Ján Jakubík

Прямые разложения частично упорядоченных групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 231–243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100405

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 22/IV 1959 г.)

В первой части работы (разделы 1—11) исследуется одно условие, являющееся необходимым и достаточным для того, чтобы любых два прямых разложения частично упорядоченной группы G обладали общим уплотнением. Во второй части (разделы 12—19) некоторые результаты, доказанные в [6] для структурно упорядоченных групп, обобщаются на однокомпонентные частично упорядоченные группы.

В работе [1] (см. также [2], гл. 14) Г. Биркгоф доказал, что два любых прямых разложения структурно упорядоченной группы на прямое разложение обладают общим уплотнением. Этот результат Е. П. Шимбирева обобщила в работе [3] на однокомпонентные частично упорядоченные группы (т. е. „directed" в терминологии, использованной в [2]). Далее Шимбирева вывела в цитированной работе условие, достаточное для того, чтобы в частично упорядоченной группе, коммутант которой является выпуклым подмножеством, два любых прямых разложения имели общее уплотнение ([3], стр. 166, теорема IX); это условие представляет собой некоторое видоизменение известного условия Фиттинга, касающегося абстрактных групп (см. [4]), приспособленное к частично упорядоченным группам.

В настоящей заметке мы исследуем только прямые разложения с конечным числом множителей. Пусть $K(0)$ — компонента частично упорядоченной группы G, содержащая единичный элемент 0 группы G. (Понятие составляющей было введено в [3]; там же было доказано, что $K(0)$ — инвариантная подгруппа в G. См. также ниже, раздел 1). Если $x \in G$ $(A \subset G)$, то обозначим символом $\bar{x}(\bar{A})$ класс в разложении группы G,[1]) образованном инвариантной подгруппой $K(0)$, который содержит элемент x (множество всех классов $\bar{x}$, для которых существует $a \in \bar{x}$, $a \in A$). Далее обозначим $G/K(0) = \bar{G}$. Для краткости мы будем говорить, что частично упорядочен-

[1]) Если G — частично упорядоченная группа, то выражением „группа G" мы будем обозначать, что в данном рассуждении мы рассматриваем лишь групповые свойства, не обращая внимания на частичное упорядочение.

ная группа (соотв. группа) G обладает свойством Z, если два любых прямых разложения с конечным числом множителей частично упорядоченной группы (соотв. группы) G имеют общее уплотнение.

Строение группы $\overline{G}$ бывает в многих случаях проще, чем строение группы G. При исследовании вопроса о том, обладает ли или не обладает ли частично упорядоченная группа G свойством $\mathbf{Z}$, в таких случаях имеет смысл попытаться свести задачу к изучению свойств группы G. Каждому прямому разложению частично упорядоченной группы $\overline{G}$ можно естественным образом поставить в соответствие определенное прямое разложение группы G; такое прямое разложение группы $\overline{G}$ мы будем называть индуцированным. Докажем утверждение:

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы частично упорядоченная группа G имела свойство $\mathbf{Z}$, заключается в том, чтобы одновременно выполнялось:*

а) *два любых индуцированных прямых разложения группы $\overline{G}$ имеют общее уплотнение,*

б) *если A, B — прямые множители в G, то $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Далее, в разделах 12—19 исследуются некоторые вопросы, касающиеся прямых разложений однокомпонентной частично упорядоченной группы а также обобщаются некоторые результаты работы [6].

Отдельные вспомогательные теоремы мы будем доказывать для случая разложения на два множителя; при переходе к разложениям на n множителей (n-конечное, $n > 2$) мы не встретили бы существенных трудностей.

Если $A \subset G$, то мы будем рассматривать в A то же самое отношение частичного упорядочения, как и в G.

1. Напомним основные понятия теории частично упорядоченных групп.

Пусть G — множество. Предположим, что

а) G — группа (групповую операцию мы обозначаем знаком $+$, а единичный элемент — символом 0),

б) G — частично упорядоченное множество (символ $\leqq$),

в) если x, y, a, $b \in G$, то из соотношения $x \leqq y$ вытекает соотношение $a + x + b \leqq a + y + b$.

Тогда мы говорим, что G — частично упорядоченная группа (сокращенно: ч. у. группа).

Множество всех элементов x ч. у. группы G, для которых существует x_1, $x_2 \in G$ так, что $x_1 \leqq 0 \leqq x_2$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, обозначим через $K(0)$. В терминологии, использованной в [3], $K(0)$ является компонентой ч. у. группы G, содержащей элемент 0. Множество $K(0)$ — инвариантная подгруппа в группе G (см. [3], стр. 151—152). Если $K(0) = G$, то мы говорим, что G — однокомпонентная ч. у. группа.

2. В последующем G означает везде ч. у. группу; $K(0)$ и $\overline{G}$ имеют то же значение, как в разделе 1 и в введении.

Пусть A, B — подгруппы в группе G. Предположим, что имеют место утверждения

а) если $a \in A$, $b \in B$, то $a + b = b + a$,

б) каждый элемент $x \in G$ можно выразить в виде $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$,

в) $A \cap B = \{0\}$,

г) если $x_i = a_i + b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2)$, то $x_1 \leqq x_2$ только тогда, если $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$. Тогда мы говорим, что ч. у. группа G является прямым произведением своих ч. у. подгрупп A, B и пишем $G = A \times B$ (ср., напр., [5] стр. 106 и [3], стр. 153).

Мы говорим, что прямые разложения ч. у. группы G

$$G = A \times B\,, \quad G = C \times D \tag{1}$$

имеют общее уплотнение, если существуют подгруппы U_i $(i = 1, \ldots, 4)$ ч. у. группы G такие, что

$$A = U_1 \times U_2\,, \quad B = U_3 \times U_4\,, \quad C = U_1 \times U_3\,, \quad D = U_2 \times U_4\,. \tag{2}$$

(Нетрудно обнаружить, что в таком случае должно быть

$$U_1 = A \cap C\,, \quad U_2 = A \cap D\,, \quad U_3 = B \cap C\,, \quad U_4 = B \cap D\,. \tag{2'}$$

Если для подгрупп A, B группы G выполняются условия а), б), в), то группа G является прямым произведением своих подгрупп A, B. Это обстоятельство мы обозначаем так: $G \sim A \times B$. Если выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (1), (2) (где вместо $=$ пишем $\sim$), то мы говорим, что прямые разложения $G \sim A \times B$, $G \sim C \times D$ имеют общее уплотнение. В таком случае справедливы также соотношения (2').

Замечание. Из условий а), б), в) следует, что каждый элемент $x \in G$ можно выразить единственным образом в виде $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$.

3. *Пусть $G = A \times B$. Обозначим $K(0) \cap A = A_1$, $K(0) \cap B = B_1$. Имеет место соотношение*

$$K(0) = A_1 \times B_1\,. \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, A_1, B_1 — подгруппы в $K(0)$, и требования, аналогичные 2 а), в), г) и необходимые для справедливости соотношения (3), выполняются. Пусть $x \in K(0)$. Возьмем согласно разделу 1 элементы x_1, $x_2 \in G$, $x_1 \leqq 0 \leqq x_2$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$. Пусть $x = a_0 + b_0$, $x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$ $(a_i \in A,\ b_i \in B,\ i = 0, 1, 2)$. Согласно 2 г) имеем $a_1 \leqq 0 \leqq a_2$, $a_1 \leqq a_0 \leqq a_2$ и аналогично для b_i. Итак, a_0, $b_0 \in K(0)$, так что $a_0 \in A_1$, $b_0 \in B_1$ и утверждение доказано.

Замечание. Из предыдущих рассуждений нетрудно доказать утверждение:

Пусть $G = A \times B$, пусть $K_A(0)$ — компонента, содержащая элемент 0 в частично упорядоченной группе A. Тогда будет $K_A(0) = K(0) \cap A$.

4. *Пусть $G = A \times B$. Тогда*

$$\overline{G} = \overline{A} \times \overline{B}\,. \tag{4}$$

(Мы будем говорить, что прямое разложение (4) индуцируется прямым разложением $G = A \times B$.)

Доказательство. Очевидно, $\overline{A}$, $\overline{B}$ — подгруппы в G и условия, аналогичные 2 а), б), необходимые для справедливости соотношения (4), выполняются. Пусть $\overline{x} \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда существует $a \in \overline{x}$, $a \in A$, $b \in \overline{x}$, $b \in B$, $a - b \in \overline{0} = K(0)$. Согласно 3 элемент $a - b$ можно выразить в виде $a - b = a_1 + b_1$, $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$. Согласно 2 в) из этого следует $a = a_1$, $-b = b_1$. Итак, a, $b \in K(0)$, $\overline{x} \in K(0)$.

Замечание. Утверждение, аналогичное 4, вообще говоря не справедливо для гомоморфного образа абстрактной группы. Выражаясь более подробно: если K — инвариантная подгруппа группы G, $A \subset G$, обозначим $\overline{G} = G/K$, $\overline{A} = \{\overline{x} \mid \overline{x} \in \overline{G},\ \overline{x} \cap A \neq \emptyset\}$. Если $G \sim A \times B$, то еще не должно быть $\overline{G} \sim \overline{A} \times \overline{B}$. Так как каждую абстрактную группу можно считать частично упорядоченной (тривиальным образом: $x \leqq y$ если и только если $x = y$), утверждение, аналогичное 4, не справедливо, вообще говоря, для ч. у. групп, если вместо $K(0)$ взять произвольную инвариантную подгруппу группы G.

5. *Пусть A, B, K — инвариантные подгруппы в группе G; обозначим $G/K = \overline{G}$, $\overline{A} = \{\overline{x} \mid \overline{x} \in \overline{G},\ \overline{x} \cap A \neq \emptyset\}$, $\overline{B} = \{\overline{x} \mid \overline{x} \in \overline{G},\ \overline{x} \cap B \neq \emptyset\}$.*[2] *Предположим, что*

$$\text{а) } K \sim (K \cap A) \times (K \cap B)\,, \qquad \text{б) } \overline{G} \sim \overline{A} \times \overline{B}\,.$$

Тогда будет $G \sim A \times B$.

Доказательство.[1a]) Обозначим $K \cap A = A_1$, $K \cap B = B_1$. Из условия б) следует $A \cap B \subset K$. По условию а) имеем $A \cap B \subset A_1 \cap B_1 = \{0\}$, следовательно,

$$A \cap B = \{0\}\,. \tag{5}$$

Пусть $c \in G$. Согласно б) существуют элементы a, $b \in G$ такие, что $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, $c = a + b$. Далее, существуют элементы k_1, $k_2 \in K$, $a' \in A$, $b' \in B$, для которых $a = a' + k_1$, $b = b' + k_2$, так что $c = a' + k_1 + b' +$

[2]) В разделе 5 для $A \subset G$ символ $\overline{A}$ имеет другое значение, чем в введении.

[1a]) Доказательство приводится в упрощенном виде, который предложил Ф. Шик.

$+ k_2 = a' + b' + k_1' + k_2$, $k_1' \in K$. Согласно а) существуют элементы $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$ так, что $k_1' + k_2 = a_1 + b_1$. Итак, $c = a' + b' + a_1 + b_1 = a' + a_1 + b'' + b_1$ для подходящего элемента $b'' \in B$. Из последнего равенства получаем

$$A + B = G\,. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует доказываемое утверждение.

6.1. Пусть для ч. у. группы G справедливы соотношения (1). Тогда согласно п. 3 будет

$$K(0) = [K(0) \cap A] \times [K(0) \cap B]\,, \tag{7.1}$$

$$K(0) = [K(0) \cap C] \times [K(0) \cap D]\,. \tag{7.2}$$

Так как $K(0)$ является однокомпонентной ч. у. группой (ср. раздел 1), прямые разложения (7.1) и (7.2) обладают общим уплотнением согласно теореме, упомянутой в введении (ср. работу [3]). Таким образом имеет, напр., место (ср. также с (2'))

$$K(0) \cap A = \{[K(0) \cap A] \cap [K(0) \cap C]\} \times \{[K(0) \cap A] \cap [K(0) \cap D]\}\,,$$

так что

$$K(0) \cap A = \{[K(0) \cap A] \cap (A \cap C)\} \times \{[K(0) \cap A] \cap (A \cap D)]\}\,.$$

Обозначим $A \cap C = U_1$, $A \cap D = U_2$. Получим

$$K(0) \cap A = \{[K(0) \cap A] \cap U_1\} \times \{[K(0) \cap A] \cap U_2\}\,. \tag{7.3}$$

6.2. (См также [3], стр. 165.) *Пусть для ч. у. группы G справедливы соотношения* (1) *и пусть*

$$A \sim U_1 \times U_2\,,\quad B \sim U_3 \times U_4\,,\quad C \sim U_1 \times U_3\,,\quad D \sim U_2 \times U_4\,. \tag{8}$$

Тогда справедливы и соотношения (2).

Доказательство без труда проведет читатель.

7. Предположим, что справедливы соотношения (1). Образуем согласно разделу 4 соответствующие индуцированные разложения группы $\overline{G}$:

$$\overline{G} \sim \overline{A} \times \overline{B}\,, \tag{9}$$

$$\overline{G} \sim \overline{C} \times \overline{D}\,. \tag{10}$$

Допустим, что эти прямые разложения имеют общее уплотнение и что выполняется условие б) теоремы 1. Итак,

$$\overline{A} \sim (\overline{A} \cap \overline{C}) \times (\overline{A} \cap \overline{D}) = \overline{A \cap C} \times \overline{A \cap D}\,.$$

Обозначим $A \cap C = U_1$, $A \cap D = U_2$. Получим

$$\overline{A} \sim \overline{U}_1 \times \overline{U}_2\,. \tag{11}$$

Воспользуемся теперь утверждением из раздела 5 (вместо G, A, B, K имеем A, U_1, U_2, $K(0) \cap A$.) U_1, U_2 суть инвариантные подгруппы в A. Условие а) раздела 5 выполняется согласно (7.3). Условие б) раздела 5 выполняется в силу (11). Итак, согласно 5 будет $A \sim U_1 \times U_2$. Аналогично доказываются дальнейшие соотношения (8). Согласно 6.2 тогда справедливы соотношения (2).

Таким образом мы доказали справедливость

Леммы 1. *Пусть G — частично упорядоченная группа, $G = A \times B$, $G = C \times D$.* (1). *Предположим, что*

а) *соответствующие индуцированные прямые разложения $\overline{G} \sim \overline{A} \times \overline{B}$, $\overline{G} \sim \overline{C} \times \overline{D}$ обладают общим уплотнением,*

б) $\overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A \cap C}$, $\overline{A} \cap \overline{D} = \overline{A \cap D}$, $\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{B \cap C}$, $\overline{B} \cap \overline{D} = \overline{B \cap D}$.

Тогда прямые разложения (1) *обладают общим уплотнением.*

8. *Пусть прямые разложения* (1) *ч. у. группы G обладают общим уплотнением. Тогда справедливы равенства, приведенные в условии* б) *леммы* 1.

Доказательство. Так как прямое произведение ч. у. групп коммутативно, достаточно доказать равенство

$$\overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A \cap C}\,.$$

Пусть $\overline{x} \in \overline{A \cap C}$. Тогда существует $x \in \overline{x}$, $x \in A \cap C$, следовательно, $\overline{x} \in \overline{A} \cap \overline{C}$. Наоборот, пусть $\overline{x} \in \overline{A} \cap \overline{C}$. Тогда существуют элементы a, $c \in \overline{x}$, $a \in A$, $c \in C$. Согласно (2) можно элементы a, c представить в виде

$$a = u_1 + u_2 (u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2)\,, \qquad (12)$$
$$c = u_1' + u_3 (u_1' \in U_1,\ u_3 \in U_3)\,.$$

Тогда $a - c = [(u_1 - u_1') + u_2] - u_3$. Так как $(u_1 - u_1') + u_2 \in A$, $-u_3 \in B$ (см. (2)) и так как $a - c \in K(0)$, согласно разделу 3 должно быть $u_1 - u_1' + u_2 \in K(0)$, $-u_3 \in K(0)$. Согласно (12) тогда будет $u_1' - c \in K(0)$, $u_1' \in \overline{x}$. Так как $u_1' \in A \cap C$, то $\overline{x} \in \overline{A \cap C}$, и утверждение доказано.

9. *Пусть прямые разложения* (1) *ч. у. группы G обладают общим уплотнением. Тогда и соответствующие индуцированные прямые разложения* (10) *группы $\overline{G}$ обладают общим уплотнением.*

Доказательство. Если прямые разложения (1) обладают общим уплотнением, то $A = (A \cap C) \times (A \cap D)$, так что согласно разделу 4 будет

$$\overline{A} \sim (\overline{A \cap C}) \times (\overline{A \cap D})\,. \qquad (13)$$

Из соотношения (13) и из раздела 8 следует

$$\overline{A} \sim (\overline{A} \cap \overline{C}) \times (\overline{A} \cap \overline{D})\,.$$

Подобным же образом доказываются аналогичные утверждения для $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$. Итак, прямые разложения (10) обладают общим уплотнением.

10. Из результатов пп. 8 и 9 следует:

Лемма 2. *Пусть прямые разложения* (1) *ч. у. группы G обладают общим уплотнением. Тогда выполняются условия а), б) леммы 1.*

Тем же путем можно было бы доказать утверждения, аналогичные леммам 1, 2, касающиеся прямых разложений с любым конечным числом множителей. Итак, справедлива теорема 1, сформулированная в введении.

11. В связи с леммой 1 напрашивается следующий вопрос: *пусть даны прямые разложения ч. у. группы G $G = A \times B$, $G = C \times D$; допустим, что соответствующие индуцированные прямые разложения имеют общее уплотнение. Должны ли в таком случае иметь место равенства условия б) леммы 1?* В случае положительного ответа на этот вопрос можно было бы в лемме 1 опустить условие б).

Рассмотрим следующий пример:

Пусть C — множество всех целых чисел. Пусть G — множество всех четверок (x, y, u, v), где x, y, u, v суть какие-либо элементы множества C. Определим в G операцию $+$ при помощи уравнения

$$(x_1, y_1, u_1, v_1) + (x_2, y_2, u_2, v_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, u_1 + u_2, v_1 + v_2)\ ,$$

и частичное упорядочение в G определим так: если $g_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$, $i = 1, 2$, то $g_1 \leqq g_2$ тогда и только тогда, если $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. Тогда G будет ч. у. группой.

Пусть A, соотв. B, — множество всех элементов $a \in G$, соотв. $b \in G$, имеющих вид $a = (x, 0, u, 0)$, соотв. $b = (0, y, 0, v)$, причем x, u, соотв. y, v, — произвольные элементы множества C. Очевидно, для A, B выполняются условия а) — г) из раздела 2, следовательно,

$$G = A \times B\ . \tag{13.1}$$

Пусть D — множество всех элементов $d \in G$, имеющих вид $d = (x, y, 0, v)$, причем $x = v$ и x, y — произвольные элементы из C. Тогда D будет подгруппой в G. Любой элемент $g_i \in G$ можно представить в виде

$$g_i = (x_i, y_i, u_i, v_i) = (x_i - v_i, 0, u_i, 0) + (v_i, y_i, 0, v_i) =$$
$$= a_i + d_i,\ a_i \in A,\ d_i \in D\ .$$

Имеем $A \cap D = \{0\}$.

Пусть $g_1, g_2 \in G$. Соотношение $g_1 \leqq g_2$ справедливо только тогда, если $x_1 - v_1 \leqq x_2 - v_2$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, $y_1 \leqq y_2$, так что по предыдущему уравнению $g_1 \leqq g_2$ только тогда, если $a_1 \leqq a_2$, $d_1 \leqq d_2$. Согласно разделу 2 имеем

$$G = A \times D\ . \tag{13.2}$$

Множество $K(0)$ для ч. у. группы G образовано всеми элементами вида $k = (x, y, 0, 0)$, где x, y — произвольные элементы из C. Из соотношения

$$(v, y, 0, v) - (0, y, 0, v) = (v, 0, 0, 0) \in K(0)$$

вытекает $\overline{B} = \overline{D}$. Соответствующие разложениям (13.1), (13.2) индуцированные прямые разложения имеют, следовательно, общее уплотнение (более того, они тождественны).

Множество $\overline{B}$ составлено из всех элементов $\overline{g} \in \overline{G}$, причем g имеет вид $g = (x, y, 0, v)$, где x, y, v — произвольные элементы из C. Множество $B \cap D$ состоит из элементов вида $(0, y, 0, 0)$, где y — произвольный элемент из C. Отсюда следует $\overline{B \cap D} = K(0) \neq \overline{B} = \overline{B} \cap \overline{D}$.

Итак, ответ на поставленный вопрос отрицателен.

12. Пусть $a, b \in G$. Так как отображение $x \to a - x + b (x \in G)$ является двойственным автоморфизмом на частично упорядоченном множестве G, справедливо утверждение: в G существует элемент $x \cap y$, если и только если в G существует элемент $(a - x + b) \cup (a - y + b)$; в таком случае будет

$$a - (x \cap y) + b = (a - x + b) \cup (a - y + b) .$$

С помощью подстановки $x = a$, $y = b$ (сравни [2], стр. 219, теорема 4) мы получим:

Пусть $a, b \in G$. В G существует элемент $a \cap b$, если и только если в G существует элемент $a \cup b$; если существует один из этих элементов, то $a - (a \cap b) + b = a \cup b$. В частности, если $a \cap b = 0$, то $a + b = a \cup b = b + a$.

13. Пусть S — частично упорядоченная система с наименьшим элементом 0. Понятие прямого произведения (cardinal product) двух частично упорядоченных систем X, Y определяется в [2], стр. 7; обозначим такое прямое произведение через XY. Пусть $S \sim XY$ (символ $\sim$ здесь обозначает изоморфизм двух частично упорядоченных систем). Тогда должен существовать наименьший элемент $0_X \in X$ и наименьший элемент $0_Y \in Y$. Пусть X_1, соотв. Y_1, — множество всех $s \in S$, для которых при рассматриваемом изоморфизме

(14a) $$s \to (x, 0_Y) \quad (x \in X) ,$$

соответственно,

(14б) $$s \to (0_X, y) \quad (y \in Y) .$$

Если имеет место соотношение (14a), соотв. (14б), то отображение

(15) $$s \to x , \quad \text{соотв.} \quad s \to y$$

является, очевидно, изоморфным отображением частично упорядоченного множества X_1 на X, соотв. Y_1 на Y. При отображениях (15) имеет место $0 \to 0_X$, соотв. $0 \to 0_Y$. Из предыдущего получаем

(16) $$S \sim X_1 Y_1 .$$

Притом

а) X_1, Y_1 *являются подмножествами в* S

б) *если* $x \in X_1$, *то при изоморфизме* (16) $x \to (x, 0)$; *если* $y \in Y_1$, *то* $y \to (0, y)$

в) *если* $x \in X_1$, $y \in Y_1$, *то в* S *существует элемент* $x \cup y$; *если* $z \in S$, *то* z *можно одним единственным образом представить в виде* $z = x \cup y$, $x \in X_1$, $y \in Y_1$; *для* $z_i = x_i \cup y_i (x_i \in X_1, y_i \in Y_1, i = 1, 2)$ *имеет место* $z_1 \leqq z_2$, *если и только если* $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$.

Доказательство. Утверждения а), б) очевидны. Пусть $x \in X_1$, $y \in Y_1$ и пусть при отображении (16) $z \to (x, y)$. Так как $x \to (x, 0)$, $y \to (0, y)$, то из изоморфизма (16) следует $z \geqq x$, $z \geqq y$. Пусть $z' \in S$, $z' \to (x', y')$, $z' \geqq x$, $z' \geqq y$. Тогда должно быть в силу (16) $x' \geqq x$, $y' \geqq y$, $(x', y') \geqq (x, y)$, $z' \geqq z$, то есть $z = x \cup y$. Если $z \in S$, $z = u \cup v$, $u \in X_1$, $v \in Y_1$, то пусть t — тот элемент из S, для которого при отображении (16) будет $t \to (u, v)$. Так как $t = u \cup v$, имеет место соотношение $z = t$, откуда следует однозначность исследуемого представления. Последнее утверждение, сформулированное в в), следует из доказанного и из того, что отображение (16) — изоморфизм.

14. *Пусть* S — *частично упорядоченная система с наименьшим элементом* 0. *Пусть выполняются условия* а), в) *раздела* 13. *Тогда отображение*

$$z \to (x, y) \tag{17}$$

(*причем* $z = x \cup y$) *будет изоморфным отображением частично упорядоченной системы* S *на* $X_1 Y_1$; *для этого изоморфизма соблюдается условие* б) *раздела* 13.

Доказательство. Из в) следует, что отображение (17) есть изоморфизм. Далее, из соотношения $0 = x \cup y$ получаем $x = 0$, $y = 0$, так что $0 \in X_1$, $0 \in Y_1$. Пусть $x \in X_1$, $y \in Y_1$. Из уравнений $x = x \cup 0$, $y = y \cup 0$ согласно предыдущему следует $x \to (x, 0)$, $y \to (0, y)$.

Замечание. Пусть S — частично упорядоченная система, имеющая наименьший элемент 0. Согласно 13 и 14 можно считать условия а), в) ,,внутренним`` определением разложения $S$ в прямое произведение $S \sim X_1 Y_1$. (Сравни [6], пар. 20.) В последующем изложении мы будем понимать разложение в прямое произведение частично упорядоченной системы с наименьшим элементом всегда в этом ,,внутреннем`` смысле.

15. Следующая теорема является обобщением теоремы 3 из работы [6] (ср. также вопрос, поставленный в [6], пар. 22).

Теорема 2. *Пусть* G — *однокомпонентная ч. у. группа. Пусть частично упорядоченную систему* G^+ *можно разложить в прямое произведение*

$$G^+ \sim XY\,. \tag{18}$$

Тогда G можно разложить в прямое произведение

$$G = A \times B\,, \tag{19}$$

причем $A^+ = X$, $B^+ = Y$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 + x_2 = z$. Из соотношения (18) следует согласно разделу 13, что элемент z можно однозначно представить в виде $z = x \cup y$, $x \in X$, $y \in Y$. Из 13 б), в) следует, что для любых $x \in X$, $y \in Y$ имеет место

$$x \cap y = 0\,. \tag{19'}$$

Согласно 12 тогда будет $z = x + y$. Так как $x_1 \leqq z$, согласно 13 б), в) получим $x_1 \leqq x$ и, следовательно, $x_1 + y \leqq x + y$, $x_1 + y \leqq x_1 + x_2$, $y \leqq x_2$. Однако, $y = 0 \cup y$, $x_2 = x_2 \cup 0$, значит, согласно 13 в) $y = 0$. Отсюда получаем $z \in X$. Этим мы доказали, что множество X является полугруппой относительно операции $+$.

Из (18), 13 в) и 12 следует: каждый элемент $z \in G^+$ можно однозначно представить в виде $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$. Притом $x + y = y + x$. Если $z_i = x_i + y_i$ ($x_i \in X$, $y_i \in Y$, $i = 1, 2$), то $z_1 \leqq z_2$, если и только если $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$.

Из доказанного следует, что частично упорядоченная полугруппа G^+ является прямым произведением частично упорядоченных полугрупп X, Y в смысле, описанном в [3], стр. 162. По лемме 2, § 5, [3] существует прямое разложение $G = A \times B$ частично упорядоченной группы G такое, что $X \subset A^+$, $Y \subset B^+$. Тем же путем, как и в [6], раздел 17, докажем, что $X = A^+$, $Y = B^+$.

16. Рассуждение, проведенное в начале раздела 13, можно обобщить так:

Пусть S — частично упорядоченная система, $u \in S$,

$$S \sim XY \tag{20}$$

и пусть при изоморфизме (20) $u \to (x_0, y_0)$. Обозначим через X_u, соотв. Y_u множество всех элементов $z \in S$, для которых при изоморфизме (20)

$$z \to (x, y_0) \quad (x \in X)\,, \tag{21.1}$$

соответственно,

$$z \to (x_0, y) \quad (y \in Y)\,. \tag{21.2}$$

Если имеет место соотношение (21.1), соотв. (21.2), то отображение

$$z \to x, \quad \text{соотв.} \quad z \to y$$

является изоморфным отображением X_u на X, соотв. Y_u на Y. Итак,

$$S \sim X_u Y_u \tag{22}$$

17. Пусть G — однокомпонентная ч. у. группа. Пусть для G в качестве частично упорядоченной системы имеет место

$$(23) \qquad G \sim XY \, .$$

Согласно 16 тогда будет и для $u = 0$

$$(24) \qquad G \sim X_0 Y_0 \, .$$

Из соотношения (23) и по построению изоморфизма (24), которое было описано в разделе 16, следует, что в смысле раздела 14 будет

$$(25) \qquad G^+ \sim X_0^+ Y_0^+ \, .$$

Согласно (25) и по теореме 2 тогда существует прямое разложение ч. у. группы G

$$(26) \qquad G = A \times B$$

такое, что

$$(26') \qquad A^+ = X_0^+ \, , \quad B^+ = Y_0^+ \, .$$

Из определения прямого разложения для ч. у. групп следует в силу (26), что для G в качестве частично упорядоченной системы будет

$$(27) \qquad G \sim AB \, .$$

Пусть $x \in X_0$, $x < 0$. Тогда $-x > 0$, значит, согласно (25) и 13 элемент $-x$ можно представить в виде

$$(28) \qquad -x = x_1 \cup y_1 \, , \quad x_1 \in X_0^+ \, , \quad y_1 \in Y_0^+ \, .$$

Так как отображение $z \to -z (z \in G)$ является двойственным автоморфизмом на G, то в силу (28) в G существует элемент $(-x_1) \cap (-y_1)$ и $(-x_1) \cap \cap (-y_1) = x$. Очевидно, $-x_1 \leqq 0$, $-y_1 \leqq 0$. Из соотношения (24) следует, что X_0 — выпуклое подмножество в G, так что $-y_1 \in X_0$.

Рассмотрим элемент $z \in G$, для которого при изоморфизме (24) имеет место соотношение

$$(28') \qquad z \to (-y_1, y_1) \, .$$

При изоморфизме (24) имеет место соотношение

$$0 \to (0, 0) \, , \quad -y_1 \to (-y_1, 0) \, , \quad y_1 \to (0, y_1)$$

(сравни с разделом 13). Нетрудно проверить, что в $X_0 Y_0$ выполняются равенства

$$(0, 0) \cap (-y_1, y_1) = (-y_1, 0) \, ,$$
$$(0, 0) \cup (-y_1, y_1) = (0, y_1) \, ,$$

так что из изоморфизма (24) получаем $0 \cap z = -y_1$, $0 \cup z = y_1$. Теперь согласно разделу 12 будет $y_1 - 0 = z - (-y_1)$, $z = 0$, так что в силу (28′) будет $y_1 = 0$. Отсюда получаем

$$(29) \qquad -x = x_1 \, , \quad -x \in X_0^+ \, .$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из множества X_0. Так как G — однокомпонентная группа, то из соотношения (24) следует: существуют элементы x_1, $x_2 \in X_0$, такие, что $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $x_1 \leqq 0 \leqq x_2$. Из (26′) следует $x_2 \in A$. Согласно (29) $-x_1 \in X_0^+$, значит ,$-x_1 \in A$, $x_1 \in A$. В силу (27) A — выпуклое подмножество в G, так что $x \in A$.

Наоборот, пусть $a \in A$. В силу (27) существуют элементы a_1, $a_2 \in A$, $a_1 \leqq 0 \leqq a_2$, $a_1 \leqq a \leqq a_2$. В силу (26′) $a_2 \in X_0$. Далее, согласно (26) $-a_1 \in A$; так как $-a_1 \geqq 0$, в силу (26′) будет $-a_1 \in X_0$, значит, согласно (29) $a_1 \in X_0$. Из выпуклости множества X_0 следует $a \in X_0$. Этим мы доказали равенство $X_0 = A$. Аналогично докажем $Y_0 = B$. Итак справедлива

Теорема 3. *Пусть G — однокомпонентная ч. у. группа. Пусть G в качестве частично упорядоченной системы можно разложить на прямое произведение $G \sim XY$, пусть символы X_0, Y_0 имеют то же значение, как и в 13.1 (для $u = 0$). Тогда X_0, Y_0 — подгруппы в G и имеет место соотношение $G = X_0 \times Y_0$.*

Замечание. Теоремы 2 и 3 можно обобщить (напр., путем математической индукции) так, что вместо утверждения, касающегося разложения с двумя множителями, мы получим утверждение о разложениях с n множителями (для любого натурального числа n). Нетрудно обнаружить, что утверждение теоремы 3 не имело бы места, если бы мы опустили предположение о том, что G — однокомпонентная ч. у. группа.

Литература

[1] *G. Birkhoff:* Lattice-ordered groups, Annals of Math., *43* (1942), 298—331.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice theory, revised edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. *XXV*, New York 1948.

[3] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Матем. сборник *20* (*62*), (1947), 145—178.

[4] *H. Fitting:* Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Zeitschrift, *41* (1936), 380—395.

[5] *А. Г. Курош:* Теория групп, изд. II, Москва 1953.

[6] *J. Jakubík:* Konvexe Ketten in *l*-Gruppen, Časopis pro pěst. mat. *84* (1959), 53—63.

Zusammenfassung

DIREKTE ZERLEGUNGEN DER TEILWEISE GEORDNETEN GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

G. BIRKHOFF hat in [1] bewiesen, dass zwei direkte Zerlegungen einer *l*-Gruppe immer eine gemeinsame Verfeinerung haben. E. P. ŠIMBIREVA hat festgestellt, dass dieses Ergebnis auch für gerichtete teilweise geordnete Gruppen gültig bleibt.

Es sei $K(0)$ die Komponente einer teilweise geordneten Gruppe (t. w. g. Gruppe), welche das Nullelement von G enthält. (Der Begriff der Komponente wurde in [3] erklärt; dort wurde auch bewiesen, dass $K(0)$ ein Normalteiler in G ist. $K(0)$ ist die kleinste Untergruppe in G, welche alle positiven Elemente $x \in G$ enthält.) Ist $x \in G$, $(A \subset G)$, so bezeichnen wir mit $\overline{x}(\overline{A})$ die Klasse in der Faktorgruppe $G/K(0) = \overline{G}$, in welcher das Element x liegt (die Menge aller Klassen $\overline{a} \in \overline{G}$ mit $a \in A$). Der Ausdruck ,,eine t. w. g. Gruppe (bzw. eine Gruppe) hat die Eigenschaft Z" soll bedeuten, dass zwei beliebige direkte Zerlegungen mit einer endlichen Anzahl von direkten Faktoren dieser t. w. g. Gruppe (bzw. dieser Gruppe) immer eine gemeinsame Verfeinerung haben. Zu jeder direkten Zerlegung der t. w. g. Gruppe G kann man in einer natürlichen Weise eine direkte Zerlegung der Gruppe $\overline{G}$ zuordnen; solche direkte Zerlegungen von $\overline{G}$ wollen wir induzierte Zerlegungen nennen.

Satz 1. *Die t. w. g. Gruppe G hat die Eigenschaft Z dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) *beliebige zwei induzierte direkte Zerlegungen von $\overline{G}$ haben eine gemeinsame Verfeinerung,*

b) *sind A, B direkte Faktoren in G, dann ist $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Es sei a ein fest ausgewähltes Element einer teilweise geordneten Menge S. Der Begriff der direkten Produktzerlegung von S wurde in [2] (Kap. II, § 7) definiert. Man kann für diesen Begriff eine (bis auf einen Isomorphismus) äquivalente Erklärung geben, wobei für jeden direkten Faktor A von S die Beziehung $a \in A \subset S$ gilt. (Vgl. die Absätze 13 und 16 dieser Arbeit.)

Es sei jetzt $S = G^+$ bezw. $S = G$, $a = 0$.

Satz 2. *Es sei G eine gerichtete t. w. g. Gruppe. Wenn die t. w. g. Menge G^+ in der Form $G^+ = X \times Y$*[1]*) darstellbar ist, dann gibt es eine direkte Zerlegung der t. w. g. Gruppe $G = A \times B$ derart, dass $A^+ = X$, $B^+ = Y$.*

Satz 3. *Es sei G eine gerichtete t. w. g. Gruppe. Wenn man die t. w. g. Menge G in der Form $G = X \times Y$*[1]*) darstellen kann, dann sind die Mengen X, Y Untergruppen der Gruppe G und für die t. w. g. Gruppe gilt $G = X \times Y$.*

[1]) d. h.: bei der Bildung dieser Produktzerlegung wird nur die Relation $\leqq$ in Betracht genommen, von der Gruppenoperation wird dabei ganz abgesehen.