Miloš Zlámal

Смешанная задача для гиперболических уравнений с малым параметром

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 1, 83–122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100395

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно

(Поступило в редакцию 7/III 1959 г.)

Исследуется связь между решениями смешанной задачи для гиперболического уравнения $\varepsilon u_{tt} + \beta(t)\, u_t - Lu = F(x, t)$ и для параболического уравнения $\beta(t)\, U_t - LU = F(x, t)$. При этом Lu — эллиптический оператор вида $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)\, u$, x означает точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в E_n, $\beta(t) > 0$ для $t \geqq 0$, а ε — малый положительный параметр.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] я занимался смешанной задачей для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\varepsilon\alpha(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)\,, \tag{1}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $a(x)$ — положительные функции в интервале $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ и ε — малый положительный параметр. Добавочные условия имели вид

$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad u_t(x, 0) = g(x)\,, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0\,.$$

Целью работы было найти связь между решением этой задачи и решением аналогичной задачи для вырожденного уравнения, полученного из (1), если в нем положить $\varepsilon = 0$, т. е. для уравнения распространения тепла

$$\beta(t)\, \frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t)\,.$$

Граничные условия остаются без изменения, $U(0, t) = U(l, t) = 0$. Что касается начальных условий, то можно предписать, конечно, лишь первое: $U(x, 0) = f(x)$. Итак, речь шла о дифференциальном уравнении в частных производных с малым параметром у наивысших производных. Эта проблематика вызывает в настоящее время живой интерес (см., напр., [2], [3]).

Если этот малый параметр обращается в нуль, то хотя порядок уравнения в нашем случае и не понижается, как это обычно бывает, но меняется тип и поэтому одно начальное условие отпадает. В силу этого нельзя ожидать, что $u(x, t)$ будет аналитической функцией параметра ε в точке $\varepsilon = 0$. Наоборот, можно ожидать, что в формулах для $u(x, t)$ появятся т. наз. члены типа пограничного слоя (см. [3], стр. 7 и 8). В работе [1] мне удалось найти не только формулы для решения $u(x, t)$, но и для его первых частных производных. Для случая однородного уравнения, когда $F(x, t) \equiv 0$, я показал, что

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)\,,$$

$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})\,,$$

$$u_x(x, t) = U_x(x, t) + O(\varepsilon)\,.$$

Притом

$$k(x) = g(x) - U_t(x, 0)\,, \quad \nu(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\, \mathrm{d}s\,.$$

Аналогичные формулы справедливы и в случае неоднородного уравнения. Указанные формулы были мною доказаны при условиях, которые, поскольку речь идет о граничных значениях функций $f(x)$ и $g(x)$, достаточны и необходимы для существования классического решения[1]) смешанной задачи для уравнения (1) и в предположении $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \geqq 0$. Формулы справедливы в интервале $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$, где T — сколь угодно большое число. Дополнительно было мною обнаружено, что при помощи небольшого изменения доказательства можно освободиться от предположения $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \geqq 0$ и что в случае однородного уравнения формулы справедливы в интервале $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t < \infty$. Из формул видно, что $u(x, t) \to U(x, t)$ и $u_x(x, t) \to U_x(x, t)$, а именно равномерно во всем интервале, $u_t(x, t) \to$ $\to U_t(x, t)$ равномерно лишь в интервале $0 \leqq x \leqq l$, $\delta \leqq t \leqq T$ (соотв. $\delta \leqq t < \infty$), где δ — сколь угодно малое положительное число.

Оказалось, что использованный мною в [1] метод допускает обобщение и что его можно применить и в случае многомерных смешанных задач. Содержанием настоящей работы и является вывод асимптотических формул для решения смешанной задачи для гиперболического уравнения общего типа в n размерах. Главная разница между одномерным и многомерным

[1]) Под классическим решением мы подразумеваем функцию, обладающую в интервале $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющую уравнению, равно как и граничным и начальным условиям в обычном смысле слова.

случаями состоит в том, что, в то время как в одномерном случае некоторые оценки были мною проведены в общем элементарным путем на основании хорошо известных свойств собственных чисел и функций одной проблемы Штурма-Лиувилля, для аналогичных оценок в многомерном случае пришлось выбрать путь не такой простой и непосредственный. Для этих оценок я воспользовался методом, при помощи которого О. А. Ладыженская обосновала метод Фурье (см. [4], гл. II). Непосредственный ход решения, аналогичный использованному в [1], можно было применить в частном случае телеграфного уравнения.

Уравнение, которое мы будем главным образом исследовать, имеет вид

$$(2)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = F(x, t)\,,^2)$$

где

$$(3)\qquad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, u\,.$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ означает точку в E_n, коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a(x)$ будут определены в замыкании ограниченной области[3]) $\overline{\Omega} \subset E_n$, правая часть $F(x, t)$ в цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \langle 0, \infty)$. Коэффициент $\beta(t)$ будет положительным для всех $t \geqq 0$, коэффициент $a(x)$ — неотрицательным, а оператор Lu — равномерно эллиптическим в $\overline{\Omega}$, следовательно

$$(4)\qquad a(x) \geqq 0\,, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x)\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \quad \alpha = \text{konst} > 0\,.$$

Итак, уравнение (2) будет в $\overline{Q}$ гиперболическим уравнением.

Мы будем иметь дело со смешанной задачей, так что, с одной стороны, будут даны начальные условия

$$(5)\qquad u(x, 0) = f(x)\,, \quad u_t(x, 0) = g(x)\,,$$

с другой — однородные[4]) граничные условия первого рода

$$(6)\qquad u|_S = 0^5)$$

(S означает границу области Ω, т. е. $S = \overline{\Omega} - \Omega$). Уже здесь нужно заметить, что точно таким же способом можно решить аналогичную задачу с граничными условиями второго и третьего рода

$$(7)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S + hu\Big|_S = 0\,, \quad \text{где} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j)\Big|_S\,.$$

---

[2]) В отличие от уравнения (1) мы берем $\alpha(t) = 1$, хотя результаты можно доказать и для непостоянного $\alpha(t)$.

[3]) Под областью мы подразумеваем открытое и связное множество.

[4]) Неоднородные граничные условия можно привести к однородным.

[5]) В однородном случае для $t \geqq 0$, в неоднородном — для $t \in \langle 0, T \rangle$.

Мы будем интересоваться только классическим решением, т. е. решением, обладающим непрерывными частными производными второго порядка по $x_1, \ldots, x_n$ и t в области $\overline{Q}$ и удовлетворяющим всем дополнительным условиям в обычном смысле слова.

Вырожденное уравнение будет вида

(8)
$$\beta(t)\frac{\partial U}{\partial t} - LU = F(x, t)\,,$$

т. е. уравнением параболического типа. Начальное условие имеется лишь одно:

(9)
$$U(x, 0) = f(x)\,.$$

Граничное условие будет (6).

Частный случай уравнения вида (2) встречается в подземной гидромеханике (см. [5], стр. 99—100), а именно уравнение

(10)
$$\Delta p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{m\mu}{kK}\frac{\partial p}{\partial t}\,.$$

В этом случае $Lu = \Delta u$; $\varepsilon = \dfrac{1}{c^2}$, $\beta(t) = \dfrac{m\mu}{kK} = \mathrm{konst}$, $F(x, t) = 0$. ε — действительно малый положительный параметр, так как c означает скорость звука. В [5] уравнение (10) заменяется вырожденным уравнением теплопроводности $\dfrac{m\mu}{kK}\dfrac{\partial p}{\partial t} = \Delta p$, что упрощает задачу. Обоснование этой аппроксимации, конечно, не приводится.

Уравнение (2), где $\beta(t) = 1$, $F(x, t) = 0$, исследовалось несколько лет тому назад М. Кржижанским (см. [6]). Однако, Кржижанский решил значительно более простую задачу: он выбрал функцию $g(x)$ так, чтобы $g(x) = U_t(x, 0)$.

Работа разделяется на пять частей. В первой приводятся вспомогательные теоремы и предположения относительно Ω, S и коэффициентов уравнения. Во второй и третьей частях решается однородный случай, а именно в замкнутой области $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \langle 0, \infty)$. Часть четвертая посвящается неоднородному случаю в замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times \langle 0, T\rangle$, где T — сколь угодно большое число. В последней части рассматривается телеграфное уравнение. Эта специализация позволяет существенно ослабить предположения о гладкости границы.

I. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1. Очень часто мы будем пользоваться теоремой Соболева о вложении пространства $W_2^{(k)}(\Omega)$ в пространство C (см. [7], стр. 64 и 78). Под пространством $W_2^{(k)}(\Omega)$ мы подразумеваем пространство всех функций из $L_2(\Omega)$, ко-

торые обладают обобщенными производными до k-го порядка включительно, принадлежащими также к $L_2(\Omega)$. Норму мы берем в виде

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{s=0}^{k} \sum_i \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}\right)^2 \mathrm{d}x \,.$$

В дальнейшем мы будем часто писать вкратце $W_2^{(k)}$ вместо $W_2^{(k)}(\Omega)$.

Теорема Соболева о вложении: Пусть $\varphi(x) \in W_2^{(k)}$. Если $k > \frac{1}{2}n$, где n — размерность области Ω, то $\varphi(x)$ — непрерывная функция в $\overline{\Omega}$ и

$$|\varphi(x)| \leqq M \|\varphi\|_{W_2^{(k)}} \,, \tag{11}$$

где постоянная M зависит лишь от области Ω. В более общем случае, если $k > \frac{1}{2}n + m$ $(m = 0, 1, \dots)$, $\dfrac{\partial^m \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и

$$\left|\frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right| \leqq M \|\varphi\|_{W_2^{(k)}} \,. \tag{12}$$

Теорема Соболева не является, конечно, справедливой для любых областей. Рассматриваемые нами области будут, однако, областями Соболева, т. е. для них теорема о вложении справедлива, так как мы будем предполагать, что их границы S непрерывно дифференцируемы по крайней мере $([\frac{1}{2}n] + 3)$ раза (см. далее).

Далее мы будем пользоваться леммой, которая восходит к О. А. Ладыженской. Поясним прежде всего, что мы понимаем под словами: граница S области Ω непрерывно дифференцируема m раз. Пусть S — гладкая гиперповерхность. В какой либо точке M гиперповерхности S построим прямоугольнуюсистему координат $y_1, \dots, y_n$ так, что ось y_n лежит на внешней нормали гиперповерхности S в точке M, а начало лежит в M. Если теперь для каждой точки M существует такая окрестность, что уравнение части гиперповерхности S лежащей в этой окрестности, имеет вид $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$, где функция $\omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ непрерывно дифференцируема m раз, то мы скажем, что гиперповерхность S дифференцируема непрерывно m раз. Далее введем следующие обозначения:

$$I_0(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi \,\mathrm{d}x \,, \quad I_0(v) = I_0(v, v) = \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x \,,$$

$$I_1(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \mathrm{d}x \,, \quad I_1(v) = I_1(v, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \mathrm{d}x$$

$$K_0^r(v) = \sum_{s=0}^{r} I_0(L^s v) \,, \quad K_1^r(v) = \sum_{s=0}^{r} I_1(L^s v) \,.^{6)}$$

[6]) L ознавает здесь оператор (3), L^s — его s-ю итерацию.

Лемма Ладыженской. Пусть функция v обладает в $\overline{\Omega}$ непрерывными частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до m-го порядка включительно и на границе S области Ω удовлетворяет условиям

$$v|_S = Lv|_S = \ldots = L^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}v|_S = 0\ .^{7)}$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $a(x)$ эллиптического оператора L мы предполагаем в $\overline{\Omega}$ непрерывно дифференцируемыми до порядка $m-1$, соответственно $m-2$, а границу S непрерывно дифференцируемой m раз. Тогда имеют место соотношения

$$\|v\|^2_{W_2(m)} \leqq M[K_0^r(v) + K_1^{r-1}(v)] \quad \text{при} \quad m = 2r\ , \tag{13}$$

$$\|v\|^2_{W_2(m)} \leqq M[K_1^r(v) + K_0^r(v)] \quad \text{при} \quad m = 2r+1\ . \tag{14}$$

Постоянная M зависит лишь от области Ω и от коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $a(x)$.

Лемма Ладыженской доказывается в [4], но сформулирована там несколько иначе. Указанная формулировка следует из неравенств (21) (см. Лемму 1 в [4], стр. 88) и из неравенств (18) (там же, стр. 84).

2. Важную роль будут в дальнейшем играть собственные числа и собственные функции граничной задачи

$$Lv + \lambda v = 0\ , \quad v|_S = 0\ . \tag{15}$$

При условии достаточной гладкости границы S и коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $a(x)$ оператора Lv существует, как известно, счетное количество собственных чисел этой проблемы. Все они вещественны, положительны и, если их расположить по величине, $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$, то имеет место $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$. Соответственные собственные функции $v_i(x)$ ортогональны. Мы будем ими пользоваться в нормированном виде, так что

$$I_0(v_i, v_j) \equiv \int_\Omega v_i v_j \,\mathrm{d}x = \delta_i^j\ . \tag{16}$$

Далее имеем

$$D(v_i, v_j) \equiv \int_\Omega \left[\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_l} + a v_i v_j\right] \mathrm{d}x = \lambda_i \delta_i^j\ . \tag{17}$$

Так как мы будем применять лемму Ладыженской к функциям, являющимся линейными комбинациями собственных функций $v_i(x)$, нам придется предполагать, что они имеют в $\overline{\Omega}$ непрерывные частные производные достаточно высокого порядка, а именно до порядка

$$N = [\tfrac{1}{2}n] + 3\ . \tag{18}$$

---

[7]) $[a]$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное a.

Часто мы будем пользоваться неравенством Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2 = \|\varphi\|_{L_2}^2 \equiv I_0(\varphi)\ ,\ ^{8})\tag{19}$$

которое справедливо для любой функции $\varphi(x) \in L_2$.

Если $\varphi(x) \in \overset{\circ}{D}$, то справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i^2 \leqq D(\varphi) \equiv D(\varphi, \varphi)\ .^{9})\tag{20}$$

Притом $\overset{\circ}{D}$ означает замыкание в норме $W_2^{(1)}$ непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

Заметим еще, что если $s > n - 2k$, то имеет смысл говорить о значениях элементов из $W_2^{(k)}$ и их обобщенных производных на поверхностях размерности s. В частности, если $\varphi(x) \in W_2^{(k)}(\Omega)$, то существуют граничные значения функции $\varphi(x)$ и ее производных до порядка $k - 1$ включительно в смысле метрики $L_2(S)$ (см. [7], стр. 112—113). Далее, если граница S кусочно гладка, то можно утверждать, что функции от $\overset{\circ}{D}$ принимают на границе S нулевые значения и наоборот, если $\varphi(x) \in W_2^{(1)}$ и если $\varphi(x)$ принимает на границе S нулевые значения, то $\varphi(x) \in \overset{\circ}{D}$.

3. Сформулируем предположения о границе S области Ω и о коэффициентах уравнения (2).

Предположение А. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $a(x)$ удовлетворяют (4) в $\overline{\Omega}$. Далее, пусть эти коэффициенты и граница S столько раз непрерывно дифференцируемы, что собственные функции граничной задачи (15) будут в $\overline{\Omega}$ N раз непрерывно дифференцируемы. Пусть, однако, при этом граница S по меньшей мере N раз, коэффициенты $a_{ij}(x)$ $N + 1$ раз, а коэффициент $a(x)$ N раз непрерывно дифференцируемы. Пусть, далее, $\beta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и пусть для всех $0 \leqq t < \infty$ имеет место

$$0 < \beta_1 \leqq \beta(t) \leqq \beta_2\ , \quad |\dot{\beta}(t)| \leqq \beta_3\ ,\tag{21}$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — положительные постоянные.

Указанные предположения о гладкости коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $a(x)$, равно как и границы S, являются несколько более сильными, чем предположения, сделанные Ладыженской при обосновании метода Фурье (см. [4], стр. 101). В действительности, однако, для доказательства теоремы 1 достаточны предположения Ладыженской.

---

[8]) φ_i означает i-й коэффициент Фурье для функции $\varphi(x)$.

[9]) $D(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + a\varphi\psi\right] \mathrm{d}x\ .$

Достаточным условием для того, чтобы собственные функции граничной задачи (15) были в $\overline{\Omega}$ N раз непрерывно дифференцируемы, есть условие, чтобы коэффициенты $a_{ij}(x)$ были $2N - 2$ раз, коэффициент $a(x)$ $2N - 3$ раз, а граница S $2N - 1$ раз непрерывно дифференцруемы (см. [4], теорема 18, стр. 47).

II. ОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

1. Смешанную задачу у гиперболического уравнения вида (2) можно решить по методу Фурье. Хотя метод Фурье известен уже более ста лет, полное обоснование этого метода было дано только Ладыженской. Ее результаты можно найти во второй главе монографии [4]. Из теоремы 3 (стр. 101) следует,[10]) что смешанная задача

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0 , \tag{22}$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad u_t(x, 0) = g(x) , \quad u|_S = 0 \tag{23}$$

имеет классическое решение, которое можно получить по методу Фурье, если

$$f(x) \in W_2^{(N)} ; \quad f, Lf, \ldots, L^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} f \in \overset{\circ}{D} , \tag{24}$$

$$g(x) \in W_2^{(N-1)} ; \quad g, Lg, \ldots, L^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} g \in \overset{\circ}{D} . \tag{25}$$

Мы будем заниматься проблемой (22), (23) пока при условиях (24), (25)

2. Вырожденная задача для (22), (23) имеет вид

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - LU = 0 , \tag{26}$$

$$U(x, 0) = f(x) , \quad U|_S = 0 . \tag{27}$$

---

[10]) Точно говоря, теорема Ладыженской касается решения уравнения вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu$. Это решение имеет вид $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^0(t)\, v_i(x)$, где $u_i^0(t) = f_i \cos \lambda_i^{\frac{1}{2}} t + \lambda_i^{-\frac{1}{2}} g_i \sin \lambda_i^{\frac{1}{2}} t$. Поэтому имеет место $|u_i^0(t)| \leqq |f_i| + \lambda_i^{-\frac{1}{2}} |g_i|$, $|\dot{u}_i^0(t)| \leqq \lambda_i^{\frac{1}{2}} |f_i| + |g_i|$, $|\ddot{u}_i^0(t)| \leqq \lambda_i |f_i| + \lambda_i^{\frac{1}{2}} |g_i|$. Именно на основании этих неравенств и предположений (24) и (25) Ладыженская и доказывает при помощи своей леммы упомянутую теорему. Однако решение задачи (22), (23) имеет вид $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)\, v_i(x)$, где $u_i(t)$ — решение уравнения $\varepsilon \ddot{u}_i + \beta(t)\, \dot{u}_i + \lambda_i u_i = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u_i(0) = f_i$, $\dot{u}_i(0) = g_i$. Известно (см., напр., [8], стр. 191—192), что решение такого уравнения и производные этого решения удовлетворяют аналогичным неравенствам относительно λ_i, как и $u_i^0(t)$. Поэтому результат Ладыженской остается в силе и для уравнения (22).

По методу Фурье получим

(28) $$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x) ,$$

где

(29) $$\gamma(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\beta(s)}$$

и f_i означает i-й коэффициент Фурье для функции $f(x)$. Докажем прежде всего, что при условии (24) уравнение (28) действительно представляет собой классическое решение проблемы (26), (27), обладающее непрерывными вторыми частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ и первой частной производной по t и для $t = 0$.[11])

Дифференцируя почленно ряд (28) по t один раз, мы получим ряд $-\frac{1}{\beta(t)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$. Докажем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$ равномерно сходится в $\overline{Q}$. Точно так же можно доказать, что ряд полученный из ряда (28) однократным или двукратным почленным дифференцированием по $x_1, \ldots, x_n$, равномерно сходится в $\overline{Q}$, так что оператор L можно применить к ряду (28) член за членом. Так как начальные и граничные условия функцией $U(x, t)$ выполняются, $U(x, t)$ будет классическим решением задачи (26), (27).

Приведем прежде всего формулу, которой мы будем часто пользоваться. Если $G(x) \in W_2^{(2k+2)}$ и $G, LG, \ldots, L^k G \in \overset{\circ}{D}$, то

(30) $$G_i = \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_i^{k+1}} \alpha_i , \quad \alpha_i = (L^{k+1} G)_i .$$

Действительно, применяя пригодным образом два раза теорему 15 из [4] (стр. 41), мы получим $G_i = \int_\Omega G v_i \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda_i} \int_\Omega G L v_i \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda_i} \int_\Omega LG v_i \,\mathrm{d}x$; продолжая наши рассуждения далее, придем к результату

$$-\frac{1}{\lambda_i} \int_\Omega LG v_i \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_\Omega LG\, L v_i \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_\Omega L^2 G v_i \,\mathrm{d}x = \ldots =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_i^{k+1}} \int_\Omega L^{k+1} G v_i \,\mathrm{d}x .$$

[11]) Дело в том, что под классическим решением параболических уравнений обычно подразумевается решение, у которого вторые частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ и первая частная производная по t непрерывны лишь для $t > 0$.

При доказательстве указанного утверждения мы будем различать два случая: а) $N = 2r$, б) $N = 2r + 1$.[12])

а[13]) Согласно (24) будет $f(x) \in W_2^{(2r)}$, $f, Lf, \ldots, L^{r-1}f \in \overset{\circ}{D}$. Поэтому, согласно (30), $f_i = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\alpha_i$, где $\alpha_i = (L^r f)_i$, так что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = I_0(L^r f) < \infty$ согласно (19). Положим $v = \sum\limits_{i=p}^{p+q} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$. Имеем $L^j v = \sum\limits_{i=p}^{p+q} (-1)^j \lambda_i^{j+1} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$, так что для $j \leqq r - 1$ (ввиду того, что для достаточно больших p будет $\lambda_p \geqq 1$) имеет место соотношение

$$I_0(L^j v) = \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i^{2j+2} f_i^2 e^{-2\lambda_i \gamma(t)} \leqq \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i^{2(j-r+1)} \alpha_i^2 \leqq \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 .$$

Поэтому $K_0^{r-1}(v) \leqq r \sum\limits_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2$. Аналогично получим

$$D(L^j v) = \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i^{2j+3} f_i^2 e^{-2\lambda_i \gamma(t)} \leqq \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 ,$$

так что $K_1^{r-2}(v) \leqq \sum\limits_{j=0}^{r-2} D(L^j v) \leqq (r-1) \sum\limits_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2$.[14]) По лемме Ладыженской ($m = 2(r-1) = N - 2$) будет

$$\|v\|^2_{W_2(N-2)} \leqq M_1 \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 ,\text{[15])}$$

так что согласно (11)

$$|v(x)| \leqq M_2 \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$, предыдущее неравенство означает, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i \, e^{-2\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$$

равномерно сходится для $x \in \overline{\Omega}$ и всех $t \geqq 0$, т. е. в Q.

Ясно, что для функции $w = \sum\limits_{i=p}^{p+q} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$ можно тем же способом доказать $\|w\|^2_{W_2(N)} \leqq M_3 \sum\limits_{i=p}^{p+q} \alpha_1^2$. На основании (12) ($m = 0, 1, 2$) получим

$$\left| \frac{\partial^m v}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_m}} \right| \leqq M_4 \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

[12]) Нам придется постоянно различать случаи $N = 2r$ и $N = 2r + 1$, которые и в дальнейшем будут обозначаться через а), б).

[13]) Последующий ход рассуждений аналогичен рассуждениям Ладыженской при доказательстве теоремы 3 (см. [4], стр. 103—107).

[14]) Так как, очевидно, $I_1(\varphi) \leqq D(\varphi)$.

[15]) В дальнейшем $M_1, M_2, \ldots$ будут постоянные, зависящие только от области Ω и коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $a(x)$.

откуда следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$, так же как и ряды, полученные однократным и двукратным почленным дифференцированием по $x_1, \ldots, x_n$, равномерно сходятся в $\overline{Q}$.

б) Согласно (24) будет $f, Lf, \ldots, L^{r-1}f, L^r f \in \overset{\circ}{D}$, $f \in W_2^{(2r+1)}$. Из (30) поэтому получим $f_i = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r} \alpha_i$, где $\alpha_i = (L^r f)_i$. Так как $L^r f \in \overset{\circ}{D}$, согласно (20) будет $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 \leqq D(L^r f) < \infty$. Теперь для $j \leqq r - 1$ имеет место

$$D(L^j v) = \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i^{2j+3} f_i^2 e^{-2\lambda_i \gamma(t)} \leqq \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i^{2j-2r+3} \alpha_i^2 \leqq \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i \alpha_i^2 ,$$

так что $K_1^{r-1}(v) \leqq r \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i \alpha_i^2$. Аналогично докажем, что $K_0^{r-1}(v) \leqq r \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i \alpha_i^2$, откуда по лемме Ладыженской ($m = 2r - 1 = N - 2$) и согласно (11) следует

$$|v(x)| \leqq M_5 \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \lambda_i \alpha_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

что и здесь доказывает равномерную сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$. Что касается оценок функции $w = \sum_{i=p}^{p+q} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x)$, ход рассуждений вполне аналогичен.

3. Как мы уже упоминали, в асимптотических формулах для решения $u(x, t)$ задачи (22), (23) будут встречаться обязательно члены пограничного слоя. Однако, в нашем уравнении параметр ε встречается лишь у второй частной производной по t. Далее, значение решения $u(x, t)$ для $t = 0$ равно $U(x, 0)$. Эти два обстоятельства привели меня к предположению, что зависимость решения $u(x, t)$ от ε имеет вид $u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon H(x, t) [1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon u(x, t)$. Функции $H(x, t)$ и $\nu(t)$ я выбрал так, чтобы функция $z(x, t)$, во-первых удовлетворяла однородным начальным и граничным условиям, во-вторых, чтобы в цилиндре $\overline{Q}$, в котором мы исследуем уравнение (22), имело место $\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial z}{\partial t} - Lz = 0(1)$. Второе условие просто означает, что в результате подстановки в уравнение (22) предполагаемого выше вида решения, в уравнении не может содержаться член с $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}$. Нетрудно убедиться, что оба условия будут выполнены, если подстановку выбрать в виде

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon \frac{1}{\beta(0)} k(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon z(x, t) . \tag{31}$$

При этом

$$(32)\qquad k(x) = g(x) - U_t(x, 0)\,,$$

$$(33)\qquad \nu(t) = \int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Прежде чем заниматься подстановкой (31), обратим внимание на функцию $h(x) = U_t(x, 0)$. Имеет место $h(x) = \frac{1}{\beta(0)}\,Lf(x)$, так как $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению (26) и для $t = 0$. Из условия (24) тогда ясно, что $h(x) \in W_2^{(N-2)}$ и $h, Lh, \ldots, L^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}h \in \mathring{D}$. Функция $k(x)$ равна $g(x) - h(x)$. Принимая во внимание условие (25), мы видим, что функция $k(x)$ имеет свойства

$$(34)\qquad k \in W_2^{(N-2)},\ k, Lk, \ldots, L^{\left[\frac{N-3}{2}\right]}k \in \mathring{D}\,.$$

Возвратимся теперь к подстановке (31). Дифференцируя по t мы получим

$$(35)\qquad u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\,k(x)\,e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + \varepsilon z_t(x, t)\,.$$

Нашей ближайшей целью будет оценить $z(x, t)$ и $z_t(x, t)$ в норме $\|\ \|_{W_2(k)}$ с как можно большим k. Из (31) и (35) мы тогда получим асимптотические формулы.

4. Обозначим через $u_i(t)$, соотв. $U_i(t)$, коэффициенты решения $u(x, t)$, соотв. $U(x, t)$. Из (34) легко следует, что $k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i v_i(x)$, и этот ряд Фурье сходится равномерно. Поэтому из (31) вытекает

$$(36)\qquad z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t)\,v_i(x)\,,$$

где

$$(37)\qquad z_i(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,[u_i(t) - U_i(t)] - \frac{1}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,k_i\,.$$

Ряд (36) можно почленно дифференцировать по t, так что

$$(38)\qquad z_t(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{z}_i(t)\,v_i(x)\,.$$

В этом легко убедиться по (31), так как

$$\varepsilon z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)\,v_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} U_i(t)\,v_i(x) - \varepsilon\,\frac{1}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\sum_{i=1}^{\infty} k_i v_i(x)$$

и все три ряда допускают почленное дифференцирование по t. Чтобы дойти к поставленной цели, нам, следовательно, достаточно оценить коэффициенты $z_i(t)$ и их производные $\dot{z}_i(t)$ в интервале $\langle 0, \infty)$.

Несложные выкладки показывают, что коэффициенты удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$\varepsilon \ddot{z}_i + \beta(t)\,\dot{z}_i + \lambda_i z_i = \frac{1}{\varepsilon}\,[\varepsilon \ddot{u}_i + \beta(t)\,\dot{u}_i + \lambda_i u_i] - \frac{1}{\varepsilon}\,[\beta(t)\,\dot{U}_i + \lambda_i U_i] -$$

$$- \ddot{U}_i - \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} k_i - \frac{1}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i k_i\,.$$

Выражения в первых и во вторых скобках равны нулю, так как коэффициеты $u_i(t)$ удовлетворяют уравнению $\varepsilon\ddot{u}_i + \beta(t)\,\dot{u}_i + \lambda_i u_i = 0$, а коэффициенты $U_i(t)$ — уравнению $\beta(t)\,\dot{U}_i + \lambda_i U_i = 0$. Так как $U_i(t) = f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)}$, будет $\ddot{U}_i(t) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)}\,\lambda_i f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} + \frac{1}{\beta^2(t)}\,\lambda_i^2 f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)}$; далее имеет место $k_i = g_i - \frac{1}{\beta(0)}\,(Lf)_i = g_i + \frac{1}{\beta(0)}\,\lambda_i f_i$. Подставляя в правой части последнего уравнения и принимая во внимание предположение (21), мы видим, что

(39)

$$L_i(z_i) = A_i(t) + B_i(t) + C_i(t) - \frac{1}{\beta^2(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i^2 f_i - \frac{1}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i g_i\,,$$

где

(40) $$L_i(z) \equiv \varepsilon\ddot{z} + \beta(t)\dot{z} + \lambda_i z$$

и

(41) $$A_i(t) = O(\lambda_i^2 |f_i|\, e^{-\lambda_i\gamma(t)})\,,\quad B_i(t) = O(\lambda_i |f_i|\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}})\,,\quad C_i(t) = O(|g_i|\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}})\,.$$ [16]

Далее имеем

(42) $$z_i(0) = \dot{z}_i(0)\,.$$

С уравнением вида (39) мы встретимся несколько раз, однако, правая его часть будет каждый раз другая. Выведем поэтому оценки для $|z_i|$ и $|\dot{z}_i|$ в случае правой части общего вида, т. е. рассмотрим уравнение

(43) $$L_i(z_i) = P(t)\,.$$

Помножим его на $2\dot{z}_i$ и проинтегрируем. Учитывая (42), получим

$$\varepsilon\dot{z}_i^2(t) + 2\int_0^t \beta(s)\,\dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_i z_i^2(t) = 2\int_0^t P(s)\,\dot{z}_i(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Согласно (21) имеет место $\beta(t) \geqq \beta_1 > 0$ для $t \geqq 0$. Поэтому, применив к правой части последнего уравнения неравенство Буняковского-Шварца, получим

(44) $$\varepsilon\dot{z}_i^2(t) + 2\beta_1 \int_0^t \dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_i z_i^2(t) \leqq 2\{\int_0^t P^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,\{\int_0^t \dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s)\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

[16]) Символ O относится одновременно к ε, x, t. Притом он не будет зависеть от функций $f(x)$ и $g(x)$.

Из (44) прежде всего следует

$$2\beta_1 \int_0^t \dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s \leqq 2\{\int_0^t P^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,\{\int_0^t \dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,,$$

так что $\int_0^t \dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s < \frac{1}{\beta_1^2}\int_0^t P^2(s)\,\mathrm{d}s$. Отсюда и снова из (44) видно, что

$$z_i(t) = O(\lambda_i^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t P^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) \tag{45}$$

и

$$\dot{z}_i(t) = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t P^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})\,. \tag{46}$$

Для $|\dot{z}_i(t)|$ мы выведем, однако, еще одну, в многих случаях лучшую, оценку. $\max\limits_{0\leqq s\leqq t}|\dot{z}_i(s)|$ лежит или внутри $\langle 0, t\rangle$ или на правом конце этого интервала, так как $\dot{z}_i(0) = 0$. Пусть этот максимум лежит в t_i. Если $\dot{z}_i(t_i) > 0$, то $\max\limits_{0\leqq s\leqq t}|\dot{z}_i(s)| = \dot{z}_i(t_i)$, причем или $\ddot{z}_i(t_i) = 0$ или $\ddot{z}_i(t_i) \geqq 0$, смотря по тому, будет ли $t_i < t$ или $t_i = t$. В обоих случаях из (43) следует $\beta(t_i)\,\dot{z}_i(t_i) \leqq P(t_i) + \lambda_i|z_i(t_i)|$. То же неравенство получится и в случае $\dot{z}_i(t_i) < 0$, и поэтому

$$|\dot{z}_i(t)| \leqq \frac{1}{\beta_1}\,[|P(t_i)| + \lambda_i|z_i(t_i)|]\,,\quad 0 < t_i \leqq t\,. \tag{47}$$

Возвратимся теперь к уравнению (39). Его правая часть есть сумма пяти слагаемых. Поэтому его решение будет суммой решений уравнения (43), где в качестве $P(t)$ берем последовательно этих пять слагаемых.[17]) Если $P(t) = A_i(t)$, то из (41) следует $A_i^2(t) = O(\lambda_i^4 f_i^2 e^{-2\lambda_i\gamma(t)})$. Имеем

$$\int_0^t e^{-2\lambda_i\gamma(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t \frac{1}{\dot{\gamma}(s)}\,2\lambda_i\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{e}^{-2\lambda_i\gamma(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\lambda_i}\left[-\frac{1}{\dot{\gamma}(s)}\,e^{-2\lambda_i\gamma(s)}\right]_0^t -$$

$$-\frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\dot{\gamma}^2(s)}\,e^{-2\lambda_i\gamma(s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Отсюда на основании (21) следует $\left|\int_0^t e^{-2\lambda_i\gamma(s)}\,\mathrm{d}s\right| \leqq \frac{1}{2\lambda_i}\left\{2\beta_2 + \beta_3\int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda_1 s}{\beta_2}}\mathrm{d}s\right\}$, так что $\int_0^t e^{-2\lambda_i\gamma(s)}\,\mathrm{d}s = O(\lambda_i^{-1})$. Поэтому $\int_0^t A_i^2(s)\mathrm{d}s = O(\lambda_i^3 f_i^2)$, так что согласно (45) будет $z_i(t) = O(\lambda_i|f_i|)$. Далее, согласно (47) будет $\dot{z}_i(t) = O(\lambda_i^2|f_i|)$. Если $P(t) = B_i(t)$, то $\int_0^t B_i^2(s)\,\mathrm{d}s = O(\lambda_i^2 f_i^2 \int_0^t e^{-\frac{2\nu(s)}{\varepsilon}}\mathrm{d}s) = O(\lambda_i^2 f_i^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2\beta_1}{\varepsilon}s}\mathrm{d}s) = O(\varepsilon\lambda_i^2 f_i^2)$, так

[17]) Для каждого из этих решений сохраняется обозначение $z_i(t)$.

что $z_i(t) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{1}{2}}|f_i|)$, $\dot{z}_i(t) = O(\lambda_i|f_i| + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{3}{2}}|f_i|)$. Аналогично и в третьем случае, когда $P(t) = C_i(t)$, будет

$$z_i(t) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{-\frac{1}{2}}|g_i|)\,, \quad \dot{z}_i(t) = O(|g_i| + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{\frac{1}{2}}|g_i|)\,.$$

Несколько иначе мы будем поступать в последних двух случаях. Пусть $P(t) = [1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\lambda_i^2 f_i$ (постоянный фактор не играет роли). Можно предположить, что $f_i > 0$. Умножим уравнение (43) на $2\dot{z}_i(t)$ и проинтегрируем, а именно

$$\varepsilon\dot{z}_i^2(t) + 2\int_0^t \beta(s)\,\dot{z}_i^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_i z_i^2(t) = 2[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i^2 f_i z_i(t) -$$
$$- 2\varepsilon^{-1}\lambda_i^2 f_i \int_0^t \beta(s)\,e^{-\frac{\nu(s)}{\varepsilon}}\,z_i(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Прежде всего докажем, что $z_i(t)$ принимает в интервале $(0, \infty)$ только положительные значения. Действительно, учитывая (42), мы обнаружим из (43), что $\ddot{z}_i(0) = 0$, $\dddot{z}_i(0) = \frac{\beta(0)}{\varepsilon^2}\,\lambda_i^2 f_i > 0$. Поэтому в некоторой окрестности справа от числа 0 будет $z_i(t) > 0$. Однако, если бы τ_i был первым положительным нулем решения $z_i(t)$, мы получили бы в последнем уравнении противоречие, так как правая часть этого уравнения была бы для $t = \tau_i$ отрицательной, в то время как левая была бы положительной. Итак, $z_i(t) > 0$ в $(0, \infty)$ и из уравнения непосредственно следует

$$\lambda_i z_i^2(t) \leqq 2[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i^2 f_i z_i(t)\,,$$

так что $z_i(t) = O(\lambda_i|f_i|)$. Из (47) тогда получим $\dot{z}_i(t) = O(\lambda_i^2|f_i|)$. В последнем случае, когда $P(t) = \frac{1}{\beta(0)}[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_i g_i$, мы найдем $z_i(t) = O(|g_i|)$, $\dot{z}_i(t) = O(\lambda_i|g_i|)$.

Складывая предыдущие оценки, мы получаем следующий окончательный результат: для коэффициентов $z_i(t)$ разложения Фурье (36) справедливы в интервале $\langle 0, \infty)$ оценки

$$z_i(t) = O(\lambda_i|f_i| + |g_i|)\,, \quad \dot{z}_i(t) = O(\lambda_i^2|f_i| + \lambda_i|g_i|)\,. \tag{48}$$

5. На основании неравенства (48) произведем теперь оценки функции $z(x, t)$ и ее первых частных производных. Функции $z(x, t)$ и $z_t(x, t)$ принадлежат для любого $t \geqq 0$ к $W_2^{(N-2)}$; действительно, $u(x, t) \in W_2^{(N)}$ и $u_t(x, t) \in W_2^{(N-1)}$, как видно из доказательства Ладыженской, далее, $U(x, t) \in W_2^{(N)}$ и $U_t(x, t) \in W_2^{(N-2)}$, как мы уже доказали, а $k(x) \in W_2^{(N-2)}$ согласно (34). Поэтому из (34) и (35) следует $z(x, t) \in W_2^{(N-2)}$, $z_t(x, t) \in W_2^{(N-2)}$. Отыщем оценки $\|z(x, t)\|_{W_2(N-2)}$ и $\|z_t(x, t)\|_{W_2(N-4)}$, не зависящие от ε.

a) На основании условий (24) и (25) и формулы (30) коэффициенты f_i и g_i можно выразить так:

$$(49)\quad f_i = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\,\alpha_i\,,\quad \alpha_i = (L^r f)_i\,;\quad g_i = \frac{(-1)^{r-1}}{\lambda_i^{r-1}}\,\beta_i\,,\quad \beta_i = (L^{r-1}g)_i\,.$$

Положим теперь $s_p = \sum_{i=1}^{p} z_i(t)\, v_i(x)$. Имеем $L^j s_p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^j \lambda_i^j z_i(t)\, v_i(x)$, так что согласно (48) и (49) будет $I_0(L^j s_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2j} z_i^2(t) = O(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2(j-r+1)}(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$. Поэтому для $j \leqq r-1$ получим $I_0(L^j s_p) = O(\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)) = O(\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$, а, следовательно, и $K_0^{r-1}(s_p) = O(\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$. Далее имеем $D(L^j s_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2j+1} z_i^2(t) = O(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2(j-r+1)+1}(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$ и, очевидно, $K_1^{r-2}(s_p) = O(\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$. Используя лемму Ладыженской, получим $\|s_p\|_{W_2^{(2r-2)}} = O(\{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)\}^{\frac{1}{2}}) = O(\{I_0(L^r f) + I_0(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})$. Поэтому $\|z(x, t)\|_{W_2^{(2r-2)}} = O(\{I_0(L^r f) + I_0(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})$ и согласно (11)

$$(50)\qquad z(x, t) = O(\{I_0(L^r f) + I_0(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Вполне аналогично можно доказать

$$\|z_t(x, t)\|_{W_2^{(2r-4)}} = O(\{I_0(L^r f) + I_0(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Следовательно,

$$z(x, t) = O(1)\,,\quad \|z_t(x, t)\|_{W_2^{(2r-4)}} = O(1)\,.$$

Что касается $z_{x_i}(x, t)$, имеем $\|z_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(2r-3)}} \leqq \|z(x, t)\|_{W_2^{(2r-2)}}$, так что $\|z_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(2r-3)}} = O(1)$.

Напомним, что обе последние оценки справедливы в $\overline{Q}$, так как символы O мы относим не только к ε, но и к x и t.

б) В этом случае мы только наметим ход рассуждений. И здесь справедливо (49). Однако, так как согласно (24) и (25) будет $L^r f \in \overset{\circ}{D}$ и $L^{r-1}g \in \overset{\circ}{D}$, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i^2$ сходятся и согласно (20) их суммы не превышают $D(L^r f)$, соотв. $D(L^{r-1}g)$. Нетрудно обнаружить, что $K_0^{r-1}(s_p) = O(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2)) = O(D(L^r f) + D(L^{r-1}g))$, а также $K_1^{r-1}(s_p) = O(D(L^r f) + D(L^{r-1}g))$. Отсюда опять при помощи леммы Ладыженской и теоремы Соболева о вложении получим

$$(51)\qquad z(x, t) = O(\{D(L^r f) + D(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Итак, $z(x, t) = O(1)$. Кроме того можно аналогично доказать, что $\|z_t(x, t)\|_{W_2^{(2r-3)}} = O(1)$, $\|z_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(2r-2)}} = O(1)$.

Резюмируя, мы видим, что доказаны следующие соотношения:

$$z(x, t) = O(1)\ , \quad \|z_t(x, t)\|_{W_2^{(N-4)}} = O(1)\ , \quad \|x_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(N-3)}} = O(1)\ .$$

Результаты можно, очевидно, сформулировать так:

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* A (*см. стр.* 89) *и пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют соотношениям* (24) *и* (25). *Тогда в замкнутой области* $\overline{Q}$ *имеет место*

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)\ , \tag{52}$$

$$\left\|u_t(x, t) - U_t(x, t) - \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}\right\|_{W_2^{(N-4)}(\Omega)} = O(\varepsilon)\ ,[18]$$

$$\|u_{x_i}(x, t) - U_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(N-3)}(\Omega)} = O(\varepsilon)\ .$$

При этом функции $k(x)$ *и* $\nu(t)$ *определены уравнениями* (32) *и* (33).

6. Условия (24) и (25) оказались недостаточными для того, чтобы доказать соотношения $z_t(x, t) = O(1)$, $z_{x_i}(x, t) = O(1)$. Однако, нам удастся это сделать, если условия (24) и (25) заменить более сильными, а именно

$$f(x) \in W_2^{(N+2)}\ , \quad f, Lf, \ldots, L^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}f \in \overset{\circ}{D}\ . \tag{53}$$

$$g(x) \in W_2^{(N)}\ , \quad g, Lg, \ldots, L^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}g \in D\ , \tag{54}$$

а) В этом случае справедливо не только (49), но и

$$f_i = \frac{(-1)^{r+1}}{\lambda_i^{r+1}}\, \alpha_i'\ , \quad \alpha_i' = (L^{r+1}f)_i\ ; \quad g_i = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\, \beta_i'\ , \quad \beta_i' = (L^r g)_i\ .$$

(50) остается в силе. Но теперь мы можем получить оценки и для

$$\|z_t(x, t)\|_{W_2^{(2r-2)}} \text{ и } \|z_{x_i}(x, t)\|_{W_2^{(2r-2)}}.$$

Прежде всего имеем

$$k(x) = g(x) - U_t(x, 0) = g(x) + \frac{1}{\beta(0)}\, Lf(x) \in W_2^{(2r)}.$$

Далее нетрудно доказать, что $U_t(x, t) \in W_2^{(2r)}$. Поэтому

$$z(x, t) \in W_2^{(2r)},\ z_t(x, t) \in W_2^{(2r)}.$$

Если положить $\dot{s}_p = \sum_{i=1}^{p} \dot{z}_i(t)\, v_i(x)$, то получим

$$\|\dot{s}_p\|_{W_2^{(2r-2)}} = O(\{\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)\}^{\frac{1}{2}}) = O(\{I_0(L^{r+1}f) + I_0(L^r g)\}^{\frac{1}{2}}).$$

---

[18]) Эта формула справедлива, конечно, только для $n \geqq 2$.

Отсюда следует

$$z_t(x, t) = O(\{I_0(L^{r+1}f) + I_0(L^r g)\}^{\frac{1}{2}}) , \tag{55}$$

так что $z_t(x, t) = O(1)$.

Для оценки $\|z(x, t)\|_{W_2^{(2r-1)}}$ используем опять (49). Однако, так как $L^r f \in \overset{\circ}{D}$ и $L^{r-1}g \in \overset{\circ}{D}$, будет $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\alpha_i^2 + \beta^2) \leq D(L^r f) + D(L^{r-1}g)$. Но, с другой стороны, легко доказать, что $\|s_p\|_{W_2^{(2r-1)}} = O(\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2)\}^{\frac{1}{2}}) = O(\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2)\}^{\frac{1}{2}})$, так что $z_{x_i}(x, t) = O(\{D(L^r f) + D(L^{r-1}g)\}^{\frac{1}{2}})$ и, следовательно, $z_{x_i}(x, t) = O(1)$.

б) Мы приведем лишь результаты:

$$z_t(x, t) = O(\{D(L^{r+1}f) + D(L^r g)\}^{\frac{1}{2}}) , \quad z_{x_i}(x, t) = O(I_0(L^{r+1}f) + I_0(L^r g)\}^{\frac{1}{2}}). \tag{57}$$

Из них опять-таки следует $z_t(x, t) = O(1)$, $z_{x_i}(x, t) = O(1)$.

Теорема 2 *Пусть выполняется предположение* A *и пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют соотношениям* (53) *и* (54). *Тогда в замкнутой области* $\overline{Q}$ *имеют место следующие асимптотические формулы*:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(x, t) + O(\varepsilon) , \\ u_t(x, t) &= U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x) e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon) , \\ u_{x_i}(x, t) &= U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon) . \end{aligned} \tag{58}$$

III. ПРОДОЛЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЯ

1. Формулы (58) дают нам еще больше, чем формулы (52). Для того, чтобы они были справедливы, мы должны, однако, предполагать относительно граничных значений функций $f(x)$ и $g(x)$ больше, чем то, что достаточно и одновременно необходимо для существования классического решения смешанной задачи. Этот недостаток мы теперь устраним. Что касается граничных значений функций $f(x)$ и $g(x)$, мы будем предполагать только

$$f, Lf, \ldots, L^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} f \in \overset{\circ}{D} ; \quad g, Lg, \ldots, L^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} g \in \overset{\circ}{D} . \tag{59}$$

Это — те же предположения о граничных значениях, как и содержащиеся в (24) и (25). Нам придется, однако, усилить предположения о гладкости как функций $f(x)$ и $g(x)$, так и границы S области Ω и коэффицентов нашего уравнения.

Предположение A мы усилим требованием, чтобы граница S была не менее $N + 3$ раз непрерывно дифференцируема, а коэффициенты $a_{ij}(x)$

$N + 2$ раз. Усиленное таким образом предположение мы обозначим как предположение Б. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям

$$f(x) \in W_2^{(N+2)}\,, \quad L^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} f \in W_2^{(N+2)}\,, \tag{60}$$

$$g(x) \in W_2^{(N)}, \text{ а для нечетного } N \; (N = 2r + 1) \; L^r g \in W_2^{(N)}.$$

Наш метод состоит в том, что мы определим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, что они будут отличны от нуля только в окрестности поверхности S, характеризованной новым параметром η, и что разности

$$\bar{f}(x) = f(x) - \varphi(x)\,, \quad \bar{g}(x) = g(x) - \psi(x) \tag{61}$$

будут удовлетворять соотношениям (53) и (54). Если $\bar{u}(x, t)$ означает решение уравнения (22), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{f}(x)\,, \quad \bar{u}_t(x, 0) = \bar{g}(x)\,, \tag{62}$$

то можно найти асимптотический вид решения $\bar{u}(x, t)$ и его первых частных производных при помощи оценок (50), (51), (55), (56) и (57), так как символы O не зависят, как мы уже подчеркивали (см. подстрочное замечание[16]) на стр. 95), от начальных значений $f(x)$ и $g(x)$. Дальнейшими приемами нам удастся вывести окончательные асимптотические формулы, в которых будут встречаться два параметра ε и η. Наконец, мы положим $\eta = \varepsilon^p$ и обнаружим, что выгоднее всего будет взять $p = \frac{1}{2}$, то есть $\eta = \sqrt{\varepsilon}$.

2. Приступим теперь к построению функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.[19]) В каждой точке поверхности S построим отрезок в направлении внутренней нормали длиною в η. При достаточно малом η эти отрезки не пересекаются. Множество точек всех таких отрезков обозначим через Ω_η. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут на множестве $\Omega - \Omega_\eta$ равняться нулю. Для того, чтобы иметь возможность их определить в Ω_η, рассмотрим сначала окрестность какой-либо точки M поверхности S. Пусть эта окрестность так мала, что лежащие в ней точки поверхности S взаимно однозначно определяются параметром $\tau \equiv (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$. Тогда в соответствующей части множества Ω_η точка $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ взаимно однозначно определяется параметром τ и расстоянием ϱ от точки пересечения нормали, проведенной через точку x к поверхности S. Пусть $\varrho = c(x_1, \ldots, x_n)$, $\tau_i = d_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n - 1$. Так как поверхность S является $N + 3$ раз непрерывно дифференцируемой, $c(x_1, \ldots, x_n)$ будет $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемой функцией

---

[19]) Следующее рассуждение имеет смысл только для $n \geqq 2$. Для $n = 1$ построение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ более просто (см. [1]).

переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)^2 > 0$, если η достаточно мало.[20])

В координатах $\varrho, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ оператор Lu имеет вид $Lu = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \ldots$, где $\sigma = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_j}$. Ввиду (4) и $\sum_{i=j}^{n}\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)^2 > 0$ будет $\sigma > 0$. Притом σ есть $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемая функция. Как видно из геометрического смысла величины ϱ, она не зависит от выбора точки M и от выбора параметрического выражения поверхности S. Итак, σ определена однозначно на всем множестве Ω_η, является там положительной и $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемой.

Возьмем еще функцию одного переменного $\omega(s)$, которая $N + 2$ раз непрерывно дифференцируема и обладает следующими свойствами: $0 \leqq \omega(s) \leqq 1$, $\omega(s) = 1$ для $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}$, $\omega(s) = 0$ для $s \geqq 1$. После этих приготовлений можно дать определение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в Ω_η.

a) В этом случае $\left[\frac{N}{2}\right] - 1 = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, так что функция $g(x)$ выполняет (54); поэтому мы возьмем $\psi(x) \equiv 0$, т. е. $\bar{g}(x) = g(x)$. Что же касается $\varphi(x)$, то мы положим для $x \in \Omega_\eta$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2r!)}\,\omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right)\frac{L^r f}{\sigma^r}\,\varrho^{2r}\,. \tag{63}$$

---

[20]) Параметризацию окрестности точки M можно провести так, что положим $\tau_1 = y_1, \ldots, \tau_{n-1} = y_{n-1}$, где $y_1, \ldots, y_n$ представляют собой систему координат, описанную на стр. 87 (раздел I.1). Тогда в этой системе координат поверхность S будет выражена параметрически уравнениями $y_1 = \tau_1, \ldots, y_{n-1} = \tau_{n-1}, y_n = \omega(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$, и между координатами $y_1, \ldots, y_n$ и $\varrho, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ справедливы соотношения

$$(*)\qquad y_i = \tau_i + \frac{\omega_{\tau_i}}{\sqrt{1 + \omega^2_{\tau_1} + \ldots + \omega^2_{\tau_{n-1}}}}\,.\,\varrho \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,,$$
$$y_n = \omega - \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2_{\tau_1} + \ldots + \omega^2_{\tau_{n-1}}}}\,.\,\varrho\,.$$

После несложных выкладок найдем, что якобиан I этого преобразования будет для $\varrho = 0$ равен $-\sqrt{1 + \omega^2_{\tau_1} + \ldots + \omega^2_{\tau_{n-1}}}$, так что $I \neq 0$ в соответствующей части множества Ω_η, если η достаточно мало. По теореме о неявных функциях ϱ будет $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемой функцией переменных $y_1, \ldots, y_n$. Так как от вспомогательной системы координат $y_1, \ldots, y_n$ можно перейти к данной системе $x_1, \ldots, x_n$ поворотом и сдвигом начала координат, ϱ будет $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемой функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$, как мы и утверждали. Кроме того, дифференцированием уравнений (*) по y_n и подстановкой $\varrho = 0$ нетрудно доказать, что $\left.\frac{\partial \varrho}{\partial y_n}\right|_S = \frac{-1}{\sqrt{1 + \omega^2_{\tau_1} + \ldots + \omega^2_{\tau_{n-1}}}} \neq 0$, так что хоть одна из частных производных $\left.\frac{\partial \varrho}{\partial y_i}\right|_S$ отлична от нуля. Поэтому хоть одна из частных производных $\left.\frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\right|_S$ будет отлична от нуля, так что для достаточно малых η будет $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)^2 > 0$.

Очевидно, $\varphi(x) \in W_2^{(N+2)}(\Omega)$, так как функции $\omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right)$, σ^r и ϱ являются $N + 2$ раз непрерывно дифференцируемыми и $L^r f \in W_2^{(N+2)}(\Omega)$ согласно (60). Так как для $\varrho \leqq \frac{1}{2}\eta$ имеем $\omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right) = 1$, то для $\varrho \leqq \frac{1}{2}\eta$ будет $\varphi(x) = \frac{1}{(2r)!} \frac{L^r f}{\sigma^r} \varrho^{2r}$, так что $L^j \varphi = \frac{2r(2r-1)\dots(2r-2j+1)}{(2r)!} \frac{L^r f}{\sigma^{r-j}} \varrho^{2r-2j} + \dots$, где точки означают члены со степенями, высшими, чем ϱ^{2r-2j}, следовательно, $\varphi|_S = L\varphi|_S = \dots = L^{r-1}\varphi|_S = 0$, $L^r\varphi|_S = L^r f|_S$. Итак, функция $\bar{f}$ обладает свойством $\bar{f}|_S = \dots = L^r \bar{f}|_S = 0$. Кроме того, обязательно будет $L^i \bar{f} \in W_2^{(1)}$ для $i \leqq r$. Согласно замечанию на стр. 89 (раздел I.2) отсюда следует, что $\bar{f}$ выполняет условие (53).

Обозначим через $\bar{u}(x, t)$ решение уравнения (22), удовлетворяющее начальным условиям (61) и принимающее на S нулевые значения. Положим

(64) $$\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x, t) + \varepsilon \frac{1}{\beta(0)} \bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon \bar{z}(x, t) ,$$

где $\bar{U}(x, t)$ и $\bar{k}(x)$ имеют аналогичный смысл, как и $U(x, t)$ и $k(x)$. Тогда для $\bar{z}(x, t)$ справедливы оценки (50), (55), (56), где вместо f нужно писать $\bar{f}$. Так как $\varphi \equiv 0$ для $x \in \Omega - \Omega_\eta$, из (63) нетрудно вывести, что $L^r \bar{f} = 0(1)$, $L^{r+1}\bar{f} = 0(\eta^{-2})$. Далее, если принять во внимание, что мера множества Ω_η равна $0(\eta)$,[21]) то получим

$$I_0(L^r \bar{f}) = O(1) , \quad I_0(L^{r+1}\bar{f}) = O(\eta^{-3}) , \quad D(L^r \bar{f}) = O(\eta^{-1})$$

и поэтому

(65) $$\bar{z}(x, t) = O(1) , \quad \bar{z}_t(x, t) = O(\eta^{-\frac{3}{2}}) , \quad \bar{z}_{x_i}(x, t) = O(\eta^{-\frac{1}{2}}) .$$

б) Положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2r+2)!} \omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right) \frac{L^{r+1} f}{\sigma^{r+1}} \varrho^{2r+2} , \quad \psi(x) = \frac{1}{(2r)!} \omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right) \frac{L^r g}{\sigma^r} \varrho^{2r} .$$

Тогда $\bar{f}$ и $\bar{g}$ выполняют соответственно (53) и (54) и

$$D(L^r \bar{f}) = 0(1) , \quad D(L^{r+1}\bar{f}) = O(\eta^{-1}) , \quad D(L^{r+1}\bar{g}) = O(1) ,$$
$$D(L^r \bar{g}) = O(\eta^{-1}) , \quad I_0(L^{r+1}\bar{f}) = O(1) , \quad I_0(L^r \bar{g}) = O(1) ,$$

[21]) Мера множества Ω_η равна $\int_{\Omega_\eta} \mathrm{d}x$. Если разбить Ω_η на конечное количество достаточно малых частей и в каждой из них ввести координаты $\varrho, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, если кроме того Λ означает область переменных $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ и I — якобиан преобразования, то мера соответствующей части будет равна $\int_0^\eta \{\int_\Lambda |I| \,\mathrm{d}\tau\} \,\mathrm{d}\varrho = O(\eta)$, а, следовательно, и мера всего множества Ω_η равна $O(\eta)$.

Так что из (51) и (57) следует

$$z(x, t) = 0(1)\ , \quad \bar{z}_t(x, t) = O(\eta^{-\frac{1}{2}})\ , \quad \bar{z}_{x_i}(x, t) = O(1)\ . \tag{66}$$

3. Наметим теперь ход дальнейших рассуждений. Пусть $W(x, t)$ — решение уравнения (26), принимающее нулевые граничные значения и удовлетворяющее начальному условию $W(x, 0) = \varphi(x)$. Далее, пусть $w(x, t)$ — решение уравнения (22), принимающее нулевые граничные значения, и удовлетворяющее начальным условиям $w(x, 0) = \varphi(x)$, $w_t(x, 0) = \psi(x)$. Тогда в виду (61) имеет, очевидно, место

$$U(x, t) = \bar{U}(x, t) + W(x, t)\ , \quad u(x, t) = \bar{u}(x, t) + w(x, t)\ . \tag{67}$$

Учитывая (64), получим

$$u(x,t) = U(x,t) - W(x,t) + \varepsilon \frac{1}{\beta(0)} \bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon\bar{z}(x,t) + w(x,t)\ . \tag{68}$$

Оценки функции $\bar{z}(x, t)$ мы уже произвели. Поэтому достаточно оценить еще $W(x, t)$, $w(x, t)$ и $\bar{k}(x)$, и мы получим асимптотические формулы для $u(x, t)$. То же самое имеет, конечно, место и для первых частных производных, поэтому нашей ближайшей целью будет установление величины функций $W(x, t)$ и $w(x, t)$, равно как и их первых частных производных.

Имеем $W(x, t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i e^{-\lambda_i\nu(t)} v_i(x)$. Опять нам придется различать два случая.

а) Так как $\varphi|_S = L\varphi|_S = \ldots = L^{r-2}\varphi|_S = 0$ (сверх того еще $L^{r-1}\varphi|_S = 0$), будет $\varphi_i = \dfrac{(-1)^{r-1}}{\lambda_i^{r-1}}\varphi_i'$, где $\varphi_i' = (L^{r-1}\varphi)_i$. Применяя уже несколько раз использованные рассуждения, мы получим отсюда $W(x, t) = O(\{I_0\ (L^{r-1}\varphi)\}^{\frac{1}{2}})$. Однако, $L^{r-1}\varphi = O(\eta^2)$ и, принимая во внимание, что мера множества Ω_η равна $O(\eta)$ и $\varphi = 0$ вне Ω_η, будет $I_0(L^{r-1}\varphi) = O(\eta^5)$, так что

$$W(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}})\ . \tag{69}$$

Далее, $W_t(x, t) = -\dfrac{1}{\beta(t)}\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i e^{-\lambda_i\nu(t)} v_i(x)$, так что для оценки производной $W_t(x, t)$ можно выразить φ_i так: $\varphi_i = \dfrac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\varphi_i''$, $\varphi_i'' = (L^r\varphi)_i$. Мы получаем $W_t(x, t) = O(\{I_0(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}})$ и отсюда

$$W_t(x, t) = O(\eta^{\frac{1}{2}})\ . \tag{70}$$

Для $W_{x_i}(x, t)$ имеет место $W_{x_i}(x, t) = O(\{D(L^{r-1}\varphi)\}^{\frac{1}{2}})$ и

$$W_{x_i}(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}})\ . \tag{71}$$

б) Приведем лишь результаты:

$$W(x, t) = O(\{D(L^{r-1}\varphi)\}^{\frac{1}{2}}), \quad W_t(x, t) = O(\{D(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}}),$$
$$W_{x_i}(x, t) = O(\{I_0(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}}).$$

Отсюда

$$(72) \qquad W(x, t) = O(\eta^{\frac{7}{2}}), \quad W_t(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}), \quad W_{xi}(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}).$$

Что касается решения $w(x, t)$, оценки потребуют несколько больших усилий. Имеем $w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t)\, v_i(x)$, где $w_i(t)$ — решение уравнения $L_i(w_i) = 0$[22] с начальными значениями $w_i(0) = \varphi_i$, $\dot{w}_i(0) = \psi_i$. Исследуем прежде всего интегралы $w^*(t)$ и $w^{**}(t)$ уравнения $L_i(y) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $w^*(0) = 1$, $\dot{w}^*(0) = 0$, $w^{**}(0) = 0$, $\dot{w}^{**}(0) = 1$. Опять-таки умножением на $2\dot{w}^*(t)$ и интегрированием уравнения $L_i(w^*) = 0$ получим

$$\varepsilon \dot{w}^{2*}(t) + 2\int_0^t \beta(s)\, \dot{w}^{2*}(s)\, \mathrm{d}s + \lambda_i w^{2*}(t) = \lambda_i.$$

Из этого уравнения следует $|w^*(t)| \leqq 1$. Рассуждая так же, как и при выводе неравенства (47), можно доказать, что $|\dot{w}^*(t)| \leqq \frac{1}{\beta_1}\lambda_i$. Что касается $w^{**}(t)$, имеем

$$\varepsilon \dot{w}^{2**}(t) + 2\int_0^t \beta(s)\, \dot{w}^{2**}(s)\, \mathrm{d}s + \lambda_i w^{2**}(t) = \varepsilon,$$

так что $|w^{**}(t)| \leqq \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{-\frac{1}{2}}$ и $|\dot{w}^{**}(t)| \leqq 1$.

Теперь достаточно учесть, что $w_i(t) = \varphi_i w^*(t) + \psi_i w^{**}(t)$, и мы найдем

$$|w_i(t)| \leqq |\varphi_i| + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda_i^{-\frac{1}{2}}|\psi_i|, \quad |\dot{w}_i(t)| \leqq \frac{1}{\beta_1}\lambda_i|\varphi_i| + |\psi_i|.$$

Из этих неравенств мы уже обычным путем получим оценки для $w(x, t)$, $w_t(x, t)$, $w_{x_i}(x, t)$. Приведем лишь результаты:

а) В этом случае $\psi \equiv 0$ и поэтому

$$w(x, t) = O(\{I_0(L^{r-1}\varphi)\}^{\frac{1}{2}}), \quad w_t(x, t) = O(\{I_0(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}}), \quad w_{x_i}(x, t) = O(\{D(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}}),$$

откуда

$$(73) \qquad w(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}), \quad w_t(x, t) = O(\eta^{\frac{1}{2}}), \quad w_{x_i}(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}).$$

б) Здесь имеет место

$$w(x, t) = O(\{D(L^{r-1}\varphi)\}^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}O(\{I_0(L^{r-1}\psi)\}^{\frac{1}{2}}),$$
$$w_t(x, t) = O(\{D(L^r\varphi) + D(L^{r-1}\psi)\}^{\frac{1}{2}}),$$
$$w_{x_i}(x, t) = O(\{I_0(L^r\varphi)\}^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}O(\{D(L^{r-1}\psi)\}^{\frac{1}{2}}),$$

[22]) Оператор L_i был определен уравнением (40).

откуда

(74) $w(x, t) = O(\eta^{\frac{7}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{5}{2}})\,,\ w_t(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}})\,,\ w_{x_i}(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}})\,.$

Остается еще выразить функцию $\bar{k}(x)$ и ее производные с помощью $k(x)$. Имеет место

$$\bar{k}(x) = \bar{g}(x) - \bar{U}_t(x, 0) = g(x) - \psi(x) - U_t(x, 0) + W_t(x, 0) =$$
$$= k(x) - \psi(x) + W_t(x, 0)\,,$$

так что согласно (70) и (72) будет

(75) а) $\bar{k}(x) = k(x) + O(\eta^{\frac{1}{2}})\,,$

(76) б) $\bar{k}(x) = k(x) + O(\eta^{\frac{3}{2}})\,.$

Аналогично

(77) а) $\bar{k}_{x_i}(x) = k_{x_i}(x) + O(\eta^{-\frac{1}{2}})\,.$

(78) б) $\bar{k}_{x_i}(x) = k_{x_i}(x) + O(\eta^{\frac{1}{2}})\,.$

4. Теперь мы уже приготовили все необходимое для того, чтобы иметь возможность вывести из (68) и из уравнений, полученных дифференцированием соотношения (68), искомые асимптотические формулы.

а) Используя оценки (69), (75), (65), (73), мы получим по приведении

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\eta^{\frac{5}{2}}) + O(\varepsilon)\,.$$

Для производных из (70), (71), (77), (65) и (73) следует аналогично

$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\eta^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon O(\eta^{-\frac{3}{2}})\,,$$
$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\eta^{\frac{3}{2}}) + \varepsilon O(\eta^{-\frac{1}{2}})\,.$$

б) Из (72), (76), (78), (66), (74) следует

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) + O(\eta^{\frac{7}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{5}{2}})\,,$$
$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x) e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\eta^{\frac{3}{2}}) + \varepsilon O(\eta^{-\frac{1}{2}})\,.$$
$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\eta^{\frac{5}{2}}) + O(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}})\,.$$

Если взять $\eta = \varepsilon^p$, то будет $u_t(x, t) = U_t(x, t) + \dfrac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}p}) + O(\varepsilon^{1-\frac{1}{2}p})$. Лучше всего выбрать p так, чтобы $\dfrac{3}{2} p = 1 - \dfrac{1}{2} p$, т. е. $p = \dfrac{1}{2}$. Результат мы сформулируем в виде теоремы 3:

Теорема 3. *Пусть выполняется предположение* Б (*см. стр.* 101) *и пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *выполняют* (59) *и* (60). *Тогда в замкнутой области* $\overline{Q}$ *справедливы следующие асимптотические формулы*:

(79) а) $$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)\,,$$
$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})\,,$$
$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})\,.$$

(80) б) $$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)\,,$$
$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)}\, k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})\,,$$
$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon)\,.$$

IV. НЕОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

1. В неоднородном случае мы, разумеется, ограничимся исследованием решения уравнения (2), удовлетворяющего граничному условию (6) и однородным начальным условиям

(81) $$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0\,,$$

так как решение, определенное неоднородными начальными условиями (5), является суммой указанного только что решения и решения однородной задачи (22), (23). В виду того, что при выводе асимптотических формул мы будем рассуждать так же, как и в однородном случае, некоторые детали можно будет опустить и ограничиться доказательством теоремы, аналогичной теореме 3.

Асимптотические формулы, которые мы выведем, будут на этот раз справедливы только в ограниченной замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times \langle 0, T\rangle$. Число T может быть сколь угодно велико. Символы 0 будут, конечно, зависимы от T. Предположение (21) можно, очевидно, заменить более слабым: $\beta(t) > 0$ для $t \geqq 0$.

Чтобы иметь возможность привести условия для правой части $F(x, t)$, достаточные для существования классического решения задачи (2), (6), (81), дадим определение пространства $\overset{\circ}{D}_1$.

Под $\overset{\circ}{D}_1$ мы подразумеваем замыкание в норме $W_2^{(1)}(Q_T)$ всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в некоторой окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T (т. е. в множестве вида $\Omega_\delta \times \langle 0, T\rangle$)[23]).

[23]) Во избежание недоразумений мы не будем опускать букву Q_T в обозначении $W_2^{(k)}(Q_T)$. Итак, если она опущена, нужно читать $W_2^{(k)}(\Omega)$.

Упомянутое достаточное условие имеет вид

$$(82) \qquad F(x, t) \in W_2^{(N-1)}(Q_T)\,, \quad F, LF, \ldots, L^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}F \in \mathring{D}_1\,,$$

(см. [4], стр. 113). Притом решение может быть получено по методу Фурье.

Что касается граничных значений функции $F(x, t)$, мы не будем в дальнейшем предполагать больше, чем (82). По поводу гладкости функции $F(x, t)$ мы будем предполагать, во-первых

$$(83) \qquad F(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,, \quad F_t(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,,$$

а, во-вторых, для нечетного N ($N = 2r + 1$)

$$(84) \qquad L^r F(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,, \quad L^r F_t(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,.$$

2. Прежде всего мы построим вспомогательную функцию $\Phi(x, t)$ так, чтобы разность $\overline{F}(x, t) = F(x, t) - \Phi(x, t)$ удовлетворяла более сильным граничным условиям, чем (82), которых нам не достаточно. Функция $\Phi(x, t)$ будет притом иметь тот же характер, как и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, приведенные в разделе III.2.

В случае а) будут достаточными условия (82). Поэтому мы положим $\Phi(x, t) = 0$, так что $\overline{F}(x, t) = F(x, t)$. В случае б) положим для $x \in \Omega_\eta$, $t \in \langle 0, T\rangle$

$$(85) \qquad \Phi(x, t) = \frac{1}{(2r)!}\, \omega\left(\frac{\varrho}{\eta}\right) \frac{L^r F}{\sigma^r}\, \varrho^{2r}$$

и $\Phi(x, t) = 0$ для $x \in \Omega - \Omega_\eta$, $t \in \langle 0, T\rangle$. Подобно тому, как и в разделе III.2, можно убедиться, что $\Phi(x, t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T)$, $\Phi_t(x, t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T)$ и $\Phi|_P = L\Phi|_P = \ldots = L^{r-1}\Phi|_P = 0$, $L^r\Phi|_P = L^rF|_P$ (P — боковая поверхность цилиндра Q_T). Поэтому

$$\overline{F}(x, t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T), \quad \overline{F}_t(x, t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T),\ \overline{F}, L\overline{F}, \ldots, L^r\overline{F} \in \mathring{D}_1\,.$$

Резюмируя, мы видим, что в обоих случаях будет

$$(86) \qquad \overline{F}(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,, \quad \overline{F}_t(x, t) \in W_2^{(N)}(Q_T)\,,$$

$$(87) \qquad \overline{F}, L\overline{F}, \ldots, L^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\overline{F} \in \mathring{D}_1\,.$$

3. В настоящем параграфе мы докажем несколько вспомогательных формул. Прежде всего имеет место: если $G(x, t) \in W_2^{(1)}(Q_T)$ и $G_t(x, t) \in W_2^{(1)}(Q_T)$, то функция $\int_\Omega G(x, t)\, \mathrm{d}x$ обладает в интервале $\langle 0, T\rangle$ непрерывной производной, причем

$$(88) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega G(x, t)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega G_t(x, t)\, \mathrm{d}x\,.$$

Для доказательства обратим прежде всего внимание на то, что как функция $\int_\Omega G(x, t)\, \mathrm{d}x$, так и $\int_\Omega G_t(x, t)\, \mathrm{d}x$ будут на основании предположений $G(x, t) \in$

$\in W_2^{(1)}(Q_T)$, $G_t(x, t) \in W_2^{(1)}(Q_T)$ непрерывными функциями переменного t в интервале $\langle 0, T\rangle$ (см., напр., [4], стр. 36). В [4] на стр. 30 доказывается, что если $\Phi(x_0) = \int_\Omega \varphi(x, x_0)\,\mathrm{d}x$ — непрерывная функция параметра x_0, если $\varphi(x, x_0) \in L_2(Q_T)$ и если $\varphi(x, x_0)$ обладает обобщенной производной $\varphi_{x_0}(x, x_0)$, то функция $\Phi(x_0)$ обладает обобщенной производной, равной $\int_\Omega \varphi_{x_0}(x, x_0)\,\mathrm{d}x$. Итак, функция $\int_\Omega G(x, t)\,\mathrm{d}x$ обладает обобщенной производной, равной $\int_\Omega G_t(x, t)\,\mathrm{d}x$. Этот интеграл является, однако, как мы заметили, непрерывной функцией переменного t.

Далее мы докажем аналогию неравенства (20) для функций $G(x, t)$, входящих одновременно в $W_2^{(2)}(Q_T)$ и $\mathring{D}_1$. Обозначим $G_i(t) = (G(x, t))_i$ Докажем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i G_i^2(t) \leqq D(G(x, t)) . \tag{89}$$

Очевидно, $(0 \leqq t \leqq T)$

$$\int_{Q_t} G(x, s)\, Lv_i(x)\,\mathrm{d}Q = -\lambda_i \int_{Q_t} G(x, s)\, v_i(x)\,\mathrm{d}Q .$$

Подставим в левую часть выражение для $Lv_i(x)$ и используем надлежащим образом теорему 16 из [4], стр. 42. Мы получим

$$\int_{Q_t} G(x, s)\left\{\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - av_i\right\}\mathrm{d}Q = -\int_{Q_t}\left\{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + aGv_i\right\}\mathrm{d}Q .$$

Итак,

$$\int_{Q_t}\left\{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + aGv_i\right\}\mathrm{d}Q = \lambda_i \int_{Q_t} G(x, s)\, v_i(x)\,\mathrm{d}Q ,$$

что можно (в силу того, что $G(x, t) \in W_2^{(2)}(Q_T)$) записать на основании теоремы Фубини в виде

$$\int_0^t \int_\Omega \left\{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + aGv_i\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \lambda_i \int_0^t \int_\Omega G(x, s)\, v_i(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

или[24])

$$\int_0^t D(G(x, s), v_i(x))\,\mathrm{d}s = \lambda_i \int_0^t G_i(s)\,\mathrm{d}s .$$

[24]) Напомним, что $D(\varphi) = D(\varphi, \varphi)$ и что $D(\varphi, \psi)$ определено в подстрочном примечании[9]) на стр. 89.

Дифференцируя (подинтегральные выражения зависят непрерывно от s), мы получим $D(G(x, t), v_i(x)) = \lambda_i G_i(t)$. Теперь мы видим, что

$$0 \leqq D(G(x, t) - \sum_{i=1}^{p} G_i(t)\, v_i(x)) = D(G, G) - 2 \sum_{i=1}^{p} G_i(t)\, D(G, v_i) +$$
$$+ D(\sum_{i=1}^{p} G_i(t)\, v_i(x)\, ,\ \sum_{i=1}^{p} G_i(t)\, v_i(x)) = D(G, G) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i G_i^2(t)\, ,$$

так что $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i G_i^2(t) \leqq D(G(x, t))$.

Если кроме $G(x, t) \in W_2^{(2)}(Q_T)$ и $G(x, t) \in D_1$ имеет место $G_t(x, t) \in W_2^{(2)}(Q_T)$, то

(90) $$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^T \dot{G}_i^2(s)\, \mathrm{d}s \leqq \int_0^T D(G_t(x, s)\,)\mathrm{d}s\, ,$$

где $\dot{G}_i(t) = (G_t(x, t))_i$. Действительно, мы доказали, что $D(G(x, t),\ v_i(x)) = \lambda_i G_i(t)$ или $\int_\Omega \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial G}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + aGv_i \right\} \mathrm{d}x = \lambda_i \int_\Omega G(x, t)\, v_i(x)\, \mathrm{d}x$. Это уравнение можно дифференцировать по t на основании (88), получая тогда $D(G_t(x, t),\ v_i(x)) = \lambda_i \dot{G}_i(t)$. Отсюда $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \dot{G}^2(t) \leqq D(G_t(x, t))$, и после интегрирования и предельного порехода найдем (90).

Наконец, докажем аналогию формулы (30). Пусть $G(x, t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T)$ и $G, LG, \ldots, L^{r-1}G \in \mathring{D}_1$. Тогда

(91) $$G_i(t) = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\, \alpha_i(t)\, , \quad \alpha_i(t) = (L^r G(x, t))_i\, .$$

Имеем

$$\int_0^t G_i(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^t \int_\Omega G(x, s)\, v_i(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s = \int_{Q_t} G(x, s)\, v_i(x)\, \mathrm{d}Q =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_i} \int_{Q_t} G(x, s)\, Lv_i(x)\, \mathrm{d}Q\, .$$

После двукратного к последнему интегралу надлежащего применения теоремы 16 из [4], мы получим $-\frac{1}{\lambda_i} \int_{Q_t} LGv_i\, \mathrm{d}Q$. Далее имеем

$$-\frac{1}{\lambda_i} \int_{Q_t} LGv_i\, \mathrm{d}Q = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_{Q_t} LGLv_i\, \mathrm{d}Q = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_{Q_t} L^2Gv_i\, \mathrm{d}Q = \ldots =$$
$$= \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r} \int_{Q_t} L^rGv_i\, \mathrm{d}Q.$$

Итак,
$$\int_0^t G_i(s)\,\mathrm{d}s = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\int_0^t\int_\Omega L^r(G(x,s)\,v_i(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$
и дифференцируя, получаем $G_i(t) = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\int_\Omega L^r G v_i\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\alpha_i(t)$.

Если, кроме того, будет $G_t(x,t) \in W_2^{(2r+1)}(Q_T)$, то последнее соотношение можно дифференцировать согласно (88); тогда получим

$$(92)\qquad \dot{G}_i(t) = \frac{(-1)^r}{\lambda_i^r}\beta_i(t)\,,\quad \beta_i(t) = \dot{\alpha}_i(t) = (L^r G_t(x,t))_i\,.$$

4. Вместо уравнения (2) исследуем прежде всего уравнение
$$\varepsilon\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} - L\bar{u} = \bar{F}(x,t)$$
с однородными граничными и начальными условиями. Обозначения раздела III оставляем без изменения.

Вырожденное уравнение имеет вид
$$\beta(t)\frac{\partial\bar{U}}{\partial t} - L\bar{U} = \bar{F}(x,t)\,.$$

По методу Фурье найдем, что его решение, выполняющее $\bar{U}(x,0) = \bar{U}|_S = 0$, имеет вид $\bar{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\bar{U}_i(t)\,v_i(x)$, где
$$\bar{U}_i(t) = e^{-\lambda_i\gamma(t)}\int_0^t\dot{\gamma}(s)\,e^{\lambda_i\gamma(s)}\bar{F}_i(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Докажем, что указанный ряд является классическим решением, которое обладает непрерывными вторыми частными производными по $x_1,\ldots,x_n$ и первой частной производной по t и для $t=0$ (обращаем внимание, что мы не используем всех предположений, которым удовлетворяет $\bar{F}(x,t)$; здесь достаточно, чтобы $\bar{F} \in W_2^{(N-1)}(Q_T)$ и $\bar{F}, L\bar{F}, \ldots, L^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\bar{F} \in \mathring{D}_1$).

Почленным дифференцированием по t, мы получим $-\frac{1}{\beta(t)}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\bar{U}_i(t)\,v_i(x) + \frac{1}{\beta(t)}\sum_{i=1}^{\infty}\bar{F}_i(t)\,v_i(x)$. Для обоих рядов построим опять сходящиеся мажоранты с постоянными членами в норме $\|\ \|_{W_2^{(N-2)}(\Omega)}$; это значит, что оба ряда сходятся равномерно в $\bar{Q}_T$. Точно так же можно построить для ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\bar{U}_i(t)\,v_i(x)$ такую мажоранту в норме $\|\ \|_{W_2^{(N)}(\Omega)}$, откуда следует равномерная сходимость этого ряда, равно как и рядов, полученных однократным или двукратным дифференцированием по $x_1, \dots, x_n$ в $\overline{Q}_T$.

Для этой цели найдем оценки коэффициентов $\overline{U}_i(t)$. Имеем

$$\overline{U}_i(t) = \lambda_i^{-1}e^{-\lambda_i\gamma(t)}\int_0^t \lambda_i\dot{\gamma}(s)\, e^{\lambda_i\gamma(s)}\overline{F}_i(s)\,\mathrm{d}s = \lambda_i^{-1}e^{-\lambda_i\gamma(t)}\{[e^{\lambda_i\gamma(s)}\overline{F}_i(s)]_0^t -$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda_i\gamma(s)}\dot{\overline{F}}_i(s)\,\mathrm{d}s\} = \lambda_i^{-1}\{\overline{F}_i(t) - \overline{F}_i(0)\,e^{-\lambda_i\gamma(t)} - e^{-\lambda_i\gamma(t)}\int_0^t e^{\lambda_i\gamma(s)}\dot{\overline{F}}_i(s)\,\mathrm{d}s\} =$$

$$= \lambda_i^{-1}\{\int_0^t \dot{\overline{F}}_i(s)\,\mathrm{d}s + \overline{F}_i(0)[1 - e^{-\lambda_i\gamma(t)}] - e^{-\lambda_i\gamma(t)}\int_0^t e^{\lambda_i\gamma(s)}\dot{\overline{F}}_i(s)\,\mathrm{d}s\}\,.$$

Отсюда

$$|\overline{U}_i(t)| \leqq \lambda_i^{-1}\{|\overline{F}_i(0)| + 2\int_0^T|\dot{\overline{F}}_i(s)|\,\mathrm{d}s\,. \tag{93}$$

а) Из (86), (87), (91) и (92) следует

$$\overline{F}_i(t) = \frac{(-1)^{r-1}}{\lambda_i^{r-1}}\,\alpha_i(t)\,, \quad \alpha_i(t) = (L^{r-1}\overline{F}(x,t))_i\,,$$

$$\dot{\overline{F}}_i(t) = \frac{(-1)^{r-1}}{\lambda_i^{r-1}}\,\beta_i(t)\,, \quad \beta_i(t) = (L^{r-1}\overline{F}_t(x,t))_i\,.$$

Положим $v = \sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i\overline{U}_i(t)\,v_i(x)$. Тогда в силу (93) получим

$$I_0(L^jv) = \sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i^{2j+2}\overline{U}_i^2(t) = O(\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i^{2j}\overline{F}_i^2(0)) + O(\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i^{2j}\int_0^T\dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s)\,,$$

так что, очевидно,

$$K_0^{r-1}(v) = O(\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i^{2r-2}\overline{F}_i^2(0)) + O(\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i^{2r-2}\int_0^T\dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s) =$$

$$= O(\sum_{i=p}^{p+q}\alpha_i^2(0)) + O(\sum_{i=p}^{p+q}\int_0^T\beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s)\,.$$

Подобные оценки можно найти для $K_1^{r-1}(v)$. Из леммы Ладыженской следует $\|v\|_{W_2^{(2r-2)}(\Omega)} = O(\{\sum_{i=p}^{p+q}\alpha_i^2(0)\}^{\frac{1}{2}}) + O(\{\sum_{i=p}^{p+q}\int_0^T\beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})$. При этом, разумеется, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2(0) < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T\beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$. Что касается ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\overline{F}_i(t)\,v_i(x)$, применяется точно такое же доказательство, так как $\overline{F}_i(t) = \overline{F}_i(0) + \int_0^T\dot{\overline{F}}_i(s)\,\mathrm{d}s$, так что $|\overline{F}_i(t)| \leqq |\overline{F}_i(0)| + \int_0^T|\dot{\overline{F}}_i(s)|\,\mathrm{d}s$.

б) В этом случае

$$\|v\|_{W_2^{(2r-1)}(\Omega)} = O(\{\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i\alpha_i^2(0)\}^{\frac{1}{2}}) + (\{\sum_{i=p}^{p+q}\lambda_i\int_0^T\beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}).$$

Притом $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2(0) < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^T \beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$ в силу (89) и (90).

5. Опять предполагаем $\overline{u}(x, t)$ в виде (64) с той разницей, что

$$\overline{k}(x) = -\overline{U}_t(x, 0) = -\frac{1}{\beta(0)}\overline{F}(x, 0)\,.$$

Если по аналогии с уравнением (37) положить

$$\overline{z}_i(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,[\overline{u}_i(t) - \overline{U}_i(t)] - \frac{1}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\overline{k}_i\,,$$

то будет

$$\overline{z}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{z}_i(t)\, v_i(x)\,, \quad \overline{z}_t(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\overline{z}}_i(t)\, v_i(x)\,.$$

Коэффициенты $\overline{z}_i(t)$ удовлетворяют как начальным условиям (42), так и дифференциальным уравнениям вида

$$L_i(\overline{z}_i) = \frac{1}{\varepsilon}\,[\varepsilon\ddot{\overline{u}}_i + \beta(t)\,\dot{\overline{u}}_i + \lambda_i\overline{u}_i] - \frac{1}{\varepsilon}\,[\beta(t)\,\dot{\overline{U}}_i + \lambda_i\overline{U}_i] - \ddot{\overline{U}}_i +$$

$$+ \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(0)}\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}\, \overline{F}_i(0) + \frac{\lambda_i}{\beta^2(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\overline{F}_i(0)\,.$$

Первых две пары скобок в правой части этих уравнений принимают одно и то же значение $\overline{F}_i(t)$, так что сокращаются. Подставляя вместо $\ddot{\overline{U}}_i$, легко видеть, что уравнение можно записать в виде

$$L_i(\overline{z}_i) = A_i(t) + B_i(t) + C_i(t) + D_i\,,$$

где

$$A_i(t) = O(\lambda_i^2|\overline{U}_i(t)|)\,, \quad B_i(t) = O(\lambda_i|\overline{F}_i(t)|)\,, \quad C_i(t) = O(|\dot{\overline{F}}_i(t)|)\,,$$
$$D_i = O(\lambda_i|\overline{F}_i(0)|)\,.$$

Поэтому можно выразить $\overline{z}_i(t)$ в виде суммы решений уравнения вида (43), в котором вместо $P(t)$ мы последовательно пишем $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$, D_i. Производить оценку последнего решения нет необходимости; точно так же не будем оценивать ни второе, ни третье. Мы удовольствуемся оценкой одного лишь первого решения и заметим, что ни во втором, ни в третьем случае не получится более худший результат.

a) Из (45) и (93) имеем

$$\overline{z}_i^2(t) = O(\lambda_i^{-1} \int_0^T \lambda_i^4 \overline{U}_i^2(s)\,\mathrm{d}s) = O(\lambda_i \overline{F}_i^2(0) + \lambda_i \int_0^T \dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s)\,.$$

Если положить $v = \sum_{i=1}^{p} \overline{z}_i(t)\, v_i(x)$, видно, что для $j \leqq r - 1$ имеет место

$$D(L^j v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2j+1} \overline{z}_i^2(t) = O(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2r-1} \overline{z}_i^2(t)) = O(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{2r}[\overline{F}_i^2(0) + \int_0^T \dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s])\,.$$

Подставляя согласно (91) и (92) (предположения выполнены), мы видим что

$$K_1^{r-1}(v) = O\Big(\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i^2(0) + \int_0^T \beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s)\Big) = O(I_0(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T I_0(L^r\overline{F}_t(x,s))\,\mathrm{d}s)\,.$$

То же можно доказать и для $K_0^{r-1}(v)$. На основании леммы Ладыженской и теоремы Соболева те же оценки справедливы для $v^2(x)$ и $\left(\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right)^2$. Если устремить $p \to \infty$, то ясно, что как $\bar z(x,t)$, так и все частные производные $\dfrac{\partial \bar z(x,t)}{\partial x_i}$ равны $O(\{I_0(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T I_0(L^r\overline{F}_t(x,s))\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})$. Однако $\overline{F} = F$, так что этим доказаны равенства

$$(94)\qquad z(x,t) = O(1)\,,\quad z_{x_i}(x,t) = O(1)\,.$$

Далее, из (46) и (93) следует $\dot z_1^2(t) = \varepsilon^{-1}\lambda_i^2 O(\overline{F}_i^2(0) + \int_0^T \dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s)$. Поэтому для $j \leqq r - 1$ имеет место

$$I_0(L^j\dot v) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{2j}\dot{\bar z}_i^2(t) = \varepsilon^{-1}O\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{2r}[\overline{F}_i^2(0) + \int_0^T \dot{\overline{F}}_i^2(s)\,\mathrm{d}s]\Big) =$$

$$= \varepsilon^{-1}O\Big(\sum_{i=1}^{p}[\alpha_i^2(0) + \int_0^T \beta_i^2(s)\,\mathrm{d}s]\Big) = \varepsilon^{-1}O(I_0(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T I_0(L^r\overline{F}_t(x,s))\,\mathrm{d}s) = \varepsilon^{-1}O(1).$$

Мы уже не будем повторять дальнейшие рассуждения; ясно, что результат будет

$$(95)\qquad z_t(x,t) = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})\,.$$

б) Приведем лишь результаты. Прежде всего имеем

$$\bar z(x,t) = O(\{I_0(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T I_0(L^r\overline{F}_t(x,t))\,\mathrm{d}t\}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Учитывая, что $\overline{F} = F - \Phi$ и что $\Phi(x,t)$ имеет вид (85), получим

$$(96)\qquad \bar z(x,t) = O(1)\,.$$

Далее, $\bar z_{x_i}(x,t) = O(\{D(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T D(L^rF(x,t))\,\mathrm{d}t\}^{\frac{1}{2}})$, так что

$$(97)\qquad \bar z_{x_i}(x,t) = O(\eta^{-\frac{1}{2}})\,.$$

Наконец, $\bar z_t(x,t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\{D(L^r\overline{F}(x,0)) + \int_0^T D(L^r\overline{F}_t(x,t))\,\mathrm{d}t\}^{\frac{1}{2}})$, и следовательно,

$$(98)\qquad \bar z_t(x,t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\eta^{-\frac{1}{2}})\,.$$

6. Возвратимся к уравнениям (67). Функция $W(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\beta(t)\dfrac{\partial W}{\partial t} - LW = \Phi(x,t)$ и добавочным условиям $W(x,0) = W|_S = 0$, так что

$$W(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(t)\,v_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i\gamma(t)}\int_0^t \dot\gamma(s)\,e^{\lambda_i\gamma(t)}\Phi_i(s)\,\mathrm{d}s\,.\,v_i(x)\,.$$

Оценку функции $W(x, t)$ и ее частных производных первого порядка мы проведем таким образом (конечно, только в случае б), ибо в случае а) будет $\overline{F} = F$, так что $W = w = 0$): для коэффициентов $W_i(t)$ справедливо неравенство, аналогичное неравенству (93). Для нас будет, однако, достаточной и более грубая оценка. Так как $0 < \dot{\gamma}(s) \leqq \gamma_0$ в $\langle 0, T\rangle$, получим

$$|W_i(t)| \leqq e^{-\lambda_i\gamma(t)}\{\int_0^t \dot{\gamma}^2(s)\, e^{2\lambda_i\gamma(s)}\, \mathrm{d}s \int_0^t \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \gamma_0^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda_i\gamma(t)} \left\{\frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t 2\lambda_i\dot{\gamma}(s)\, e^{2\lambda_i\gamma(s)}\, \mathrm{d}s \, . \int_0^t \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\gamma_0^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\, \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \left\{\int_0^T \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}},$$

так что $W_i^2(t) = O(\lambda_i^{-1} \int_0^T \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s)$. Из этой оценки получим $W(x, t) = O(\{\int_0^T I_0(L^{r-1}\Phi(x, s)\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})$ и $W_{x_i}(x, t) = O(\{\int_0^T D(L^{r-1}\Phi(x, s))\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})$. Отсюда

(99) $$W(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) , \quad W_{x_i}(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) .$$

Далее имеем $\dot{W}_i(t) = \dfrac{1}{\beta(t)} [\Phi_i(t) - \lambda_i W_i(t)]$, так что, учитывая предыдущую оценку для $W_i^2(t)$, мы получим $\dot{W}_i^2(t) = O(\Phi_i^2(t) + \lambda_i \int_0^T \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s)$ и отсюда $W_t(x, t) = O(\{D(L^{r-1}\Phi(x, t)) + \int_0^T I_0(L^r\Phi(x, s))\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}})$, то есть

(100) $$W_t(x, t) = O(\eta^{\frac{1}{2}}) .$$

Функция $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению $\varepsilon \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta(t) \dfrac{\partial w}{\partial t} - Lw = \Phi(x, t)$ и добавочным условиям $w(x, 0) = w_t(x, 0) = w|_S = 0$. Имеем $w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t)\, v_i(x)$ и $w_i(t)$ выполняет уравнение (43), где $P(t) = \Phi_i(t)$, и начальные условия $w_i(0) = \dot{w}_i(0) = 0$. В силу (45) и (46) имеем

$$w_i^2(t) = O(\lambda_i^{-1} \int_0^T \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s) , \quad \dot{w}_i^2(t) = \varepsilon^{-1} O(\int^T \Phi_i^2(s)\, \mathrm{d}s) ,$$

откуда легко следует

$$w(x, t) = O(\{\int_0^T I_0(L^{r-1}\Phi(x, s)\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}),$$

$$w_{x_i}(x, t) = O(\{\int_0^T D(L^{r-1}\Phi(x, s))\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}), \; w_t(x, t) = \varepsilon^{-1} O(\{\int_0^T D(L^{r-1}\Phi(x, s))\, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}),$$

так что

(101) $$w(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) , \quad w_{x_i}(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) , \quad w_t(x, t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) .$$

Для составления окончательных формул нужно еще выразить $\bar{k}(x)$. Положим

$$(102) \qquad k(x) = -U_t(x, 0) = -\frac{1}{\beta(0)} F(x, 0) .$$

Имеем $\bar{k}(x) = -\bar{U}_t(x, 0) = -U_t(x, 0) + W_t(x, 0) = k(x) + W_t(x, 0)$, так что согласно (100)

$$(103) \qquad \bar{k}(x) = k(x) + O(\eta^{\frac{1}{2}}) .$$

Кроме того, нетрудно доказать

$$(104) \qquad \bar{k}_{x_i}(x) = k_{x_i}(x) + O(\eta^{-\frac{1}{2}}) .$$

В случае а) окончательные формулы мгновенно вытекают из (94) и (95). В случае б) нужно использовать уравнения (96)—(104) и взять опять $\eta = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 4. *Пусть выполняется предположение* Б *и правая часть* $F(x, t)$ *выполняет* (82) *и* (83). *Тогда в цилиндре* $\bar{Q}_T$ *имеет место*

$$(105) \qquad \text{а)} \qquad u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) ,$$

$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x) e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) ,$$

$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon) .$$

$$(106) \qquad \text{б)} \qquad u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) ,$$

$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x) e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}}) ,$$

$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) .$$

7. Замечание, которое мы теперь присоединяем, касается не только этой главы, но и предыдущих. Мы хотим обратить внимание читателя на то, что в случае граничных условий (7) всю задачу можно решить точно тем же способом. Дело в том, что главное пособие при оценках, лемма Ладыженской, остается в силе и для граничных условий (7) (см. [4], лемма 1′, стр. 99).

V. ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Во всех доказанных нами теоремах предположения о гладкости границы S и о коэффициентах уравнения были сравнительно весьма высоки. В теоремах 1 и 2 это вызывается только тем, что мы, с одной стороны, опираемся о теорему Ладыженской о существовании, а с другой — пользуемся при оценках ее леммой. Недавно, однако, показал В. А. Ильин [9], что у волнового уравнения можно обосновать метод Фурье более простым способом, при котором от границы S требуется лишь то, чтобы S была поверхностью Ляпунова. Мы используем теперь результаты Ильина для вывода асиммптотических формул для решений смешанной задачи для телеграфного уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \,. \tag{107}$$

Мы ограничимся однородным уравнением. В неоднородной задаче не встречаются новые трудности и ее можно решить тем же способом. Разница состоит в том, что в то время как в неоднородном случае оценки справедливы равномерно лишь в конечном интервале $\langle 0, T \rangle$, в однородном случае они справедливы в бесконечном интервале $\langle 0, \infty)$.

2. Начальные условия имеют опять вид (5). Что касается граничных условий, мы ограничимся для краткости первым граничным условием (6). Вырожденное уравнение есть уравнение теплопроводности

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U \,. \tag{108}$$

Относительно функции $\beta(t)$ мы предполагаем, что она непрерывно дифференцируема и обладает свойством (21). Обозначения $k(x)$ и $\nu(t)$ имеют тот же смысл, как и в (32) и (33). Под $u(x, t)$, соотв., $U(x, t)$ мы подразумеваем классическое решение соответственной задачи. В отличие от предыдущих глав мы будем, однако, классическим решением называть решение, обладающее непрерывными первыми частными производными в $\bar{Q}$ и непрерывными вторыми частными производными в Q.

Теорема 5. *Пусть граница S — поверхность Ляпунова, а функции $f(x)$ и $g(x)$ обладают свойствами*

$$f(x) \in W_2^{(N)}(\Omega) \,, \quad f, \Delta f, \ldots, \Delta^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} f \in \mathring{D} \tag{109}$$

$$g(x) \in W_2^{(N-1)}(\Omega) \,, \quad g, \Delta g, \ldots, \Delta^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} g \in D \,. \tag{110}$$

Тогда имеет место

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) \,,$$

$$\left\| u_t(x, t) - U_t(x, t) - \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x) e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} \right\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon) \,,$$

$$\| u_{x_i}(x, t) - U_{x_i}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon) \,.$$

Доказательство. Так же как и В. А. Ильин в [9], мы ограничимся случаем трех измерений, $n = 3$, так что $N = 4$.[25]) Хотя в упомянутой работе Ильин изучает волновое уравнение, его результаты справедливы без

[25]) Нужно обратить внимание на то, что в работе [9] N означает то, что в нашей работе n, т. е. размерность области Ω.

изменения и для телеграфного уравнения (по этому поводу см. подстрочное замечание[10]) на стр. 90). Итак, решение $u(x, t)$ можно получить по методу Фурье. Что касается $U(x, t)$, мы докажем, что

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i(x),$$

где $v_i(x)$ являются теперь собственными функциями уравнения $\Delta v + \lambda v = 0$ с граничным условием $v|_S = 0$. Для этого достаточно доказать, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i(x)$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i'(x)$ ($v_i'(x)$ означает какую-либо из первых производных по $x_1, \ldots, x_n$), $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i(x)$ сходятся равномерно в $\overline{Q}$, а ряды $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i''(x)$ равномерно в каждой замкнутой части цилиндра Q. Условие (109) означает: $f \in W_2^{(4)}(\Omega)$, f, $\Delta f \in \overset{\circ}{D}$. Поэтому можно написать (см. формулы (30)) $f_i = \frac{1}{\lambda_i^2}\alpha_i$, $\alpha_i = (\Delta^2 f(x))_i$, так что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. Что касается ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i'(x)$, то

$$\sum_{i=p}^{p+q} \left| f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i'(x) \right| \leqq \sum_{i=p}^{p+q} |\alpha_i| \left| \frac{v_i'(x)}{\lambda_i^2} \right| \leqq \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=p}^{p+q} \frac{v_i'^2(x)}{\lambda_i^4} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$
$$= \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i'^2(x)}{\lambda_i^4} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из этого неравенства следует равномерная и абсолютная сходимость в замкнутой области $\overline{Q}$, так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i'^2(x)}{\lambda_i^4}$ сходится и его сумма ограничена в $\overline{\Omega}$ (см. (9) в [9]). Что же касается ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i(x)$, а тем более, конечно, и ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i(x)$, то мы получим

$$\sum_{i=p}^{p+q} \left| \lambda_i f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i(x) \right| \leqq \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i^2(x)}{\lambda_i^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда опять вытекает равномерная и абсолютная сходимость в $\overline{Q}$, так как $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leqq \text{konst}$ (см. [9], неравенство (8)). Наконец,

$$\sum_{i=p}^{p+q} \left| f_i e^{-\lambda_i\gamma(t)} v_i''(x) \right| \leqq \left\{ \sum_{i=p}^{p+q} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=p}^{p+q} \frac{v_i''^2(x)}{\lambda_i^4} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу леммы 1 в [9] ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{-\lambda_i \gamma(t)} v_i''(x)$ сходится поэтому равномерно в каждой замкнутой части области Q. Теперь можно ввести подстановку (31). Имеют место (35), (36), (37) и (38). Оценки для $z_i(t)$ и $\dot{z}_i(t)$ нам известны. Согласно (48) будет $z_i(t) = O(\lambda_i|f_i| + |g_i|)$, $\dot{z}_i(t) = O(\lambda_i^2|f_i| + \lambda_i|g_i|)$. Из условия (110) следует $g_i = -\frac{1}{\lambda_i}\beta_i$, $\beta_i = (\Delta g(x))_i$. Поэтому

$$|z(x, t)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i(t)|\,|v_i(x)| = O\left(\sum_{i=1}^{\infty}(|\alpha_i| + |\beta_i|)\,\frac{|v_i(x)|}{\lambda_i}\right) =$$

$$= O\left(\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)\,.\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v_i^2(x)}{\lambda_i^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right) = O(1)\,.$$

Этим доказана первая формула.

Что касается частной производной по t,

$$\int_\Omega \dot{z}_t^2(x, t)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{z}_i^2(t) = O(\sum_{i=1}^{\infty}[\lambda_i^4 f_i^2 + \lambda_i^2 g_i^2]) = O(\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha_i^2 + \beta_i^2]) = 0(1)\,.$$

Наконец, дадим оценку $D(z)$. В настоящем случае имеем

$$D(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right]\mathrm{d}x\,.$$

Притом $D(v_i, v_j) = \lambda_i\delta_i^j$ (см. (17)). Поэтому

$$D(z) = D(z, z) = D(\sum_{i=1}^{\infty} z_i(t)\,v_i(x)\,,\ \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t)\,v_i(x)) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i z_i^2(t) =$$

$$= O(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-1}(\alpha^2 + \beta_i^2)) = O(1)\,,$$

то есть

$$\int_\Omega \left(\left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial x_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial x_3}\right]^2\right)\mathrm{d}x = O(1)\,.$$

Литература

[1] *М. Зламал:* О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром. Чехосл. мат. журнал т. *9* (*84*), 1959, 218—242.

[2] *N. Levinson:* The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε. Annals of Math. *51*, 1950, 428—445.

[3] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник:* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи мат. наук, т. *XII*., 1957, 1—122.

[4] *О. А. Ладыженская:* Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва 1953.

[5] *И. А. Чарный:* Подземная гидромеханика, Москва 1948.
[6] *M. Krzyżański:* Les solutions des équations linéaires du type parabolique, considérées comme limmites des solutions des équations des types hyperbolique et elliptique. Annales de la Soc. Polonaise de Math. *XXIV*, 1951, fasc. II, 183—184.
[7] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.
[8] *И. Г. Петровский:* Лекции об уравнениях с частными производными. Москва 1953.
[9] *В. А. Ильин:* К вопросу об основании метода Фурье для уравнения колебаний. Успехи мат. наук, т. *XII*, 1957, 289—296.

Summary

THE MIXED PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

Miloš Zlámal, Brno

In [1] I dealt with the mixed problem for the hyperbolic equation with two independent variables

$$\varepsilon\alpha(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\,\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \tag{1}$$

where $\alpha(t)$, $\beta(t)$ and $a(x)$ are positive for $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ and ε is a small positive parameter. The initial and boundary conditions were of the form

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)\,, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0\,.$$

The question was how the solution of this problem is connected with that of the analogical problem for the reduced equation which we obtain from (1) by putting $\varepsilon = 0$, i. e. for the equation of heat conduction

$$\beta(t)\,\frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t)\,.$$

The boundary conditions remain the same: $U(0, t) = U(l, t) = 0$. Concerning the initial conditions it is of course possible to prescribe the first only: $U(x, 0) = f(x)$. Accordingly the problem was that of a partial differential equation with a small parameter at one of the highest derivatives. Such problems are studied intensively nowadays (see *e. g.* [2], [3]). In our case, if the small parameter becomes zero, the order of the equation is not lowered (although usually the reduced equation is of lower order); nevertheless the type will change and therefore one initial condition lost. For this reason one cannot expect that the solution $u(x, t)$ will be an analytic function of ε at the point $\varepsilon = 0$. On the contrary one can expect that the so called boundary layer term will appear in the formula for $u(x, t)$. In [1] I found not only the formula for the solution $u(x, t)$ but also for its first partial derivatives.

It is possible to generalize the method used in [1] and to apply it to more dimensional mixed problems. This article contains the derivation of asymptotic formulae for the solution of the mixed problem for a hyperbolic equation in n dimensions. Whereas in the one-dimensional case certain estimates were carried out in an elementary manner on the basis of well-known properties of eigenvalues and eigenfunctions of a certain Sturm-Liouville problem, for the analogous estimates in n dimensions it became necessary to choose a method les simple and direct; one by means of which Ladyženskaya justified the Fourier method (see [4] chap. II). The direct method analogical to that used in [1] could be applied in the special case of telegraphic equation.

The equation dealt with in the present article is generally of the form

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = F(x, t) \tag{2}$$

where

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, u \, .$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ denotes a point in E_n, the coefficients $a_{ij}(x)$, $a(x)$ are defined in the closure of a bounded domain $\overline{\Omega} \subset E_n$, the right-hand side $F(x, t)$ in the cylinder $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \langle 0, \infty)$ and the coefficient $\beta(t)$ is positive for all $t \geqq 0$; $a(x)$ is nonnegative and the operator Lu is uniformly elliptic in $\overline{\Omega}$:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \, , \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \, , \quad \alpha = \text{konst} > 0 \, .$$

Consequently (2) is hyperbolic in $\overline{Q}$. The initial conditions are of the form

$$u(x, 0) = f(x) \, , \quad u_t(x, 0) = g(x) \, .$$

As to the boundary conditions I only consider the boundary condition of the first kind $u\,|_S = 0$ (S is the boundary of Ω). However the analogical problem with boundary conditions of the second and third kind can be solved in an entirely similar manner. The reduced equation is of the form

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - LU = F(x, t) \tag{3}$$

which is an equation of parabolic type. There is only one initial condition: $U(x, 0) = f(x)$. The boundary condition remains the same: $U\,|_S = 0$.

A special case of (2) is to be found in the hydromechanics of underground water (see [5], p. 99—100), viz.

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{m\mu}{kK} \frac{\partial p}{\partial t} \, .$$

In this case $Lu = \Delta u$, $\varepsilon = \frac{1}{c^2}$, $\beta = \frac{m\mu}{kK} =$ konst., $F(x, t) = 0$. ε is indeed a small positive parameter since c denotes the velocity of sound. In [5] the equation (3) is replaced by the heat equation

$$\frac{m\mu}{kK} \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p$$

which simplifies the problem. The justification of this approximation is missing, of course.

The main result in the homogeneous case are the following formulae:

a) $\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 3 \text{ even}\right)$

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon), \quad u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}}),$$

$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}).$$

b) $\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 3 \text{ odd}\right)$

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon), \quad u_t(x, t) = U_t(x, t) + \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}),$$

$$u_{x_i}(x, t) = U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon).$$

Here

$$\nu(t) = \int_0^t \beta(s)\, \mathrm{d}s, \quad k(x) = g(x) - U_t(x, 0).$$

The formulae hold for $x \in \overline{\Omega}$ and $t \in \langle 0, \infty)$. Concerning the boundary values of the functions $f(x)$ and $g(x)$, no more is assumed than is necessary and sufficient for the existence of the solution $u(x, t)$. Concerning the smoothness of the boundary S of the domain Ω the assumptions are enough strong. In the nonhomogeneous case almost the same formulae are proved but they hold only for t from a bounded interval.

In the case of the telegraphic equation

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

I derived the formulae

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon), \quad \left\| u_t(x, t) - U_t(x, t) - \frac{\beta(t)}{\beta(0)} k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} \right\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon),$$

$$\|u_{x_i}(x, t) - U_{x_i}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon).$$

These are not so precise as the preceding ones; but as to the smoothness of the boundary S it is sufficient that it be a Liapounoff surface.