(t)]}{X'(t)} \tag{2}$$

является также решением дифференциального уравнения (ω), которое определяется начальными условиями

$$y(t_0) = \frac{u(X_0)}{X'_0}, \quad y'(t_0) = u'(X_0) - u(X_0) \cdot \frac{X''_0}{X'^2_0},$$

$$y''(t_0) = u''(X_0) \cdot X'_0 - u'(X_0) \cdot \frac{X''_0}{X'_0} + u(X_0) \cdot \left(\frac{2X''^2_0}{X'^3_0} - \frac{X'''_0}{X'^2_0}\right).$$

Решение u дифференциального уравнения (ω), рассмотренное в предыдущей теореме, удовлетворяет в интервале j по отношению к решению y обратному соотношению $u = \dfrac{y[x(T)]}{\dot{x}(T)}$, где x — функция, обратная к функции X. Решение u удовлетворяет следующим начальным условиям

$$u(T_0) = \frac{y(x_0)}{\dot{x}_0}, \quad u'(T_0) = y'(x_0) - y(x_0) \cdot \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}^2_0},$$

$$u''(T_0) = y''(x_0) \cdot \dot{x}_0 - y'(x_0) \cdot \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0} + y(x_0) \cdot \left(\frac{2\ddot{x}^2_0}{\dot{x}^3_0} - \frac{\dddot{x}_0}{\dot{x}^2_0}\right).$$

3. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения (ω). Известно, что тогда каждое решение u дифференциального уравнения (ω) можно выразить в виде

$$u = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + c_3u_3(t)\,, \tag{3}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные.

Множество всех решений дифференциального уравнения (ω) образует трехмерное линейное пространство $\mathfrak{L}$ над телом действительных чисел. Из предыдущих двух теорем мы заключаем, что при помощи решения X дифференциального уравнения (ω, ω) формулой (2) определяется линейное отображение простанства $\mathfrak{L}$ на себя.

Образы решений фундаментальной системы мы выразим так:

$$\frac{u_i[X(t)]}{X'(t)} = a_{i1}u_1(t) + a_{i2}u_2(t) + a_{i3}u_3(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{4}$$

где a_{ik}, $(k = 1, 2, 3)$ — постоянные. Функции $\frac{u_i[X(t)]}{X'(t)}$, $(i = 1, 2, 3)$, образуют, очевидно, фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (ω) и, следовательно, определитель $|a_{ik}| \neq 0$, $(i, k = 1, 2, 3)$.

Будем теперь искать т. наз. нормальные решения U_1, U_2, U_3 дифференциального уравнения (ω), т. е. такие решения, для которых $\frac{U_i[X(t)]}{X'(t)} = s_i \cdot U_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$. Матрица линейного отображения

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

имеет в этом случае канонический вид. Как известно, эти решения можно выразить в виде

$$U_i = \alpha_{i1} u_1(t) + \alpha_{i2} u_2(t) + \alpha_{i3} u_3(t)\ , \quad (i = 1, 2, 3)\ , \tag{6}$$

причем α_{ik} являются решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11} - s_i)\,\alpha_{i1} + a_{21}\,\alpha_{i2} + a_{31}\,\alpha_{i3} &= 0\ , \\ a_{12}\,\alpha_{i1} + (a_{22} - s_i)\,\alpha_{i2} + a_{32}\,\alpha_{i3} &= 0\ , \\ a_{13}\,\alpha_{i1} + a_{23}\,\alpha_{i2} + (a_{33} - s_i)\,\alpha_{i3} &= 0\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Нетривиальные решения этой системы получатся тогда, когда s_i будут корнями характеристического уравнения

$$|\mathbf{A} - s \cdot \mathrm{E}| = 0\ , \tag{8}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица линейного отображения, E — единичная матрица.

Исследуем случаи, когда все три корня характеристического уравнения различны, один корень двукратный или один корень трехкратный.

Вспомогательная теорема 3.1. *Пусть X — решение дифференциального уравнения (ω ω). Пусть F — функция, которая имеет непрерывную производную четвертого порядка и которая удовлетворяет функциональному уравнению*

$$(f): \qquad F[X(t)] - F(t) = 1\ , \quad \text{причем} \quad F'(t) \neq 0\ .$$

Тогда функция $\Phi = e^{rF(t)} : F'(t)$, где $r = \mathrm{Log}\, s$, обладает свойством $\frac{\Phi[X(t)]}{X'(t)} = s \cdot \Phi(t)$.

Действительно,

$$\Phi[X(t)] = e^{rF[X(t)]} : F'[X(t)] = e^{rF(t)+r} : F'[X(t)] = s \cdot e^{rF(t)} : F'[X(t)];$$

но так как $F'[X(t)] \,.\, X'(t) = F'(t)$, из предыдущего сразу же следует утверждение теоремы.

Функциональное уравнение (f) имеет бесконечное количество решений, как показал Н. Х. Абель.[5])

Если решения дифференциального уравнения $y'' + \frac{1}{2}\omega(t) \,.\, y = 0$ колеблются в интервале $(-\infty, \infty)$, то уравнение (ω, ω) является дифференциальным уравнением дисперсий первого рода. В этом случае решениями функционального уравнения (f) будут все возрастающие (убывающие) решения F дифференциального уравнения $(2\pi^2, \omega)$, если и только если X — — центральная дисперсия с положительным (отрицательным) индексом.[6])

Для дальнейших рассуждений введем следующие обозначения: X — решение дифференциального уравнения (ω, ω); F — решение функционального уравнения $F[X(t)] - F(t) = 1$; $\Phi_i = e^{r_i F(t)} : F'(t)$, где $r_i = \operatorname{Log} s_i$ и s_i суть корни характеристического уравнения (8).

Теорема 3.2. *Пусть все корни* s_i, $(i = 1, 2, 3)$, *характеристического уравнения* (8) *различны. Тогда существует фундаментальная система нормальных решений* U_i, $(i = 1, 2, 3)$, *дифференциального уравнения* (ω), *которые можно представить в виде* $U_i = \Phi_i(t) \,.\, \pi_i(t)$, *причем функции* π_i *имеют непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяют тождеству* $\pi_i[X(t)] = \pi_i(t)$.

Доказательство. Так как системы уравнений (7) обладают для всех s_i нетривиальными решениями, то этим обеспечивается существование решений

$$U_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} u_j(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

таких, что

$$\frac{U_i[X(t)]}{X'(t)} = s_i \,.\, U_i(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Функции U_i образуют, очевидно, фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (ω). Так как частное $\pi_i = \dfrac{U_i(t)}{\Phi_i(t)}$ инвариантно при подстановке $X(t)$ вместо независимого переменного, в чем нетрудно убедиться, то отсюда непосредственно следует утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть характеристическое уравнение* (8) *обладает трехкратным корнем* s_1. *Тогда существует фундаментальная система нормальных решений* U_i, $(i = 1, 2, 3)$, *уравнения* (ω), *которые можно представить или в виде*

$$U_i = \Phi_1(t) \,.\, \pi_i(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

---

[5]) См. [7], стр. 36.

[6]) См. [1].

или в виде

$$U_i = \Phi_1(t) \,.\, \pi_i(t)\,, \quad (i = 1, 2)\,; \quad U_3 = \Phi_1(t) \,.\, [\pi_3(t) + F(t) \,.\, \pi_2(t)]$$

или, наконец, в виде

$$U_1 = \Phi_1(t) \,.\, \pi_1(t)\,, \quad U_2 = \Phi_1(t) \,.\, [\pi_2(t) + F(t) \,.\, \pi_1(t)]\,,$$

$$U_3 = \Phi_1(t) \,.\, \left\{\pi_3(t) + F(t) \,.\, \pi_2(t) + \frac{F(t) \,.\, [F(t) - 1]}{2} \,.\, \pi_1(t)\right\},$$

причем функции π_i имеют непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяют тождеству $\pi_i[X(t)] = \pi_i(t)$.

Доказательство. Из теории линейных отображений[7]) известно, что существует фундаментальная система таких решений U_1, U_2, U_3 дифференциального уравнения (ω), что имеет место или

$$U_i[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, U_i(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3)$$

или

$$U_i[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, U_i(t)\,, \quad (i = 1, 2)\,;$$
$$U_3[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, [U_3(t) + U_2(t)]$$

или, наконец,

$$U_1[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, U_1(t)\,, \quad U_2[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, [U_2(t) + U_1(t)]\,,$$
$$U_3[X(t)] : X'(t) = s_1 \,.\, [U_3(t) + U_2(t)]\,.$$

Вывод вида фундаментальной системы решений мы произведем для третьего случая, так как в остальных двух случаях вывод аналогичен.

Нетрудно найти вид решений этой фундаментальной системы решений уравнения (ω), если воспользоваться подстановкой

$$(9) \qquad U_i = \Phi_i(t) \,.\, z_i(t)\,, \quad (i = 1, 2, 3).$$

По упрощении получим

$$z_1[X(t)] = z_1(t)\,, \quad z_2[X(t)] = z_2(t) + z_1(t)\,, \quad z_3[X(t)] = z_3(t) + z_2(t)\,.$$

Частное решение этой системы уравнений имеет вид $\bar{z}_1 = 1$, $\bar{z}_2 = F(t)$, $\bar{z}_3 = \dfrac{F(t) \,.\, [F(t) - 1]}{2}$, в чем нетрудно убедиться с помощью подстановки.

Общее решение тогда получим так:

$$(10) \qquad z_1 = \pi_1(t)\,, \quad \text{где} \quad \pi_1[X(t)] = \pi_1(t)\,.$$

Так как функция $\pi_2 = z_2(t) - F(t) \,.\, z_1(t)$ инвариантна относительно подстановки $X(t)$ вместо независимого переменного, ввиду того, что

$$\pi_2[X(t)] = z_2[X(t)] - F[X(t)] \,.\, z_1[X(t)] =$$
$$= z_2(t) + z_1(t) - [F(t) + 1] \,.\, z_1(t) = z_2(t) - F(t) \,.\, z_1(t) = \pi_2(t)\,,$$

[7]) См. [5], стр. 118 и сл. или [2], стр. 492 и сл.

то

$$(11)\qquad z_2 = \pi_2(t) + F(t) \,.\, z_1(t) = \pi_2(t) + F(t) \,.\, \pi_1(t) \,.$$

Функция

$$(12)\qquad \pi_3 = z_3(t) - F(t) \,.\, \pi_2(t) - \frac{F(t) \,.\, [F(t) - 1]}{2} \,.\, \pi_1(t) \,,$$

также инвариантна относительно подстановки $X(t)$ вместо независимого переменного, так как

$$\pi_3[X(t)] = z_3[X(t)] - F[X(t)] \,.\, \pi_2[X(t)] - \frac{F[X(t)] \,.\, \{F[X(t)] - 1\}}{2} \,.\, \pi_1[X(t)] =$$

$$= z_3(t) + z_2(t) - [F(t) + 1] \,.\, \pi_2(t) - \frac{[F(t) + 1] \,.\, F(t)}{2} \,.\, \pi_1(t) = z_3(t) -$$

$$- F(t) \,.\, \pi_2(t) + z_2(t) - \pi_2(t) - \frac{F(t) \,.\, [F(t) - 1]}{2} \,.\, \pi_1(t) - F(t) \,.\, \pi_1(t) = \pi_3(t)$$

в силу (11) и (12). Отсюда следует

$$(13)\qquad z_3 = \pi_3(t) + F(t) \,.\, \pi_2(t) + \frac{F(t) \,.\, [F(t) - 1]}{2} \,.\, \pi_1(t) \,,$$

$$\text{где}\qquad \pi_i[X(t)] = \pi_i(t) \,, \qquad (i = 1, 2, 3) \,.$$

Утверждение теоремы теперь следует из формул (9), (10), (11) и (13).

При помощи предыдущих результатов нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть характеристическое уравнение* (8) *имеет простой корень* s_1 *и двукратный корень* s_2. *Тогда существует фундаментальная система нормальных решений* U_i, $(i = 1, 2, 3)$, *дифференциального уравнения* (ω), *которые можно представить или в виде*

$$U_1 = \Phi_1(t) \,.\, \pi_1(t) \,, \quad U_i = \Phi_2(t) \,.\, \pi_i(t) \,, \quad (i = 2, 3)$$

или в виде

$$U_1 = \Phi_1(t) \,.\, \pi_1(t) \,, \qquad U_2 = \Phi_2(t) \,.\, \pi_2(t) \,, \qquad U_3 = \Phi_2(t) \,.\, [\pi_3(t) + F(t) \,.\, \pi_2(t)] \,,$$

причем функции π_i *имеют непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяют тождеству* $\pi_i[X(t)] = \pi_i(t)$.

4. В связи с теорией преобразований решений линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков приведем для полноты теоремы о преобразовании решений в случае линейных уравнений первого порядка и теорему о существовании и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка — $L(X) + Q(X) \,.\, X' = q(t)$, где $L(X) = \dfrac{X''(t)}{X'(t)}$. Методы доказательства остаются по существу без изменений, поэтому дальнейшие теоремы приводятся без доказательств.

Если ограничиться лишь первыми двумя уравнениями в преобразовании (τ), то этим самым определяется преобразование в двумерном пространстве. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Инвариантом преобразования* (τ) *в двумерном пространстве является функция* $K(X) = \dfrac{L^2(X)}{X'}$, *где* $L(X) = \dfrac{X''}{X'}$; *итак, для каждых двух сопряженных чисел* t, T *будет* $K[X(t)] = K[x(T)]$.

Теорема 4.2. *Функция* $L(X) = \dfrac{X''}{X'}$ *является инвариантом подобия (в том смысле, что для каждой функции* F, *которая получается из* X *путем произвольного линейного преобразования* $F(t) = aX(t) + b$, $a \neq 0$, *имеет место тождество* $L(F) = L(X)$ *в интервале* i).

Об инварианте подобия $L(X)$ сложной функции справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть* $Y = X[\zeta(t)]$ — *сложная функция. Пусть* $\zeta(t)$ — — *строго монотонная функция, пусть для всех рассматриваемых значений* t *сложная функция* $X[\zeta(t)]$ *определена. Тогда* $L(Y) = L[X(\zeta)] \,.\, \zeta' + L(\zeta)$.

Рассмотрим два линейных уравнения первого порядка

$$(q): \qquad y' = q(t) \,.\, y \,,$$

$$(Q): \qquad Y' = Q(T) \,.\, Y \,,$$

где функция q непрерывна в интервале j, а Q в интервале J.

Присоединим к дифференциальным уравнениям (q), (Q) следующие четыре уравнения

$$(Q, q): \qquad -L(X) + Q(X) \,.\, X' = q(t) \,,$$

$$(q, Q): \qquad -L(x) + q(x) \,.\, \dot{x} = Q(T) \,,$$

$$(q, q): \qquad -L(X) + q(X) \,.\, X' = q(t) \,,$$

$$(Q, Q): \qquad -L(x) + Q(x) \,.\, \dot{x} = Q(T) \,,$$

причем $X' = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T}$, $L(X) = \dfrac{X''(t)}{X'(t)}$, $L(x) = \dfrac{\ddot{x}(T)}{\dot{x}(T)}$; X и x означают искомые функции.

Относительно решений уравнений (Q, q), (q, q), (q, Q), (Q, Q) справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.4. *Пусть* X — *решение дифференциального уравнения* (Q, q), *определенное в интервале* $i \subset j$. *Тогда обратная функция* x, *определенная в интервале* $I = X(i)$, *является решением уравнения* (q, Q).

Теорема 4.5. *Пусть* X, y, $\overline{X}$, $\overline{y}$ *являются, соответственно, решениями уравнений* (Q, q), (q, Q), (q, q), (Q, Q). *Тогда сложные функции* $X\overline{X}$, $\overline{y}X$, $y\overline{y}$,

$\overline{X}y$, yX, Xy, *поскольку они определены, будут решениями дифференциальных уравнений* (Q, q), (Q, q), (q, Q), (q, Q), (q, q), (Q, Q).

Соотношения между решениями дифференциальных уравлений (q), (Q), (Q, q), (q, Q) можно установить следующим образом:

Рассмотрим решения уравнений (q), (Q), определенные в интервалах j, J. Если X — решение уравнения (Q, q), определенное в интервале $i \subset j$, то, как известно, обратная функция x, определенная в интервале $I = X(i)$, будет решением уравнения (q, Q).

Если $t_0 \in i$ — произвольное число, то обозначим через X_0, $X_0(\neq 0)$ значения функций X, X' в точке t_0. Аналогично положим $T_0 = X(t_0) = X_0 \in I$ и обозначим через x_0, $\dot{x}_0(\neq 0)$ значения функций x, $\dot{x}$ в точке T_0. Числа X_0' и $\dot{x}_0$ преобразуются по формулам (τ).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.6. *Пусть* U *— решение уравнения* (Q) *и* X *— решение уравнения* (Q, q), *удовлетворяющее в точке* $t_0 \in i$ *начальным условиям* $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X_0'$. *Тогда функция* $u = \dfrac{U[X(t)]}{X'(t)}$, *определенная в интервале* i, *является решением дифференциального уравнения* (q), *которое определяется начальным условием* $u(t_0) = \dfrac{U(X_0)}{X_0'}$.

Теорема 4.7. *Рассмотренное в предыдущей теореме решение* U *дифференциального уравнения* (Q) *удовлетворяет в интервале* I *по отношению к решению и обратному соотношению* $U = \dfrac{u[x(T)]}{\dot{x}(T)}$, *где* x *есть функция, обратная к функции* X. *Решение* U *удовлетворяет начальному условию* $U(T_0) = \dfrac{u(x_0)}{\dot{x}_0}$.

Приведем еще *теорему о единственности и существовании* решения дифференциального уравнения (Q, q) в следующей формулировке:

Пусть $t_0 \in j$; $X_0 \in J$, $X_0'(\neq 0)$ *— произвольные числа. Существует в точности одно решение* $X(t)$ *уравнения* (Q, q), *определенное в открытом интервале* $i \subset j$, *которое удовлетворяет начальным условиям* $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X_0'$ *и которое замечательно тем, что каждое другое решение уравнения* (Q, q), *удовлетворяющее тем же начальным условиям, является его частью.*

Пусть U *— произвольное решение дифференциального уравнения* (Q), *а* u *— решение уравнения* (q), *определяемое начальным условием* $u(t_0) = U(X_0) : X_0'$. *Тогда решение* X *уравнения* (Q, q), *о котором идет речь, является решением дифференциального уравнения первого порядка* $X' = \dfrac{U(X)}{u(x)}$, *принимающим в точке* t_0 *значение* X_0.

Литература

[1] *Barvínek E.:* Über die Vertauschbarkeit der Dispersionen und Lösungen der Differentialgleichung $\sqrt{|X'|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + q(X) \cdot X'^2 = Q(t)$. Spisy Přír. fak. MU v Brně, 1958, *4* (393), 141—155.

[2] *Borůvka O.:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Annali di matematica pura ed aplicata, Bologna 1956, *IV*, T. XLI.

[3] *Goursat E.,* Cours d'analyse mathématique. T. II. Paris 1933.

[4] *Kowalewski G.:* Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Leipzig 1931.

[5] *Лайтох М.*, Расширение метода Флоке .... Чех. мат. журнал, 1955, *5*(*80*), 164—174.

[6] *Мальцев А. И.:* Основы линейной алгебры. Москва 1948.

[7] Oevres complètes de *N. H. Abel,* T. *2*. Christiania 1881.

Résumé

CONTRIBUTION AUX TRANSFORMATIONS DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

MIROSLAV LAITOCH, Olomouc

Considérons les équations différentielles autoadjointes du troisième ordre

$$(\omega): \qquad y''' + 2\omega(t)\, y' + \omega'(t)\, y = 0\,,$$

$$(\Omega): \qquad Y''' + 2\,\Omega(t)\, Y' + \Omega(t)\, Y = 0\,,$$

les fonctions ω' et Ω' étant continues sur les intervalles j et J respectivement.

Aux équations différentielles (ω), (Ω) nous associons les quatre équations suivantes:

$$(\Omega, \omega) : \{X, t\} + \tfrac{1}{2}\, \Omega(X)\, X'^2 = \tfrac{1}{2}\, \omega(t); \; (\omega, \Omega) : \{x, T\} + \tfrac{1}{2}\, \omega(x)\, \dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}\, \Omega(T)\,,$$

$$(\omega, \omega) : \{X, t\} + \tfrac{1}{2}\, \omega(X)\, X'^2 = \tfrac{1}{2}\, \omega(t)\,; \; (\Omega, \Omega) : \{x, T\} + \tfrac{1}{2}\, \Omega(x)\, \dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}\, \Omega(T)$$

$$\text{où } \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T}\,, \quad X' = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\,, \text{ et } \{X, t\} = \frac{1}{2}\,\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}\,,$$

$\{x, T\} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \dfrac{3}{4}\,\dfrac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)}$; X et x sont les fonctions cherchées.

Dans cet article, on étudie les relations qui existent entre les solutions des équations différentielles (ω), (Ω), et (Ω, ω), (ω, Ω), soit (Ω, Ω), (ω, ω). On démontre en particulier les deux théorèmes suivants:

Théorème 2.1. *Soit U une solution de l'équation* (Ω) *et X la solution de l'équation* (Ω, ω) *vérifiant en un point $t_0 \in i$ la condition initiale* $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0 (\neq 0)$, $X''(t_0) = X''_0$. *Alors la fonction* $u = \dfrac{U[X(t)]}{X'(t)}$ *définie sur l'intervalle i est la solution de l'équation différentielle* (ω) *définie par les conditions initiales*:

$$u(t_0) = \frac{U(X_0)}{X'_0}, \quad u'(t_0) = U'(X_0) - U(X_0)\,\frac{X''_0}{X'^2_0},$$

$$u''(t_0) = U''(X_0)\,X'_0 - U'(X_0)\,\frac{X''_0}{X'_0} + U(X_0)\left(\frac{2X''^2_0}{X'^3_0} - \frac{X'''_0}{X'^2_0}\right).$$

Théorème 2.2. *La solution U de l'équation différentielle* (Ω), *considérée au théorème précédent, vérifie sur l'intervalle I par rapport à la solution u la formule d'inversion* $U = \dfrac{u[x(T)]}{\dot{x}(T)}$, *oú x désigne la fonction inverse de X.*

Ensuite, on déduit dans cet article des formules explicites pour le système fondamental de solutions normales de l'équation differentielle linéaire autoadjointe de troisième ordre (ω):

Si X désigne une solution de l'équation differentielle (ω, ω), F la solution de l'équation fonctionnelle $F[X(t)] - F(t) = 1$, $\Phi_i = e^{r_i F(t)} : F'(t)$, où $r_i = \log s_i$, s_i étant les racines de l'équation caractéristique (8), alors on a:

Si toutes les racines $s_i (i = 1, 2, 3)$ de l'équation caractéristique (8) sont simples, il existe un système fondamental de solutions normales U_i de l'équation différentielle (Ω) que l'on peut exprimer par les formules

$$U_i = \Phi_i(t)\,\pi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Si l'équation caractéristique (8) a une racine triple, on a ou bien

$$U_i = \Phi_1(t)\,\pi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

ou bien

$$U_i = \Phi_1(t)\,\pi_i(t) \quad (i = 1, 2)\,, \quad U_3 = \Phi_1(t)\,[\pi_3(t) + F(t)\,\pi_2(t)]\,,$$

ou bien encore

$$U_1 = \Phi_1(t)\,\pi_1(t)\,, \quad U_2 = \Phi_1(t)\,[\pi_2(t) + F(t)\,\pi_1(t)]\,,$$

$$U_3 = \Phi_1(t)\left\{\pi_3(t) + F(t)\,\pi_2(t) + \frac{F(t)[F(t) - 1]}{2}\,\pi_1(t)\right\}.$$

Si l'équation caractéristique (8) admet une racine s_1 simple et une autre s_2 double, on a soit

$$U_1 = \Phi_1(t)\,\pi_1(t) \quad U_i = \Phi_2(t)\,\pi_i(t) \quad (i = 2, 3)\,,$$

soit

$$U_1 = \Phi_1(t)\,\pi_1(t)\,, \quad U_2 = \Phi_2(t)\,\pi_2(t)\,, \quad U_3 = \Phi_2(t)\,[\pi_,(t) + F(t)\,\pi_2(t)]\,.$$

Ici les fonctions π_i $(i = 1, 2, 3)$ sont deux fois différentiables et vérifient l'identité $\pi_i[X(t)] = \pi_i(t)$.