Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Král

Замкнутые системы отображений и поверхностный интеграл

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 1, 27–67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100393

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

ИОСЕФ КРАЛ (Josef Král), Прага

(Поступило в редакцию 28/XII 1957 г., и переработанное сдано опять 10/IX 1958 г.)

В статье исследуются некоторые свойства поверхностных интегралов, присущих к отображениям, образующим замкнутые системы в смысле отдела 2,12.

I

В этом параграфе сосредоточено несколько вспомогательных утверждений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1.1. Обозначение. E_r — это r-мерное евклидово пространство. Если $x \in E_r$, то x_i есть i-тая координата точки x; мы пишем $x = [x_1, \ldots, x_r]$ и полагаем $|x| = (\sum_{i=1}^{r} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Для $\mathscr{K} \subset E_r$ обозначим, соответственно, через $\mathscr{K}^0$, $\overline{\mathscr{K}}$, $\mathsf{L}\mathscr{K}$ множество внутренних точек, замыкание и внешнюю меру Лебега множества $\mathscr{K}$. (Если надо подчеркнуть, что речь идёт о r-мерной лебеговской мере, то мы пишем L_r вместо L.) Если $s \geqq r$ — натуральные числа, то $\Omega\binom{s}{r}$ есть множество всех упорядоченных r-членных последовательностей ω вида $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_r]$, где $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — натуральные числа, $1 \leqq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_r \leqq s$. Отображение V множества $\Omega\binom{s}{r}$ в систему всех (конечных действительных) функций на множестве $\mathscr{M} \neq \emptyset$ назовём вектором типа (s, r) на $\mathscr{M}$. Функцию, сопоставленную отображением V элементу $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$, обозначим через V_ω и назовём её компонентой вектора $V = [V_\omega]$, $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$. Понятие вектора типа (r, r) отождествим с понятием функции и введём ещё понятие вектора типа $(s, 0)$; вектором типа $(s, 0)$ на $\mathscr{M}$ разумеется тоже функция на $\mathscr{M}$. Положим $|V(x)| = [\sum_\omega (V_\omega(x))^2]^{\frac{1}{2}}$, $\|V\|_{\mathscr{M}} = \sup_x |V(x)|$,

$x \in \mathscr{M}$. Если $\mathscr{M} \subset E_m$ и все функции V_ω непрерывны (измеримы по Борелю, ограничены и т. под.), то будем говорить, что вектор $V = [V_\omega]$ непрерывен (B — измерим, ограничен и т. д.). Если множество $\mathscr{M}$ открыто в E_m и все функции V_ω обладают непрерывными частными производными до порядка k включительно на $\mathscr{M}$, то скажем, что V есть вектор класса C_k на $\mathscr{M}$; будем говорить, что вектор V класса C_∞ на $\mathscr{M}$, если он класса C_k на $\mathscr{M}$ для всякого натурального k.

Если a, b — действительные числа и U, V — векторы типа (s, r) на $\mathscr{M}$, то $aU + bV$ есть вектор типа (s, r) на $\mathscr{M}$, компоненты которого определены соотношением $(aU + bV)_\omega = aU_\omega + bV_\omega$, $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$.

Пусть теперь V — вектор типа (s, r) и класса C_1 на открытом множестве $\mathscr{M} \subset E_s$, $s > r$. Тогда определим на $\mathscr{M}$ вектор $\nabla V = U$ типа $(s, r+1)$ следующим образом: Если $r = 0$ (так что V — функция), то положим $U = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} V, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s} V\right]$. Если $r > 0$, то для $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_{r+1}] \in \Omega\binom{s}{r+1}$ напишем $(\omega_i) = [\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{r+1}]$ и положим

$$U_\omega = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_{\omega_i}} V_{(\omega_i)}.$$

Замечание. Понятие вектора ∇V имеет важное значение в связи с теоремой Стокеса. Об этом см. [1]; сравни тоже последующий отдел 1,12.

1,2. Обозначение. Пусть A — произвольное множество индексов. Пусть каждому $\alpha \in A$ сопоставлено некоторое действительное число a_α. В случае $A = \emptyset$ полагаем по определению $\sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha = 0$. Если $A \neq \emptyset$ и $a_\alpha \geqq 0$ для всех $\alpha \in A$, то полагаем $\sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha = \sup\limits_{\Delta} \sum\limits_{\alpha \in \Delta} a_\alpha$, где верхняя грань берётся по отношению ко всем конечным подмножествам Δ множества A. (Нетрудно обнаружить, что $\sum\limits_{\alpha \in A} \alpha_\alpha = +\infty$ всегда, когда $a_\alpha > 0$ для несчётного множества индексов $\alpha \in A$.) Если не все числа a_α неотрицательны, то положим $a_\alpha^+ = \max(\alpha_\alpha, 0)$, $a_\alpha^- = \max(-a_\alpha, 0)$ и определим $\sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha^+ - \sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha^-$ в предположении, что имеет смысл разность в правой части этого равенства (т. е., что соответствующие суммы не являются одновременно бесконечными).

Если из-за типографских трудностей невозможно выписать под символом $\sum$ множество индексов, по которому надлежит произвести суммирование, то мы прибавим к этому символу некоторый значок и значение суммы поясним другим способом; при этом сумма, относящаяся ко всем α, удовлетворяющим условию **P**, записивается так: $\sum[\alpha;\ \alpha$ удовлетворяет

P].[1]) Так, например, запись $\sum^* \sum_n a_n$, $\sum_n = \sum[n;\, n$ целое, $m < a_n < m^2]$, $\sum^* = \sum[m;\, m$ — натуральное, $10 < m < 100]$ следует понимать следующим образом: В сумму $\sum_n$ входят все a_n, соответствующие целым n и удовлетворяющие неравенствам $m < a_n < m^2$, и в сумме $\sum^*$ надлежит просуммировать все члены, соответствующие натуральным m, где $10 < m < 100$.

1,3. Пусть $\mathscr{D} \subset E_r$ и пусть T — отображение множества $\mathscr{D}$ в пространство E_s. Будем говорить, что отображение T удовлетворяет условию Липшица (с константой λ) на множестве $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$, если справедлива импликация

$$(t^1, t^2 \in \mathscr{K}) \Rightarrow |T(t^1) - T(t^2)| \leqq \lambda |t^1 - t^2| .$$

Если множество $\mathscr{D}$ открыто и отображение T удовлетворяет условию Липшица на каждом компактном множестве $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$, то будем говорить, что T удовлетворяет условию Липшица локально на $\mathscr{D}$.

1,4. *Пусть F — функция на множестве $\mathscr{K} \subset E_r$, удовлетворяющая на этом множестве условию Липшица с константой λ. Тогда F обладает почти всюду на $\mathscr{K}^0$ полным дифференциалом. Далее, существуют функции F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ на E_r, обладающие следующими свойствами: F_n удовлетворяет на E_r условию Липшица с константой λ, обладает непрерывными частными производными первого порядка и $F_n \to F$ $(n \to \infty)$ равномерно на $\mathscr{K}$; частные производные первого порядка функций F_n ограничены по абсолютной величине константой λ и почти всюду на $\mathscr{K}^0$ сходятся к соответствующим частным производным функции F.*

Доказательство. Функцию F можно распространить на всё пространство E_r так, чтобы она удовлетворяла на E_r условию Липшица с константой λ (см. [8], лемма 1, стр. 341). По известной теореме Радемахера (см. [8], стр. 201) обладает тогда F почти всюду на E_r полным дифференциалом. В частности, частные производные первого порядка функции F определены почти всюду и ограничены по абсолютной величине константой λ. Положим $\mathscr{K}_n = E[u;\, u \in E_r,\ |u_i| \leqq 1/n,\ i = 1, \ldots, r]$ и определим функции F_n соотношением

$$F_n(t) = (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} F(t + u)\, \mathrm{d}u .$$

Из оценки $|F_n(t^1) - F_n(t^2)| \leqq (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} |F(t^1 + u) - F(t^2 + u)|\, \mathrm{d}u \leqq (2n)^r \,.$ $\int_{\mathscr{K}_n} \lambda |t^1 - t^2|\, \mathrm{d}u = \lambda |t^1 - t^2|$ видно, что функции F_n удовлетворяют на E_r условию Липшица с константой λ. Из неравенств

[1]) Всюду в этой статье мы будем пользоваться символом $\sum$ исключительно в качестве знака суммирования.

$$|F_n(t) - F(t)| = |(2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} [F(t+u) - F(t)]\,\mathrm{d}u| \leqq$$

$$\leqq (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} |F(t+u) - F(t)|\,\mathrm{d}u \leqq \lambda (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} |u|\,\mathrm{d}u \leqq \lambda \frac{1}{n} \sqrt{r}$$

вытекает, что $F_n \to F$ $(n \to \infty)$ равномерно на E_r.

Обозначим теперь через ∂ произвольный из дифференциальных символов $\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_r}$. По известным теоремам о дифференцировании интеграла по параметру (см. [9], теорема 108, стр. 281) получаем

$$\partial F_n(t) = (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n} \partial F(t+u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{1}$$

Если положить $\mathscr{K}_n(t) = E[u;\ u \in E_r,\ u - t \in \mathscr{K}_n]$, то соотношение (1) можно записать в виде

$$\partial F_n(t) = (2n)^r \int_{\mathscr{K}_n(t)} \partial F(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Из этой записи вытекает по теореме (6.3) из [9], стр. 118, что $\lim_{n\to\infty} \partial F_n(t) = \partial F(t)$ для почти всех t. Так как F_n удовлетворяет условию Липшица с константой λ, то $|\partial F_n(t)| \leqq \lambda$ для всех t.

Закрепим теперь n и покажем, что $\partial F_n(t)$ является непрерывной функцией на E_r. Итак, пусть $t^k \in E_r$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\lim_{k\to\infty} t^k = t^0$. Обозначим через $\chi_k(u)$ характеристическую функцию множества $\mathscr{K}_n(t^k)$ и выберем r-мерный куб $\mathscr{K}$ так, чтобы $\chi_k(u) = 0$ для всех $u \in E_r - \mathscr{K}$ и всех k. Если положить $G(u) = \partial F(u)$, то почти всюду на $\mathscr{K}$ имеем

$$\chi_k(u)\,G(u) \to \chi_0(u)\,G(u) \quad (k \to \infty)\,,$$

$$|\chi_k(u)\,G(u)| \leqq \lambda\,,$$

откуда вытекает, что при $k \to \infty$ справедливо соотношение

$$\partial F_n(t^k) = \int_{\mathscr{K}} \chi_k(u)\,G(u)\,\mathrm{d}u \to \int_{\mathscr{K}} \chi_0(u)\,G(u)\,\mathrm{d}u = \partial F_n(t^0)\,.$$

1,5. Пусть $\mathscr{D}$ — открытое множество в E_r и пусть $T = [T_1, \ldots, T_s]$ [2]) — отображение множества $\mathscr{D}$ в E_s, удовлетворяющее локально условию Липшица на $\mathscr{D}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(t;\,T)$ матрицу, в i-той строке и k-том столбце которой стоит элемент $\frac{\partial}{\partial t_i} T_k(t)$ $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq k \leqq s)$; как видно из отд. 1,4, символ $\mathfrak{M}(t;\,T)$ имеет смысл для почти всех $t \in \mathscr{D}$. Если $1 \leqq p \leqq s$ и $\omega \in \Omega\binom{s}{p}$, то обозначим через $\mathfrak{M}^{\omega}(t;\,T)$ матрицу, составленную из столбцов с индексами $\omega_1, \ldots, \omega_p$ матрицы $\mathfrak{M}(t;\,T)$ (в этом порядке).

[2]) $T_1, \ldots, T_s$ — такие функции на $\mathscr{D}$, что $T(t) = [T_1(t), \ldots, T_s(t)]$ для всех $t \in \mathscr{D}$.

Предположим теперь, что $s \geqq r$, и обозначим для $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$ символом $J^{\omega}(t; T)$ определитель матрицы $\mathfrak{M}^{\omega}(t; T)$; далее, положим $|\mathfrak{M}(t; T)| = \{\sum_{\omega}[J^{\omega}(t; T)]^2\}^{\frac{1}{2}}$, $\sum_{\omega} = \sum\left[\omega;\ \omega \in \Omega\binom{s}{r}\right]$. В частном случае $s = r$ обозначим через $J(t; T)$ определитель матрицы $\mathfrak{M}(t; T)$; тогда $|\mathfrak{M}(t; T)| = |J(t; T)|$ Функции $J^{\omega}(t; T)$, $|\mathfrak{M}(t; T)|$ определены почти всюду на $\mathscr{D}$ и измеримы (в смысле Лебега).

Пусть теперь $\int_{\mathscr{D}}|\mathfrak{M}(t; T)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Если F — ограниченная B-измеримая функция на $\mathscr{D}$, то для $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$ положим $Q^{\omega}(F; T, \mathscr{D}) = \int_{\mathscr{D}} F(t)\, J^{\omega}(t; T)\,.\,\mathrm{d}t$. Если G — ограниченная B-измеримая функция на множестве $\mathscr{V} = T(\mathscr{D})$, то нетрудно обнаружить, что функция F, определенная соотношением

$$F(t) = G(T(t))\,, \quad t \in \mathscr{D}\,,$$

является B-измеримой на множестве $\mathscr{D}$. Это оправдывает нас к определению

$$R^{\omega}(G; T, \mathscr{D}) = Q^{\omega}(F; T, \mathscr{D}),\ \omega \in \Omega\binom{s}{r}\,.$$

Предположим теперь, что V — ограниченный B-измеримый вектор типа (s, r) на $\mathscr{V}$ (соотв., на $\mathscr{D}$). Тогда полагаем

$$R(V; T, \mathscr{D}) = \sum_{\omega} R^{\omega}(V_{\omega}; T, \mathscr{D})$$

(соотв., $Q(V; T, \mathscr{D}) = \sum_{\omega} Q^{\omega}(V_{\omega}; T, \mathscr{D})$).

Нетрудно обнаружить, что $|R(V; T, \mathscr{D})| \leqq \|V\|_{\mathscr{V}}\,.\int_{\mathscr{D}}|\mathfrak{M}(t; T)|\,\mathrm{d}t$. Если a_1, a_2 — действительные числа, то — при очевидных предположениях о символах V^1, V^2 — имеет место равенство $R(a_1V^1 + a_2V^2; T, \mathscr{D}) = a_1R(V^1; \ldots) + a_2R(V^2; \ldots)$. Разумеется, что аналогичные соотношения имеют место и для функционала Q.

Условимся ещё в следующих обозначениях. Если $\mathscr{K}$ — r-мерный интервал (не обязательно открытый), то мы пишем $Q(V; T, \mathscr{K})$, $R(V; T, \mathscr{K})$ вместо $Q(V; T, \mathscr{K}^0)$, $R(V; T, \mathscr{K}^0)$ и т. под.

1,6. Определение. Пусть $\mathscr{K} = \bigtimes_{j=1}^{r} \langle\alpha_j^1, \alpha_j^2\rangle$ и пусть T — отображение границы $\dot{\mathscr{K}}$ интервала $\mathscr{K}$ в E_s, $s \geqq r - 1$, удовлетворяющее на $\dot{\mathscr{K}}$ условию Липшица. Если $r = 1$, то положим для каждой функции ($=$ вектора типа $(s, 0)$) G на множестве $T(\dot{\mathscr{K}})$

$$\widehat{R}(G; T, \mathscr{K}) = G(T(\alpha_1^2)) - G(T(\alpha_1^1))\,.$$

Пусть теперь $r > 1$ и $\mathscr{K}_j = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{p \neq j} \langle \alpha_p^1, \alpha_p^2 \rangle$. Определим отображение $T^{j,i}$ интервала $\mathscr{K}_j$ в E_s соотношением

$$T^{j,i}(u) = T(u_1, \ldots, u_{j-1}, \alpha_j^i, u_j, \ldots, u_{r-1}), \quad u = [u_1, \ldots, u_{r-1}] \in \mathscr{K}_j$$

$(1 \leqq j \leqq r, i = 1, 2)$. Отображение $T^{j,i}$ удовлетворяет, очевидно, условию Липшица на $\mathscr{K}_j$. Это даёт нам возможность определить для каждой B-измеримой ограниченной функции G на $T(\mathscr{H})$ и для каждого $\omega \in \Omega\binom{s}{r-1}$

$$\widehat{R}^\omega(G; T, \mathscr{K}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j-1} R^\omega(G; T^{j,i}, \mathscr{K}_j).$$

Если V — ограниченный B-измеримый вектор типа $(s, r-1)$ на $T(\mathscr{H})$, то положим

$$\widehat{R}(V; T, \mathscr{K}) = \sum_{\omega} \widehat{R}^\omega(V_\omega; T, \mathscr{K}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j-1} R(V; T^{j,i}, \mathscr{K}_j),$$

где $\sum\limits_{\omega} = \sum \left[\omega; \omega \in \Omega\binom{s}{r-1}\right]$.

Замечание. Пусть имеют место обозначения из предшествующего отдела. Положим ещё $\|\mathscr{K}\| = \max\limits_{1 \leqq j \leqq r} (\alpha_j^2 - \alpha_j^1)$. Если T удовлетворяет на $\mathscr{H}$ условию Липшица с константой λ, то $T^{j,i}$ удовлетворяет на $\mathscr{K}_j$ условию Липшица с той же константой λ и $|\mathfrak{M}(u; T^{j,i})| \leqq (r-1)!\, \lambda^{r-1} \binom{s}{r-1}^{\frac{1}{2}}$ для почти всех $u \in \mathscr{K}_j$. Отсюда получаем для каждого ограниченного B-измеримого вектора V типа $(s, r-1)$ на множестве $\mathscr{V} = T(\mathscr{H})$

$$|\widehat{R}(V; T, \mathscr{K})| \leqq \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{2} |R(V; T^{j,i}, \mathscr{K}_j)| \leqq \|V\|_{\mathscr{V}} \sum_{j} \sum_{i} \int_{\mathscr{K}_j} |\mathfrak{M}(u; T^{j,i})| \, \mathrm{d}u \leqq$$
$$\leqq (r-1)!\, 2\lambda^{r-1} \binom{s}{r-1}^{\frac{1}{2}} \|V\|_{\mathscr{V}} \sum_{j} \mathsf{L}\mathscr{K}_j.$$

Так как $\mathsf{L}\mathscr{K}_j \leqq \|\mathscr{K}\|^{r-1}$, то имеет место неравенство

$$|\widehat{R}(V; T, \mathscr{K})| \leqq r!\, 2 \binom{s}{r-1}^{\frac{1}{2}} (\lambda \|\mathscr{K}\|)^{r-1} \|V\|_{\mathscr{V}}. \tag{2}$$

Это неравенство справедливо и в случае $r = 1$.

1,7. *Пусть $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ — неперекрывающиеся*[3]) *компактные интервалы в E_r, соединением которых является интервал $\mathscr{K}$. Пусть U (соотв. V) — отображение границы $\mathscr{H}_{\mathscr{I}}$ интервала $\mathscr{I}$ (соотв. границы $\mathscr{H}_{\mathscr{J}}$ интервала $\mathscr{J}$) в E_s, $s \geqq r-1$, удовлетворяющее условию Липшица. Предположим, что $U = V$*

[3]) Т. е. $\mathscr{I}^0 \cap \mathscr{J}^0 = \emptyset$.

на $\mathscr{I} \cap \mathscr{J}$ и определим отображение T границы $\mathscr{H}$ интервала $\mathscr{K}$ в E_s соотношениями

$$T = U \text{ на } \mathscr{H} \cap \mathscr{I}\,, \quad T = V \text{ на } \mathscr{H} \cap \mathscr{J}\,.$$

Тогда T удовлетворяет условию Липшица на $\mathscr{H}$ и для каждого ограниченного B-измеримого вектора W типа $(s, r - 1)$ (определенного на $U(\mathscr{H}_{\mathscr{I}}) \cup \cup V(\mathscr{H}_{\mathscr{J}})$) имеет место равенство

$$\hat{R}(W; T, \mathscr{K}) = \hat{R}(W; U, \mathscr{I}) + \hat{R}(W; V, \mathscr{J})\,. \tag{3}$$

Доказательство. В случае $r = 1$ доказательство очевидно. Итак, пусть $r > 1$ и пусть $\mathscr{I} = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle b_j^1, b_j^2\rangle$, $\mathscr{J} = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle c_j^1, c_j^2\rangle$, $\mathscr{K} = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{r} \langle a_j^1, a_j^2\rangle$. В наших предположениях об интервалах $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}$ существует индекс j $(1 \leqq j \leqq r)$ так, что $\mathscr{I}_j = \mathscr{J}_j = \mathscr{K}_j$ (см. 1,6); кроме того, можно сразу предположить, что $a_j^1 = b_j^1$, $b_j^2 = c_j^1$, $c_j^2 = a_j^2$. Если $p \neq j$, то $\mathscr{I}_p$, $\mathscr{J}_p$ — неперекрывающиеся интервалы, соединением которых является $\mathscr{K}_p$. Отсюда получаем

$$R(W; U^{p,i}, \mathscr{I}_p) + R(W; V^{p,i}, \mathscr{J}_p) = R(W; T^{p,i}, \mathscr{K}_p)\,, \quad p \neq j, i = 1, 2\,. \tag{4}$$

Далее, на интервле $\mathscr{I}_j = \mathscr{J}_j = \mathscr{K}_j$ справедливы равенства $U^{j,1} = T^{j,1}$, $U^{j,2} = V^{j,1}$, $V^{j,2} = T^{j,2}$, так что

$$\sum_{i=1}^{2} (-1)^i [R(W; U^{j,i}, \mathscr{I}_j) + R(W; V^{j,i}, \mathscr{J}_j)] = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i R(W; T^{j,i}, \mathscr{K}_j)\,.$$

Отсюда и из (4) получаем по определению функционала $\hat{R}(\ldots)$ сразу (3).

1,8. *Пусть $\mathscr{K}$ — r-мерный компактный интервал и $\mathscr{D}$ — окрестность множества $\mathscr{K}$ в E_r. Пусть $T = [T_1, \ldots, T_s]$ — отображение множества $\mathscr{D}$ в E_s, $s \geqq r$, и пусть функции $T_1, \ldots, T_s$ обладают непрерывными частными производными первого порядка на $\mathscr{D}$. Пусть, далее, V — вектор типа $(s, r - 1)$ и класса C_1 на открытом множестве $\mathscr{O} \subset E_s$, $\mathscr{O} \supset T(\mathscr{D})$. Тогда имеет место равенство*

$$\hat{R}(V; T, \mathscr{K}) = R(\nabla V; T, \mathscr{K})\,.^{4)}$$

Доказательство. Если $r = 1$, то V — функция и ∇V — вектор типа $(s, 1)$, j-той компонентой которого является $\frac{\partial}{\partial x_j} V$. Полагая $\mathscr{K} = \langle \alpha^1, \alpha^2\rangle$, имеем тогда $\hat{R}(V; T, \mathscr{K}) = V(T(\alpha^2)) - V(T(\alpha^1)) = \int_{\mathscr{K}} \frac{\mathrm{d}V(T(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$

$$= \int_{\mathscr{K}} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_j} V(T(t))\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_j(t)\, \mathrm{d}t = R(\nabla V; T, \mathscr{K}).$$

---

[4]) См. тоже [1].

В дальнейшем будем предполагать, что $r > 1$. Для наглядности записи условимся ещё в следующих обозначениях. В течение этого доказательства мы будем символом $\varkappa$ обозначать элементы множества $\Omega\binom{s}{r-1}$, применяя символ ω лишь для обозначения элементов из $\Omega\binom{s}{r}$. Если $\varkappa = [\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}] \in \Omega\binom{s}{r-1}$ и $1 \leqq j \leqq s$, $j \neq \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}$, то $[\varkappa, j]$ обозначает r-членную последовательность из $\Omega\binom{s}{r}$, которая получается упорядочением чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}, j$ по их величине; если j находится на l-том месте последовательности $[\varkappa, j]$, то положим ещё $s(\varkappa, j) = (-1)^{l-1}$.

Пусть $\mathscr{K} = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{r} \langle \alpha_k^1, \alpha_k^2 \rangle$. Закрепим $\varkappa \in \Omega\binom{s}{r-1}$ и обозначим символом $J_{(k)}^{\varkappa}(t)$ определитель матрицы, которая получается вычеркиванием k-той строки из $\mathfrak{M}^{\varkappa}(t; T)$. Определим ещё на $\mathscr{D}$ функции $f, v_1, \ldots, v_r$ соотношениями

$$f(t) = V_{\varkappa}(T(t)) , \quad v_k(t) = (-1)^{k-1} J_{(k)}^{\varkappa}(t) .$$

Если считать v_k k-той компонентной вектора v (типа $(r, 1)$), то вектор v является соленоидальным (см. [6], определение 44, стр. 552). Придавая символам P_k, P то же значение, как и в [6], (см. определение 13 на стр. 529 и определение 15 на стр. 531), имеем

$$\sum_{i=1}^{2} (-1)^{k+i-1} R^{\varkappa}(V_{\varkappa}; T^{k,i}, \mathscr{K}_k) = \int\limits_{\mathscr{K}_k} [f(u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_k^2, u_k, \ldots, u_{r-1}) \,.$$

$$. \, v_k(u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_k^2, u_k, \ldots, u_{r-1}) - f(\ldots, \alpha_k^1, \ldots) \,.\, v_k(\ldots, \alpha_k^1, \ldots)] \, \mathrm{d}u =$$

$$= P_k(\mathscr{K}, f v_k), \widehat{R}^{\varkappa}(V_{\varkappa}; T, \mathscr{K}) = \sum_{k=1}^{r} P_k(\mathscr{K}, f v_k) = P(\mathscr{K}, f v).$$

По теореме 48 из [6], стр. 554, получаем

$$P(\mathscr{K}, f v) = \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_{k=1}^{r} v_k(t) \frac{\partial}{\partial t_k} f(t) \right] \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_{k=1}^{r} v_k(t) \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{\varkappa}(T(t)) \frac{\partial}{\partial t_k} T_j(t) \right] .$$

$$. \, \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{\varkappa}(T(t)) \, \sigma_j(t) \right] \mathrm{d}t ,$$

где

$$\sigma_j(t) = \sum_{k=1}^{r} v_k(t) \frac{\partial}{\partial t_k} T_j(t) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial t_k} T_j(t) \,.\, J_{(k)}^{\varkappa}(t) .$$

Эта сумма равняется определителю матрицы, которая получается из $\mathfrak{M}^{\varkappa}(t; T)$, если к ней прибавить столбец $\left[\frac{\partial}{\partial t_1} T_j(t), \ldots, \frac{\partial}{\partial t_r} T_j(t) \right]$, ставя его на первое место. Итак, $\sigma_j(t) = 0$ если j равняется некоторому из чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}$, $\sigma_j(t) = s(\varkappa, j)\, J^{[\varkappa, j]}(t, T)$ в случае $j \neq \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}$. Отсюда вытекает

$$\widehat{R}^{\varkappa}(V_\varkappa; T, \mathscr{K}) = P(\mathscr{K}, fv) = \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_j{}^{\varkappa} s(\varkappa, j) \frac{\partial}{\partial x_j} V_\varkappa(T(t))\, J^{[\varkappa, j]}(t, T)\right] \mathrm{d}t,$$

$$\sum_j{}^{\varkappa} = \sum [j;\ 1 \leqq j \leqq s,\ j \neq \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}].$$

Если $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_r] \in \Omega\binom{s}{r}$ и $1 \leqq l \leqq r$, то через (ω_l) обозначим $(r-1)$-членную последовательность из $\Omega\binom{s}{r-1}$, которую получим, вычеркнув из ω число ω_l. Тогда имеем

$$\widehat{R}(V; T, \mathscr{K}) = \sum_\varkappa \widehat{R}^{\varkappa}(V_\varkappa; T, \mathscr{K}) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_\varkappa \sum_j{}^{\varkappa} s(\varkappa, j) \frac{\partial}{\partial x_j} V_\varkappa(T(t)) \,.\, J^{[\varkappa, j]}(t, T)\right] \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathscr{K}} \left[\sum_\omega \left(\sum_{l=1}^{r} (-1)^{l-1} \frac{\partial}{\partial x_{\omega_l}} \,.\right.\right.$$

$$\left.\left. .\, V_{(\omega_l)}(T(t))\right) J^{\omega}(t; T)\right] \mathrm{d}t = R(\nabla V; T, \mathscr{K}).$$

1,9. Пусть $\mathscr{M} \subset E_r$ и пусть ${}^nT$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ — последовательность отображений множества $\mathscr{M}$ в E_s. Будем говорить, что отображения ${}^nT$ удовлетворяют одинаково условию Липшица (соотв., одинаково ограничены) на $\mathscr{M}$, если существует константа λ так, что

$|{}^nT(t^1) - {}^nT(t^2)| \leqq \lambda |t^1 - t^2|$ для всех n и всех $t^1, t^2 \in \mathscr{M}$ (соотв., $|{}^nT(t)| \leqq \lambda$ для всех n и всех $t \in \mathscr{M}$).

1,10. *Пусть F_n, G_n $(n = 0, 1, \ldots)$ — одинаково ограниченные измеримые функции на компактном интервале $\mathscr{K} \subset E_r$. Пусть $F_n \to F_0$ $(n \to \infty)$ равномерно на $\mathscr{K}$ и пусть*

$$\int\limits_{\mathscr{I}} G_n(t)\, \mathrm{d}t \to \int\limits_{\mathscr{I}} G_0(t)\, \mathrm{d}t \quad (n \to \infty)$$

для каждого компактного интервала $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$.

Тогда тоже

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathscr{I}} F_n(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_0(t)\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

для каждого интервала $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$.

Доказательство. Из теоремы 143 в [2], стр. 402, вытекает, что $\int\limits_{\mathscr{I}} F_0(t) \,.\, G_n(t)\, \mathrm{d}t \to \int\limits_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_0(t)\, \mathrm{d}t$ $(n \to \infty)$. Отсюда и из соотношений

$$|\int_{\mathscr{I}} F_n(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t| \leqq \|F_n - F_0\|_{\mathscr{I}} \cdot \|G_n\|_{\mathscr{I}} \cdot \mathsf{L}\mathscr{I} \to 0\,,$$

$$|\int_{\mathscr{I}} F_n(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_0(t)\, \mathrm{d}t\,| \leqq |\int_{\mathscr{I}} F_n(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t| +$$
$$+ |\int_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_n(t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} F_0(t)\, G_0(t)\, \mathrm{d}t|$$

получаем (5).

1,11. *Пусть* ${}^nT = [{}^nT_1, \ldots, {}^nT_s]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — *последовательность отображений компактного интервала* $\mathscr{K} \subset E_r$ *в* E_s. *Предположим, что для* $n \geqq 1$ *отображения* ${}^nT$ *удовлетворяют одинаково условию Липшица на* $\mathscr{K}$ *и функции* ${}^nT_1, \ldots, {}^nT_s$ *обладают на* $\mathscr{K}^0$ *непрерывными частными производными первого порядка. Далее, пусть* ${}^nT \to {}^0T$ $(n \to \infty)$ *равномерно на* $\mathscr{K}$.[5]) *Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если* $s \geqq r - 1$ *и если* V — *непрерывный вектор типа* $(s, r-1)$ *на* E_s, *то для каждого компактного интервала* $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$

$$\widehat{R}(V; {}^nT, \mathscr{I}) \to \widehat{R}(V; {}^0T, \mathscr{I}) \quad (n \to \infty)\,.$$

2. *Если* $s \geqq r$ *и если* W — *непрерывный вектор типа* (s, r) *на* E_s, *то*

$$R(W; {}^nT, \mathscr{I}) \to R(W; {}^0T, \mathscr{I}) \quad (n \to \infty)$$

для каждого компактного интервала $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$.

Доказательство. Пусть отображения ${}^nT$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют на $\mathscr{K}$ условию Липшица с константой λ; тогда нетрудно обнаружить, что также и ${}^0T$ удовлетворяет на $\mathscr{K}$ условию Липшица с той же константой.

Обозначим через $\boldsymbol{T}_r^s$ выше приведённое утверждение 1, через $\boldsymbol{U}_r^s$ утверждение 2. Доказательство этих утверждений разобъём на несколько шагов.

a) $\boldsymbol{U}_r^r \Rightarrow \boldsymbol{U}_r^s$ для всех $s \geqq r \geqq 1$.

Итак, пусть $s \geqq r \geqq 1$, и предположим, что $\boldsymbol{U}_r^r$ верно. Пусть символы ${}^nT$ $(n = 0, 1, \ldots)$, W имеют значение, указанное в утверждении. Закрепим $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_r] \in \Omega\binom{s}{r}$ и определим отображение ${}^n\widehat{T}$ интервала $\mathscr{K}$ в E_r соотношением ${}^n\widehat{T} = [{}^nT_{\omega_1}, \ldots, {}^nT_{\omega_r}]$. По утверждению $\boldsymbol{U}_r^r$, которое применим к отображению ${}^n\widehat{T}$ и функции (= вектору типа (r, r)), тождественно равной 1, имеем

$$\int_{\mathscr{I}} J^\omega(t; {}^nT)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^n\widehat{T})\, \mathrm{d}t \to \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^0\widehat{T})\, \mathrm{d}t = \int_{\mathscr{I}} J^\omega(t; {}^0T)\, \mathrm{d}t$$

---

[5]) Это значит, что функции $|{}^nT(t) - {}^0T(t)|$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся к нулю на $\mathscr{K}$.

для каждого компактного интервала $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$. Отсюда получаем по лемме 1,10

$$\int_{\mathscr{I}} W_\omega({}^nT(t))\, J^\omega(t; {}^nT)\, \mathrm{d}t \to \int_{\mathscr{I}} W_\omega({}^0T(t))\, J^\omega(t; {}^0T)\, \mathrm{d}t\,.$$

Так как элемент $\omega \in \Omega\binom{s}{r}$ избран совершенно произвольно, то имеем тоже

$$R(W; {}^nT, \mathscr{I}) = \sum_\omega \int_{\mathscr{I}} W_\omega({}^nT(t))\, J^\omega(t; {}^nT)\, \mathrm{d}t \to$$

$$\to \sum_\omega \int_{\mathscr{I}} W_\omega({}^0T(t))\,.\, J^\omega(t; {}^0T)\, \mathrm{d}t = R(W; {}^0T, \mathscr{I})\,,$$

чем доказательство импликации a) окончено.

b) $\mathbf{U}_r^s \Rightarrow \mathbf{T}_{r+1}^s$ для $s \geq r \geq 1$.

Предположим, что $\mathbf{U}_r^s$ ($s \geq r \geq 1$) верно. Пусть ${}^nT$ ($n = 0, 1, \ldots$) — последовательность отображений интервала $\mathscr{K} \subset E_{r+1}$ в E_s, удовлетворяющих всем предположениям нашего утверждения (в которых теперь заменим число r числом $r + 1$), и пусть V — непрерывный вектор типа (s, r) на E_s. Пусть $\mathscr{I} = \bigtimes_{j=1}^{r+1} \langle \alpha_j^1, \alpha_j^2 \rangle$ — произвольный компактный интервал, содержащийся в $\mathscr{K}$; определим отображение ${}^nT^{j,i}$ интервала $\mathscr{I}_j = \bigtimes_{k \neq j} \langle \alpha_k^1, \alpha_k^2 \rangle$ в E_s соотношением

$${}^nT^{j,i}(u) = {}^nT(u_1, \ldots, u_{j-1}, \alpha_j^i, u_j, \ldots, u_r)\,, \quad u \in \mathscr{I}_j\,.$$

По утверждению $\mathbf{U}_r^s$ имеем для каждого компактного интервала $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}_j$

$$R(V; {}^nT^{j,i}, \mathscr{J}) \to R(V; {}^0T^{j,i}, \mathscr{J}) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Подставляя сюда $\mathscr{J} = \mathscr{I}_j$, получаем $\hat{R}(V; {}^nT, \mathscr{I}) = \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j-1}\,.$ $.\, R(V; {}^nT^{j,i}, \mathscr{I}_j) \to \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j-1} R(V; {}^0T^{j,i}, \mathscr{I}_j) = \hat{R}(V; {}^0T, \mathscr{I})$. Этим доказана импликация b).

c) $\mathbf{T}_r^r \Rightarrow \mathbf{U}_r^r$.

Рассмотрение случая $r = 1$ предоставляем читателю.[6])

Итак, пусть $r > 1$ и предположим, что $\mathbf{T}_r^r$ верно. Пусть ${}^nT$ ($n = 0, 1, \ldots$) — последовательность отображений, удовлетворяющих всем предположениям нашего утверждения (теперь $s = r$). Пользуясь леммой 1,4, построим функции ${}^n\tilde{T}_k$, имеющие следующие свойства: Функции ${}^n\tilde{T}_k$ удовлетворяют на E_r условию Липшица и обладают всюду непрерывными частными про-

[6]) См. тоже теорему 150 из [2], стр. 424, и лемму 1,10.

изводными первого порядка, ограниченными по абсолютной величине константой λ; ${}^n\tilde{T}_k \to {}^0T_k$ $(n \to \infty)$ равномерно на $\mathscr{K}$, и частные производные первого порядка от функций ${}^n\tilde{T}_k$ сходятся при $n \to \infty$ почти всюду на $\mathscr{K}^0$ к соответствующим производным от функции ${}^0T_k$ $(1 \leqq k \leqq r)$. Пусть теперь $\mathscr{I}$ — произвольный компактный интервал, содержащийся в $\mathscr{K}$. Определяя отображение ${}^n\tilde{T}$ соотношением ${}^n\tilde{T} = [{}^n\tilde{T}_1, \ldots, {}^n\tilde{T}_r]$, имеем

$$\int_{\mathscr{I}} J(t; {}^n\tilde{T})\,\mathrm{d}t \to \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^0T)\,\mathrm{d}t \quad (n \to \infty)\,. \tag{6}$$

Обозначим для $1 \leqq i \leqq r$ символом (i) $(r-1)$-членную последовательность, которую получим, вычеркнув из r-членной последовательности $[1, \ldots, r]$ число i, и определим на E_r вектор $V = [V_{(i)}]$ типа $(r, r-1)$ соотношениями

$$V_{(1)}(x) = x_1\,, \quad V_{(i)}(x) = 0 \quad \text{для} \quad 1 < i \leqq r\,.$$

Тогда ∇V является функцией ($=$ вектором типа (r, r)), тождественно равной 1 на E_r, и по лемме 1,8 получаем

$$\widehat{R}(V; {}^n\tilde{T}, \mathscr{I}) = R(\nabla V; {}^n\tilde{T}, \mathscr{I}) = \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^n\tilde{T})\,\mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

$$\widehat{R}(V; {}^nT, \mathscr{I}) = \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^nT)\,\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Из $\boldsymbol{T}_r^r$ вытекает $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{R}(V; {}^n\tilde{T}, \mathscr{I}) = \widehat{R}(V; {}^0T, \mathscr{I}) = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{R}(V; {}^nT, \mathscr{I})$, что вместе с (7), (8) даёт

$$\left| \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^n\tilde{T})\,\mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^nT)\,\mathrm{d}t \right| \to 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Отсюда и из (6) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^nT)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathscr{I}} J(t; {}^0T)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

для произвольного компактного интервала $\mathscr{I} \subset \mathscr{K}$. Если W — непрерывная функция ($=$ вектор типа (r, r)) на E_r, то из (9) получим по лемме 1,10

$$R(W; {}^nT, \mathscr{I}) = \int_{\mathscr{I}} W({}^nT(t))\, J(t; {}^nT)\,\mathrm{d}t \to \int_{\mathscr{I}} W({}^0T(t))\, J(t; {}^0T)\,\mathrm{d}t = R(W; {}^0T, \mathscr{I}).$$

Этим доказана импликация c).

Нетрудно обнаружить, что $\boldsymbol{T}_1^s$ имеет место для всех натуральных s. Отсюда и из импликаций $\boldsymbol{T}_r^r \Rightarrow \boldsymbol{U}_r^r \Rightarrow \boldsymbol{U}_r^{r+1} \Rightarrow \boldsymbol{T}_{r+1}^{r+1} \Rightarrow \boldsymbol{U}_{r+1}^{r+1}$ (см. a), b), c)) вытекает, что $\boldsymbol{U}_r^r$, $\boldsymbol{T}_r^r$ справедливы для всех натуральных r. Наконец, из a) и b) видно, что $\boldsymbol{U}_r^s$, $\boldsymbol{T}_{r+1}^s$ имеют место для всех $s \geqq r \geqq 1$. Этим доказательство нашего утверждения полностью окончено.

1,12. *Пусть $\mathscr{K}$ — компактный интервал в E_r и пусть T — отображение интервала $\mathscr{K}$ в E_s, $s \geqq r$, удовлетворяющее на $\mathscr{K}$ условию Липшица. Пусть*

$\mathscr{O}$ — открытое множество в E_s, $\mathscr{O} \supset T(\mathscr{K})$, и пусть V — вектор типа $(s, r-1)$ и класса C_1 на $\mathscr{O}$. Тогда

$$\widehat{R}(V; T, \mathscr{K}) = R(\nabla V; T, \mathscr{K}) . \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $T = [T_1, \ldots, T_s]$. Пользуясь леммой 1,4 определим на E_r функции ${}^nT_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы выполнялись следующие требования: Функции ${}^nT_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют на E_r одинаково условию Липшица, обладают непрерывными частными производными первого порядка и ${}^nT_k \to T_k$ $(n \to \infty)$ равномерно на $\mathscr{K}$. Определим отображение ${}^nT$ соотношением ${}^nT = [{}^nT_1, \ldots, {}^nT_s]$. Если выбрать окрестность $\mathscr{D}$ интервала $\mathscr{K}$ в E_r достаточно малой, то для всех достаточно больших n имеем ${}^nT(\mathscr{D}) \subset \mathscr{O}$ (отметим, что отображения ${}^nT$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют на E_r одинаково условию Липшица) и по лемме 1,8 получаем

$$\widehat{R}(V; {}^nT, \mathscr{K}) = R(\nabla V; {}^nT, \mathscr{K}) .$$

Отсюда получим предельным переходом (см. лемму 1,11) равенство (10).

Замечание. Предшествующая лемма, которая понадобится нам в дальнейшем, является, по существу, частным случаем теоремы Стокеса. Читатель, интересующийся библиографией этого вопроса, найдёт многочисленные указания в работе [5].

II

В отд. 2,12 мы определим „замкнутые системы" отображений из E_r в E_{r+1}. В отд. 2,13 введём понятие индекса точки по отношению к такой замкнутой системе. Некоторые свойства этого индекса рассмотрены в отд. 2,18, 2,21, 2,28, 2,29, его значение в связи с поверхностным интегралом пояснено в отд. 2,31.

2,1. Обозначение. Положим $d_1 = 2$, $d_p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} \mathrm{d}\xi$ для $p > 1$, $c_r = \prod\limits_{p=1}^{r} d_p$.

Замечание. Число c_r равно площади сферы $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 = 1$.

2,2. *Если $u \in E_r$, то определим на $E_r - \{u\}$ вектор $W^{u,r}$ типа $(r, r-1)$ следующим образом. Для $r = 1$ положим*

$$W^{u,1}(t) = \operatorname{sgn}(t - u) .$$

В случае $r > 1$ обозначим для $1 \leqq i \leqq r$ символом (i) $(r-1)$-членную последовательность, которую получим, вычеркнув из $[1, \ldots, r]$ число i, и положим $W^{u,r} = [W^{u,r}_{(i)}]$, где

$$W^{u,r}_{(i)}(t) = (-1)^{i-1} \frac{t_i - u_i}{|u - t|^r}, \quad 1 \leqq i \leqq r .$$

Тогда $W^{u,r}$ является вектором класса C_∞ на множестве $E_r - \{u\}$ и удовлетворяет на этом множестве соотношению $\nabla W^{u,r} = 0$.

Доказательство. Очевидно, что $W^{u,r}$ есть вектор класса C_∞ на множестве $E_r - \{u\}$. Если положить $\nabla W^{u,r} = U$, то U — бесконечно дифференцируемая функция (= вектор типа (r, r)) на $E_r - \{u\}$. Отметим, что для $r > 2$ (соотв., $r = 2$) имеем $(2 - r)\, W^{u,r}_{(i)}(t) = (-1)^i \frac{\partial}{\partial t_i} |u - t|^{2-r}$ $\left(\text{соотв., } W^{u,r}_{(i)}(t) = (-1)^i \frac{\partial}{\partial t_i} \lg |u - t|\right)$; итак, $U(t) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial t_i} W^{u,r}_{(i)}(t) =$
$= -\frac{1}{2-r} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} |u - t|^{2-r} = 0$ $\left(\text{соотв., } U(t) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t^2} \lg |u - t| = 0\right)$.
В случае $r = 1$ наше утверждение вполне очевидно.

2,3. Определение. Пусть $\mathscr{K}$ — компактный интервал в E_r и пусть T — орображение границы $\mathscr{H}$ интервала $\mathscr{K}$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{H}$ условию Липшица. Определим на E_r функцию $\eta_r(u; T, \mathscr{K})$ следующим образом. Для $u \in T(\mathscr{H})$ положим $\eta_r(u; T, \mathscr{K}) = 0$. Если $u \in E_r - T(\mathscr{H})$, то полагаем по определению

$$\eta_r(u; T, \mathscr{K}) = \frac{1}{c_r} \widehat{R}(W^{u,r}; T, \mathscr{K})\,.$$

2,4. *Пусть $\mathscr{K}$ — компактный интервал в E_r и пусть T — отображение интервала $\mathscr{K}$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{K}$ условию Липшица. Тогда*

$$\eta_r(u;\, T, \mathscr{K}) = 0 \quad \text{для} \quad u \in E_r - T(\mathscr{K})\,.$$

Доказательство. По лемме 2,2 имеем $\nabla W^{u,r} = 0$ на множестве $E_r - \{u\} \supset T(\mathscr{K})$. Отсюда и из 1,12 вытекает $c_r \eta_r(u; T, \mathscr{K}) = \widehat{R}(W^{u,r}; T, \mathscr{K}) = R(\nabla W^{u,r}; T, \mathscr{K}) = 0$.

2,5. *Пусть T — отображение компактного интервала $\mathscr{J} \subset E_r$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{J}$ условию Липшица. Пусть $t \in \mathscr{J}^0$, $T(t) = u$ и $T^{-1}(u) = \{t\}$. Тогда $\eta_r(u; T, \mathscr{I}) = \eta_r(u, T, \mathscr{J})$ для каждого компактного интервала $\mathscr{I}$, где $t \in \mathscr{I}^0 \subset \mathscr{J}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}_1, \ldots, \mathscr{K}_k$ — компактные интервалы, образующие вместе с интервалом $\mathscr{I}$ разбиение интервала $\mathscr{J}$ на неперекрывающиеся интервалы. Так как $T^{-1}(u) \subset \mathscr{I}^0$, то u non $\in T(\mathscr{K}_j)$ и $\eta_r(u; T, \mathscr{K}_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$. Из соотношения $\eta_r(u; T, \mathscr{J}) = \eta_r(u; T, \mathscr{I}) + \sum_{j=1}^{k} \eta_r(u; T, \mathscr{K}_j)$ вытекает наше утверждение.

2,6. *Пусть $\mathscr{D}$ — область в E_r и пусть T — непрерывное отображение множества $\mathscr{D}$ в E_r. Обозначим через $\mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ множество всех точек $t \in \mathscr{D}$, которые являются изолированными точками множества $T^{-1}(T(t))$. Тогда $\mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ является борелевским множеством.*

Доказательство. См. [8], лемма 1 на стр. 186.

2,7. Определение. Пусть имеют место обозначения из предшествующего отдела и пусть T — отображение множества $\mathscr{D}$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Для $t \in \mathscr{D} - \mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ положим $\mu_r(t; T) = 0$. Если $t \in \mathscr{M}(T, \mathscr{D})$, то выберем последовательность интервалов $\mathscr{I}_n$ так, чтобы $t \in \mathscr{I}_n^0$, $\|\mathscr{I}_n\| \to 0$ для $n \to \infty$ (см. замечание из отд. 1,6) и положим $\mu_r(t; T) = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_r(T(t); T, \mathscr{I}_n)$.

Замечание. Из отд. 2,5 видно, что число $\mu_r(t; T)$ не зависит от того, каким образом мы выбрали последовательность $\mathscr{I}_n$; этим и оправдано наше определение.

2,8. *Закрепим натуральное число k, $1 \leqq k \leqq r + 1$. Для $x \in E_{r+1}$ напишем $\widehat{x} = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{r+1}]$. Если $u \in E_r$, $\xi \in E_1$ и если F — функция от $r + 1$ переменных, то её значение в точке $[u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r]$ обозначим через $F(u, \xi)$. Символом (i) (соотв., (i, j)) обозначим r-членную (соотв., $(r - 1)$-членную) последовательность, которую получим, вычеркнув из $[1, \ldots, r + 1]$ число i (соотв., числа i, j).*

Пусть $\mathscr{B}$ — замкнутое подмножество в E_r и пусть $\mathscr{P}$ — множество всех точек $x \in E_{r+1}$, для которых $\widehat{x}$ non $\in \mathscr{B}$. Пусть, далее, W есть вектор типа $(r + 1, r)$ и класса C_n на $\mathscr{P}$, удовлетворяющий на этом множестве соотношению $\nabla W = 0$. Предположим ещё, что существует число α и функции $F_1, \ldots, F_r$ класса C_n на $E_r - \mathscr{B}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial u_j}F_j(u) + \sum_{j=k}^{r}(-1)^j\frac{\partial}{\partial u_j}F_j(u) = W_{(k)}(u, \alpha)\,, \quad u \in E_r - \mathscr{B}\,.$$

Определим на множестве $\mathscr{P}$ вектор V типа $(r + 1, r - 1)$ следующим образом. Если $r > 1$, то положим

$$V_{(i,j)}(x) = 0 \quad \textit{для} \quad i \neq k \neq j\,,$$

$$V_{(i,k)}(x) = F_i(\widehat{x}) + (-1)^k\int_\alpha^{x_k} W_{(i)}(\widehat{x}, \xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \textit{для} \quad 1 \leqq i < k\,,$$

$$V_{(k,i)}(x) = F_{i-1}(\widehat{x}) + (-1)^{k-1}\int_\alpha^{x_k} W_{(i)}(\widehat{x}, \xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \textit{для} \quad k < i \leqq r + 1\,.$$

Если $r = 1$, то функция ($=$ вектор типа $(2,0)$) V определена соотношением

$$V(x) = (-1)^k F_1(\widehat{x}) + \int_\alpha^{x_k} W_k(\widehat{x}, \xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Тогда V есть вектор класса C_n на $\mathscr{P}$, удовлетворяющий на этом множестве соотношению $\nabla V = W$.

Доказательство. Предоставляя читателю исследование случая $r = 1$, предположим сразу, что $r > 1$. Нетрудно обнаружить, что V есть вектор класса C_n на $\mathscr{P}$. Полагая $\nabla V = [U_{(i)}]$, имеем для $x \in \mathscr{P}$ и $i > k$

$$U_{(i)}(x) = \sum_{j \neq i,k} (-1)^{\cdots} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{(i,j)}(x) + (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_k} V_{(k,i)}(x) = W_{(i)}(x)\,;$$

если $i < k$, то

$$U_{(i)}(x) = \sum_{j \neq k,i} (-1)^{\cdots} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{(i,j)}(x) + (-1)^{k} \frac{\partial}{\partial x_k} V_{(k,i)}(x) = W_{(i)}(x)\,.$$

Наконец,

$$U_{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{(j,k)}(x) + \sum_{j=k+1}^{r+1} (-1)^{j} \frac{\partial}{\partial x_j} V_{(k,j)}(x) =$$

$$= W_{(k)}(\widehat{x}, \alpha) + (-1)^k \int_{\alpha}^{x_k} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} W_{(j)}(\widehat{x}, \xi) \right) \mathrm{d}\xi\,.$$

Заметив, что $\sum_{j \neq k} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} W_{(j)}(x) = (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_k} W_{(k)}$, получим

$$U_{(k)}(x) = W_{(k)}(\widehat{x}, \alpha) + \int_{\alpha}^{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} W_{(k)}(\widehat{x}, \xi)\, \mathrm{d}\xi = W_{(k)}(x)\,.$$

Итак, $U = W$.

2,9. *Пусть* $y \in E_{r+1}$, $\mathscr{P}_y = E[x;\ x \in E_{r+1},\ \widehat{x} \neq \widehat{y}]$. *Положим*

$$I_k(x;\, y) = \int_{y_k}^{x_k} [|\widehat{x} - \widehat{y}|^2 + (\xi - y_k)^2]^{-\frac{r+1}{2}}\, \mathrm{d}\xi\,, \quad x \in \mathscr{P}_y\,.$$

Определим на множестве $\mathscr{P}_y$ *вектор* V^y *типа* $(r + 1,\ r - 1)$ *следующим образом. Если* $r > 1$, *то полагаем*

$$V^y_{(i,j)}(x) = 0 \quad \textit{для} \quad i \neq k \neq j\,,$$

$$V^y_{(i,k)}(x) = (-1)^{i+k-1}(x_i - y_i)\, I_k(x;\, y) \quad \textit{для} \quad 1 \leqq i < k\,,$$

$$V^y_{(k,i)}(x) = (-1)^{i+k}\,(x_i - y_i)\, I_k(x;\, y) \quad \textit{для} \quad k < i \leqq r + 1\,.$$

В случае $r = 1$ *функция* (*вектор типа* (2,0)) *определена соотношением*

$$V^y(x) = (-1)^k(\widehat{x} - \widehat{y})\, I_k(x;\, y)\,.$$

Тогда V^y *есть вектор класса* C_∞ *на* $\mathscr{P}_y$, *удовлетворяющий на этом множестве соотношению*

$$\nabla V^y = W^{y,r+1}\,.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 2,8. Достаточно поставить $\mathscr{B} = \{\widehat{y}\}$, $\alpha = y_k$, $F_1 = \ldots = F_r = 0$, $W = W^{y,r+1}$ (отметим, что $W^{y,r+1}_{(k)}(u, y_k) = 0$). Тогда вектор V из отд. 2,8 является вектором класса C_∞ на $\mathscr{P} = \mathscr{P}_y$ и равен на этом множестве выше определенному вектору V^y.

2,10. *Пусть* $p > 1$, $F_p(h, c) = \int\limits_0^c (h + \xi^2)^{-\frac{p}{2}}\, \mathrm{d}\xi$ $(h > 0)$. *Определяя* d_p *по отд.* 2,1, *имеем*

$$|F_p(h, c) - \tfrac{1}{2} d_p h^{-\frac{p-1}{2}} \operatorname{sgn} c| \leqq \int\limits_{|c|}^{\infty} \xi^{-p}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Доказательство. Очевидно, что можно ограничиться случаем $c > 0$. Тогда имеем

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_p = \int\limits_0^\infty \left(1 + \frac{\eta^2}{h}\right)^{-\frac{p}{2}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{h}} = h^{\frac{p-1}{2}} \int\limits_0^\infty (h + \xi^2)^{-\frac{p}{2}}\, \mathrm{d}\xi\,,$$

$$\tfrac{1}{2} d_p h^{-\frac{p-1}{2}} - F_p(h, c) = \int\limits_c^\infty (h + \xi^2)^{-\frac{p}{2}}\, \mathrm{d}\xi < \int\limits_c^\infty \xi^{-p}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

2,11. *Пусть имеют место обозначения из отд.* 2,9. *Положим ещё*

$$\lambda(x; y) = |\hat{x} - \hat{y}| \,.\, \int\limits_{|x_k - y_k|}^{\infty} \xi^{-(r+1)}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Если $r > 1$, *то для* $x \in \mathscr{P}_y$ *справедливы оценки*

$$|V^y_{(i,k)}(x) - (-1)^k\, \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}(x_k - y_k) \,.\, W^{\hat{y},r}_{(i)}(\hat{x})| \leqq \lambda(x; y) \qquad \text{для} \quad i < k\,,^{7)}$$

$$|V^y_{(i,k)}(x) - (-1)^k\, \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}(x_k - y_k) \,.\, W^{\hat{y},r}_{(i-1)}(\hat{x})| \leqq \lambda(x; y) \qquad \text{для} \quad i > k\,.$$

В случае $r = 1$ *имеет место неравенство*

$$|V^y(x) - (-1)^k\, \tfrac{1}{2} d_2 \operatorname{sgn}(x_k - y_k) \,.\, W^{\hat{y},1}(\hat{x})| \leqq \lambda(x; y)\,, \qquad x \in \mathscr{P}_y\,.$$

Доказательство. Пусть, например, $r > 1$ и $i < k$. Полагая $h = |\hat{x} - \hat{y}|^2$, получаем по отд. 2,10, 2,9 и 2,2

$$\left|V^y_{(i,k)}(x) - (-1)^k \frac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}(x_k - y_k) \,.\, W^{\hat{y},r}_{(i)}(\hat{x})\right| = \Big|(-1)^{i+k-1}(x_i - y_i) \,.$$

$$\cdot \int\limits_0^{x_k - y_k} (h + \xi^2)^{-\frac{r+1}{2}}\, \mathrm{d}\xi - (-1)^k \frac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}(x_k - y_k) \,.\, (-1)^{i-1} \frac{x_i - y_i}{h^{\frac{r}{2}}}\Big| =$$

$$= |x_i - y_i| \,.\, \left|\int\limits_0^{x_k - y_k} (h + \xi^2)^{-\frac{r+1}{2}}\, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}(x_k - y_k)\, h^{-\frac{r}{2}}\right| \leqq$$

$$\leqq |x_i - y_i| \,.\, \int\limits_{|x_k - y_k|}^{\infty} \xi^{-(r+1)}\, \mathrm{d}\xi \leqq \lambda(x; y)\,.$$

Аналогично можно рассмотреть случаи $i > k$ и $r = 1$.

---

[7]) Символ (i, k) имеет здесь то же самое значение, как и в отд. 2,8; напротив, символом (i) мы пользуемся лишь для $i \leqq r$ в смысле отд. 2,2, т. е. для обозначения $(r - 1)$-членной последовательности $[1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, r]$.

2,12. Определение. Пусть Λ — счётное (или конечное) множество индексов. Пусть каждому $\alpha \in \Lambda$ сопоставлено действительное число σ_α и отображение T^α области $\mathscr{D}_\alpha \subset E_r$ в E_{r+1}, удовлетворяющее на $\mathscr{D}_\alpha$ локально условию Липшица. Пусть, далее,

$$(a) \qquad \sum_{\alpha \in \Lambda} (1 + |\sigma_\alpha|) \int_{\mathscr{D}_\alpha} |\mathfrak{M}(t; T^\alpha)| \, \mathrm{d}t < + \infty .$$

Обозначая через $\mathfrak{S}$ последовательность $\{T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha, \sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, полагаем по определению для каждой B-измеримой ограниченной функции F на множестве $\mathscr{V} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha)$

$$R^\omega(F; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha R^\omega(F; T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha) , \quad \omega \in \Omega \begin{pmatrix} r+1 \\ r \end{pmatrix}.$$

Далее, для каждого ограниченного B-измеримого вектора W типа $(r + 1, r)$ на множестве $\mathscr{V}$ положим

$$R(W; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha R(W; T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha) .$$

Скажем, что последовательность $\mathfrak{S}$ *замкнута*, если имеет место (a) и если, кроме того, выполняется следующее предположение:

(b) *Множество $\mathscr{V}$ ограничено и для каждого вектора W типа $(r + 1, r)$ и класса C_∞ на E_{r+1}, удовлетворяющего на E_{r+1} соотношению $\nabla W = 0$, имеет место равенство*

$$R(W; \mathfrak{S}) = 0 .$$

2,13. Определение. Пусть имеют место обозначения из отд. 2,12. Предположим, что соответствующая последовательность $\mathfrak{S}$ замкнута (т. е. выполняются условия (a), (b)). Определим на множестве $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ функцию $\iota(y; \mathfrak{S})$ равенством

$$\iota(y; \mathfrak{S}) = \frac{1}{c_{r+1}} R(W^{y,r+1}; \mathfrak{S}) ;$$

здесь c_{r+1} — константа из отд. 2,1, $W^{y,r+1}$ — вектор, определенный в отд. 2,2.

2,14. Обозначение. Если $\mathscr{A} \subset E_{r+1}$ и $u \in E_r$, то напишем $\mathscr{A}^i_u = E[\xi; \xi \in E_1, [u_1, \ldots, u_{i-1}, \xi, u_{i+1}, \ldots, u_r] \in \mathscr{A}]$. Положим ещё

$$\pi_i \mathscr{A} = E[u; u \in E_r, \mathscr{A}^i_u \neq \emptyset], \; i = 1, \ldots, r + 1.$$

2,15. *Пусть V — вектор типа (s, r) и класса C_2 на открытом множестве $\mathscr{G} \subset E_s$, $s \geqq r + 2$. Тогда $\nabla(\nabla V) = 0$ на $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Положим $\nabla V = W$, $\nabla W = U$. Тогда $W^\varkappa = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\varkappa_j}} V^{(\varkappa_j)}$, $\varkappa \in \Omega \begin{pmatrix} s \\ r+1 \end{pmatrix}$, и для $\omega \in \Omega \begin{pmatrix} s \\ r+2 \end{pmatrix}$ имеем $U^\omega = \sum_{k=1}^{r+2} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{\omega_k}} \cdot$

$$\cdot W^{(\omega_k)} = \sum_{k=1}^{r+2} (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial^2 V^{((\omega_k)_j)}}{\partial x_{(\omega_k)_j} \partial x_{\omega_k}} = \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{k+j} \frac{\partial^2 V^{((\omega_k)_j)}}{\partial x_{(\omega_k)_j} \partial x_{\omega_k}} .$$

Если $j < k$, то $(\omega_k)_j = \omega_j$, $((\omega_k)_j) = (\omega_j, \omega_k)$ [этот символ обозначает, разумеется, r-членную последовательность из $\Omega\binom{s}{r}$, которую получим, вычеркнув из ω числа ω_j, ω_k]; напротив, для $j \geqq k$ имеем $(\omega_k)_j = \omega_{j+1}$, $((\omega_k)_j) = (\omega_k, \omega_{j+1})$. Итак,

$$U^\omega = \sum_{j<k} (-1)^{j+k} \frac{\partial^2 V^{(\omega_j, \omega_k)}}{\partial x_{\omega_j} \partial x_{\omega_k}} + \sum_{j \geqq k} (-1)^{k+j} \frac{\partial^2 V^{(\omega_k, \omega_{j+1})}}{\partial x_{\omega_k} \partial x_{\omega_{j+1}}}.$$

Полагая во второй сумме $k = m$, $j + 1 = n$, получим

$$U^\omega = \sum_{j<k} \ldots + \sum_{m<n} (-1)^{m+n+1} \frac{\partial^2 V^{(\omega_m, \omega_n)}}{\partial x_{\omega_m} \partial x_{\omega_n}} = \sum_{j<k} \ldots - \sum_{j<k} \ldots = 0.$$

2,16. Обозначение. Если T — отображение множества $\mathscr{D} \subset E_r$ в E_r и $u \in E_r$, то обозначим через $N(u; T)$ число точек множества $T^{-1}(u)$ $(0 \leqq N(u, T) \leqq +\infty)$.

2,17. *Пусть T — отображение открытого множества $\mathscr{D} \subset E_r$ в E_{r+1}, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Определим отображение T множества $\mathscr{D}$ в E_r соотношением*

$$(t \in \mathscr{D},\ T(t) = x) \Rightarrow \widehat{T}(t) = \widehat{x}$$

(см. отд. 2,8). Пусть $t^0 \in \mathscr{D}$ и пусть $\mathscr{K}(\varepsilon)$ — r-мерный куб диаметра ε с центром в точке t^0. Предположим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ справедлива импликация

$$(t \in \mathscr{K}(\varepsilon_0),\ t \neq t^0) \Rightarrow \widehat{T}(t) \neq \widehat{T}(t^0).$$

Пусть, далее, $y \in E_{r+1}$, $\widehat{y} = \widehat{T}(t^0)$, $y_k \neq T_k(t^0)$. Определяя вектор V^y по отд. 2,9, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \widehat{R}(V^y; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} c_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k]\, \mu_r(t^0; \widehat{T})$$

(см. отд. 2,7).

Доказательство. Предположим сначала, что $r > 1$. По отд. 2,11 и 2,9 получаем для $t \in \mathscr{K}(\varepsilon_0)$, $t \neq t^0$

$$V_{(i,j)}(T(t)) = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k \neq j,$$

$$V_{(i,k)}(T(t)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t) - y_k] \,.\, W^{\hat{y},r}_{(i)}(\widehat{T}(t)) + \Theta_i(t)\, \lambda(T(t); y),$$

$$|\Theta_i(t)| \leqq 1, \quad 1 \leqq i < k,$$

$$V_{(k,i)}(T(t)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t) - y_k] \,.\, W^{\hat{y},r}_{(i-1)}(\widehat{T}(t)) + \Theta_i(t)\, \lambda(T(t); y),$$

$$|\Theta_i(t)| \leqq 1, \quad k < i \leqq r + 1.$$

Если выбрать ε_0 достаточно малым, то $|T_k(t) - y_k| \geqq \delta > 0$ для всех $t \in \mathscr{K}(\varepsilon_0)$; в частности, $\operatorname{sgn}[T_k(t) - y_k] = \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k]$, $t \in \mathscr{K}(\varepsilon_0)$. Далее, так как $\widehat{T}(t) - \widehat{y} = \widehat{T}(t) - \widehat{T}(t^0) \to 0$ $(t \to t^0)$, то $\lambda(T(t); y) \to 0$ для $t \to t^0$. Отсюда, из замечания к отд. 1,6 и из выше приведенных соотношений получаем для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{R}^{(i,k)}(V^y_{(i,k)}; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.$$
$$. \widehat{R}^{(i)}(W^{\hat{y},r}_{(i)}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1),^{8)} \quad \text{если} \quad 1 \leqq i < k \,,$$
$$\widehat{R}^{(k,i)}(V^y_{(k,i)}; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.$$
$$. \widehat{R}^{(i-1)}(W^{\hat{y},r}_{(i-1)}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1), \quad \text{если} \quad k < i \leqq r + 1 \,,$$
$$\widehat{R}^{(i,j)}(V^y_{(i,j)}; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k \neq j \,.$$

Итак, $\widehat{R}(V^y; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = \sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{r+1} \widehat{R}^{(i,j)}(V^y_{(i,j)}; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.$

$$. \sum_{i=1}^{r} \widehat{R}^{(i)}(W^{\hat{y},r}_{(i)}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1) = (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.$$

$. \widehat{R}(W^{\hat{y},r}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1) =$ (см. определение 2,3) $= (-1)^k \tfrac{1}{2} d_{r+1}$. $. \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.\, c_r \eta_r(\widehat{y}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1)$. По отд. 2,5 и 2,7 имеем для $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ равенство $\eta_r(\widehat{y}; \widehat{T}, \mathscr{K}(\varepsilon)) = \mu_r(t^0; T)$. Заметив ещё, что $d_{r+1} c_r = c_{r+1}$ (см. отд. 2,1), получаем $\widehat{R}(V^y; T, \mathscr{K}(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} c_{r+1} \operatorname{sgn}[T_k(t^0) - y_k] \,.$ $. \mu_r(t^0; \widehat{T}) + o_\varepsilon(1)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрение более простого случая $r = 1$ предоставляется читателю.

2,18. *Пусть имеют место обозначения и предположения* (*a*), (*b*) *из отд.* 2,12. *Закрепим натуральное число* k $(1 \leqq k \leqq r + 1)$ *и определим для каждого* $\alpha \in A$ *отображение* $\widehat{T}^\alpha$ *множества* $\mathscr{D}_\alpha$ *в* E_r *соотношением*

$$(t \in \mathscr{D}_\alpha, \, T^\alpha(t) = x) \Rightarrow \widehat{T}^\alpha(t) = \widehat{x}$$

(*см. отд.* 2,8). *Предположим, что* $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ *и*

$$\text{(11)} \qquad \widehat{y} \in E_r - \pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}), \quad \sum_{\alpha \in A} N(\widehat{y}; \widehat{T}^\alpha) < +\infty \,.$$

Тогда справедливо равенство

$$\text{(12)} \qquad 2\iota(y; \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_t \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha) \operatorname{sgn}[T^\alpha_k(t) - y_k] \,,$$

$$\text{где} \quad \sum_t = \sum [t; \, t \in \mathscr{D}_\alpha \,, \quad \widehat{T}^\alpha(t) = \widehat{y}] \,.$$

---

[8]) $o_\varepsilon(1) \to 0$ для $\varepsilon \to 0+$.

Доказательство. Полагая $(\widehat{T^\alpha})^{-1}(\hat{y}) = \{t^{\alpha,1}, \ldots, t^{\alpha,s_\alpha}\}$, обозначим через $\mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)$ r-мерный куб диаметра ε с центром к точке $t^{\alpha,l}$. Если положить $\tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon) = \mathscr{D}_\alpha - \bigcup_{l=1}^{s_\alpha} \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)$, то имеем для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$R(W^{y,r+1}; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha [R(W^{y,r+1}; T^\alpha, \tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon)) + \sum_{l=1}^{s_\alpha} R(W^{y,r+1}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon))] .$$

Так как $s_\alpha \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $\alpha \in \Lambda$ и $R(W^{y,r+1}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) \to 0$ для $\varepsilon \to 0+$ $(1 \leqq l \leqq s_\alpha,\ \alpha \in \Lambda)$, то

$$R(W^{y,r+1}; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha R(W^{y,r+1}; T^\alpha, \tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1) . \tag{13}$$

Закрепим теперь $\varepsilon > 0$, выбрав его так малым, чтобы $\mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon) \subset \mathscr{D}_\alpha$, $\mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon) \cap \mathscr{K}^\alpha_m(\varepsilon) = \emptyset$ $(1 \leqq l < m \leqq s_\alpha,\ \alpha \in \Lambda)$. Если обозначить через $\tilde{\mathscr{V}}$ замыкание множества $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon))$, то из включения $(\overline{\mathscr{V}})^k_y \subset \mathscr{V}^k_y$ (см. (11)) получаем $\tilde{\mathscr{V}} \subset \mathscr{P}_y$ (см. отд. 2,9). Отсюда вытекает по лемме 5 из [6], стр. 524, что существует вектор $\tilde{V}$ типа $(r+1,\ r-1)$ и класса C_∞ на E_{r+1} так, что $\tilde{V}(x) = V^y(x)$ (см. отд. 2,9) для всех x из некоторой окрестности множества $\tilde{\mathscr{V}}$. Полагая $\tilde{W} = \nabla \tilde{V}$, получаем как следствие условия (b) из отд. 2,12 и леммы 2,15 равенство

$$0 = R(\tilde{W}; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha [R(\tilde{W}; T^\alpha, \tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon)) + \sum_{l=1}^{s_\alpha} R(\tilde{W}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)] .$$

Так как $\tilde{W}(x) = W^{y,r+1}(x)$ для всех $x \in \tilde{\mathscr{V}}$ (см. отд. 2,9), то

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha R(W^{y,r+1}; T^\alpha, \tilde{\mathscr{D}}_\alpha(\varepsilon)) = - \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha \sum_{l=1}^{s_\alpha} R(\tilde{W}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) . \tag{14}$$

Из леммы 1,12 вытекает

$$R(\tilde{W}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) = \hat{R}(\tilde{V}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) . \tag{15}$$

Отметив ещё, что для t, лежащих на границе множества $\mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)$, имеем $T^\alpha(t) \in \tilde{\mathscr{V}}$ и, подавно, $\tilde{V}(T^\alpha(t)) = V^y(T^\alpha(t))$, получаем

$$\hat{R}(\tilde{V}; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) = \hat{R}(V^y, T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) . \tag{16}$$

Из (13)—(16) вытекает соотношение

$$R(W^{y,r+1}; \mathfrak{S}) = - \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha \sum_{l=1}^{s_\alpha} \hat{R}(V^y; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) + o_\varepsilon(1) . \tag{17}$$

Как видно из леммы 2,17,

$$\hat{R}(V^y; T^\alpha, \mathscr{K}^\alpha_l(\varepsilon)) = (-1)^k \tfrac{1}{2} c_{r+1} \operatorname{sgn} [T^\alpha_k(t^{\alpha,l}) - y_k] \cdot \mu_r(t^{\alpha,l}; \widehat{T^\alpha}) + o_\varepsilon(1).$$

Подставляя это равенство в (17) и пользуясь совместно определением функции $\iota(y;\ \mathfrak{S})$ (см. отд. 2,13) получаем сразу (12).

2,19. *Пусть имеют место обозначения и предположения* (*a*), (*b*) *из отд.* 2,12. *Положим ещё* $\mathscr{W} = E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$. *Пусть* $W(x;\ y)$ $(x \in \overline{\mathscr{V}},\ y \in \mathscr{W})$ *— непрерывный вектор типа* $(r+1,\ r)$ *на множестве* $\overline{\mathscr{V}} \times \mathscr{W}$. *Определим для каждого* $y \in \mathscr{W}$ *вектор* W^y *на множестве* $\overline{\mathscr{V}}$ *соотношением* $W^y(x) = W(x;\ y)$ *и положим* $\varkappa(y) = R(W^y;\ \mathfrak{S})$. *Тогда* $\varkappa(y)$ *является непрерывной функцией переменного* y *на множестве* $\mathscr{W}$. *Если* $\|W^y\|_{\mathscr{V}} \to 0$ *при* $|y| \to +\infty$, *то* $\varkappa(y) \to 0$ $(|y| \to +\infty)$.

Доказательство предоставляется читателю.

2,20. *Пусть* $\mathscr{D}$ *— область в* E_r *и пусть* T *— отображение множества* $\mathscr{D}$ *в* E_r, *удовлетворяющее на* $\mathscr{D}$ *локально условию Липшица. Тогда справедлива импликация*

$$(\mathscr{M} \subset \mathscr{D},\ \mathsf{L}\mathscr{M} = 0) \Rightarrow \mathsf{L}T(\mathscr{M}) = 0\,.$$

Функция $N(u;\ T)$ (*см. отд.* 2,16) *измерима, и имеет место равенство*

$$\int_{\mathscr{D}} |J(t;\ T)|\,\mathrm{d}t = \int_{E_r} N(u;\ T)\,\mathrm{d}u\,.$$

Доказательство. Эти утверждения легко получаются из известных более общих теорем. См., напр., [8], лемма 3 на стр. 337 и теорема 3 на стр. 364.

2,21. *Пусть имеют место предположения* (*a*), (*b*) *из отд.* 2,12. *Обозначим через* $\mathscr{B}_k$ *множество всех* $u \in E_r$, *для которых выполняются соотношения*

$$u \operatorname{non} \in \pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V})\,, \quad \sum_{\alpha \in A} N(u;\ \widehat{T^\alpha}) < +\infty\,.$$

Если $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, $\widehat{y} \in \mathscr{B}_k$, *то справедливы равенства*

$$\iota(y;\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha {\sum_t}^{+} \mu_r(t;\ \widehat{T^\alpha})\,, \tag{18}$$

где ${\sum\limits_t}^{+} = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T^\alpha}(t) = \widehat{y},\ T^\alpha_k(t) > y_k]$,

$$\iota(y;\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha {\sum_t}^{-} \mu_r(t;\ \widehat{T^\alpha})\,, \tag{19}$$

где ${\sum\limits_t}^{-} = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T^\alpha}(t) = \widehat{y},\ T^\alpha_k(t) < y_k]$. *Пусть, далее,* $y^i \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ $(i = 1,\ 2)$, $\widehat{y}^1 = \widehat{y}^2 = u \in \mathscr{B}_k$, $y^1_k < y^2_k$. *Тогда имеем*

$$\iota(y^1;\ \mathfrak{S}) - \iota(y^2;\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha {\sum_t}^{*} \mu_r(t;\ \widehat{T^\alpha})\,, \tag{20}$$

где ${\sum\limits_t}^{*} = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T^\alpha}(t) = u,\ y^1_k < T^\alpha_k(t) < y^2_k]$.

Множество $\mathscr{V}_u^k = (\overline{\mathscr{V}})_u^k$ *конечно для всех* $u \in \mathscr{B}_k$. *Если*

$$(21) \qquad \mathsf{L}_r \pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) = 0\,,$$

то

$$(22) \qquad \mathsf{L}_r(E_r - \mathscr{B}_k) = 0\,, \quad \mathsf{L}_{r+1}\overline{\mathscr{V}} = 0\,.$$

Доказательство. Если подставить в (12) $y = y^1$, а затем $y = y^2$ и вычесть полученные равенства, то получим (20).

Пусть теперь $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, $\hat{y} \in \mathscr{B}_k$; для $\xi \in E_1$ напишем $y(\xi) = [y_1, \ldots, y_{k-1}, \xi, y_{k+1}, \ldots, y_{r+1}]$. Выбрав ξ настолько большим, чтобы было

$$y_k < \xi\,, \quad \mathscr{V}_u^k \cap \langle \xi, +\infty) = \emptyset,$$

имеем по формуле (20) (куда подставим $y^1 = y$, $y^2 = y(\xi)$)

$$(23) \qquad \iota(y;\, \mathfrak{S}) = \iota(y(\xi);\, \mathfrak{S}) + (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_t{}^{+} \mu_r(t;\, \widehat{T}^\alpha)\,.$$

Так как $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \iota(y(\xi);\, \mathfrak{S}) = 0$ (см. лемму 2,19), то из (23) получаем предельным переходом для $\xi \to +\infty$ равенство (18). Аналогично доказывается соотношение (19).

По определению множества $\mathscr{B}_k$ имеем $\mathscr{B}_k = E_r - \mathscr{R}_k$, где

$$\mathscr{R}_k = \pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) \cup E[u;\, u \in E_r,\, \sum_{\alpha \in A} N(u;\, \widehat{T}^\alpha) = +\infty]\,.$$

Из предположения (21) и из соотношения

$$\int_{E_r} \Big(\sum_{\alpha \in A} N(u;\, \widehat{T}^\alpha)\Big)\, \mathrm{d}u = \sum_{\alpha \in A} \int_{E_r} N(u;\, \widehat{T}^\alpha)\, \mathrm{d}u = \text{(см. отд. 2,20)} = \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathscr{D}_\alpha} |J(t;\, \widehat{T}^\alpha)|\, \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathscr{D}_\alpha} |\mathfrak{M}(t;\, T^\alpha)|\, \mathrm{d}t < +\infty$$

непосредственно вытекает, что $\mathsf{L}_r \mathscr{R}_k = 0$. Для $u \in \mathscr{B}_k$ имеем

$$(24) \qquad (\overline{\mathscr{V}})_u^k = \mathscr{V}_u^k\,;$$

так как число точек множества $\mathscr{V}_u^k = \bigcup_{\alpha \in A} T_k^\alpha((\widehat{T}^\alpha)^{-1}(u))$ не больше чем $\sum_{\alpha \in A} N(u;\, \widehat{T}^\alpha)$, то множества (24) конечны. В силу компактности (и, подавно, измеримости) множества $\overline{\mathscr{V}}$ вытекает отсюда по теореме Фубини второе равенство из (22).

Замечание. Из формулы (20) получаем, в частности, следующее следствие:

Если $y^1, y^2 \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, $\hat{y}^1 = \hat{y}^2 = u \in \mathscr{B}_k$ и если отрезок, соединяющий точки y^1, y^2 не пересекается с $\overline{\mathscr{V}}$, то $\iota(y^1;\, \mathfrak{S}) = \iota(y^2;\, \mathfrak{S})$.

2,22. *Сохраним обозначения и предположения из предшествующего отдела. Пусть* F — *конечная функция на множестве* $\mathscr{V}$ *и* $u \in \mathscr{B}_k$. *Если* $\mathscr{V}_u^k =$

$= \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_s\} \neq \emptyset$,[9]) *то функция* $\iota(\xi) = \iota([u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r];$ $\mathfrak{S})$ *постоянна на* (α_j, α_{j+1}) $(1 \leqq j < s)$ *и равна нулю на* $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_s, +\infty)$. *Обозначая через* ι_j *значение функции* $\iota(\xi)$ *на интервале* (α_j, α_{j+1}) *и через* $F(u, \xi)$ *значение функции* F *в точке* $[u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r]$, *полагаем по определению*

$$S_F^k(u; \mathfrak{S}) = \sum_{j=1}^{s-1} [F(u, \alpha_{j+1}) - F(u, \alpha_j)]\, \iota_j\,;$$

в случае $\mathscr{V}_u^k = \emptyset$ *положим* $S_F^k(u; \mathfrak{S}) = 0$. *Тогда для всех* $u \in \mathscr{B}_k$ *имеем*

$$(-1)^{k-1} S_F^k(u; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_t F(T^\alpha(t))\, \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha)\,, \tag{25}$$

где $\sum_t = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T}^\alpha(t) = u]$.

Доказательство. Из замечания к предшествующему отделу видно, что функция $\iota(\xi)$ постоянна на интервалах $(-\infty, \alpha_1)$, (α_{j-1}, α_j) $(1 < j \leqq s)$, $(\alpha_s, +\infty)$. Обозначая соответственно через ι_0, ι_{s+1} её значение на интервале $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_s, +\infty)$, получаем из (18), (19)

$$\iota_0 = 0 = \iota_{s+1}\,. \tag{26}$$

Далее, из (20) вытекает

$$\iota_{j-1} - \iota_j = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_{t,j} \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha)\,, \tag{27}$$

$$\sum_{t,j} = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T}^\alpha(t) = u,\ T_k^\alpha(t) = \alpha_j]\,.$$

Если написать $x^j = [u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_j, u_k, \ldots, u_r]$, $\sum_t = \sum[t;\ t \in \mathscr{D}_\alpha,\ \widehat{T}^\alpha(t) = u]$, то имеем[10]) $\sum_{\alpha \in A} \sigma^\alpha \sum_t F(T^\alpha(t))\, \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_{j=1}^{s} F(x^j) \sum_{t,j} \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha) = \sum_{j=1}^{s} F(x^j)\,.$ $. \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_{t,j} \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha) =$ (см. (27)) $= (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{s} F(x^j)(\iota_{j-1} - \iota_j) =$ (см. (26)) $=$ $= (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{s-1} \iota_j \,.\, (F(x^{j+1}) - F(x^j)) = (-1)^{k-1} S_F^k(u; \mathfrak{S})$, чем равенство (25) в случае $\mathscr{V}_u^k \neq \emptyset$ доказано. Если $\mathscr{V}_u^k = \emptyset$, то обе части соотношения (25) обращаются в нуль.

Замечание. Если, в частности, $F(x) = x_k$ для бсех $x = [x_1, \ldots, x_{r+1}] \in \mathscr{V}$, то — в применяемых выше обозначениях — имеем

$$S_F^k(u; \mathfrak{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \iota(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \quad u \in \mathscr{B}_k\,.$$

[9]) Мы уже знаем из предшествующего доказательства, что множество $\mathscr{V}_u^k$ конечно для всех $u \in \mathscr{B}_k$.

[10]) Сравни [3], доказательство к отд. 9, стр. 243—244.

2,23. *Пусть* $r > 1$, $\mathscr{M} \subset E_r$. *Для* $j = 1, \ldots, r$ *обозначим через* $\mathsf{H}_j\mathscr{M}$ *внешнюю* j*-мерную меру Хаусдорфа множества* $\mathscr{M}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. $\mathsf{H}_r \mathscr{M} = 0 \Leftrightarrow \mathsf{L}_r \mathscr{M} = 0$.

2. *Если* T — *отображение множества* $\mathscr{M}$ *в* E_s, *удовлетворяющее на* $\mathscr{M}$ *условию Липшица с константой* λ, *то* $\mathsf{H}_j T(\mathscr{M}) \leqq \lambda^j \mathsf{H}_j \mathscr{M}$; *если отображение* T *изометрично на* $\mathscr{M}$, *то*

$$\mathsf{H}_j T(\mathscr{M}) = \mathsf{H}_j \mathscr{M} .$$

3. $\mathsf{H}_{r-1}\mathscr{M} = 0 \Rightarrow \mathsf{L}_{r-1}\pi_k\mathscr{M} = 0$ *для* $k = 1, \ldots, r$.

4. *Пусть существует константа* a *и натуральное число* k *так, что*

$$x \in \mathscr{M} \Rightarrow x_k = a .$$

Тогда

$$\mathsf{H}_{r-1}\mathscr{M} = 0 \Leftrightarrow \mathsf{L}_{r-1}\pi_k \mathscr{M} = 0 .$$

5. *Пусть*

$$\mathscr{K} = \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{r} \langle a_j^1, a_j^2 \rangle , \quad \mathscr{K}_{l,m}^{h,i} = E[x;\, x \in \mathscr{K},\, x_l = a_l^h,\, x_m = a_m^i] ,$$

$$\widehat{\mathscr{K}} = \bigcup \mathscr{K}_{l,m}^{h,i} , \quad 1 \leqq l < m \leqq r;\ h, i = 1, 2 .$$

Тогда $\mathsf{H}_{r-1}\widehat{\mathscr{K}} = 0$.

Доказательство. Эти утверждения являются непосредственными следствиями определения внешней хаусдорфовой меры; см. [9], стр. 53, § 8.

2,24. *Пусть* $\mathscr{K} = \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{r+1} \langle a_j^1, a_j^2 \rangle$ *и пусть* T — *отображение границы* $\mathscr{H}$ *интервала* $\mathscr{K}$ *в* E_{r+1}, *удовлетворяющее на* $\mathscr{H}$ *условию Липшица. Обозначим через* Λ *множество всех упорядоченных пар* $[j, i]$ *натуральных чисел, где* $1 \leqq j \leqq r + 1$, $i = 1, 2$. *Для каждого* $\alpha = [j, i] \in \Lambda$ *определим отображение* T^α *области* $\mathscr{D}_\alpha = \mathop{\mathsf{X}}_{l \neq j} (a_l^1, a_l^2) \subset E_r$ *в* E_{r+1} *соотношением*

$$T^\alpha(t) = T(t_1, \ldots, t_{j-1}, a_j^i, t_j, \ldots, t_r) , \quad t = [t_1, \ldots, t_r] \in \mathscr{D}_\alpha .$$

Положим ещё $\sigma_\alpha = (-1)^{i+j-1}$. *Тогда (конечная) последовательность* $\mathfrak{S}_{\mathscr{K}}(T) = \mathfrak{S} = \{T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha, \sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *замкнута в смысле отд.* 2,12. *Далее,*

$$\iota(y;\, \mathfrak{S}) = \eta_{r+1}(y;\, T, \mathscr{K}) , \quad y \in E_{r+1} - T(\mathscr{H}) \tag{28}$$

и, если положить $\mathscr{V}_{\mathscr{K}}(T) = \mathscr{V} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha)$, *имеет место* (21) *для* $k = 1, \ldots, r + 1$.

Доказательство. Рассмотрение условия (a) из отд. 2,12 предоставляется читателю. (Отметим, что множество Λ конечно, множества $\mathscr{D}_\alpha$ ограничены и отображения T^α удовлетворяют на $\mathscr{D}_\alpha$ условию Липшица для всех $\alpha \in \Lambda$.) Так как, очевидно, $\overline{\mathscr{V}} = T(\mathscr{K})$, то множество $\overline{\mathscr{V}}$ компактно. Пусть теперь F (соотв. W) — ограниченная B-измеримая функция (соотв., ограниченый B-измеримый вектор типа $(r+1, r)$) на множестве $\overline{\mathscr{V}}$. Сопоставляя определение символов $R^\omega(F; \mathfrak{S})$ $\left[\omega \in \Omega\binom{r+1}{r}\right]$, $R(W; \mathfrak{S})$ из отд. 2,12 с определением символов $\widehat{R}^\omega(F; T, \mathscr{K})$, $\widehat{R}(W; T, \mathscr{K})$ из отд. 1,6 (где заменим числа r, s соответственно через $r+1$ и $r+1$), мы видим, что

$$R^\omega(F; \mathfrak{S}) = \widehat{R}^\omega(F; T, \mathscr{K}), \quad R(W; \mathfrak{S}) = \widehat{R}(W; T, \mathscr{K}).$$

Предположим теперь, что вектор W есть класса C_∞ на E_{r+1} и удовлетворяет на E_{r+1} соотношению $\nabla W = 0$. Из отд. 1,12 вытекает $R(W; \mathfrak{S}) = \widehat{R}(W; T, \mathscr{K}) = R(\nabla W; \ldots) = 0$. Мы видим, что выполняется условие (*b*) из отд. 2,12. Из определений 2,13 и 2,4 получаем сразу (28). Придавая символу $\widehat{\mathscr{K}}$ то же значение, как и в п. 5 из отд. 2,23 (где заменим r через $r+1$), получаем $\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V} \subset T(\widehat{\mathscr{K}})$. Так как $\mathsf{H}_r T(\widehat{\mathscr{K}}) = 0$ (см. 5 и 2 из отд. 2,23), то $\mathsf{H}_r(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) = 0$ и $\mathsf{L}_r \pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) = 0$ для $k = 1, \ldots, r+1$ (см. 3 из отд. 2,23).

2,25. *Пусть T — отображение области $\mathscr{D} \subset E_r$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Тогда функция $\mu_r(t; T)$ (см. 2,7) является B-измеримой.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность всех положительных простых чисел, упорядоченных по их величине. Обозначим для каждого натурального n символом $\Gamma_n(\mathscr{D})$ систему всех интервалов $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$, которые являются декартовым произведением r одномерных интервалов вида $\left\langle \frac{p_j}{n}, \frac{p_{j+1}}{n} \right\rangle$. Нетрудно обнаружить, что для каждого $t \in \mathscr{D}$ существует натуральное число $n_0(t)$ так, что t является внутренней точкой точно одного интервала $\mathscr{K} \in \Gamma_n(\mathscr{D})$ при всех $n \geqq n_0(t)$. Для каждого n определим на $\mathscr{D}$ функцию $\mu_r^n(t; T)$ следующим образом: Для $t \in \mathscr{D} - \bigcup \Gamma_n(\mathscr{D})$ положим $\mu_r^n(t; T) = 0$. Если $\mathscr{K} \in \Gamma_n(\mathscr{D})$ и $t \in \mathscr{K}$, то полагаем $\mu_r^n(t; T) = \eta_r(T(t); T, \mathscr{K})$. (Если t принадлежит к границе интервала $\mathscr{K}$, то имеем — по определению функции η_r — $\mu_r^n(t; T) = 0$.) Из отд. 2,4, 2,19 и 2,24 сразу получаем, что функция μ_r^n является B-измеримой на $\mathscr{D}$. Так как по определению 2,7 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_r^n(t; T) = \mu_r(t; T)$ для $t \in \mathscr{M}(T; \mathscr{D})$, $\mu_r(t; T) = 0$ для $t \in \mathscr{D} - \mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ и множество $\mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ является борелевским (см. 2,6), то функция μ_r является B-измеримой.

2,26. Пусть $\mathscr{K}$ — компактный интервал в E_r и пусть T — отображение интервала $\mathscr{K}$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{K}$ условию Липшица с константой λ. Обозначим ещё через $|\mathscr{K}|$ диаметр интервала $\mathscr{K}$. Тогда имеют место следующие утверждения:

(α_r) *Функция* $\eta_r(u;\ T,\ \mathscr{K})$ *измерима на* E_r *и*

(29) $$\int_{E_r} |\eta_r(u;\ \ldots)|\, \mathrm{d}u \leqq (r!)(\lambda\, |\mathscr{K}|)^r\,.$$

(30) $$\int_{E_r} \eta_r(u;\ \ldots)\, \mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} J(t;\ T)\, \mathrm{d}t\,.$$

(β_r) *Если написать* $\sum_t^u = \sum_t [t,\ t \in \mathscr{K}^0,\ T(t) = u]$, *то*

(31) $$\int_{E_r} (\sum_t^u |\mu_r(t;\ T)|)\, \mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} |J(t;\ T)|\, \mathrm{d}t$$

и для каждой ограниченной B*-измеримой функции* F *на* $\mathscr{K}$

(32) $$\int_{E_r} (\sum_t^u F(t)\, \mu_r(t;\ T))\, \mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} F(t)\, J(t;\ T)\, \mathrm{d}t\,.$$

Доказательство. этих утверждений разобъём на несколько шагов.

1. Справедливо утверждение (α_1).

Если $\mathscr{K} = \langle a^1, a^2 \rangle$, $b^i = T(a^i)$ $(i = 1, 2)$, то по определению 2,3 имеем $\eta_1(u;\ T,\ \mathscr{K}) = \operatorname{sgn}(b^2 - b^1)$ для u, лежащих между точками b^1, b^2, $\eta_1(u;\ T, \mathscr{K}) = 0$ для всех остальных $u \in E_1$. Отсюда получаем

$$\int_{E_1} |\eta_1(u;\ T, \mathscr{K})|\, \mathrm{d}u = |b^2 - b^1| \leqq \lambda |a^2 - a^1|$$

(— соотношение (29) для $r = 1$),

$$\int_{E_1} \eta_1\,(u;\ T, \mathscr{K})\, \mathrm{d}u = b^2 - b^1 = \int_{a^1}^{a^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, T(t)\, \mathrm{d}t$$

(— соотношение (30) для $r = 1$).

2. $(\alpha_r) \Rightarrow (\beta_r)$.

Предположим, что справедливо утверждение (α_r). Пусть сначала F является непрерывной функцией на $\mathscr{K}$, $|F(t)| \leqq \gamma$ для всех $t \in \mathscr{K}$. Обозначим символом $\Delta_n = \Delta_n(\mathscr{K})$ систему всех компактных интервалов $\mathscr{I}$, которые получим подразделением интервала $\mathscr{K}$ на 2^{rn} равных частей. Для $\mathscr{I} \in \Delta_n$ обозначим через $t_{\mathscr{I}}$ центр интервала $\mathscr{I}$ и положим $f(\mathscr{I}) = F(t_{\mathscr{I}})$. Напишем $\sum_{\mathscr{I}}^n = \sum [\mathscr{I};\ \mathscr{I} \in \Delta_n]$ и определим на E_r функции S_n, R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соотношением

$$S_n(u;\ F) = \sum_{\mathscr{I}}^n f(\mathscr{I})\, \eta_r(u;\ T, \mathscr{I})\,, \quad R_n(u) = \sum_{\mathscr{I}}^n |\eta_r(u;\ T, \mathscr{I})|\,.$$

Очевидно,

(33) $$|S_n(u;\ F)| \leqq \gamma R_n(u)\,.$$

Из 2,24 и 2,19 вытекает, что функции S_n, R_n B-измеримы.

Пусть $\mathscr{H}_n$ — соединение границ интервалов $\mathscr{I} \in \Delta_n$, $\mathscr{H}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$. Так как $\mathsf{L}\mathscr{H}_0 = 0$, то и $\mathsf{L}T(\mathscr{H}_0) = 0$. Пусть, далее, $\mathscr{R} = E[u;\ u \in E_r,\ N(u;\ T) =$

$= +\infty]$, $\mathscr{T} = \mathscr{R} \cup T(\mathscr{H}_0)$. Из 2,20 вытекает $\int\limits_{E_r} N(u; T)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{\mathscr{K}} |J(t; T)|\,\mathrm{d}t <$ $< +\infty$, так что $\mathsf{L}(\mathscr{R}) = 0 = \mathsf{L}\mathscr{T}$.

Пусть теперь $u \in E_r - \mathscr{T}$. Тогда множество $T^{-1}(u)$ конечно и $T^{-1}(u) \subset$ $\subset \mathscr{M}(T, \mathscr{K}^0) - \mathscr{H}_0$. Положим

$$S_0(u; F) = \sum_t{}^u F(t)\,\mu_r(t; T)\,, \quad R_0(u) = \sum_t{}^u |\mu_r(t; T)|\,.$$

Покажем, что при $n \to \infty$

$$(34) \qquad S_n(u; F) \to S_0(u; F)\,, \quad R_n(u) \to R_0(u) \;\; (u \in E_r - \mathscr{T})\,.$$

Пусть $T^{-1}(u) = \{t^1, \ldots, t^s\}$. Выберем n_0 настолько большим, чтобы при $n \geqq n_0$ каждый интервал $\mathscr{I} \in \varDelta_n$ содержал не более одной точки множества $T^{-1}(u)$. Обозначая при $n \geqq n_0$ и $1 \leqq j \leqq s$ символом $\mathscr{I}_j^n$ тот интервал из системы $\varDelta_n$, который содержит точку t^j, имеем (см. 2,5, 2,7)

$$\eta_r(u; T, \mathscr{I}_j^n) = \mu_r(t^j, T)$$

и (см. 2,4)

$$\eta_r(u; T, \mathscr{I}) = 0 \quad \text{для} \quad \mathscr{I} \in \varDelta - \{\mathscr{I}_1^n, \ldots, \mathscr{I}_s^n\}\,.$$

Итак, $R_n(u) = \sum\limits_{j=1}^{s} |\eta_r(u; T, \mathscr{I}_j^n)| = \sum\limits_{j=1}^{s} |\mu_r(t^j, T)| = R_0(u)$ при $n \geqq n_0$, чем доказано второе соотношение из (34). Полагая $\varepsilon_n = \max\limits_{\mathscr{I} \in \varDelta_n} \max\limits_{t \in \mathscr{I}} |F(t) - F(t_{\mathscr{I}})|$, получаем при $n \geqq n_0$ $|S_n(u; F) - S_0(u; F)| = |\sum\limits_{j=1}^{s} f(\mathscr{I}_j^n)\,\eta_r(u; T, \mathscr{I}_j^n) -$ $- \sum\limits_{j=1}^{s} F(t^j)\,\mu_r(t^j; T)| = |\sum\limits_{j=1}^{s} (f(\mathscr{I}_j^n) - F(t^j))\,\mu_r(t^j; T)| \leqq \varepsilon_n \sum\limits_{j=1}^{s} |\mu_r(t^j; T)| = \varepsilon_n R_0(u)\,.$ Так как F равномерно непрерывна на $\mathscr{K}$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, и имеет место первое соотношение из (34).

Функции S_0, R_0 определены почти всюду и, как видно из (34), измеримы.

Отметив, что для $\mathscr{I} \in \varDelta_n$ имеем $|\mathscr{I}| = 2^{-n}|\mathscr{K}|$, получаем из (29) оценку $\int\limits_{E_r} R_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum\limits_{\mathscr{I}}{}^n \int\limits_{E_r} |\eta_r(u; T, \mathscr{I})|\,\mathrm{d}u \leqq 2^{rn}(r!)\,\lambda^r 2^{-rn}|\mathscr{K}|^r = r!(\lambda|\mathscr{K}|)^r$. Так как каждый интервал $\mathscr{I} \in \varDelta_n$ является соединением 2^r интервалов из системы $\varDelta_{n+1}$, то нетрудно обнаружить, что функции R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют неубывающую последовательность на множсетве $E_r - \mathscr{T}$. Итак,

$$\int\limits_{E_r} R_0(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{E_r} R_n(u)\,\mathrm{d}u \leqq r!(\lambda|\mathscr{K}|)^r\,,$$

так что функция R_0 интегрируема. Из (33), (34) (отметим, что $R_n(u) \leqq R_0(u)$ для $u \in E_r - \mathscr{T}$) получаем, что функция S_0 тоже интегрируема и

$$(35) \qquad \int\limits_{E_r} S_0(u; F)\,\mathrm{d}u = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{E_r} S_n(u; F)\,\mathrm{d}u\,.$$

Из (30) (где заменим $\mathscr{K}$ через $\mathscr{I}$) вытекает

$$\int_{E_r} S_n(u; F)\,\mathrm{d}u = \sum_{\mathscr{I}}^n f(\mathscr{I}) \int_{E_r} \eta_r(u; T, \mathscr{I})\,\mathrm{d}u = \sum_{\mathscr{I}}^n f(\mathscr{I}) \int_{\mathscr{I}} J(t; T)\,\mathrm{d}t\,.$$

Так как

$$|\sum_{\mathscr{I}}^n f(\mathscr{I}) \int_{\mathscr{I}} J(t; T)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathscr{K}} F(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t| \leqq \sum_{\mathscr{I}}^n |f(\mathscr{I}) \int_{\mathscr{I}} J(t; T)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathscr{I}} F(t)\,.$$

$$.\,J(t; T)\,\mathrm{d}t| \leqq \varepsilon_n \sum_{\mathscr{I}}^n \int_{\mathscr{I}} |J(t; T)|\,\mathrm{d}t = \varepsilon_n \int_{\mathscr{K}} |J(t; T)|\,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_r} S_n(u; F)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} F(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t\,.$$

Отсюда и из (35) получаем по опедрелению функции S_0 равенство (32).

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — система всех ограниченных функций F на $\mathscr{K}$, для которых справедливо равенство (32). Как мы показали выше, $\mathfrak{F}$ содержит все непрерывные функции. Чтобы убедиться в том, что $\mathfrak{F}$ содержит все ограниченные B-измеримые функции, достаточно доказать ещё следующее утверждение:[11])

(t) *Если функции* $F_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *одинаково ограничены на* $\mathscr{K}$ *и сходятся на* $\mathscr{K}$ *к функции* F, *то* $F \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{K}} F_n(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathscr{K}} F(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t\,. \tag{36}$$

Выбрав надлежащим образом константу $\gamma > 0$, имеем для $u \in \mathscr{T}$

$$|S_0(u; F_n)| \leqq \gamma R_0(u)\,, \quad \lim_{n\to\infty} S_0(u; F_n) = S_0(u; F)\,,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_r} S_0(u; F_n)\,\mathrm{d}u = \int_{E_r} S_0(u; F)\,\mathrm{d}u\,. \tag{37}$$

Из (36), (37) и из равенства

$$\int_{E_r} S_0(u; F_n)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} F_n(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t$$

получаем $\int_{E_r} S_0(u; F)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathscr{K}} F(t)\,J(t; T)\,\mathrm{d}t$; другими словами, $F \in \mathfrak{F}$. Этим утверждение (t) доказано.

Теперь докажем равенство (31). Положим $F_1(t) = \operatorname{sgn} \mu_r(t; T)$ для $t \in \mathscr{M}(T, \mathscr{K}^0)$, $F_1(t) = 0$ для остальных $t \in \mathscr{K}$. Функция F_1 является B-измеримой (см. 2,25). Из теоремы Витали-Каратеодори (см. [9], стр. 75) выте-

[11]) Сравни [7], утверждение (У) на стр. 95.

кает, что существует B-измеримая функция F_2 на $\mathscr{K}$, ограниченная по абсолютной величине константой 1, такая, что

$$F_2(t)\, J(t;\, T) = |J(t;\, T)|$$

для почти всех $t \in \mathscr{K}$. Из (32) получаем $\int\limits_{\mathscr{K}} |J(t;\, T)|\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathscr{K}} F_2(t)\, J(t;\, T)\, \mathrm{d}t =$
$= \int\limits_{E_r} (\sum\limits_t^u F_2(t)\, \mu_r(t;\, T)\, \mathrm{d}u \leqq \int\limits_{E_r} (\sum\limits_t^u |\mu_r(t;\, T)|)\, \mathrm{d}u = \int\limits_{E_r} (\sum\limits_t^u F_1(t)\, \mu_r(t;\, T))\, \mathrm{d}u =$
$= \int\limits_{\mathscr{K}} F_1(t)\, J(t;\, T)\, \mathrm{d}t \leqq \int\limits_{\mathscr{K}} |J(t;\, T)|\, \mathrm{d}t$. Так как исходной и последний члены этой цепи неравенств равны между собой, то всюду имеет место знак равенства. В частности, имеет место равенсзво (31). Этим доказательство импликации 2 закончено.

3. $(\beta_r) \Rightarrow (\alpha_{r+1})$.

Предположим, что (β_r) справедливо. Пусть имеют место обозначения из отд. 2,24. Закрепим натуральное число k $(1 \leqq k \leqq r + 1)$ и определим множество $\mathscr{B}_k$, как в отд. 2,21. Тогда справедливы соотношения (21), (22) (см. 2,24). Из 2,19 и 2,24 вытекает, что функция $\eta_{r+1}(y;\, T, \mathscr{K})$ B-измерима. Полагая для $u \in E_r$ и $\xi \in E_1$ $\eta(u, \xi) = \eta_{r+1}([u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r];\, T, \mathscr{K})$, получаем по теореме Фубини

$$\int\limits_{E_{r+1}} |\eta_{r+1}(y;\, T, \mathscr{K})|\, \mathrm{d}y = \int\limits_{E_r} (\int\limits_{E_1} (|\eta(u, \xi)|\, \mathrm{d}\xi)\, \mathrm{d}u\, . \tag{38}$$

Закрепим теперь $u \in \mathscr{B}_k$. Как видно из отд. 2,22, функция $\eta(u, \xi)$ (переменного ξ) обращается в нуль в дополнении некоторого компактного интервала $\langle \alpha_1, \alpha_s \rangle$, длина которого не больше диаметра d множества $\mathscr{V}$, причём $d \leqq \lambda |\mathscr{K}|$. Из 2,24 и (12) получаем

$$|\eta(u, \xi)\, | \leqq \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_t |\mu_r(t;\, \widehat{T^\alpha})|\, ,$$

так что

$$\int\limits_{E_1} |\eta(u, \xi)|\, \mathrm{d}\xi \leqq \tfrac{1}{2}\lambda |\mathscr{K}| \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_t |\mu_r(t;\, \widehat{T^\alpha})|\, .$$

Имея в виду, что это неравенство справедливо для почти всех $u \in E_r$, получаем отсюда, интегрируя и используя утверждение (β_r),

$$\int\limits_{E_r} (\int\limits_{E_1} |\eta(u, \xi)| \mathrm{d}\xi)\, \mathrm{d}u \leqq \tfrac{1}{2}\lambda |\mathscr{K}| \sum_{\alpha \in \Lambda} \int\limits_{\mathscr{D}_\alpha} |J(t;\, \widehat{T^\alpha})|\, \mathrm{d}t \leqq$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}\lambda |\mathscr{K}|\, 2(r + 1)(r!)\, \lambda^r |\mathscr{K}|^r = (r + 1)!\, (\lambda |\mathscr{K}|)^{r+1}\, ,$$

что вместе с (38) даёт неравенство (29) для $r + 1$.

Мы выдим, что функция $\eta_{r+1}(y;\, \ldots)$ интегрируема на E_{r+1}. По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{E_{r+1}} \eta_{r+1}(y;\, \ldots)\, \mathrm{d}y = \int\limits_{E_r} (\int\limits_{E_1} \eta(u, \xi)\, \mathrm{d}\xi)\, \mathrm{d}u\, . \tag{39}$$

Из замечания к отд. 2,22 и из (25) вытекает

$$\int_{E_1} \eta(u, \xi)\, d\xi = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \sum_t T_k^\alpha(t)\, \mu_r(t; \widehat{T^\alpha})\,, \quad u \in \mathscr{B}_k\,.$$

Интегрируя через E_r и используя (β_r), получаем отсюда

$$(40) \qquad \int_{E_r} \Big(\int_{E_1} \eta(u, \xi)\, d\xi\Big)\, du = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \int_{\mathscr{D}_\alpha} T_k^\alpha(t)\, J(t; \widehat{T^\alpha})\, dt\,.$$

Определим на E_{r+1} вектор $V = [V_{(j)}]$ типа $(r + 1, r)$ соотношениями $V_{(j)}(x) = 0$ для $j \neq k$, $V_{(k)}(x) = x_k$, $x = [x_1, \ldots, x_{r+1}] \in E_{r+1}$. Имея в виду значение символов A, σ_α, T^α, $\mathscr{D}_\alpha$ (см. 2,24), получаем

$$\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha \int_{\mathscr{D}_\alpha} T_k^\alpha(t)\, J(t; \widehat{T^\alpha})\, dt = \widehat{R}(V; T, \mathscr{K})\,.$$

Отсюда, из (40) и из 1,12 вытекает

$$\int_{E_r} \Big(\int_{E_1} \eta(u, \xi)\, d\xi\Big)\, du = (-1)^{k-1} R(\nabla V; T, \mathscr{K}) = \int_{\mathscr{K}} J(t; T)\, dt\,,$$

что вместе с (39) даёт равенство (30) для $r + 1$. Этим доказана импликация 3. Из 1—3 видно, что утверждения (α_r), (β_r) верны для всех натуральных r.

2,27. *Пусть T — отображение области $\mathscr{D} \subset E_r$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Тогда*

$$(41) \qquad \int_{\mathscr{D}} |J(t; T)|\, dt = \int_{E_r} \Big(\sum_t{}^u |\mu_r(t; T)|\Big)\, du\,.$$ [12]

Если

$$(42) \qquad \int_{\mathscr{D}} |J(t; T)|\, dt < +\infty\,,$$

то для каждой ограниченной B-измеримой функции F на $\mathscr{D}$ имеет место равенство

$$(43) \qquad \int_{\mathscr{D}} F(t)\, J(t, T)\, dt = \int_{E_r} \Big(\sum_t{}^u F(t)\, \mu_r(t; T)\Big)\, du\,.$$

Доказательство. Построим последовательность множеств $\mathscr{L}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), каждое из которых является соединением конечного числа компактных интервалов, так, чтобы $\mathscr{L}_n \subset \mathscr{L}^0_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{L}_n = \mathscr{D}$.

Обозначая через F_n характеристическую функцию множества $\mathscr{L}_n$, получаем из утверждения (β_r) в отд. 2,26 равенство

$$(44) \qquad \int_{\mathscr{D}} F_n(t) |J(t; T)|\, dt = \int_{E_r} \Big(\sum_t{}^u F_n(t) |\mu_r(t; T)|\Big)\, du\,.$$

Очевидно, что

$$(45) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{\mathscr{D}} F_n(t) |J(t; T)|\, dt = \int_{\mathscr{D}} |J(t; T)|\, dt\,.$$

---

[12] $\sum_t{}^u = \sum[t;\ t \in \mathscr{D},\ T(t) = u]$.

Если положить $Q_n(u) = \sum_t^u F_n(t)|\mu_r(t;\, T)|$, $Q_0(u) = \sum_t^u |\mu_r(t;\, T)|$, то $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ будет неубывающей последовательностью неотрицательных измеримых функций, сходящейся к функции Q_0. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_r} Q_n(u)\, \mathrm{d}u = \int_{E_r} Q_0(u)\, \mathrm{d}u\,. \tag{46}$$

Из (44)—(46) вытекает (41).

Пусть имеет место (42); значит, функция Q_0 интегрируема. Из равенства $\int_{E_r} N(u;\, T)\, \mathrm{d}u = \int_{\mathscr{D}} |J(t;\, T)|\, \mathrm{d}t < +\infty$ видно, что множество $\mathscr{P} =$
$= E[u;\, N(u;\, T) = +\infty]$ имеет меру нуль. Итак, если G — конечная функция на $\mathscr{D}$, то символ

$$S(u;\, G) = \sum^u G(t)\, \mu_r(t;\, T)$$

определен для почти всех $u \in E_r$ (именно, для $u \in E_r - \mathscr{P}$).

Пусть F—B-измеримая функция на $\mathscr{D}$, $|F(t)| \leqq \gamma$ для всех $t \in \mathscr{D}$. Из утверждения (β_r) в отд. 2,26 вытекает, что

$$\int_{\mathscr{D}} F(t)\, F_n(t)\, J(t;\, T)\, \mathrm{d}t = \int_{E_r} S(u;\, F\,.\,F_n)\, \mathrm{d}u\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

Так как $|S(u;\, FF_n)| \leqq \gamma Q_0(u)$ и $S(u;\, FF_n) \to S(u;\, F)$ $(n \to \infty)$ для почти всех u, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_r} S(u;\, FF_n)\, \mathrm{d}u = \int_{E_r} S(u;\, F)\, \mathrm{d}u\,,$$

что вместе с (47) и с равенством

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{D}} F(t)\, F_n(t)\, J(t;\; T)\; \mathrm{d}t = \int_{\mathscr{D}} F(t)\, J(t;\, T)\, \mathrm{d}t$$

даёт (43).

2,28. *Пусть имеют место обозначения и предположения* (*a*), (*b*) *из отд.* 2,12 *и пусть выполняется соотношение* (21). *Тогда множество* $\overline{\mathscr{V}}$ *имеет* [$(r+1)$-*мерную*] *меру нуль, функция* $\iota(y;\, \mathfrak{S})$ *определена почти всюду на* E_{r+1} *и измерима. Полагая* $\mathscr{G} = E[y;\, y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}},\, \iota(y;\, \mathfrak{S}) \neq 0]$, $g_k = \sup_u \mathsf{L}_1 \mathscr{G}_u^k$, $u \in E_r$, *имеем*

$$\int_{E_{r+1}} |\iota(y;\, \mathfrak{S})|\, \mathrm{d}y \leqq \tfrac{1}{2} g_k \sum_{\alpha \in A} |\sigma_\alpha| \int_{\mathscr{D}_\alpha} |J^{(k)}(t;\, T^\alpha)|\, \mathrm{d}t\,.^{13)} \tag{48}$$

Если, далее, F — *ограниченная* B-*измеримая функция на множестве* $\mathscr{V}$, *то функция* $S_F^k(u;\, \mathfrak{S})$ (*см.* 2,22) *определена почти всюду на* E_r *и*

$$\int_{E_r} S_F^k(u;\, \mathfrak{S})\, \mathrm{d}u = (-1)^{k-1} R^{(k)}(F;\, \mathfrak{S})\,. \tag{49}$$

Если соотношение (21) *выполняется для* $k = 1, \ldots, r+1$, *то функция* $\iota(y;\, \mathfrak{S})$ *постоянна на каждой компоненте множества* $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ *и обращается в нуль на неограниченной компоненте этого множества.*

---

[13] Здесь как и в отд. 2,8, полагаем $(k) = [1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r+1]$.

Доказательство. Мы уже знаем из отд. 2,21, что множество $\overline{\mathscr{V}}$ имеет меру нуль. Так как по отд. 2,19 функция ι непрерывна на $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, то она измерима. Полагая $\iota(u, \xi) = \iota([u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r]; \mathfrak{S})$ $(u \in E_r, \xi \in E_1)$, получаем из 2,18 для $u \in \mathscr{B}_k$ (см. 2,21)

$$|\iota(u, \xi)| \leqq \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} |\sigma_\alpha| \sum_t |\mu_r(t; \widehat{T^\alpha})| ,$$

так что

$$\int_{E_1} |\iota(u, \xi)| \, \mathrm{d}\xi \leqq \tfrac{1}{2} g_k \sum_{\alpha \in A} |\sigma_\alpha| \sum_t |\mu_r(t; \widehat{T^\alpha})| .$$

Интегрируя это неравенство через E_r [отметим, что $\mathsf{L}_r (E_r - \mathscr{B}_k) = 0$ — см. (22)], получаем по утверждению 2,27 и по теореме Фубини соотношение (48).

Предложим теперь, что (21) выполняется для $k = 1, \ldots, r + 1$. Пусть y — произвольная точка множества $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $(r + 1)$-мерный куб с центром в точке y и ребром длины 2δ не пересекался с множеством $\overline{\mathscr{V}}$. Закрепим k и покажем, что для $u = \widehat{y}$ (см. 2,8) справедлива импликация

$$0 \leqq a \, , \; b < \delta \Rightarrow \iota(u, y_k - a) - \iota(u, y_k + b) = 0 \, . \tag{50}$$

Обозначим через $\tilde{\mathscr{K}}$ r-мерный куб с центром в точке u и с ребром длины 2δ. Так как $\mathsf{L}_r(E_r - \mathscr{B}_k) = 0$ [см. (22)], то существуют точки $u^n \in \mathscr{B}_k \cap \tilde{\mathscr{K}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $u^n \to u$ $(n \to \infty)$. Из замечания к отд. 2,21 получаем $(0 \leqq a, b < \delta)$

$$\iota(u_n, y_k - a) - \iota(u_n, y_k + b) = 0 \, , \quad n = 1, 2, \ldots \, . \tag{51}$$

Так как функция ι непрерывна на $\mathscr{K}$ (см. 2,19), то из (51) вытекает равенство, стоящее за знаком импликации в (50). Из (50) получаем $\dfrac{\partial}{\partial y_k} \iota(y; \mathfrak{S}) = 0$. Но точка $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ и натуральное число $k \in \langle 1, r + 1 \rangle$ выбраны совершенно произвольно; следовательно, частные производные первого порядка от функции $\iota(y; \mathfrak{S})$ обращаются в нуль всюду на $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$. Значит, функция ι постоянна на каждой компоненте множества $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$.

Так как $\iota(y; \mathfrak{S}) \to 0$ при $|y| \to + \infty$, то $\iota(y; \mathfrak{S}) = 0$ при достаточно большом $|y|$.

2,29. *Пусть имеют место предположения* (*a*), (*b*) *из отд.* 2,12 *и пусть соотношение* (21) *выполняется для* $k = 1, \ldots, r + 1$. *Тогда функция* $\iota(y; \mathfrak{S})$ *принимает на* $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ *лишь значения, являющиеся конечными линейными комбинациями чисел* σ_α $(\alpha \in A)$ *с целочисленными коэффициентами.*

Доказательство. Закрепим k $(1 \leqq k \leqq r+1)$ и обозначим через $\mathscr{A}$ множество всех $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, для которых $\widehat{y} \in \mathscr{B}_k$. Так как в наших предположениях (см. 2,21) $\mathsf{L}_r(E_r - \mathscr{B}_k) = 0$ и множество $(\overline{\mathscr{V}})^k_u$ конечно для всех $u \in \mathscr{B}_k$, то множество $\mathscr{A}$ плотно в E_{r+1}. В частности, каждая компонента множества $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ содержит точки из $\mathscr{A}$. Так как функция ι постоянна на каждой компоненте множества $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$, то достаточно доказать, что ι принимает лишь значения описанного вида на множестве $\mathscr{A}$. Для $y \in \mathscr{A}$ имеем по формуле (18)

$$\iota(y;\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1} \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha \sum_t{}^{+} \mu_r(t;\ \widehat{T^\alpha})$$

(отметим, что вследствие выбора точки y сумма $\sum_t{}^{+} \mu_r(t;\ \widehat{T^\alpha})$ отлична от нуля лишь для конечного числа индексов $\alpha \in \Lambda$), так что достаточно проверить справедливость следующего утверждения:

2,30. *Пусть T — отображение области $\mathscr{D} \subset E_r$ в E_r, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Тогда функция $\mu_r(t;\ T)$ (см. 2,7) принимает на $\mathscr{D}$ лишь целочисленные значения.*

Доказательство. Это утверждение верно в случае $r = 1$, так как функция η_1 (и, следовательно, тоже функция μ_1) принимает на $\mathscr{D}$ только значения $0, \pm 1$ (см. 2,3 и 2,2). Предположим теперь, что утверждение верно для данного r и что T — отображение области $\mathscr{D} \subset E_{r+1}$ в E_{r+1}, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Докажем, что для каждого $(r+1)$-мерного компактного интервала $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ функция $\eta_{r+1}(y;\ T, \mathscr{K})$ принимает только целочисленные значения. Закрепим интервал $\mathscr{K}$ и определим последовательность $\mathfrak{S}_{\mathscr{K}}(T) = \mathfrak{S}$, как в отд. 2,24. Из индукционного предположения и из доказательства в предшествующем отделе видно, что функция $\iota(y;\ \mathfrak{S})$ принимает на $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}_{\mathscr{K}}(T)}$ только целочисленные значения (отметим, что теперь все числа σ_α — целые). Теперь достаточно воспользоваться равенством (28). Так как интервал $\mathscr{K}$ избран произвольно, то по определению 2,7 функция $\mu_{r+1}(t;\ T)$ принимает лишь целочисленные значения. Итак, наше утверждение доказано методом индукции для всех натуральных r.

2,31. *Пусть имеют место обозначения из отд. 2,12 и пусть последовательность $\mathfrak{S}$ замкнута. Пусть, далее, соотношение (21) выполняется для $k = 1, \ldots, r+1$. Положим $\mathscr{L} = \mathscr{G} \cup \overline{\mathscr{V}}$ (см. 2,28). Тогда для почти всех $u \in E_r$ множества $\mathscr{L}^k_u$ $(k = 1, \ldots, r+1)$ являются соединением конечного числа компактных интервалов.*

Пусть, далее, $W = [W_{(k)}]$[13]*) — ограниченный B-измеримый вектор типа $(r+1, r)$ на множестве $\mathscr{L}$ и пусть для почти всех $u \in E_r$ функция $W_{(k)}(u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r)$ $(k = 1, \ldots, r+1)$ является абсолютно не-*

прерывной функцией переменного ξ на множестве $\mathscr{L}_u^k$. Тогда функция $\dfrac{\partial}{\partial y_k} W_{(k)}(y)$ определена почти всюду на $\mathscr{G}$ и равенство

$$R(W;\ \mathfrak{S}) = \int_{\mathscr{G}} \iota(y;\ \mathfrak{S})\, \nabla W(y)\, \mathrm{d}y \tag{52}$$

справедливо в предположении, что существуют интегралы

$$\int_{\mathscr{G}} \iota(y;\ \mathfrak{S})\, \frac{\partial}{\partial y_k}\, W_{(k)}(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad k = 1, \ldots, r+1\,.$$

Доказательство. Закрепим k и определим множество $\mathscr{B}_k$, как в 2,21. Тогда имеем (22). Для $u \in \mathscr{B}_k$ справедливо (24) и, как видно из отд. 2,22, множество $\mathscr{L}_u^k$ является соединением конечного числа компактных интервалов. Если, кроме того, u выбрано так, что $W_{(k)}(u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r) = W_{(k)}(u, \xi)$ является абсолютно непрерывной функцией переменного ξ на множестве $\mathscr{L}_u^k$, то из определения символа $S^k_{W_{(k)}}$ (см. 2,22) получаем

$$S^k_{W_{(k)}}(u;\ \mathfrak{S}) = \int_{\mathscr{G}_u^k} \frac{\partial}{\partial y_k}\, W_{(k)}(u, \xi)\,.\, \iota(u, \xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Интегрируя это равенство через E_r и пользуясь теоремой Фубини, получаем из (49)

$$R^{(k)}(W_{(k)};\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1} \int_{\mathscr{G}} \frac{\partial}{\partial y_k}\, W_{(k)}(y)\,.\, \iota(y;\ \mathfrak{S})\, \mathrm{d}y\,.$$

Остаётся просуммировать эти равенства для $k = 1, \ldots, r+1$.

Замечание 1. Отметим, что в формулировках всех главных определений и теорем этого параграфа можно обойтись лишь с понятием вектора типа $(r+1, 1)$ [который мы будем, как обыкновенно, называть $(r+1)$-мерным вектором]. Если в обозначениях отд. 2,12 положить

$$P_k(F;\ \mathfrak{S}) = (-1)^{k-1}\, R^{(k)}(F;\ \mathfrak{S}) \text{ [13]}$$

для каждой ограниченной B-измеримой функции на множестве $\mathscr{V}$,

$$P(U;\ \mathfrak{S}) = \sum_{k=1}^{r+1} P_k(U_k;\ \mathfrak{S})$$

для каждого ограниченного B-измеримого вектора $U = [U_k]$ на $\mathscr{V}$, то условие (b) можно сформулировать следующим образом:

Множество $\mathscr{V}$ ограничено, и для каждого $(r+1)$-мерного вектора U класса C_∞ на E_{r+1}, удовлетворяющего на E_{r+1} соотношению $\operatorname{div} U = 0$, имеет место равенство $P(U;\ \mathfrak{S}) = 0$.

Функцию $\iota(y;\ \mathfrak{S})$ из отд. 2,13 можно определить равенством

$$\iota(y;\ \mathfrak{S}) = \frac{1}{c_{r+1}} P(W^y;\ \mathfrak{S})\,,$$

где $W^y(x) = \frac{1}{1-r}\,\mathrm{grad}_x\,|x-y|^{1-r}$ в случае $r > 1$, $W^y(x) = \mathrm{grad}_x \lg |x-y|$ в случае $r = 1$. Равенство (52) из отд. 2,31 примет — в соответствующих предположениях относительно $(r+1)$-мерного вектора U — более привычный вид

$$P(U;\ \mathfrak{S}) = \int_{\mathscr{G}} \iota(y;\ \mathfrak{S})\,\mathrm{div}\,U(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Замечание 2. Главными результатами этого параграфа следует считать теоремы 2,18, 2,21, 2,22, 2,28, 2,29 и 2,31. Все остальные утверждения имеют лишь вспомогательный характер и некоторые из них содержатся в известных более общих теоремах. Это относится, в частности, к утверждениям о функциях η_r, μ_r и к формулам преобразования многомерных интегралов. Чтобы свести утверждения относительно функции μ_r и относительно преобразований интегралов к известным теоремам, достаточно, например, доказать, что для $t \in \mathscr{M}(T, \mathscr{D})$ число $\mu_r(t;\ T)$ (см. 2,7) равно топологическому индексу отображения T в точке t. Так как упомянутые вопросы не представляют в рамке этой статьи самостоятельный интерес, то мы не будем здесь на них больше останавливаться. Мы не приводим тоже относящуюся сюда довольно обширную библиографию. Читателю, желающему познакомиться с этой проблематикой в очень общем изложении, рекомендуем обратиться к недавно появившейся монографии [8].

Отметим ещё, что ограничения относительно отображений (условие Липшица), которые делались в течение предшествующих выкладок, отнюдь не являются существенными и могут быть в значительной степени ослаблены.

III

В этом параграфе приведено несколько достаточных условий для замкнутости в смысле отдела 2,12.

3,1. *Для того, чтобы вектор W типа $(r+1, r)$ и класса C_∞ на E_{r+1} удовлетворял на E_{r+1} соотношению*

$$\nabla W = 0\,, \tag{53}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал на E_{r+1} вектор V типа $(r+1, r-1)$ и класса C_∞ такой, что $W = \nabla V$.

Доказательство. Достаточность условия вытекает из отд. 2,15. Для доказательства его необходимости достаточно воспользоваться утверждением 2,8, полагая в нем $\mathscr{B} = \emptyset$ и избирая точку $\alpha \in E_1$ произвольно.

3,2. *Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область в E_r и пусть T — отображение области $\mathscr{D}$ в E_{r+1}, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ условию Липшица. Предположим, что существует точка $z \in E_{r+1}$ так, что отображение $\tilde{T}$, определенное соотношениями*

$$\tilde{T}(t) = T(t) \quad \text{для} \quad t \in \mathscr{D}\,,$$
$$\tilde{T}(t) = z \qquad \text{для} \quad t \in \overline{\mathscr{D}} - \mathscr{D}\,,$$

является непрерывным на $\overline{\mathscr{D}}$. Тогда для произвольного $\sigma \in E_1$ одночленная последовательность $\mathfrak{S} = \{T, \mathscr{D}, \sigma\}$ замкнута в смысле отд. 2,12.

Доказательство. Читателю предоставляем проверить условие (a) из отд. **2,12**. Очевидно, что множество $\mathscr{V} = T(\mathscr{D})$ ограничено. Изберем r-мерный куб $\mathscr{K}$ так, чтобы $\mathscr{K}^0 \supset \overline{\mathscr{D}}$ и определим отображение T^* куба $\mathscr{K}$ в E_{r+1}, полагая $T^*(t) = T(t)$ для $t \in \mathscr{D}$, $T^*(t) = z$ для $t \in \mathscr{K} - \mathscr{D}$. Нетрудно обнаружить, что отображение T^* удовлетворяет на $\mathscr{K}$ условию Липшица. Закрепим теперь k и определим отображение $\widehat{T}$ по отд. **2,17**. Определяя аналогично отображение $\widehat{T}^*$, имеем $N(u; \widehat{T}) = N(u; \widehat{T}^*)$ для $u \in E_r - \{\hat{z}\}$, $\int\limits_{\mathscr{D}} |J^{(k)}(t; T)|\, \mathrm{d}t = \int\limits_{E_r} N(u; \widehat{T})\, \mathrm{d}u = \int\limits_{E_r} N(u; \widehat{T}^*)\, \mathrm{d}u = \int\limits_{\mathscr{K}^0} |J^{(k)}(t; T^*)|\, \mathrm{d}t$. Следовательно, $J^{(k)}(t; T^*) = 0$ для почти всех $t \in \mathscr{K}^0 - \mathscr{D} (1 \leqq k \leqq r + 1)$ и $R(W; T, \mathscr{D}) = R(W; T^*, \mathscr{K})$ для всякого непрерывного вектора W типа $(r + 1, r)$ на E_{r+1}. Пусть теперь W — вектор типа $(r + 1, r)$ и класса C_∞, удовлетворяющий на E_{r+1} условию (53), и пусть V — вектор типа $(r + 1, r - 1)$ и класса C_∞, $\nabla V = W$. Из 1,12 получаем $R(W; \mathfrak{S}) = \sigma R(W; T, \mathscr{D}) = \sigma R(W; T^*, \mathscr{K}) = \sigma \widehat{R}(V; T^*, \mathscr{K})$. Так как T^* постоянно на границе куба $\mathscr{K}$, то $\widehat{R}(V; T^*, \mathscr{K}) = 0$. Мы видим, что выполняется условие (b) из отд. 2,12.

3,3. Обозначение. Пусть $\mathscr{D}$ — область в E_r и пусть $T = [T_1, \ldots, T_{r+1}]$ — отображение множества $\mathscr{D}$ в E_{r+1}, удовлетворяющее на $\mathscr{D}$ локально условию Липшица. Если функции $T_1, \ldots, T_{r+1}$ обладают полным дифференциалом в точке t, то положим $w_k(t; T) = (-1)^{k-1} J^{(k)}(t; T)$, $w(t; T) = [w_1(t; T), \ldots, w_{r+1}(t; T)]$.

Пусть, далее, $\mathscr{A} \subset E_{r+1}$ и пусть $\mathscr{H}$ — граница множества $\mathscr{A}$. Обозначим через $\Gamma(T, \mathscr{A})$ множество всех $t \in \mathscr{D}$, для которых выполняются следующие условия:

1. Функции $T_1, \ldots, T_{r+1}$ обладают полным дифференциалом в точке t.

2. Для каждой окрестности $\mathscr{U}$ точки t $(t \in \mathscr{U} \subset \mathscr{D})$ существует число $\varepsilon > 0$ так, что имеет место импликация

$$(x \in \mathscr{H},\ |x - T(t)| < \varepsilon) \Rightarrow x \in T(\mathscr{U})\,.$$

3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа α_1, α_2 так, что

$$0 < \alpha_1, \alpha_2 < \varepsilon\,, \quad T(t) - \alpha_1 w(t; T) \in \mathscr{A}\,, \quad T(t) + \alpha_2 w(t; T) \in E_{r+1} - \mathscr{A}\,.$$

3,4. *Пусть $\varkappa$ — интегрируемая функция на E_{r+1}, обращающаяся в нуль в дополнении некоторого достаточно большого куба. Предположим, что для каждого $(r + 1)$-мерного вектора U класса C_1 на E_{r+1}*

$$\int_{E_{r+1}} \varkappa(y) \operatorname{div} U(y) \, dy = 0 .$$

Тогда $\varkappa(y) = 0$ для почти всех $y \in E_{r+1}$.

Доказательство. Нетрудно обнаружить, что $\int_{E_{r+1}} F(y) \varkappa(y) \, dy = 0$ для каждой функции F, обладающей на E_{r+1} непрерывными частными производными первого порядка. Отсюда, как известно, вытекает доказываемое утверждение.

3,5. *Пусть $\mathscr{A}$ — ограниченное множество в E_{r+1} с границей $\mathscr{H}$. Пусть Λ — счетное (или конечное) множество индексов и пусть каждому $\alpha \in \Lambda$ сопоставлено отображение T_α области $\mathscr{D}_\alpha \subset E_r$ в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее на $\mathscr{D}_\alpha$ локально условию Липшица. Предположим, что*

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\mathscr{D}_\alpha} |\mathfrak{M}(t; T^\alpha)| \, dt < + \infty , \tag{54}$$

$$(\alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta) \Rightarrow T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha) \cap T^\beta(\mathscr{D}_\beta) = \emptyset$$

и что для $\mathscr{F}_\alpha = \mathscr{D}_\alpha - \Gamma(T^\alpha, \mathscr{A})$ справедливо соотношение

$$\int_{\mathscr{F}_\alpha} |\mathfrak{M}(t; T^\alpha)| \, dt = 0 , \quad \alpha \in \Lambda .$$

Пусть еще множество $\mathscr{Z} = \mathscr{H} - \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha)$ удовлетворяет условиям

$$\mathsf{L}_r \, \pi_k \mathscr{Z} = 0 , \quad k = 1, \ldots, r + 1 . \tag{55}$$

Тогда последовательность $\mathfrak{S} = \{T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha, 1\}_{\alpha \in \Lambda}$ замкнута в смысле отд. 2,12 и функция $\iota(y, \mathfrak{S})$ (см. 2,13) равна почти всюду на E_{r+1} характеристической функции множества $\mathscr{A}$.

Доказательство. Из (54) видно, что выполняется условие (a) из отд. 2,12. В обозначениях из замечания 1 к отд. 2,31 получаем по теореме 12 из [4], что множество $\mathscr{A}$ измеримо и что

$$P(U; \mathfrak{S}) = \int_{\mathscr{A}} \operatorname{div} U(y) \, dy = \int_{E_{r+1}} \chi_{\mathscr{A}}(y) \operatorname{div} U(y) \, dy \tag{56}$$

($\chi_{\mathscr{A}}$ — характеристическая функция множества $\mathscr{A}$) для каждого $(r + 1)$-мерного вектора U класса C_1 на E_{r+1}. В частности, $P(U; \mathfrak{S}) = 0$, если $\operatorname{div} U = 0$. Полагая $\mathscr{V} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha)$, имеем $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$; так как множество $\mathscr{H}$ компактно, то множество $\mathscr{V}$ ограничено. Итак, условие (b) из отд. 2,12 выполнено. Так как $\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V} \subset \mathscr{Z}$, то из (55) вытекает (21) для $k = 1, \ldots, r + 1$. По теореме 2,31 (см. тоже замечание 1 к отд. 2,31) получаем

$$P(U; \mathfrak{S}) = \int_{E_{r+1}} \iota(y; \mathfrak{S}) \operatorname{div} U(y) \, dy \tag{57}$$

для каждого $(r+1)$-мерного вектора U класса C_1 на E_{r+1}. Сравнивая равенства (56), (57) и используя утверждение 3,4 получим $\iota(y; \mathfrak{S}) = \chi_{\mathscr{A}}(y)$ для почти всех $y \in E_{r+1}$.

Замечание. Приведём без доказательства ещё следующее утверждение:

Пусть имеют место обозначения и предположения (a), (b) *из отд.* 2,12. *Пусть, далее,* Z — *отображение множества* $\overline{\mathscr{V}}$ *в* E_{r+1}, *удовлетворяющее на* $\overline{\mathscr{V}}$ *условию Липшица. Определим для каждого* $\alpha \in \Lambda$ *отображение* $\tilde{T}^\alpha$ *области* $\mathscr{D}_\alpha$ *в* E_{r+1} *соотношением* $\tilde{T}^\alpha(t) = Z(T^\alpha(t))$, $t \in \mathscr{D}_\alpha$. *Тогда последовательность* $\tilde{\mathfrak{S}} = \{\tilde{T}^\alpha, \mathscr{D}_\alpha, \sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *тоже замкнута в смысле отд.* 2,12.

Литература

[1] *M. Bázlik:* Stokesova věta, dipl. práce z r. 1955, na mat. fys. fak. KU v Praze.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

[3] *J. Král - J. Mařík:* Der Greensche Satz, Čech. mat. žur. *7* (*82*), 1957, 235—247.

[4] *J. Král:* Poznámka ke Gauss-Ostrogradského formuli, Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 283—292.

[5] *K. Krickeberg:* Über den Gausschen und den Stokesschen Integralsatz III, Math. Nachr. *12* (1954), 341—365.

[6] *J. Mařík:* The surface integral, Čech. mat. žur. *6* (*81*), 1956, 522—558.

[7] *J. Mařík:* Преобразование одномерных интегралов, Čech. mat. žur. *82* (1957), 93—98.

[8] *T. Rado - P. V. Reichelderfer:* Continuous transformations in analysis, Berlin-Göttingen-Heideberg 1955.

[9] *S. Saks:* Theory of the integral, New York.

Summary

CLOSED SYSTEMS OF MAPPINGS AND THE SURFACE INTEGRAL

JOSEF KRÁL, Praha

In the sequel the following notation is adopted. k, r are positive integers, $1 \leqq k \leqq r+1$. Denoting by x_i the i-th coordinate of the point $x \in E_{r+1}$, we put $\hat{x} = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{r+1}]$. For $\mathscr{A} \subset E_{r+1}$ we denote by $\pi_k\, \mathscr{A}$ the set of all $\hat{x}$' s, where $x \in \mathscr{A}$. If, further, $u \in E_r$, then $\mathscr{A}_u^k$ is the set of all $\xi \in E_1$ with $[u_1, \ldots, u_{k-1}, \xi, u_k, \ldots, u_r] \in \mathscr{A}$. If $\mathscr{D}$ is a domain in E_r and T is a mapping from $\mathscr{D}$ into E_{r+1}, then T_i, $\hat{T}$ are defined in $\mathscr{D}$ as follows:

$$(t \in \mathscr{D}, T(t) = x) \Rightarrow T_i(t) = x_i\,, \quad \hat{T}(t) = \hat{x}\,.$$

For $u \in E_r$, the number (possibly infinite) of points in $\hat{T}^{-1}(u)$ will be denoted by $N(u; \hat{T})$. If T is locally Lipschitzian in $\mathscr{D}$, then the Jacobian $J(t; \hat{T})$ of the transformation $\widehat{T}$ is defined for almost every $t \in \mathscr{D}$ and we put $w_k(t; T) = (-1)^{k-1} J(t; \widehat{T})$; we write $w(t; T) = [w_1(t; T), \ldots, w_{r+1}(t; T)]$.

Let now Λ be a countable (possibly finite) system of indices and suppose for every $\alpha \in \Lambda$ we are given a real number σ_α, a domain $\mathscr{D}_\alpha \subset E_r$ and a locally Lipschitzian mapping T^α from $\mathscr{D}_\alpha$ into E_{r+1}. Let

$$(*) \qquad \sum_{\alpha \in \Lambda} (1 + |\sigma_\alpha|) \int_{\mathscr{D}_\alpha} |w(t; T^\alpha)| \, \mathrm{d}t < + \infty$$

and let us denote by $\mathfrak{S}$ the aggregate of triples $\{T^\alpha, \mathscr{D}_\alpha, \sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Given a bounded Borel measurable function F on $\mathscr{V} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T^\alpha(\mathscr{D}_\alpha)$ we put

$$P_k(F; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha \int_{\mathscr{D}_\alpha} F(T^\alpha(t)) \, w_k(t; T^\alpha) \, \mathrm{d}t \, .$$

Further, for every bounded Borel measurable vector (i. e. an $(r + 1)$-term sequence of bounded B-measurable functions) $V = [V_1, \ldots, V_{r+1}]$ on $\mathscr{V}$ we define

$$P(V; \mathfrak{S}) = \sum_{k=1}^{r+1} P_k(V; \mathfrak{S}) \, .$$

The aggregate $\mathfrak{S}$ is termed *closed* if (*) is fulfilled, $\mathscr{V}$ is bounded and $P(V; \mathfrak{S}) = 0$ whenever V is an infinitely differentiable vector satisfying the equality $\operatorname{div} V = 0$ on E_{r+1}.

In the sequel it is assumed that $\mathfrak{S}$ is closed. Put

$$\Phi(x; y) = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{1-r} |x - y|^{1-r} \\ \lg |x - y| \end{array} \right.$$

$(x, y \in E_{r+1}, x \neq y)$ according as $r > 1$ or $r = 1$, and define the vector W^y on $E_{r+1} - \{y\}$ by

$$W^y(x) = \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \, .$$

Further, for every y in the complement of $\overline{\mathscr{V}}$ (= the closure of $\mathscr{V}$) put

$$\iota(y; \mathfrak{S}) = \frac{1}{c_{r+1}} P(W^y; \mathfrak{S}) \, ,$$

where c_{r+1} is the area of the unit r-sphere $\sum_{i=1}^{r+1} x_i^2 = 1$. Fixing the integer k and using the notation described above we have then for every $y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ with

$$\widehat{y} \in E_r - \pi_k (\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) \, , \quad \sum_{\alpha \in \Lambda} N(\widehat{y}; \widehat{T}^\alpha) < + \infty$$

the formula

$$2\iota(y; \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha \sum_t \mu_r(t; \widehat{T}^\alpha) \, . \operatorname{sgn} [T_k^\alpha(t) - y_k] \, ,$$

$\sum_t$ being extended over all t's in $\mathscr{D}_\alpha$ with $\widehat{T}^\alpha(t) = \widehat{y}$; here $\mu_r(t; \widehat{T}^\alpha)$ is the local index of the transformation $\widehat{T}^\alpha$ at the point t (elementary definition in section 2,7). This formula implies a number of corollaries some of which are proved in sections 2, 21 and 2,22.

In the sequel L_p will stand for the p-dimensional Lebesgue measure. If

$$(**)\qquad \mathsf{L}_r\,\pi_k(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V}) = 0\,,$$

then $\mathsf{L}_{r+1}\,\overline{\mathscr{V}} = 0$, the function $\iota(y; \mathfrak{S})$ is defined almost everywhere in E_{r+1} and we have the inequality

$$\int\limits_{E_{r+1}} |\iota(y; \mathfrak{S})|\, \mathrm{d}y \leqq \tfrac{1}{2} g_k \sum_{\alpha \in A} |\sigma_\alpha| \int\limits_{\mathscr{D}_\alpha} |w_k(t; T)|\, \mathrm{d}t\,,$$

where $g_k = \sup\limits_{u \in E_r} \mathsf{L}_1\, \mathscr{G}_u^k\,, \quad \mathscr{G} = E[y;\, y \in E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}\,,\ \iota(y; \mathfrak{S}) \neq 0]\,.$

Let us denote by $\mathscr{B}_k$ the set of all u's fulfilling the relations

$$u \in E_r - \pi_k\,(\overline{\mathscr{V}} - \mathscr{V})\,,\quad \sum_{\alpha \in A} N(u; \widehat{T}^\alpha) < +\infty\,.$$

For every $u \in \mathscr{B}_k$ the set $\mathscr{V}_u^k = (\overline{\mathscr{V}})_u^k$ is finite. If, further, F is a finite function on $\mathscr{V}$, we define the function $S_F^k(u; \mathfrak{S})$ on $\mathscr{B}_k$ as follows: $S_F^k(u; \mathfrak{S}) = 0$ for every $u \in \mathscr{B}_k$ with $\mathscr{V}_u^k = \emptyset$. If $\mathscr{V}_u^k = \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_s\} \neq \emptyset$ (of course, s as well as $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ depend upon the choice of u), then $\iota(y; \mathfrak{S})$ remains constant on every set $E[y; \widehat{y} = u,\ \alpha_j < y_k < \alpha_{j+1}]$; denoting by ι_j $(1 \leqq j < s)$ the value taken on by $\iota(y; \mathfrak{S})$ on this set we define

$$S_F^k(u; \mathfrak{S}) = \sum_{j=1}^{s-1} \iota_j [F(x^{j+1}) - F(x^j)]\,,$$

where $\widehat{x^j} = u$, $x_k^j = \alpha_j$ $(j = 1, \ldots, s)$.
If, in addition, F is assumed to be bounded and B-measurable on $\mathscr{V}$ and if the condition (**) is satisfied, then $S_F^k(u; \mathfrak{S})$ is defined almost everywhere in E_r and the equality

$$\int\limits_{E_r} S_F^k(u; \mathfrak{S})\, \mathrm{d}u = P_k(F; \mathfrak{S})$$

is valid. Hence there follows easily the formula

$$\int\limits_{\mathscr{G}} \iota(y; \mathfrak{S})\, \mathrm{div}\, V(y)\, \mathrm{d}y = P(V; \mathfrak{S})$$

provided V is a vector on $\mathscr{G} \cup \mathscr{V}$ fulfilling adequate conditions (cf. section 2,31).

If (**) is fulfilled for every integer $k \in \langle 1, r+1 \rangle$, then $\iota(y; \mathfrak{S})$ is constant on every component of $E_{r+1} - \overline{\mathscr{V}}$ and vanishes at infinity. The values taken on by $\iota(y; \mathfrak{S})$ are then all representable in the form $\sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \sigma_\alpha$, n_α being integers, $n_\alpha = 0$ for all but a finite number of α's.

In paragraph 3 several sufficient conditions are given for a system $\mathfrak{S}$ to be closed in the sense of preceding definition.