Romulus Cristescu

Sur les groupes dirigés

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 1, 17–26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100392

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

SUR LES GROUPES DIRIGÉS

ROMULUS CRISTESCU, Bucarest

(Reçu le 14 avril 1959)

Dans cet article on considère des groupes dirigés. On donne au § 1, quelques propriétés générales de ces groupes, qui sont utilisées dans les autres paragraphes. Au § 2, on introduit les notions de composante et de projecteur et on établit leurs propriétés principales.[1]) Au § 3 on considère des systèmes de composantes et on généralise les théorèmes d'immersion et de représentation, établis en [2] pour les espaces linéaires réticulés complets, et en [3] pour les groupes réticulés.

1

Soit $\mathscr{G}$ un groupe ordonné, c'est-à-dire un groupe, qui est en même temps un ensemble ordonné (partiellement) tel que

$$x \leqq y \Rightarrow a + x + b \leqq a + y + b$$

quels que soient $a, b \in \mathscr{G}$.

Nous désignons par $\mathscr{G}_+$ l'ensembles des éléments positifs de $\mathscr{G}$, c'est-à-dire des éléments $x \geqq 0$.

Proposition 1.1. *Si* $0 = x \wedge y$, *alors* $x + y = y + x = x \vee y$.

En effet, si $0 = x \wedge y$, alors on peut écrire

$$0 = (-x) \vee (-y) = -x + (0 \vee (x - y)) = -x + (y \vee x) - y\,,$$

chaque membre de ces égalités ayant un sens, d'où la proposition 1.1

Proposition 1.2. *Si* $0 = x \wedge z = y \wedge z$, *alors* $0 = (x + y) \wedge z = (y + x) \wedge z$.

En effet, si $v \leqq x + y, z$, alors $-x + v \leqq y, z$, et donc $-x + v \leqq 0$, ou $v \leqq x$. Comme on a encore $v \leqq z$, il résulte $v \leqq 0$. On arrive à la même conclusion, si l'on remplace $x + y$ par $y + x$. La proposition 1.2 est donc vraie.

[1]) Un rôle important dans cette théorie est joué par la propriété de décomposition des éléments (sous la forme donnée par F. RIESZ dans [1], ou sous des formes plus faibles). Mais, dans cet article une telle pripriété ne sera pas posée comme un axiome.

Proposition 1.3. *Si* $x + y = u + v$ *et* $0 = x \wedge v = y \wedge u$, *alors* $x = u$ *et* $y = v$.

En effet, on a $x \leqq u + v$ et donc $-u + x \leqq v$. Comme on a aussi $-u + x \leqq x$, il résulte $-u + x \leqq 0$ car $0 = x \wedge v$. Par conséquent $x \leqq u$. D'autre part les relations $u \leqq x + y$ et $0 = u \wedge y$ entraînent aussi $u \leqq x$, donc $x = u$. Mais alors, il résulte en même temps $y = u$, ce qui démontre la proposition 1.3.

Proposition 1.4. *Soit* $\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *un système d'éléménts positifs tel que* $0 = x_{\xi_1} \wedge x_{\xi_2}$ *pour* $\xi_1 \neq \xi_2$. *Dans ce cas, lorsqu'il existe* $\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi$, *alors* $\bigvee_{\xi \neq \xi_0} x_\xi$ *existe aussi pour chaque* $\xi_0 \in \Xi$, *et l'on a*

$$\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi = \bigvee_{\xi \neq \xi_0} x_\xi + x_{\xi_0} .$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $y = \bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi - x_{\xi_0}$. L'élément $x_\xi \vee x_{\xi_0}$ ayant un sens pour tout $\xi \neq \xi_0$ et étant égal à $x_\xi + x_{\xi_0}$, on a

$$\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi \geqq x_\xi + x_{\xi_0} \quad (\xi \neq \xi_0) ,$$

donc $y \geqq x_\xi$ pour $\xi \neq \xi_0$. Soit maintenant $z \geqq x_\xi$ pour tout $\xi \neq \xi_0$. On a

$$z + x_{\xi_0} \geqq x_\xi + x_{\xi_0} = x_\xi \vee x_{\xi_0} , \quad (\xi \neq \xi_0) ,$$

donc

$$z + x_{\xi_0} \geqq \bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi ,$$

ou

$$z \geqq \bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi - x_{\xi_0} = y .$$

Il en résulte $y = \bigvee_{\xi \neq \xi_0} x_\xi$, ce qui démontre la proposition.

Un groupe ordonné $\mathcal{G}$ est un *groupe dirigé* si $\mathcal{G}$ est un ensemble dirigé (à droit ou à gauche), c'est-à-dire: Pour toute couple d'éléments $x, y \in \mathcal{G}$ il existe $z \in \mathcal{G}$ tel que $z \geqq x, y$ ou $z \leqq x, y$. Si un groupe ordonné est dirigé à droit, alors il est dirigé à gauche et réciproquement. La condition qu'un groupe ordonné soit dirigé est équivalente à la suivante: pour tout élément x il existe un élément positif $z \geqq x$.

On sait aussi (voir [4]) que la condition qu'un groupe ordonné $\mathcal{G}$ soit groupe dirigé est équivalente à la condition que tout élément de $\mathcal{G}$ puisse être représenté comme la différence de deux éléments positifs. Donc $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ - \mathcal{G}_+$.

Dans tout le reste de cet article nous supposons que $\mathcal{G}$ soit un groupe dirigé.

Une application U d'une partie de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est un *opérateur additif*, si $U(x + y) = U(x) + U(y)$; l'application U est un *opérateur positif* si $U(x) \geqq 0$ pour tout $x \geqq 0$.

Proposition 1.5. *Si U est opérateur additif (et positif) de $\mathscr{G}_+$ dans $\mathscr{G}_+$ alors il peut être prolongé uniquement à un opérateur additif (et positif) sur $\mathscr{G}$ en posant*

$$U(x) = U(y) - U(z) \tag{1.1}$$

pour $x = y - z$ $(y, z \in \mathscr{G}_+)$.

Démonstration.[2]) Observons d'abord que de

$$a + b = b + a_b \quad (a, b \in \mathscr{G}_+)$$

et de l'additivité de U il résulte

$$U(a) + U(b) = U(b) + U(a_b)\,,$$

et donc

$$U(a_b) = (U(a))_{U(b)} \tag{1.2}$$

Prolongeons maintenant l'opérateur U en utilisant la formule (1.1). Nous montrerons que $U(x)$ ne dépend pas de la représentation de x. Soit donc $x = y - z = v - w$.

Alors $y + w = v + z_w$ et avec (1.2)

$$U(y) + U(w) = U(v) + (U(z))_{U(w)}\,,$$

ce qui donne $U(y) - U(z) = U(v) - U(w)$.

L'additivité de l'opérateur U résulte comme suit: Soit $x_1 = y - z$ et $x_2 = v - w$. Alors $x_1 + x_2 = (y + v_z) - (w + z)$ et l'on a

$$U(x_1) + U(x_2) = (U(y) - U(z)) - (U(v) - U(w)) =$$
$$= (U(y) + U(w_z)) - (U(w) + U(z)) = U(y + v_z) - U(w + v) = U(x_1 + x_2)\,.$$

Établissons enfin l'unicité du prolongement. Soit V un opérateur additif (et positif) de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}$, tel que $V(x) = U(x)$ pour $x \in \mathscr{G}_+$.

Si $x = y - z$ avec $y, z \in \mathscr{G}_+$, alors, vue l'additivité de l'opérateur V, on a

$$V(x) = V(y) - V(z) = U(y) - U(z) = U(x)$$

et par conséquent $V = U$.

2

Considérons un ensemble $A \subset \mathscr{G}_+$. Nous désignons par A^* l'ensemble des éléments $x \in \mathscr{G}_+$, tels que $0 = x \wedge y$ pour tout $y \in A$. En vertu de la proposition 1.3 il en résulte que

$$x, y \in A^* \Rightarrow x + y \in A^*\,. \tag{2.1}$$

---

[2]) Si $a, b \in \mathscr{G}_+$, alors il existe un élément $a_b \in \mathscr{G}_+$ et seulement un, tel que $a + b = b + a_b$. On a aussi: $b - a = d - c \Leftrightarrow b + c = d + a_c$ ainsi que $(b - a) + (d - c) = (b + d_a) - (c + a)$ où a, b, c, d sont des éléments de $\mathscr{G}_+$. Voir p. e. [5], XIV, § 3.

Il est aussi évident que

(2.2) $$0 \leqq x \leqq x_0 \in A^* \Rightarrow x \in A^* .$$

Un *sous-groupe dirigé* G de $\mathscr{G}$, est un sousgroupe de $\mathscr{G}$ qui est en même temps un ensemble dirigé par rapport à l'ordre induit sur G par celui de $\mathscr{G}$.

Si G est un sous-groupe dirigé de $\mathscr{G}$, nous désignons par G^* l'ensemble $G^*_+ - G^*_+$ ($G^*_+ = (G_+)^*$).

Nous écrivons aussi A^{**} (et G^{**}) au lieu de $(A^*)^*$ (resp. $(G^*)^*$).

Remarque. Soit $\mathscr{H}$ un groupe réticulé. Un ensemble $G \subset \mathscr{H}$ est un sous-groupe réticulé de $\mathscr{H}$, lorsque G est un sous-groupe ayant cette propriété-ci: Si $x, y \in G$, alors $x \vee y$, $x \wedge y \in G$ (il est suffisant que la relation $x \in G$ entraîne[3]) $x_+ \in G$).

Pour un ensemble $A \subset \mathscr{H}$, soit $A^\perp$ l'ensemble des éléments $x \in \mathscr{H}$ tels que $x \perp y$ pour tout $y \in A$.

Si G est un sous-groupe réticulé du groupe réticulé $\mathscr{H}$, alors $G^\perp = G^*$.

En effet, soit $x \in G^\perp$, donc $x \perp g$ pour tout $g \in G$. Mais $g = g_+ - g_-$ avec $g_+, g_- \in G_+$ et la relation $x \perp g$ est équivalente aux relations $x_+, x_- \perp g_+, g_-$. Par suite $x_+, x_- \in G^*_+$, donc $x = x_+ - x_- \in G^*_+ - G^*_+$, autrement dit $G^\perp \subset G^*$.

Réciproquement, soit $x = y - z$ avec $y, z \in G^*_+$. On a donc $y, z \perp g$ pour tout $g \in G_+$. Soit maintenant $g \in G$. De $g = g_+ - g_-$, où $g_+, g_- \in G_+$ il résulte alors $y, z \perp g_+, g_-$ et par suite $x \perp g$. L'élément g étant arbitraire dans G, on en déduit $x \in G^\perp$, donc $G^* \subset G^\perp$. Par conséquent $G^* = G^\perp$.

Proposition 2.1. *Si G est un sous-groupe dirigé de $\mathscr{G}$, alors G^* est aussi un sous-groupe dirigé et l'on a $G^*_+ = (G^*)_+$.*

Démonstration. Observons d'abord que pour toute couple $a, b \in G^*_+$, on a $a_b \in G^*_+$. En effet, l'identité $a + b = b + a_b$ entraine $0 \leqq a_b \leqq a + b$ et notre affirmation résulte alors de (2.1) et (2.2).

Par suite, si $x_1 = y - z \in G^*$ et $x_2 = v - w \in G^*$, les éléments y, z, v, w appartenant à G^*_+, alors de l'égalité

$$(y - z) + (v - w) = (y + v_z) - (w + z)$$

on déduit que $x_1 + x_2 \in G^*$. On a aussi $-x_1 = z - y \in G^*$.

G^* est par conséquent un sous-groupe de $\mathscr{G}$ et, évidemment, un sous-groupe dirigé.

Si $y, z \in G^*_+$ et $y - z \geqq 0$, alors les inégalités $y \geqq y - z \geqq 0$ et la relation (2.2) entraînent $y - z \in G^*_+$. Donc $G^*_+ = (G^*)_+$.

Proposition 2.2. *Lorsque Q_0 est un sous-ensemble de $\mathscr{G}_+$ ayant la propriété que pour tout $x \in \mathscr{G}_+$ il existe $x' \in Q_0$ et $x'' \in Q_0^*$ tels que $x = x' + x''$, alors:*

(1) *Les éléments x', x'' sont uniquement définis.*

[3]) On désigne: $x_+ = x \vee 0$, $x_- = -(x \wedge 0)$, $|x| = (-x) \vee x$. On désigne par $x \perp y$ a relation $|x| \wedge |y| = 0$.

(2) $Q_0 = Q_0^{**}$.

(3) *L'ensemble* $Q = Q_0 - Q_0$ *est un sous-groupe dirigé et* $Q_+ = Q_0$.

Démonstration. (1) est une conséquence directe de la proposition 1.3.

(2) Comme on a évidemment $A \subset A^{**}$ pour tout $A \subset \mathscr{G}_+$, il reste à montrer que $Q_0^{**} \subset Q_0$. Soit $x \in Q_0^{**}$. Alors $0 = x \wedge y$ quel que soit $y \in Q_0^*$. D'autre part, $x = x' + x''$ avec $x' \in Q_0$ et $x'' \in Q_0^*$ et de $x'' = x \wedge x'' = 0$ il résulte alors $x \in Q_0$.

On établit (3) comme la proposition 2.1, en tenant compte du fait que la propriété précedente (2), implique que Q_0 jouit des propriétés (2.1) et (2.2).

Définition 2.1. Un sous-groupe dirigé $Q \subset \mathscr{G}$ sera appelé *composante* de $\mathscr{G}$ si pour tout $x \in \mathscr{G}_+$ il existe $x' \in Q_+$ et $x'' \in Q_+^*$ tels que $x = x' + x''$. Nous appelons *projecteur engendré* par Q, et nous désignons par $[Q]$, l'opérateur défini pour $x \geqq 0$ par l'égalité $[Q]x = x'$ où $x = x' + x''$, $x' \in Q_+$, $x'' \in Q_+^*$, et pour x quelconque par l'égalité $[Q]x = [Q]y - [Q]z$ où $x = y - z$, avec $y, z \geqq 0$.

L'élément $[Q]x$ sera appelé *projection* de x sur Q.

Proposition 2.3. *Si Q est une composante, alors* $Q = Q^{**}$.

Démonstration. En vertu des propositions 2.1 et 2.2, on peut parler de Q^{**}. De $Q^* = Q_+^* - Q_+^*$ où $Q_+^* = (Q_+)^*$, il résulte que $(Q^*)_+ = Q_+^*$. Soit $P = Q^*$. On a

$$\begin{aligned} Q^{**} = P^* = P_+^* - P_+^* = (P_+)^* - (P_+)^* = ((Q^*)_+)^* - ((Q^*)_+)^* = \\ = ((Q_+)^*)^* - ((Q_+)^*)^* = Q_+^{**} - Q_+^{**} = Q_+ - Q_+ = Q\,, \end{aligned}$$

en tenant compte de la proposition 2.2.

Proposition 2.4. *Quelle que soit la composante $Q \subset \mathscr{G}$, le projecteur $[Q]$ est un opérateur additif et positif sur $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in \mathscr{G}_+$. Avec les notations de la définition 2.1 on a

$$x_1 + x_2 = (x_1' + x_1'') + (x_2' + x_2'') = (x_1' + x_2') + (x_1'' + x_2'')\,,$$

car $0 = x_1'' \wedge x_2'$, et donc x_1'' et x_2' sont permutables. Les relations $x_1' + x_2' \in Q_+$ et $x_1'' + x_2'' \in Q_+^*$ entraînent par conséquent $x_1' + x_2' = [Q](x_1 + x_2)$. La restriction de l'opérateur $[Q]$ à $\mathscr{G}_+$ est un opérateur additif et à valeurs dans $\mathscr{G}_+$. D'après la proposition 1.1 l'opérateur $[Q]$ est additif (et positif) sur $\mathscr{G}$.

Proposition 2.5. *Lorsque Q est une composante, alors Q^* et aussi une composante, et chaque élément $x \in \mathscr{G}$ peut être représenté d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' \in Q$ et $x'' \in Q^*$. De plus $x' = [Q]\,x$ et $x'' = [Q^*]\,x$.*

Démonstration. D'après les propositions 2.2, 2.1 et la définition 2.1, Q^* est un sous-groupe dirigé. D'autre part, pour chaque $x \geqq 0$ il existe $x' \in Q_+$ et $x'' \in Q_+^*$ tels que $x = x' + x''$. Mais $x' + x'' = x'' + x'$, car $0 = x' \wedge x''$, et comme $Q_+ = Q^{**}_+$ (prop. 2.2) il en résulte que $x = x'' + x'$ avec $x'' \in (Q^*)_+$ et $x' \in ((Q^*)_+)^* = Q^{**}_+$. L'ensemble Q^* est ainsi une composante.

Soit maintenant $x = y - z$ avec $y, z \geqq 0$. On a

$$x = (y' + y'') - (z' + z'')$$

avec $y', z' \in Q_+$ et $y'', z'' \in Q^*_+$. Si l'on pose $x' = y' - z'$ et $x'' = y'' - z''$, on a $x' \in Q$ et $x'' \in Q^*$. D'autre part, y'' et z' étant permutables, ainsi que z' et z'', il en résulte que

$$x' + x'' = (y' - z') + (y'' - z'') = (y' + y'') - (z' + z'') = x .$$

Etablissons maintenant l'unicité de la représentation. Soit $x = x' + x'' = u' + u''$ avec $x', u' \in Q$ et $x'', u'' \in Q^*$. Soit aussi $x' = y' - z'$, $x'' = y'' - z''$, $u' = v' - w'$ et $u'' = v'' - w''$, où les éléments y', z', v', w' appartiennent à Q_+, tandis que y'', z'', v'', w'' appartiennent à Q^*_+. On a donc

$$(y' - z') + (y'' - z'') = (v' - w') + (v'' - w'') ,$$

ou

$$(w' - v') + (y' - z') = (v'' - w'') + (z'' - y'') ,$$

ou encore

$$(w' + y'_{v'}) - (z' + v') = (v'' + z''_{w''}) - (y'' + w'') .$$

Mais $y'_{v'} \in Q_+$ et $z''_{w''} \in Q^*_+$, comme nous l'avons déjà vu.

La dernière égalité est donc de la forme

$$a - b = c - d ,$$

avec $a, b \in Q_+$ et $c, d \in Q^*_+$. Les éléments b et d étant permutables, ainsi que b et c, car $0 = b \wedge d = b \wedge c$, on a ensuite

$$a + d = b + c .$$

Mais $0 = a \wedge c = b \wedge d$, et la proposition 1.3 montre alors que $a = b$ et $c = d$. On a donc

$$w' + y'_{v'} = z' + v' , \qquad v'' + z''_{w''} = y'' + w'' ,$$

ou

$$z' - y' = w' - v' , \qquad y'' - z'' = v'' - w'' ,$$

c'est-à-dire $x' = u'$ et $x'' = u''$.

La première partie de la proposition est démontrée. La deuxième résulte des égalités

$$x' = y' - z' = [Q]\, y - [Q]\, z = [Q]\,(y - z) = [Q]\, x ,$$

$$x'' = y'' - z'' = [Q^*]\, y - [Q^*]\, z = [Q^*]\,(y - z) = [Q^*]\, x .$$

Proposition 2.6. *Les projections sur une composante Q ont les propriétés*:

(1) $[Q]\, x = x \Leftrightarrow x \in Q$; (2) $[Q]\, x = 0 \Leftrightarrow x \in Q^*$.

Cette proposition se déduit aisément de la précédente.

3

Soit $\{\mathcal{G}_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ un système de groupes ordonnés. Considérons l'ensemble produit $\mathcal{H} = \prod_{\xi \in \Xi} \mathcal{G}_\xi$ muni de la structure de groupe et de celle d'ensemble ordonné déterminées sur lui par les lois

$$\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi} + \{y_\xi\}_{\nu \in \Xi} = \{x_\xi + y_\xi\}_{\xi \in \Xi} ,$$
$$\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi} \leqq \{y_\xi\}_{\xi \in \Xi} \Leftrightarrow x_\xi \leqq y_\xi \quad (\xi \in \Xi) .$$

L'ensemble $\mathcal{H}$ devient ainsi un groupe ordonné appelé *groupe ordonné produit des groupes* $\mathcal{G}_\xi$.

On vérifie aisément que: *le groupe ordonné* $\mathcal{H}$ *est un groupe dirigé si et seulement si les groupes ordonnés* $\mathcal{G}_\xi$ *sont des groupes dirigés.*

Définition 3.1. Un groupe ordonné $\mathcal{G}$ est *plongé* dans un groupe ordonné $\mathcal{H}$ si $\mathcal{G}$ est isomorphe (en tant que groupe et en tant qu' ensemble ordonné) à une partie de $\mathcal{H}$.

Dans ce qui suit, on supposera, comme au paragraphe précédent, que $\mathcal{G}$ soit un groupe dirigé.

Définition 3.2. Un système $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ de composantes sera appelé *total* si pour chaque élément non positif de $\mathcal{G}$ il existe une composante du système sur laquelle la projection de x est un élement non-positif.

Remarques. *Un système total* $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *de composantes, a les propriétés équivalentes suivantes*:

(1) *Si* $[Q_\xi]\, x = 0$ *pour tout* $\xi \in \Xi$, *alors* $x = 0$.

(2) $\bigcap_{\xi \in \Xi} Q_\xi^* = \{0\}$.

En effet, la propriété (1) résulte immédiatement, car si $[Q_\xi]\, x = 0$, alors $[Q_\xi]\, x \geqq 0$, ce qui entraine $x \geqq 0$, et l'on a aussi $[Q_\xi]\, (-x) \geqq 0$, donc $-x \geqq 0$.

Etablissons l'équivalence de (1) et (2). Soit (1) satisfait, et soit $a \in \bigcap_{\xi \in \Xi} Q_\xi^*$. Il en résulte $a \in Q_\xi^*$ pour tout ξ, donc $[Q_\xi]\, a = 0$, $(\xi \in \Xi)$. Par (1) on a $a = 0$. Réciproquement, soit (2) satisfait et soit $[Q_\xi]\, x = 0$ pour tout $\xi \in \Xi$. On a donc $x \in Q_\xi^*$ $(\xi \in \Xi)$ ou $x \in \bigcap_{\xi \in \Xi} Q_\xi^*$ donc par (2), $x = 0$.

Observons encore que *si* $\mathcal{G}$ *était réticulé, la condition que le système* $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *fût total, serait équivalente à la condition* (1) *ou* (2). En effet, de $[Q_\xi]\, x \geqq 0$ $(\xi \in \Xi)$ il résulte par les propriétés des projecteurs

$$[Q_\xi]\, x_- = ([Q_\xi]\, x)_- = 0 \quad (\xi \in \Xi) ,$$

donc si (1) avait lieu, alors $x_- = 0$, donc $x \geqq 0$.

Théorème 1.[4]) *Lorsque* $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *est un système total de composantes de* $\mathscr{G}$, *alors* $\mathscr{G}$ *est plongé dans le groupe dirigé produit* $\mathscr{H} = \prod_{\xi \in \Xi} \mathscr{G}_\xi$.

Démonstration. On peut définir une application U de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{H}$ en posant:

$$U(x) = \{x_\xi\}_{\xi \in \Xi} \quad \text{où} \quad x_\xi = [Q_\xi]\, x\,.$$

Vu les propriétés des projecteurs, on a $U(x + y) = U(x) + U(y)$ et $U(x) \geqq 0$ si $x \geqq 0$. Le système des composantes étant total, $U(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ce qui entraîne la biunivocité de U; et de plus, $U(x) \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 0$. L'application U est donc un isomorphisme existant entre $\mathscr{G}$ et une partie de $\mathscr{H}$.

Théorème 2. *Lorsque* $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *est un système total de composantes de* $\mathscr{G}$, *alors tout élément* $x \in \mathscr{G}$ *peut être représenté sous la forme*

$$x = \bigvee_{\xi \in \Xi} y_\xi - \bigvee_{\xi \in \Xi} z_\xi$$

où $y_\xi, z_\xi \geqq 0$, *et* $y_\xi - z_\xi = [Q_\xi]\, x$.

Démonstration. Soit d'abord $x \geqq 0$. Avec les notations du théorème précédent, pour tout ξ on a $x \geqq x_\xi \geqq 0$. Si $y \geqq x_\xi$ pour tout ξ, alors $y_\xi \geqq x_\xi$ où $y_\xi = [Q_\xi]\, x$. On a ainsi

$$\{y_\xi\}_{\xi \in \Xi} \geqq \{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$$

où $U(y) \geqq U(x)$. De l'isomorphisme qui existe entre $\mathscr{G}$ et $U(\mathscr{G})$ il résulte que $y \geqq x$. Par conséquent $x = \bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi$.

Soit maintenant x quelconque: $x = y - z$ avec $y, z \geqq 0$. Alors $y = \bigvee_{\xi \in \Xi} y_\xi$ et $z = \bigvee_{\xi \in \Xi} z_\xi$ où $y_\xi = [Q_\xi]\, y$ et $z_\xi = [Q_\xi]\, z$ et l'on a

$$[Q_\xi]\, x = [Q_\xi]\, y - [Q_\xi]\, z = y_\xi - z_\xi$$

ce qui démontre le théorème.

Nous supposons maintenant que $\mathscr{G}$ possède aussi la propriété (P): *Si pour un ensemble quelconque* $\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *d'éléments de* $\mathscr{G}$ *et pour un élément quelconque* x *on a* $0 = x_\xi \wedge x$ *pour tout* $\xi \in \Xi$ *et que* $\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi$ *existe, alors* $\mathbf{0} = (\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi) \wedge x$.

Cette propriété est vérifiée, en particulier, si dans $\mathscr{G}$ la loi de la distributivité complète est valable: si $x_\xi \wedge x$ existe pour tout $\xi \in \Xi$ et si $\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi$ existe aussi, alors

$$\bigvee_{\xi \in \Xi} (x_\xi \wedge x) = (\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi) \wedge x\,,$$

lorsqu'un des deux membres existe.

[4]) Les theorèmes analogues aux théorèmes de ce paragraphe, relatifs aux espaces linéaires réticulés complets, se trouvent dans [2], pp. 66, 67, 70. Ils généralisent les résultats de A. G. Pinsker [6, 7, 8]. Dans [9] on considère aussi le cas des groupes réticulés complets. Pour les groupes réticulés quelconques, les théorèmes ont été démontrés par František Šik dans [3]. Nos théorèmes généralisent directement les théorèmes donnés dans [3]. Remarquons que le terme de composante y est utilisé dans un sens différent du nôtre.

Définition 3.3. Un système total $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ de composantes de $\mathscr{G}$, tel que $0 = x_{\xi_1} \wedge x_{\xi_2}$ quels que soient $x_{\xi_1} \in (Q_{\xi_1})_+$ et $x_{\xi_2} \in (Q_{\xi_2})_+$, si $\xi_1 \neq \xi_2$, sera appelé *décomposition* de $\mathscr{G}$.

Théorème 3. *Lorsque* $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *est une décomposition de* $\mathscr{G}$, *et lorsque* $\mathscr{G}$ *possède la propriété* (P), *alors tout élément* $x \in \mathscr{G}$ *se représente sous la forme*

$$x = \bigvee_{\xi \in \Xi} y_\xi - \bigvee_{\xi \in \Xi} z_\xi \quad (y_\xi, z_\xi \in (Q_\xi)_+) \tag{3.1}$$

si et seulement si

$$y_\xi - z_\xi = [Q_\xi]\, x \,. \tag{3.2}$$

Démonstration. La possibilité de la représentation sous la forme (3.1) avec la condition (3.2) a été établie dans le théorème 2.

Réciproquement, supposons que tout x puisse être représenté sous la forme (3.1). Il résulte de la définition 3.3 et la proposition 1.4, que l'on a pour chaque $\xi_0 \in \Xi$

$$x = (\bigvee_{\xi \neq \xi_0} y_\xi + y_{\xi_0}) - (\bigvee_{\xi \neq \xi_0} z_\xi + z_{\xi_0}) \,.$$

Cette égalité entraîne, en utilisant les propriétés des projecteurs, que $x_{\xi_0} = [Q_{\xi_0}]\, x = y_{\xi_0} - z_{\xi_0}$, car $y_{\xi_0}, z_{\xi_0} \in (Q_{\xi_0})_+$ et

$$0 = (\bigvee_{\xi \neq \xi_0} y_\xi) \wedge a = (\bigvee_{\xi \neq \xi_0} z_\xi) \wedge a$$

quel que soit $a \in (Q_{\xi_0})_+$.

Remarque. Soit $\{\mathscr{G}_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ un système de groupes dirigés et $\mathscr{H} = \prod_{\xi \in \Xi} \mathscr{G}_\xi$. Pour chaque $\xi_0 \in \Xi$ soit $\mathscr{H}_{\xi_0}$ l'ensemble des éléments de la forme $\{x_{\xi\xi_0}\}_{\xi \in \Xi}$ où $x_{\xi\xi_0} = 0$ pour $\xi \neq \xi_0$ et $x_{\xi_0\xi_0} = x_{\xi_0} \in \mathscr{G}_{\xi_0}$. Dans ce cas, $\mathscr{H}_{\xi_0}$ est une composante de $\mathscr{H}$ isomorphe avec $\mathscr{G}_{\xi_0}$ et le système $\{\mathscr{H}_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ est une décomposition de $\mathscr{H}$.

Littérature

[1] *F. Riesz:* Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, Annals of Math. *41* (1940), 174—206.

[2] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Г. Т. Т. И., Москва, 1950.

[3] *Ф. Шик:* К теории структурно упорядоченных групп. Чехосл. мат. журнал *6 81* (1956), 1—25.

[4] *A. N. Clifford:* Partially ordered abelian groups. Annals of Math. *41* (1940), 465—473.

[5] *G. Birkhoff:* Lattice theory. New York, 1948.

[6] *А. Г. Пинскер:* О нормированных *К*-пространствах. ДАН *33* (1941), 12—15.

[7] *А. Г. Пинскер:* Разложение *К*-пространства на элементарные пространства. ДАН *49* (1945), 169—172.

[8] *А. Г. Пинскер:* О сепарабельных *К*-пространствах. ДАН *49* (1945), 327—328.

[9] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *Л. Г. Пинскер:* Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства. Успехи мат. наук, *3* (1951), 31—98.

Резюме

О НАПРАВЛЕННЫХ ГРУППАХ

РОМУЛУС КРИСТЕСКУ (Romulus Cristescu), Бухарест

Пусть $\mathscr{G}$ — направленная группа и $\mathscr{G}_+$ — множество всех положительных элементов в $\mathscr{G}$. Если $A \subset \mathscr{G}_+$, то мы обозначим через A^* множество элементов $x \in \mathscr{G}_+$ таких, что $0 = x \wedge y$ для всех $y \in A$. Если G — направленная подгруппа в $\mathscr{G}$, то обозначим через G^* множество $G_+^* - G_+^*$.

Определение 1. Направленная подгруппа $Q \subset \mathscr{G}$ называется *компонентой* $\mathscr{G}$, если для каждого $x \in \mathscr{G}_+$, существуют $x' \in Q_+$ и $x'' \in Q_+^*$ такие, что $x = x' + x''$. *Проектором* $[Q]$, порожденным подгруппой Q, называется оператор определённый для $x \geqq 0$ равенством $[Q]\, x = x'$, где $x = x' + x''$, $x' \in Q_+$, $x'' \in Q_+^*$ и для любого x равенством $[Q]\, x = [Q] y - [Q]\, z$, где $x = y - z$, и $y, z \geqq 0$. Элемент $[Q]\, x$ называется *проекцией* x на Q.

Доказывается следующее предложение:

Если Q — компонента, то Q^* тоже компонента и каждый элемент $x \in \mathscr{G}$ может быть разложен, одним и только одним образом, в форме $x = x' + x''$, с $x' \in Q$, и $x'' \in Q^*$. Более того: $x' = [Q]\, x$, $x'' = [Q^*]\, x$.

Определение 2. Систему $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ компонент назовём полной, если для каждого неположительного элемента $\mathscr{G}$ существует компонента системы, на которой проекция x является неположительным элементом.

Теорема 1. *Если $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — полная система компонент $\mathscr{G}$, то $\mathscr{G}$ погружён в направленную группу $\mathscr{H} = \prod_{\xi \in \Xi} Q_\xi$.*

Теорема 2. *Если $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — полная система компонент $\mathscr{G}$, то каждый элемент $x \in \mathscr{G}$ можно представить в форме*

$$x = \bigvee_{\xi \in \Xi} y_\xi - \bigvee_{\xi \in \Xi} z_\xi ,$$

где $y_\xi, z_\xi \geqq 0$ и $y_\xi - z_\xi = [Q_\xi]\, x$.

В следующей теореме, предполагается что в $\mathscr{G}$ справедлив закон: *Если для некоторого множества $\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ элементов $\mathscr{G}$ имеем $0 = x_\xi \wedge x$ для некоторого x и при любом $\xi \in \Xi$, и если $\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi$ существует, то $0 = (\bigvee_{\xi \in \Xi} x_\xi) \wedge x$.*

Теорема 3. *Если $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — полная система компонент $\mathscr{G}$ такая, что $0 = x_{\xi_1} \wedge x_{\xi_2}$ для любого $x_{\xi_1} \in (Q_{\xi_1})_+$ и любого $x_{\xi_2} \in (Q_\xi)_+$, где $\xi_1 \neq \xi_2$, то любой элемент $x \in \mathscr{G}$ можно представить в форме*

$$x = \bigvee_{\xi \in \Xi} y_\xi - \bigvee_{\xi \in \Xi} z_\xi \quad (y_\xi, z_\xi \in (Q_\xi)_+)$$

тогда и только тогда, когда $y_\xi - z_\xi = [Q_\xi]\, x$.