Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Čulík

Über die Homomorphismen der teilweise geordneten Mengen und Verbände

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 496–518

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100377`

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

ÜBER DIE HOMOMORPHISMEN DER TEILWEISE GEORDNETEN MENGEN UND VERBÄNDE

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingelangt am 17. September 1958)

Dem Herrn Prof. Dr. O. Borůvka zu seinem 60. Geburtstage gewidmet.

Es werden drei Arten von Homomorphismen der Theorien der teilweise geordneten Mengen und der Verbände eigenführt und schrittweise studiert. Einerseits erfüllen alle diese Homomorphismen stärkere Bedingungen als eine isotone Abbildung und anderseits brauchen sie nicht mit den üblichen Homomorphismen der Theorie der Verbände übereinzustimmen. Sie erlauben aber (analog zur Gruppentheorie) einige wichtige und fruchtbare Begriffe (z. B. der teilweise geordneten Faktormenge, der Einfachheit und der teilweise geordneten eingelegten Teilmenge) einzuführen und manche Sätze, die zur Klasifikation dienen können, abzuleiten. Dabei sind alle diesen Homomorphismen in einem sehr engen und natürlichen Zusammenhang mit dem Begriff der lexikographischen Summe der teilweise geordneten Mengen.

1. Einleitung. Unter einer *teilweise geordneten* (abgekürzt t. g.) Menge verstehen wir eine nichtleere Menge M, auf der eine asymmetrische und transitive binäre Relation $<$, die sog. *teilweise Anordnung* (vgl. [5]), definiert wird. Gilt entweder $x < y$ oder $x = y$, so schreiben wir $x \leqq y$ und gilt weder $x \leqq y$ noch $y \leqq x$, d. h. sind die Elemente x und y unvergleichbar, schreiben wir $x \parallel y$. Die Identität zwischen den Mengen bezeichnen wir mit dem Symbol $\equiv$ und die Relation des Isomorphismus zwischen den t. g. Mengen mit dem Symbol $=$.

Eine t. g. Teilmenge P der t. g. Menge M (die teilweise Anordnung in P ist dieselbe wie in M) heisst *eingelegte Teilmenge* in M, wenn

$$\begin{aligned} &z \in M - P \Rightarrow \textit{es gilt entweder } x < z \textit{ für jedes } x \in P\,, \\ &\textit{oder } z < x \textit{ für jedes } x \in P, \textit{ oder } x \parallel z \textit{ für jedes } x \in P\,, \end{aligned} \tag{1}$$

gilt. Enthält P ein einziges Element oder ist $P \equiv M$, so heisst sie *triviale eingelegte Teilmenge.*

Eine t. g. Teilmenge P der t. g. Menge M heisst *maximale eingelegte Teilmenge* in M, wenn sie eingelegt und $P \not\equiv M$ ist und wenn folgende Bedingung erfüllt wird:

$$Q \text{ ist in } M \text{ eingelegt}, \ Q \not\equiv P \subset Q \Rightarrow Q \equiv M . \tag{1'}$$

Eine Zerlegung $\overline{M}$ auf der t. g. Menge M heisst *Zerlegung in eingelegten t. g. Teilmengen*, wenn jede t. g. Teilmenge $P \in \overline{M}$ eine eingelegte Teilmenge ist. Auf jeder solchen Zerlegung bezüglich (1) ist es möglich eine teilweise Anordnung $<$ folgendermassen definieren

$$P < Q \ (P, Q \in \overline{M}) \Leftrightarrow x < y \ (x \in P, y \in Q) . \tag{2}$$

Dann t. g. Menge $\overline{M}$, die auf der Zerlegung $\overline{M}$ mit der teilweisen Anordnung (2) definiert wird, heisst *t. g. Faktormenge* auf den t. g. Menge M.

Alle diese Begriffe wurden in [4] eingeführt und studiert.

In [6] werden die Zerlegungen auf der t. g. Menge mit Hilfe der Äquivalenzrelationen studiert (sie sind auf M definiert und durch jede von ihnen ist eindeutig eine Zerlegung auf M bestimmt). Namentlich eine auf M definierte Äquivalenzrelation $\mathfrak{R}$ heisst *totale reguläre Äquivalenzrelation* (dieser Begriff stammt von J. Schmidt, vgl. [6], 30, Bedingung (T')), wenn

$$a, a', b, b' \in M, \ a \equiv a'(\mathfrak{R}), \ b \equiv b'(\mathfrak{R}), \ a \not\equiv b(\mathfrak{R}), \ a < b \Rightarrow a' < b' \tag{T'}$$

gilt

1.1. Lemma. *Eine Zerlegung $\overline{M}$ auf einer t. g. Menge M ist dann und nur dann eine Zerlegung in eingelegten t. g. Teilmengen, wenn sie durch eine auf M definierte totale reguläre Äquivalenzrelation $\mathfrak{R}$ bestimmt wird.*

Beweis. Es sei vor allem $\overline{M}$ eine Zerlegung in eingelegte t. g. Teilmengen in M. Dann muss für die zugehörige t. g. Faktormenge $\overline{M}$ nach (1) auch

$$P, Q \in \overline{M} \Rightarrow \{P < Q \Leftrightarrow x < y \ \textit{für jede} \ x \in P, \ y \in Q\}$$

gelten, woraus aber sofort folgt, dass die die Zerlegung $\overline{M}$ bestimmende Äquivalenzrelation $\mathfrak{R}$ die Bedingung (T') erfüllt.

Es sei nun umgekehrt $\overline{M}$ eine Zerlegung, die durch eine totale reguläre Äquivalenzrelation $\mathfrak{R}$ bestimmt wird. Es sei weiter $P \in \overline{M}$. Für die Elemente $x, y \in P$, $z \in M - P$ gilt dann $x \equiv y(\mathfrak{R})$, $z \equiv z(\mathfrak{R})$, $x \not\equiv z(\mathfrak{R})$. Ist nun $x < z$ oder $z < x$, so muss nach (T') auch $y < z$ oder $z < y$ gelten. Daraus folgt aber, dass auch die Beziehungen $x \parallel z$ und $y \parallel z$ zugleich richtig oder unrichtig sind. Also P erfüllt die Bedingung (1), d. h. sie ist eine eingelegte t. g. Teilmenge in M.

Eine Abbildung φ der t. g. Menge M auf die t. g. N, die die Bedingungen

$$x, y \in M, \ x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y) , \tag{3}$$

$$x, y \in M, \ x \parallel y \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y) \tag{4}$$

erfüllt, ist schlicht, sodass sie ein Isomorphismus sein muss. Eine Abbildung φ, für die

$$x, y \in M, \ x < y \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y) \tag{3'}$$

gilt, ist eine isotone Abbildung (vgl. [1]).

Eine Abbildung φ, die die Bedingung (3) und noch eine weitere Bedingung

$$x, y \in M, \ x \parallel y \Rightarrow \textit{entweder } \varphi(x) \parallel \varphi(x) \ \textit{ oder } \ \varphi(x) = \varphi(y) \tag{4'}$$

erfüllt, ist ein Graphenhomomorphismus (vgl. [3]), da sie die Bedingung

$$x, y \in M \Rightarrow \{x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(x)\} \tag{5}$$

erfüllen muss. Für die t. g. Mengen im Sinne [5] braucht nicht ein solcher Graphenhomomorphismus ein Isomorphismus sein, trotzdem es für die t. g. Mengen im Sinne [1] (wo die teilweise Anordnung eine reflexive, antisymmetrische und transitive binäre Relation ist) der Fall ist (vgl. [3], Satz 2.13).

Der Graphenhomomorphismus wurde in [3] studiert. Daraus kann man alle diese Resultate auf die Abbildungen zwischen den t. g. Mengen, die (3) und (4′) erfüllen unmittelbar übertragen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass ähnliche Resultate auch für andere Abbildungen zwischen den t. g. Mengen abgeleitet werden können und dass alle diese Abbildungen in sehr engem und natürlichem Zusammenhang mit dem Begriff der lexikographischen Summe der t. g. Mengen stehen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich gern dem Herrn Doz. Dr. J. Jakubík für seine wertvollen Bemerkungen zu meiner Arbeit besten Dank ausdrücken.

2. A-Homomorphismus. Eine Abbildung φ der t. g. Menge M auf die t. g. Menge N, die die Bedingungen (3′) und (4) erfüllt, werden wir als **A**-*Homomorphismus* bezeichnen. Die durch den **A**-Homomorphismus φ erzeugte Zerlegung $\overline{M}$ auf M (d. h. $\overline{M}$ ist durch folgende Äquivalenz $x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ bestimmt) bezeichnen wir als **A**-*erzeugende Zerlegung* auf M.

2.1 Lemma. *Eine Zerlegung auf der t. g. Menge M ist dann und nur dann eine* **A**-*erzeugende Zerlegung, wenn sie eine Zerlegung in eingelegten Ketten in M ist.*

Beweis. Es sei φ ein **A**-Homomorphismus, der die **A**-erzeugende Zerlegung $\overline{M}$ bestimmt. Dann sind nach (3′) und (4) jede zwei Elemente $x \neq y$, $x, y \in P$, $P \in \overline{M}$ vergleichbar, sodass P eine Kette sein muss. Für $z \in M - P$ gilt $x \varrho z$, wo ϱ eins von den Symbolen $<, >, \parallel$ bezeichnet. Es ist also $\varphi(x) \neq \varphi(z)$ und darum gilt nach (3′) und (4) $\varphi(x) \ \varrho \ \varphi(z)$. Es gilt weiter $\varphi(x) = \varphi(y)$, also auch $\varphi(y) \ \varrho \ \varphi(z)$. Aus (3′) und (4) folgt $y \varrho z$, sodass nach (1) P eine eingelegte Kette ist.

Ist nun umgekehrt $\overline{M}$ eine Zerlegung in eingelegten Ketten, so können wir eine Abbildung φ der t. g. Menge M auf ihre t. g. Faktormenge $\overline{M}$ folgendermassen definieren

$$x \in M \Rightarrow x \in \varphi(x) \in \overline{M} \ . \tag{6}$$

Es folgt unmittelbar aus (1) und (2), dass φ ein **A**-Homomorphismus ist und aus (6), dass die Zerlegung $\overline{M}$ durch φ bestimmt wird.

Unter einer *t. g.* **A**-*Faktormenge* verstehen wir eine t. g. Faktormenge, die auf einer **A**-erzeugenden Zerlegung definiert wird.

2.2 Satz. *Die gegebene t. g. Menge ist ein* **A**-*homomorphes Vorbild von jeder ihrer t. g.* **A**-*Faktormengen. Jedes* **A**-*homomorphe Bild der gegebenen t. g. Menge ist mit einer von ihren t. g.* **A**-*Faktormengen isomorph.*

Beweis. Im ersten Teil des Beweises definieren wir den gesuchten **A**-Homomorphismus durch die Bedingung (6) und im zweiten Teil nützen wir das Lemma 2.1 aus.

Unter einer **A**-*einfachen t. g. Menge* verstehen wir eine solche t. g. Menge, auf der eine einzige t. g. **A**-Faktormenge existiert (oder nach 2.1, auf der eine einzige Zerlegung in eingelegten Ketten existiert). Eine Kette ist dann und nur dann **A**-einfach, wenn sie ein einziges Element enthält.

2.3 Satz. *Für eine t. g. Menge sind folgende Behauptungen äquivalent:*

a) *M ist* **A**-*einfach.*

b) *Jede in M eingelegte Kette enthält ein einziges Element.*

c) $x, y \in M$, $x > y \Rightarrow$ *entweder gibt es ein $z \in M$, $x \neq z \neq y$, für das entweder $x > z$ und $y \parallel z$ oder $z > y$ und $z \parallel x$ gilt, oder gibt es $u, v \in M$, $u \parallel v$, für die $x > u > y$ und $x > v > y$ gilt.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Setzen wir voraus, dass a) gilt und dass es eine in M eingelegte Kette P gibt, für die kard $P > 1$ gilt. Dann ist die Zerlegung $\overline{M} = \{P\} \cup \{\{x\} \mid x \in M - P\}$ nach (1) eine Zerlegung in eingelegten Ketten. Aber auch die kleinste Zerlegung (in der jede Klasse ein einziges Element enthält, vgl. [2]) ist eine Zerlegung in eingelegten Ketten und ist verschieden von $\overline{M}$, was ein Widerspruch ist.

b) $\Rightarrow$ c) Setzen wir voraus, dass b) gilt aber c) nicht gilt. Es sei P ein Interval (vgl. [1]), das durch die Elemente $x, y \in M$, $x > y$ bestimmt wird und dabei für x, y c) nicht gilt. Wir werden beweisen, dass P eine in M eingelegte Kette sein muss. Es sei also $z \in M - P$. Aus $z > x$ folgt $z > p$ für jedes $p \in P$. Im Falle $z \parallel x$ kann nicht weder $z > y$ noch $z < y$ gelten, sodass wieder $z \parallel y$ übrig bleibt. Endlich im Falle $z < x$ kann nicht weder $z \parallel y$ noch $z > y$ gelten, sodass $z < y$ und darum $z < p$ für jedes $p \in P$ sein muss. Damit wird gezeigt, dass P in M eingelegt ist und weil keine unvergleichbaren Elemente in P existieren können, muss P eine Kette sein. Es ist aber kard $P > 1$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

c) $\Rightarrow$ a) Setzen wir voraus, dass M nicht **A**-einfach ist. Im Falle, dass M eine Kette ist, gilt kard $M \geqq 2$ und es existieren die Elemente $x, y \in M$, $x > y$, für welche die Bedingung c) unrichtig ist (denn in M existieren keine unvergleichbare Elemente). Ist nun M keine Kette, so gibt es eine solche t. g. **A**-Faktormenge $\overline{M}$, dass die Ungleichheit kard $P > 1$ für eins von ihren Elementen $P \in \overline{M}$ gilt und P dabei eine Kette ist. Nach (1) gilt c) für beliebige verschiedene Elemente $x, y \in P$ nicht.

2.4 Satz. *Für eine t. g.* **A**-*Faktormenge* $\overline{M}$ *der t. g. Menge* M *sind folgende Behauptungen äquivalent:*

a) $\overline{M}$ *ist* **A**-*einfach.*

b) *Für jede Teilmenge* $P \in \overline{M}$ *gilt, dass sie eine solche Kette ist, die in keiner in* M *eingelegten Kette als ihre echte Teilmenge enthalten ist.*

c) *Die Zerlegung* $\overline{M}$ *ist die kleinste Deckung des Systems aller* **A**-*erzeugenden Zerlegungen auf* M.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Setzen wir voraus, dass a) gilt, d. h. vor allem, dass $\overline{M}$ eine **A**-erzeugende Zerlegung ist und darum dass jede $P \in \overline{M}$ eine Kette sein muss. Setzen wir nun weiter voraus, dass b) nicht gilt, d. h. es gibt solche in M eingelegten Ketten P, Q, dass $P \in \overline{M}$, $Q \neq P \subset Q$ gilt. Nach [4], Lemma 4 ist $Q' = \bigcup_{i \in I} X_i$ (wo X_i, $i \in I$, das System sämtlicher in M eingelegten Ketten ist, für die $X_i \supset Q$ gilt) wieder eine in M eingelegte Teilmenge und noch mehr Q' ist eine Kette. Würden nämlich die unvergleichbaren Elemente $x, y \in Q'$ existieren, müssten auch solche Ketten $X_i \neq X_k$ existieren, dass $x \in X_i - X_k$, $y \in X_k - X_i$. Daraus folgt aber nach [4], Lemma 3 $x \parallel z$ für $z \in X_i \cap X_k$, was ein Widerspruch ist. Es ist weiter $Q' - P \neq \emptyset$. Darum gibt es mindestens eine Teilmenge $R \in \overline{M}$, für die $R \cap (Q' - P) \neq \emptyset$ gilt. Setzen wir voraus, dass $R - Q' \neq \emptyset$ gilt. Es gibt $y \in R \cap Q'$ und $z \in Q' - R$ und für diese Elemente gilt entweder $y > z$ oder $z > y$. Nach [4], Lemma 4 ist $R \cup Q'$ eingelegt und nach (1) muss für jedes $x \in R - Q$ entweder $x > y > z$ oder $z > y > x$ gelten. Daraus folgt, dass $R \cup Q'$ eine Kette und darum $R \cup Q' \subset Q'$ ist, was ein Widerspruch ist. Also es muss immer $R \subset Q'$ gelten, falls nur $R \cap Q' \neq \emptyset$ gilt. Es sei $\overline{Q}$ das System sämtlicher $R \in \overline{M}$, für die $R \subset Q'$ gilt, sodass vor allem kard $\overline{Q} > 1$ ist. Dann ist $\overline{\overline{M}} = \{\overline{Q}\} \cup \{\{S\} \mid S \in \overline{M} - \overline{Q}\}$ eine Zerlegung auf $\overline{M}$ und aus (1) und (2) folgt, dass sie eine Zerlegung in eingelegten Ketten sein muss. Nach 2.1 ist also $\overline{\overline{M}}$ eine **A**-erzeugende Zerlegung unf $\overline{M}$ und sie ist offenbar verschieden von der kleinsten Zerlegung auf $\overline{M}$, was aber ein Widerspruch ist.

b) $\Rightarrow$ c) Es sei b) richtig. Nach der Konstruktion der kleinsten Deckung (vgl. [2], 16) des Systems aller **A**-erzeugenden Zerlegungen auf einer t. g. Menge M ist jedes ihrer Elemente von folgender Form: $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, wo X_i, $i \in I$, alle solche in M eingelegte Ketten sind, für die gilt, dass es zu jeden zwei X_1, X_k eine endliche Folge X_i, $1 \leqq i \leqq k$, gibt und dabei $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ für alle i, $1 \leqq i < k$, ist. Nützen wir [4], Lemma 4 aus, können wir sofort beweisen, dass X eine in M eingelegte Teilmenge ist. Wir können sogar beweisen, dass X auch eine Kette ist. Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass in X zwei unvergleichbare Elemente x, y existieren. Dann gibt es X_1, X_k, wobei $x \in X_1$ und $y \in X_k$, und auch eine Folge X_i, $1 \leqq i \leqq k$, mit der oben angeführten Eigenschaft. Mit Hilfe der Induktion nach [4], Lemma 3 beweisen wir direkt, dass $\bigcup_{i=1}^{j} X_i$ eine in M eingelegte Kette für jedes $j = 1, 2, \ldots, k$ sein muss. Darum sind die Elemente x, y vergleichbar, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es ist also X eine Kette und aus ihrer Konstruktion folgt unmittelbar, dass sie als eine echte Teilmenge in keiner in M eingelegten Kette enthalten sein kann. Dies aber bedeutet, dass eine Zerlegung in eingelegte Ketten, die in dem oben angeführten Sinne maximal sind, zugleich die kleinste Deckung des Systems aller $\mathbf{A}$-erzeugenden Zerlegungen sein muss.

c) $\Rightarrow$ a) Ist a) nicht richtig, so gibt es eine in $\overline{M}$ eingelegte Kette $\overline{P}$, kard $\overline{P} > 1$, wobei $\overline{P} = \{\{X_i\} \mid X_i \in \overline{M},\ i \in I\}$ ist. Nach (2) und (1) ist auch $P = \bigcup_{i \in I} X_i$ eine in M eingelegte Kette und dies bedeutet, dass $\overline{M}$ nicht die kleinste Deckung des Systems aller $\mathbf{A}$-erzeugenden Zerlegungen sein kann. Also ist c) nicht richtig.

2.5 Satz. *Jede t. g. Menge ist das* $\mathbf{A}$*-homomorphe Vorbild einer einzigen (bis auf die Isomorphismen)* $\mathbf{A}$*-einfachen t. g. Menge.*

Beweis. Nach 2.2 gibt es zu jedem $\mathbf{A}$-homomorphen Bilde der gegebenen t. g. Menge eine mit ihm isomorphe t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge. Aus der Eindeutigkeit der kleinsten Deckung des Systems aller $\mathbf{A}$-erzeugenden Zerlegungen nach 2.4 folgt direkt, dass immer eine einzige $\mathbf{A}$-einfache t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge auf der gegebenen t. g. Menge existiert.

Eine beliebige (d. h. bis auf die Isomorphismen) $\mathbf{A}$-einfache t. g. Menge, die das $\mathbf{A}$-homomorphe Bild der t. g. Menge M ist, wird mit dem Symbol $\mathbf{A}M$ bezeichnet. Dann gilt nach 2.2 $\mathbf{A}\overline{M} = \mathbf{A}M$, wo $\overline{M}$ eine t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge der t. g. Menge M ist.

Sei $\overline{M}$ die $\mathbf{A}$-einfache t. g. Faktormenge auf der t. g. Menge M. Dann ist jedes Element $P \in \overline{M}$ eine Kette ($P \neq \emptyset$) und ihr Ordnungstypus wird durch γ_P ($\neq 0$) bezeichnet. Mit Hilfe eines beliebigen Isomorphismus ω_1, der $\overline{M}$ auf $\mathbf{A}M$ abbildet, können wir jedem Elemente $x \in \mathbf{A}M$ einen Ordnungstypus α_x durch die Bedingung $\alpha_x = \gamma_{\omega^{-1}(x)}$ zuordnen. Das System der Ordnungstypen $\{\alpha_x\}$, $x \in \mathbf{A}M$ (zusammen mit ihrer Zuordnung den Elementen $x \in \mathbf{A}M$, die die eben angeführte Bedingung erfüllt) heisst $\mathbf{A}$-*homomorphe Charakteristik der t. g. Menge* M. Ist $\{\beta_y\}$, $y \in P = \mathbf{A}M$ eine beliebige andere $\mathbf{A}$-homomorphe Charakteristik derselben t. g. Menge M und ist ω_2 der zugehörige Isomorphismus der M auf P, d. h. ist $\beta_y = \gamma_{\omega_2^{-1}(y)}$, gibt es immer einen solchen Isomorphismus ω von $\mathbf{A}M$ auf P, für welchen $\alpha_x = \beta_{\omega(y)}$ für alle $x \in \mathbf{A}M$ gilt (es genügt nämlich $\omega(x) = \omega_2[\omega_1^{-1}(x)]$ zu wählen, denn $\alpha_x = \gamma_{\omega_1^{-1}(x)} = \beta_{\omega_2[\omega^{-1}(x)]}$ ist). Die $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristiken sind eigentlich die $\mathbf{A}$-einfachen t. g. Mengen, deren jedes Element mit einem von Null verschiedenen Ordnungstypus bewertet wird. Zwei $\mathbf{A}$-homomorphe Charakteristiken $\{\alpha_x\}$, $x \in P$ und $\{\beta_y\}$, $y \in Q$ heissen *äquivalent*, wenn es einen solchen Isomorphismus ω von P auf Q gibt, in dem $\alpha_x = \beta_{\omega(x)}$ für alle $x \in P$ gilt. Es ist klar, dass zwei $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristiken dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie zweien untereinander isomorphen t. g. Mengen zugehören. Gilt von den Charakteristiken $\{\alpha_x\}$, $x \in P$ und $\{\beta_y\}$, $y \in Q$ nur $P = Q$ (sie müssen also nicht untereinander äquivalent sein), ist es immer möglich statt der gegebenen zwei mit ihnen äquivalenten und auf dieselbe t. g. Menge $R = P = Q$ bezogene Charakteristiken $\{\alpha'_z\}$, $z \in R$ und $\{\beta'_z\}$, $z \in R$ zu wählen.

Den Begriff und die Bezeichnung der lexikographischen Summe der t. g. Mengen benutzen wir übereinstimmend mit [1], 27.

2.6 Satz. *Es sei $N = \mathbf{A}M$ und es sei $\{\alpha_x\}$, $x \in N$ eine $\mathbf{A}$-homomorphe Charakteristik der t. g. Menge M. Dann ist $M = \sum_N P_x$, wobei P_x die paarweise disjunkten Ketten vom Ordnungstypus α_x sind, d. h. M ist mit der lexikographischen Summe des Systems der Ketten P_x über die t. g. Menge N isomorph.*

Beweis. Es sei $\overline{M}$ die $\mathbf{A}$-einfache t. g. Faktormenge der t. g. Menge M. Nach 2.2 und 2.5 existiert immer eine solche $\overline{M}$ und offenbar gilt $\overline{M} = N$. Es seien weiter $Q_x \in \overline{M}$ und $x \in N$ die entsprechende Elemente in einem vorausgesetzten Isomorphismus zwischen $\overline{M}$ und N. Dann sind nach 2.1 alle Q_x eingelegte Ketten in M und nach der Definition der $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristik müssen ihre Ordnungstypen mit α_x übereinstimmen, d. h. es muss $Q_x = P_x$ für alle $x \in N$ gelten. Aus [4], Satz 1 aber folgt $M = \sum_N Q_x$ also gilt auch $M = \sum_N P_x$.

In 2.6 wird eine Konstruktion der t. g. Menge enthalten, wenn ihre $\mathbf{A}$-homomorphe Charakteristik vorgeschrieben ist. Es ist klar, dass eine t. g. Menge dann und nur dann $\mathbf{A}$-einfach ist, wenn alle Ordnungstypen ihrer $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristik gleich 1 sind.

Die $\mathbf{A}$-Einfachheit der endlichen t. g. Mengen kann man nach 2.3 direkt aus ihren Hasse'schen Diagrammen erkennen, denn es ist klar wie die eingelegten Ketten in einem solchen Diagramme aussehen. In Fig. 1 kann man leicht einen solchen $\mathbf{A}$-Homomorphismus finden, der die t. g. Menge M auf $\mathbf{A}M$ bzw. $\mathbf{BA}M$ auf $\mathbf{ABA}M$ abbildet. Dabei sind die in den Klammern bei den einzelnen Elementen in $\mathbf{A}M$ stehenden Zahlen die Ordnungstypen der $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristik der t. g. Menge M und ähnlich ist das für die t. g. Mengen $\mathbf{BA}M$ und $\mathbf{ABA}M$. In Fig. 1 werden nur die von 1 verschiedene Ordnungstypen angeführt.

Sagen wir weiter, dass ein Ordnungstypus β 1) *ein isotones Bild,* bzw. 2) *ein Teil,* eines Ordnungstypus α ist, 1) wenn eine isotone Abbildung einer Kette vom Ordnungstypus α auf eine andere vom Ordnungstypus β existiert, bzw. 2) wenn sich in einer Kette vom Ordnungstypus α eine t. g. Teilmenge, eine Kette vom Ordnungstypus β ist, auffinden lässt.

2.7 Satz. *Es sei $\{\alpha_x\}$, $x \in \mathbf{A}M$ bzw. $\{\beta_y\}$, $y \in \mathbf{A}N$ eine $\mathbf{A}$-homomorphe Charakteristik der t. g. Menge M bzw. N. Dann ist die t. g. Menge N ein $\mathbf{A}$-homomorphes*

Bild der t. g. Menge M gerade in dem Falle, wenn ein solcher Isomorphismus ω von $\mathbf{A}M$ auf $\mathbf{A}N$ existiert (es ist also $\mathbf{A}M = \mathbf{A}N$), dass $\beta_{\omega(x)}$ ein isotones Bild des Ordnungstypus α_x für jedes $x \in \mathbf{A}M$ ist.

Beweis. Es sei vor allem N ein $\mathbf{A}$-homomorphes Bild der t. g. Menge M, d. h. es gibt einen $\mathbf{A}$-Homomorphimus φ, der M auf N abbildet. Dann gilt nach 2.2,

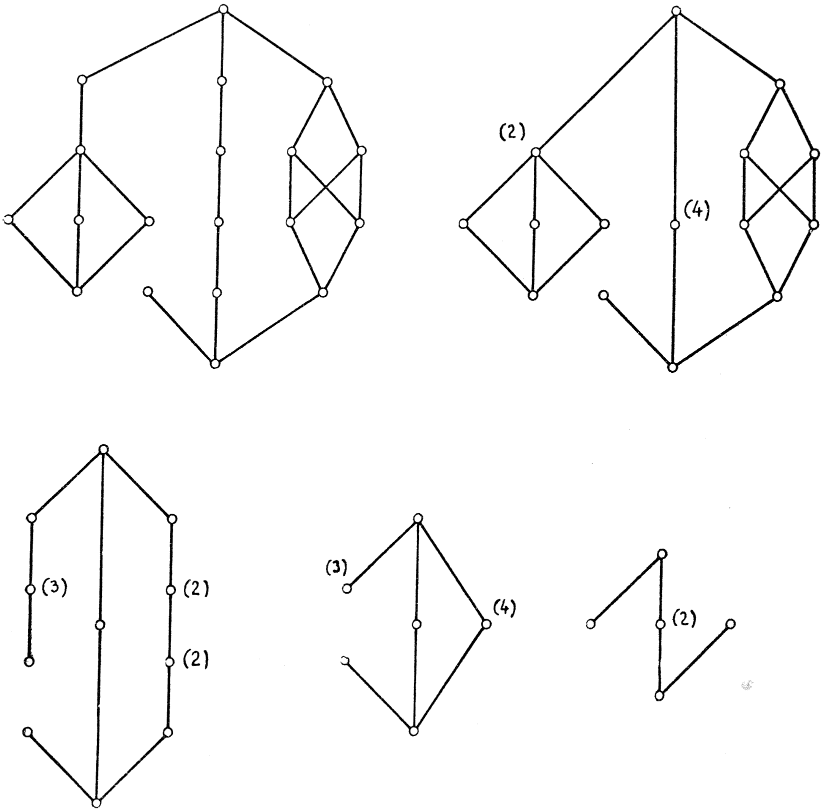

Fig. 1.

2.4 und 2.5 $\mathbf{A}M = \mathbf{A}N$, sodass wir statt der gegebenen $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristiken die mit ihnen äquivalenten $\{\alpha'_z\}$, $z \in P$ und $\{\beta'_z\}$, $z \in P$ wählen können, wobei beide neue Charakteristiken auf dieselbe t. g. Menge $P = \mathbf{A}M = \mathbf{A}N$ bezogen werden. Nach 2.2 gibt es einen $\mathbf{A}$-Homomorphismus ψ, der N auf P abbildet, und darum ist auch $\chi = \varphi\psi$ ein $\mathbf{A}$-Homomorphismus der die Menge M auf die Menge P abbildet. Durch die $\mathbf{A}$-Homomorphismen χ und ψ werden die $\mathbf{A}$-erzeugende Zerlegungen $\overline{M}$ und $\overline{N}$ und damit auch die zugehörigen t. g. $\mathbf{A}$-Faktormengen $\overline{M}$ und $\overline{N}$ bestimmt, die nach 2.5 $\mathbf{A}$-einfach sind.

Ihre Elemente $X_z \equiv \{x \mid x \in M, \ \ \chi(x) = z, \ \ z \in P\}$, $Y_z \equiv \{y \mid y \in N, \ \ \psi(y) = z, z \in P\}$ sind natürlich die Ketten und die Ordnungstypen von ihnen sind α_{X_z}, β_{Y_z}. Aus den Eigenschaften der Zusammensetzung der $\mathbf{A}$-Homomorphismen folgt sofort, dass $X_z \equiv \{x \mid x \in M, \varphi(x) \in Y_z\}$ ist, sodass Y_z ein Bild der Kette X_z in der isotonen Abbildung $\varphi|_{X_z}$ ist und mit anderen Worten β_{Y_z} ist ein isotones Bild des Ordnungstypus α_{X_z}. Aus der Definition der $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristik folgt $\alpha_{X_z} = \alpha'_z$ und $\beta_{Y_z} = \beta'_z$. Aus der Äquivalenz der gewählten Charakteristiken folgt die Existenz eines solchen Isomorphismus ω_1 bzw. ω_2, der $\mathbf{A}M$ auf P bzw. $\mathbf{A}N$ auf P abbildet, dass $\alpha_x = \alpha'_{\omega_1(x)}$ bzw. $\beta_y = \beta'_{\omega_2(y)}$ für alle $x \in \mathbf{A}M$ bzw. $y \in \mathbf{A}N$ gilt. Dann bildet der Isomorphismus $\omega(x) = \omega_2^{-1}[\omega_1(x)]$ $\mathbf{A}M$ auf $\mathbf{A}N$ ab und erfüllt folgende Bedingung: bezeichnen wir $z = \omega_1(x)$, so ist der Ordnungstypus $\beta_{\omega(x)} = \beta_{\omega_2^{-1}[\omega_1(x)]} = \beta'_{\omega_1(x)} = \beta_{Y_z}$ ein isotones Bild des Ordnungstypus $\alpha_x = \alpha'_{\omega_1(x)} = \alpha_{X_z}$ für jedes $x \in \mathbf{A}M$.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass ein solcher Isomorphismus ω existiert, der $\mathbf{A}M$ auf $\mathbf{A}N$ abbildet und dabei die Bedingung: $\beta_{\omega(x)}$ ist ein isotones Bild des Ordnungstypus α_x für alle $x \in \mathbf{A}M$, erfüllt. Dann ist offenbar $\mathbf{A}M = \mathbf{A}N$ und wir werden die gegebenen Charakteristiken durch solche äquivalente ersetzen, deren Ordnungstypen auf dieselbe t. g. Menge $P = \mathbf{A}M = \mathbf{A}N$ bezogen werden kann und dabei β'_z ein isotones Bild des α'_z für jedes $z \in P$ ist. Eine solche Zuordnung ist immer möglich z. B. mit Hilfe eines beliebigen Isomorphismus ω_1 bzw. $\omega\omega_1$, der $\mathbf{A}N$ auf P bzw. $\mathbf{A}M$ auf P abbildet. Es existieren nach 2.2. die $\mathbf{A}$-Homomorphismen χ bzw. ψ, die M auf P bzw. N auf P abbilden und es seien $\overline{M}$ bzw. $\overline{N}$ die entsprechenden t. g. $\mathbf{A}$-Faktormengen auf M bzw. N, die selbstverständlich $\mathbf{A}$-einfach sind. Dann sind $X_z \equiv \{x \mid x \in M, \ \ \chi(x) = z, z \in P\}$ und $Y_z \equiv \{y \mid y \in N, \psi(y) = z, z \in P\}$ die Ketten und für ihre Ordnungstypen gilt offenbar $\alpha_{X_z} = \alpha'_z$ und $\beta_{Y_z} = \beta'_z$ für jedes $z \in P$. Dies aber bedeutet, dass es eine isotone Abbildung φ_z der Kette X_z auf die Kette Y_z für jedes $z \in P$ gibt. Diese Abbildungen sind die Partialabbildungen einer bestimmten Abbildung φ der Menge M auf die Menge N. Wir brauchen also zu beweisen, dass φ ein $\mathbf{A}$-Homomorphismus ist, d. h. dass φ die Bedingungen (3′) und (4) erfüllt. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass $\varphi\psi = \chi$ wieder ein $\mathbf{A}$-Homomorphismus ist.

2.8 Satz. *Ist die t. g. Menge N ein $\mathbf{A}$-homomorphes Bild der t. g. Menge M, existiert eine solche t. g. Teilmenge $M' \subset M$, für die $M' = N$ gilt.*

Beweis. Nach 2.2 gibt es eine solche t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge $\overline{M}$ auf M, dass $\overline{M} = N$ ist. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz einer Menge der Repräsentanten M' des Systems $\overline{M}$ und nach (1) und (2) sieht man leicht, dass wirklich $M' = N$ gilt.

2.9. Folgerung. *Ist ein Ordnungstypus β ein isotones Bild des Ordnungstypus α, so ist β auch ein Teil von α.*

2.10 Lemma. *Sind α, β zwei Ordnungstypen, die zugleich entweder Ordnungszahlen oder zugleich inverse Ordnungstypen zu den Ordnungszahlen sind, gilt*

$$\alpha, \beta \text{ sind untereinander isotone Bilder} \Rightarrow \alpha = \beta\ .$$

Beweis. Aus 2.9 folgt, dass unter unseren Voraussetzungen α ein Teil von β und auch β ein Teil von α ist. Daraus folgt für die Ordnungszahlen $\alpha \leqq \beta$, $\beta \leqq \alpha$ oder $\alpha = \beta$. Im zweiten Falle ist das ähnlich.

2.11 Satz. *Es seien M und N die t. g. Mengen, die untereinander $\mathbf{A}$-homomorphe Bilder sind. Es seien weiter alle Ordnungstypen in den $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristiken der beiden t. g. Mengen entweder lauter Ordnungszahlen oder lauter Ordnungstypen, die invers zu Ordnungszahlen sind. Dann gilt $M = N$.*

Beweis. Nach 2.7 gibt es eine gemeinsame $\mathbf{A}$-einfache t. g. Menge $P = \mathbf{A}M = \mathbf{A}N$ für beide gegebenen t. g. Mengen. Man kann voraussetzen, dass dem Elemente $z \in P$ Ordnungstypen α_z bzw. β_z der $\mathbf{A}$-homomorphen Charakteristik der Menge M bzw. N zugeordnet werden. Dabei sind α_z und β_z untereinander isotone Bilder, sodass nach 2.10 $\alpha_z = \beta_z$ für jedes $z \in P$ gelten muss. Darum ist aber $M = N$.

2.12 Folgerung. *Sind die t. g. Mengen M und N untereinander die $\mathbf{A}$-homomorphen Bilder und erfüllen sie beide die Bedingung der Endlichkeit der wachsenden bzw. abnehmenden Ketten, so gilt $M = N$.*

Beweis. Nach [1], Satz 5.5 sind alle wachsenden bzw. abnehmenden Ketten in M und auch in N wohlgeordnet, sodass aus 2.11 $M = N$ folgt.

Satz 2.11. gilt nicht für beliebige t. g. Mengen, die untereinander $\mathbf{A}$-homomorphe Bilder sind. Es sei z. B. $\eta + 1 + 1 + \eta$ bzw. $\eta + 1 + 1 + 1 + \eta$ der Ordnungstypus einer Kette M bzw. N, sodass M und N nicht isomorph (oder ähnlich) sind, trotzdem jede von ihnen ein isotones (und darum auch $\mathbf{A}$-homomorphes) Bild der anderen ist. Setzen wir nämlich $M \equiv A \cup B \cup C \cup D$, $N \equiv A \cup B \cup D$, wo $A \equiv \{x \mid 0 < x \leqq 1\}$, $B \equiv \{2\}$, $C \equiv \{x \mid 2 < x < 3\}$, $D \equiv \{x \mid 3 \leqq x < 4\}$ wo x eine rationale Zahl bedeutet. Ordnen wir nun M und auch N nach der Grösse an, besitzen M und N die gesuchten Ordnungstypen. Die Abbildungen φ und ψ definieren wir folgendermassen: $\varphi|_{A \cup B}$ ist identisch, $\varphi(C) = 3$, $\varphi|_D$ ist identisch und $\psi|_A$ ist identisch, $\psi(2) = 1$ und $\psi(x)$ für $x \in D$ ist ein Isomorphismus auf $B \cup C \cup D$. Es ist klar, dass diese Abbildungen isoton sind.

In diesem Beispiele wird gezeigt, dass auch Lemma 2.10 für beliebige Ordnungstypen nicht gelten muss.

2.13 Satz. *Eine t. g. Menge M ist dann und nur dann $\mathbf{A}$-einfach, wenn für jedes ihre $\mathbf{A}$-homomorphe Bild N sogar $N = M$ gilt.*

Beweis. Ist M eine $\mathbf{A}$-einfache t. g. Menge, gibt es auf M eine einzige t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge $\overline{M}$, sodass $\overline{M} = M$ sein muss. Nach 2.2 gibt es zu jedem $\mathbf{A}$-homomorphen Bilde N der t. g. Menge M die t. g. $\mathbf{A}$-Faktormenge $\overline{M}_1$ auf M, für die $\overline{M}_1 = N$ gilt, woraus aber $M = N$ folgt.

Ist nun umgekehrt jedes $\mathbf{A}$-homomorphe Bild N der t. g. Menge M mit M isomorph, so sind mit M nach 2.2 alle t. g. $\mathbf{A}$-Faktormengen auf M isomorph. Unter diesen $\mathbf{A}$-Faktormengen ist nach 2.2 und 2.5 eine einzige $\overline{M}$ $\mathbf{A}$-einfach. Gäbe es nun auf $\overline{M}$ zwei verschiedene t. g. $\mathbf{A}$-Faktormengen, müssten auch auf M zwei solche existieren, was aber unmöglich ist. Also ist M eine $\mathbf{A}$-einfache t. g. Menge.

3. B-Homomorphismus. Eine Abbildung φ der t. g. Menge M auf die t. g. Menge N, die die Bedingungen (3) und (4′) erfüllt, bezeichnen wir als $\mathbf{B}$-*Homomorphismus* und die durch sie bestimmte Zerlegung auf M bezeichnen wir als $\mathbf{B}$-*erzeugende Zerlegung.*

3.1 Lemma. *Eine Zerlegung $\overline{M}$ auf der t. g. Menge M ist dann und nur dann eine $\mathbf{B}$-erzeugende Zerlegung, wenn sie eine Zerlegung in eingelegten Teilmengen ist, wobei jede zwei verschiedene Elemente beliebiger von diesen Teilmengen unvergleichbar sind.*

Beweis. Es sei $\overline{M}$ eine $\mathbf{B}$-erzeugende Zerlegung, die durch den $\mathbf{B}$-Homomorphismus φ bestimmt wird. Nach (3) und (4′) sind jede Elemente $x, y \in P$, $x \neq y$, wo $P \in \overline{M}$, unvergleichbar in M. Es sei weiter $z \in M - P$, $x, y \in P$, $x \neq y$, und $P \in \overline{M}$. Ist $x < z$, so ist nach (3) auch $\varphi(x) < \varphi(z)$, aber $\varphi(x) = \varphi(y)$, sodass auch $\varphi(y) < \varphi(z)$ und dann wieder aus (3) und (4′) schon $y < z$ folgt. Auf ähnliche Weise zeigt man, dass aus $z < x$ auch $z < y$ folgt, was schon beweist, dass P die Bedingung (1) erfüllt, d. h. dass P eine in M eingelegte Teilmenge ist.

Ist nun umgekehrt $\overline{M}$ eine Zerlegung, die die betreffende Bedingung erfüllt, und $\overline{M}$ die zugehörige t. g. Faktormenge, so kann man durch die Bedingung (6) eine Abbildung φ der t. g. Menge M auf die t. g. Faktormenge $\overline{M}$ bestimmen. Aus (1) und (2) zeigt man leicht, dass φ ein $\mathbf{B}$-Homomorphismus ist.

Eine t. g. Faktormenge, die auf einer $\mathbf{B}$-erzeugenden Zerlegung definiert wird, heisst t. g. $\mathbf{B}$-*Faktormenge.* Eine t. g. Menge heisst $\mathbf{B}$-*einfach,* wenn auf ihr eine einzige $\mathbf{B}$-erzeugende Zerlegung (oder eine einzige t. g. $\mathbf{B}$-Faktormenge) definiert werden kann.

Für t. g. Mengen in unserem Sinne erfüllt der $\mathbf{B}$-Homomorphismus immer die Bedingung (5), was eine nur formal überschriebene Bedingung aus der Definition des Graphenhomomorphismus (vgl. [3], Definition 1.1, 136) ist. Es ist also jeder $\mathbf{B}$-Homomorphismus zugleich ein Graphenhomomorphismus und darum nach Umformulierung für die t. g. Mengen gelten für ihn und für die entsprechenden Begriffe alle Sätze aus [3], 2. Abschnitt. Dies bedeutet in einer Vergleichung mit dem **A**-Homomorphismus, dass die Sätze 2.2, 2.5, 2.8 und 2.13 auch in dem Falle gelten, wenn wir in ihnen das Symbol „**A**" durch „**B**" ersetzen. Ersetzen wir weiter auch den Termin „Kette" durch „t. g. Menge, deren jede zwei verschiedene Elemente unvergleichbar sind", so gilt auch 2.4 für **B**-Homomorphismus. Im Satze 2.3 braucht man neben Vorigem noch die Bedingung c) folgendermassen abzuändern

$$x, y \in M,\ x \parallel y,\ \varrho \text{ bezeichnet eins von den Symbolen } <, >, \parallel \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ es existiert ein solches } z \in M,\ x \neq z \neq y, \text{ dass}$$
$$\{x \varrho z \Rightarrow \operatorname{non} y \varrho z\} \text{ gilt}.$$

Diese Bedingung ist nur die formal abgeschwächte Bedingung (7) aus [3], 140.

Eine **B**-*homomorphe Charakteristik* der gegebenen t. g. Menge ist wieder eine **B**-einfache t. g. Menge, deren Elementen ein System der Mächtigkeiten $\{\mathfrak{a}_x\}$ zugeordnet wird, denn die t. g. Mengen, die nur untereinander unvergleichbare Elemente enthalten, werden durch ihre Mächtigkeit eindeutig (bis auf die Isomorphismen) bestimmt. Wenn wir die Bedingung über isotone Bilder der Ordnungstypen durch eine Bedingung über die Mächtigkeiten $\mathfrak{a}_x \geqq \mathfrak{b}_x$ (vgl. [3], Bedingung (9)) ersetzen, gilt nach vorigen Umänderungen auch der Satz 2.7 für den **B**-Homomorphismus. Daraus folgt, dass auch der zu 2.11 analoge Satz ohne irgendeine Beschränkung auf die gegebenen t. g. Mengen gilt (es handelt sich um die Sätze 2.8 und 2.12 aus [3]). Endlich kann man leicht einsehen, dass nach entsprechenden Umformungen auch der zu 2.6 analoge Satz für den **B**-Homomorphismus gelten muss.

Bei den endlichen t. g. Mengen kann man ihre **B**-Einfachheit leicht aus ihrem Hasse'schen Diagramme erkennen. Bezeichnen wir mit dem Symbol **B**M eine **B**-einfache t. g. Menge, die ein **B**-homomorphes Bild der t. g. Menge M ist, finden wir leicht in Fig. 1 einige Beispiele der **B**-einfachen t. g. Mengen und auch den **B**-Homomorphismus, der **A**M auf **BA**M abbildet. In diesem Falle bedeuten die bei den einzelnen Elementen in **BA**M stehende Zahlen die Mächtigkeiten der **B**-homomorphen Charakteristik der t. g. Menge **A**M.

Aus den Beispielen der t. g. Mengen in Fig. 1 folgt, dass eine **A**-einfache t. g. Menge nicht auch **B**-einfach sein muss und umgekehrt. Durch jede t. g. Menge M wird eine Folge der t. g. Mengen **A**M, **BA**M, **ABA**M, **BABA**M, ... bestimmt und es sind zwei Fälle möglich. Entweder kommt in dieser Folge eine solche t. g. Menge, die zugleich **A**- und auch **B**-einfach ist vor, sodass alle folgende mit ihr isomorph sind, oder ist das nicht der Fall und dann können keine zwei benachbarten Elemente in dieser Folge isomorph sein. Ein Beispiel für die erste Möglichkeit ist in Fig. 1 und für die zweite in Fig. 2, wo die betreffende Folge nur aus zwei nichtisomorphen t. g. Mengen gebildet wird.

In Fig. 3 sind die Teile eines unendlichen und distributiven Verbandes, der zugleich **A**- und auch **B**-einfach ist. Sein ganzes Hasse'sche Diagramm wird durch ein Quadratnetz in der Ebene bestimmt, das wir um 45° gegen die üblichen Koordinatenachsen gedreht haben. Die Kreuzungspunkte dieses Netzes sind die

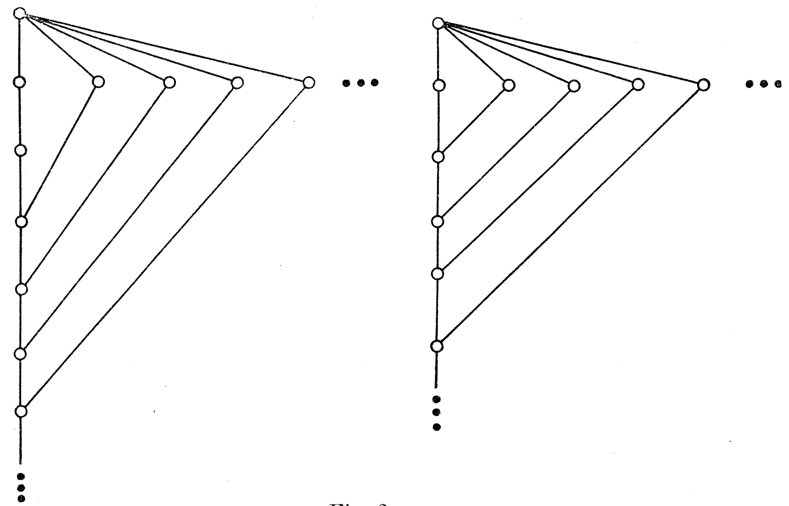

Fig. 2.

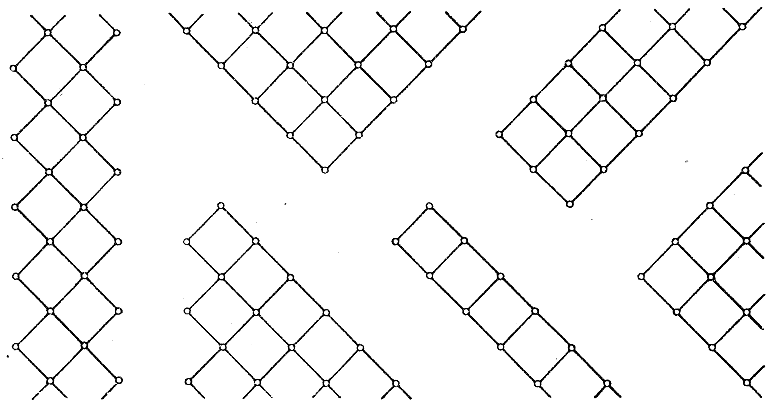

Fig. 3.

Elemente des Diagramms und die Relation der Nachbarsschaft wird durch die Verbindungslinien zwischen den benachbarten Elementen bestimmt. In diesem Verbande kann man leicht unendlich viele nichtisomorphe Unterverbände finden, die wieder zugleich **A**- und auch **B**-einfach sind. Einige von ihnen sind ausgezeichnet.

4. C-Homomorphismus. Die Abbildung φ der t. g. Menge M auf die t. g. Menge N, die die Bedingungen (3′) und (4′) erfüllt, bezeichnen wir als **C**-*Homomorphismus* und die durch sie bestimmte Zerlegung auf M als **C**-*erzeugende Zerlegung*. Es ist klar, dass jeder **A**- oder **B**-Homomorphismus zugleich auch ein **C**-Homomorphismus ist.

4.1 Lemma. *Eine Zerlegung $\overline{M}$ auf der t. g. Menge M ist dann und nur dann eine* **C**-*erzeugende Zerlegung, wenn sie eine Zerlegung in eingelegte t. g. Teilmengen in M ist.*

Beweis. Es sei zuerst $\overline{M}$ eine **C**-erzeugende Zerlegung, die durch den **C**-Homomorphismus φ bestimmt wird. Es sei weiter $P \in \overline{M}$, $x, y \in P$, $x \neq y$, $z \in M - P$ und soll ϱ eins von den Symbolen $<, >, \|$ bedeuten. Es ist also $\varphi(x) = \varphi(y) \neq \varphi(z)$ und darum nach (3′) und (4′) folgt aus $x \varrho y$ auch $\varphi(y) \varrho \varphi(z)$ und dann auch $y \varrho z$, sodass die Bedingung (1) erfüllt wird.

Ist nun umgekehrt $\overline{M}$ eine Zerlegung in eingelegte t. g. Teilmengen, kann man leicht zeigen, dass die durch die Bedingung (6) bestimmte Abbildung der t. g. Menge M auf die t. g. Faktormenge $\overline{M}$ ein **C**-Homomorphismus ist.

Eine t. g. Menge, die ein einziges Element enthält, ist ein **C**-homomorphes Bild einer beliebigen t. g. Menge. Analog zu den vorigen Abschnitten wollen wir unter einer **C**-*einfachen t. g. Menge* eine solche verstehen, auf der höchstens zwei verschiedene **C**-erzeugende Zerlegungen existieren. Bezüglich des Lemmas 4.1 werden wir stat t. g. **C**-*Faktormenge* nur t. g. Faktormenge sagen.

4.2 Satz. *Eine t. g. Menge ist ein* **C**-*homomorphes Vorbild jeder von ihren t. g. Faktormengen. Jedes* **C**-*homomorphe Bild der gegebenen t. g. Menge ist mit einer von ihren t. g. Faktormengen isomorph.*

Beweis ist klar.

4.3 Satz. *Für eine t. g. Menge M sind folgende Behauptungen äquivalent*:

a) *M ist* **C**-*einfach.*

b) *M ist lexikographisch unzerlegbar* (*vgl.* [4]).

c) *Jede in M eingelegte t. g. Teilmenge ist trivial.*

d) Kard $M > 2 \Rightarrow \{x, y \in M,\ x \neq y$ *und ϱ bedeutet eins von den Symbolen* $<, >, \| \Rightarrow$ *es existiert ein solches* $z \in M,\ x \neq z \neq y$, *dass* $[x \varrho z \Rightarrow \text{non}\ y \varrho z]\}$.

Beweis. Nach [4], Satz 2 gilt a)$\Leftrightarrow$b)$\Leftrightarrow$c), sodass es genügt z. B. die Äquivalenz c)$\Leftrightarrow$d) zu beweisen. Es sei zuerst c) richtig und setzen wir voraus, dass d) unrichtig ist. Dann gilt vor allem kard $M > 2$ und weiter gibt es solche $x, y \in M$, $x \neq y$, dass (1) für jedes $z \in M$, $x \neq z \neq y$, gilt. Dies aber bedeutet, das $\{x, y\}$ eine nichttriviale und in M eingelegte Teilmenge ist, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Soll endlich d) aber nicht c) gelten, d. h. es gibt eine nichttriviale in M eingelegte t. g. Teilmenge P. Dies vor allem bedeutet, dass kard $M > 2$ und auch kard $P > 1$ und weil für P (1) gilt, ist das ein Widerspruch gegen d).

Aus 4.3 folgt namentlich, dass jede t. g. Menge, die ein einziges Element oder nur zwei Elemente enthält, immer **C**-einfach ist.

4.4 Satz. *Eine t. g. Faktormenge $\overline{M}$ auf der t. g. Menge M, für die* kard $M > 2$ *gilt, ist dann und nur dann* **C**-*einfach, wenn die entsprechende Zerlegung $\overline{M}$ eine Zerlegung in die maximalen eingelegten Teilmengen ist.*

Beweis. Es sei $\overline{M}$ eine t. g. Faktormenge auf M, kard $M > 2$, und solle ein solches Element $X \in \overline{M}$ existieren, das keine maximale in M eingelegte Teilmenge ist, d. h. es gibt eine in M eingelegte Teilmenge Q, für die $X \subset Q \subset M$ und $X \neq Q \neq M$ gilt.

Es sei weiter A_i, $i \in I$, ein System aller solcher Elemente $A_i \in \overline{M}$, für die $A_i - Q \neq \emptyset \neq Q - A_i$ gilt (es ist also möglich, dass $I = \emptyset$ ist) und es sei $Q' \equiv Q - \bigcup_{i \in I} A_i$. Es ist offenbar $Q' \neq \emptyset$ und wir werden zeigen, dass Q' eine in M eingelegte t. g. Teilmenge ist. Es sei also $x, y \in Q'$ und $z \in M - Q'$. Ist $z \in M - Q$, so gilt die Bedingung (1), denn Q ist eingelegt, und ist es $z \in Q$, so gibt es einen solchen Index $j \in I$, dass $z \in A_j$. Es gibt weiter auch ein $z' \in A_j \cap$ $\cap (M - Q)$, sodass $x \varrho z' \Leftrightarrow y \varrho z'$ (ϱ bedeutet eins von den Symbolen $<$, $>$, $\|$) gilt. Aber auch A_j ist in M eingelegt und darum gilt $x \varrho z' \Leftrightarrow x \varrho z$ und $y \varrho z' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y \varrho z$. Daraus folgt schon $x \varrho z \Leftrightarrow y \varrho z$, was aber die Bedingung (1) ist. Es ist also wirklich Q' in M eingelegt und aus ihrer Definition folgt, dass $Q' \equiv \bigcup_{i \in J} B_i$, $B_i \in \overline{M}$, wobei $J \neq \emptyset$ sein muss (denn $X \subset Q'$ ist). Dann ist nach (2) das System $\{B_j \mid j \in J\}$ wieder eine in $\overline{M}$ eingelegte Teilmenge, sodass im Falle kard $J > 1$ sie eine nichttriviale Teilmenge (weil $\{B_j \mid j \in J\} \neq \overline{M}$) ist und darum kann nach 4.3 $\overline{M}$ nicht **C**-einfach sein. Es bleibt also übrig, dass kard $J = 1$, d. h. $Q' \equiv X$ ist. Es gibt $x \in X$ und $y \in Q - X$ und darum auch $Y \in \overline{M}$, $y \in Y$, wobei $Y \neq X$ ist. Dann gilt für jedes $z \in Z \in \overline{M}$, wo Z die Bedingung $X \neq Z \neq Y$ erfüllt, entweder $z \in M - Q$ und darum auch $z \varrho x \Leftrightarrow z \varrho y$ (wobei ϱ wieder eins von den Symbolen $<$, $>$, $\|$ bezeichnet), oder $z \in Q - Q'$, d. h. es gibt einen solchen Index $j \in I$ (es ist nämlich $I \neq \emptyset$), dass $z \in A_j$ ist. Wir bemerken noch, dass A_j in M eingelegt ist und auch dass es ein $z' \in A_j - Q$ gibt, woraus schon wieder $z \varrho x \Leftrightarrow z \varrho y$ folgt. Nun gilt nach (2) für $Z \in \overline{M}$ immer $Z \varrho X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Z \varrho Y$, sodass nach 4.3 und nach der Voraussetzung über kard $\overline{M} > 2$ auch in diesem Falle $\overline{M}$ nicht **C**-einfach sein kann.

Ist umgekehrt $\overline{M}$ eine Zerlegung in maximale eingelegte Teilmengen, so gilt nach [4], Satz 8, dass die entsprechende t. g. Faktormenge $\overline{M}$ lexikographisch unzerlegbar oder nach 4.3 **C**-einfach ist.

4.5. Lemma. *Es seien $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ zwei verschiedene* **C**-*einfache t. g. Faktormengen auf der t. g. Menge M und es sei* kard $\overline{M}_1 > 1$, kard $\overline{M}_2 > 1$. *Dann ist* kard $\overline{M}_1 =$ kard $\overline{M}_2 = 2$ *und $\overline{M}_1$ mit $\overline{M}_2$ isomorph.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass auf M keine solche t. g. Faktormenge $\overline{M}$ existiert, für die kard $\overline{M} = 2$ gilt. Dann ist kard $\overline{M}_1 > 2$, kard $\overline{M}_2 > 2$ und darum müssen nach 4.4 die Zerlegungen $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ die Zerlegungen in maximale eingelegte Teilmengen sein. Dabei gibt es $P_1 \in \overline{M}_1$ und $P_2 \in \overline{M}_2$, für die $P_1 \neq P_2$ und $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ gilt, sodass nach [4], Satz 6 auf M eine solche t. g. Faktormenge $\overline{M}_3$ existiert, die gerade drei Elemente enthält und die entweder eine Kette oder eine Menge von untereinander unvergleichbaren Elementen ist. Auf $\overline{M}_3$ aber existiert immer eine nur zwei Elemente enthaltende t. g. Faktormenge und nach [4], Lemma 8 existiert eine solche auch auf M, was aber ein Widerspruch ist. Also auf der gegebenen t. g. Menge muss immer eine nur zwei Elemente enthaltende t. g. Faktormenge $\overline{M}$ existieren.

Setzen wir nun voraus, dass kard $\overline{M}_1 > 2$ ist, sodass wieder nach 4.4 $\overline{M}_1$ eine Zerlegung in maximale eingelegte Teilmenge ist. Bezeichnen wir $\overline{M} = \{P, Q\}$, muss $X \cap P \neq \emptyset \neq X \cap Q$ für jedes $X \in \overline{M}_1$ gelten. Es ist also möglich zwei Elemente x, y folgendermassen zu wählen: $x \in X \cap P$, $y \in Y \cap P$, wobei $X, Y \in \overline{M}_1$ und $X \neq Y$ ist. Nach 4.3 gibt es ein $Z \in \overline{M}_1$, $X \neq Z \neq Y$, für das $X \varrho Z \Rightarrow$ non $Y \varrho Z$ gilt (wo ϱ eins von den Symbolen $<, >, \|$ bezeichnet). Dann gibt es auch ein $z \in Z \cap Q$ und nach (2) gilt $x \varrho z$ aber gilt nicht $y \varrho z$. Dies ist ein Widerspruch gegen (1), denn $x, y \in P$, $z \in Q = M - P$ und P ist in M eingelegt. Es muss also kard $\overline{M}_1 =$ kard $\overline{M}_2 = 2$ gelten.

Wir bezeichnen endlich $\overline{M}_1 = \{P_1, Q_1\}$, $\overline{M}_2 = \{P_2, Q_2\}$ und wir setzen voraus, dass die t. g. Faktormengen $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ nicht isomorph sind, d. h. es gilt z. B. $P_1 < Q_1$ aber $P_2 \| Q_2$. Es sind folgende Fälle möglich: 1) $P_1 \subset P_2$, 2) $P_2 \subset P_1$, 3) P_1 non $\subset P_2$, P_2 non $\subset P_1$. In jedem von diesen Fällen kann man bei geeigneter Bezeichnung der Elemente aus $\overline{M}_1$ und aus $\overline{M}_2$ die Elemente $x \in P_1 \cap P_2$, $y \in Q_1 \cap Q_2$ wählen, denn offenbar ist $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \neq Q_1 \cap Q_2$. Dann bekommen wir nach (2) einerseits $x < y$ und anderseits $x \| y$, was aber ein Widerspruch ist. Es müssen also $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ untereinander isomorph sein.

4.6 Satz. *Jede t. g. Menge M ist ein* **C**-*homomorphes Vorbild höchstens einer einzigen (bis auf die Isomorphismen)* **C**-*einfachen t. g. Menge, die mehr als ein einziges Element enthält.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass zwei **C**-einfache **C**-homomorphe Bilder N_1 und N_2 der t. g. Menge M existieren und dass kard $N_1 > 1$ und auch kard $N_2 > 1$ gilt. Dann müssen nach 4.2 auch solche t. g. Faktormengen $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ auf M existieren, für die $\overline{M}_1 = N_1$, $\overline{M}_2 = N_2$ und offenbar auch kard $\overline{M}_1 > 1$, kard $\overline{M}_2 > 1$ gilt. Daraus folgt nach 4.5 sofort, dass $\overline{M}_1 = \overline{M}_2$ und darum natürlich auch $N_1 = N_2$ sein muss.

Der Satz 4.6 lässt die Möglichkeit der Existenz einer solchen t. g. Menge zu, die ein **C**-homomorphes Vorbild einer einzigen **C**-einfachen t. g. Menge ist, nämlich der, die ein einziges Element enthält. Solche t. g. Mengen existieren wirklich und ein Beispiel einer von ihnen ist in Fig. 2 angeführt.

Bei dem **C**-Homomorphismus führen wir den Begriff der **C**-homomorphen Charakteristik (analog zu den Begriffen der **A**- oder **B**-homomorphen Charakteristiken) nicht ein, denn im allgemeinen Falle wäre die gegebene t. g. Menge auf diese Weise durch nichts grundsätzlich einfacheres als sie selbst beschrieben. Und noch mehr, es würden einige t. g. Mengen existieren, die überhaupt keine **C**-homomorphe Charakteristik besitzen (vgl. ein Beispiel in Fig. 2).

4.7 Satz. *Es sei N ein* **C**-*homomorphes Bild der t. g. Menge M. Dann gibt es eine solche t. g. Teilmenge $M' \subset M$, die mit N isomorph ist.*

Beweis. Nach 4.2 gibt es eine solche t. g. Faktormenge $\overline{M}$ auf M, dass $\overline{M} = N$ ist. Aus dem Auswahlaxiome folgt die Existenz einer Menge von Repräsentanten M' des Systems $\overline{M}$. Dann ist $M' \subset M$ und nach (2) ist M' mit $\overline{M}$ und darum auch mit N isomorph.

Eine zu 2.11 analoge Behauptung wird für den **C**-Homomorphismus nur unter viel stärken Voraussetzungen über die betreffenden t. g. Mengen gelten. Die t. g. Mengen in Fig. 2 sind nämlich nicht isomorph, trotzdem jede von ihnen mit einer bestimmten t. g. Faktormenge der anderen isomorph ist, d. h. sie sind nach 4.2 untereinender **C**-homomorphe Bilder.

4.8 Satz. *Es sei M eine* **C**-*einfache t. g. Menge, die mehr als zwei Elemente enthält. Dann gilt:*

1. *Es gibt keine in M eingelegte Kette P, für die $\{x \in P \Rightarrow x < y$ (bzw. $y < x$) gilt für jedes $y \in M - P\}$ gilt. Namentlich gibt es in M kein grösstes und auch kein kleinstes Element.*

2. *M ist zusammenhängend, d. h. sie ist nicht die Kardinalsumme von zwei (nichtleeren) t. g. Mengen.*

Beweis folgt unmittelbar aus 4.3.

4.9 Folgerung. *Ein vollständiger mehr als zwei Elemente enthaltender Verband ist nienals* **C**-*einfach. Namentlich die einzigen endlichen* **C**-*einfachen Verbände sind die, die höchstens zwei Elemente enthalten. Jede* **C**-*einfache endliche t. g. Menge enthält mindestens zwei verschiedene maximale und zwei minimale Elemente, falls sie überhaupt mehr als zwei Elemente enthält.*

Wir bemerken noch, dass selbstverständlich jede **C**-einfache t. g. Menge, die mehr als zwei Elemente enthält, zugleich auch **A**- und auch **B**-einfach ist. Einige Beispiele von endlichen **C**-einfachen (d. h. lexikographisch unzerlegbaren) t. g. Mengen wurden in [4], Fig. 1 angeführt.

Einige endliche Verbände sind nur darum nicht **C**-einfach, weit sie das grösste und kleinste Element besitzen, d. h. dass nach Wegnahme dieser zwei Elemente schon eine **C**-einfache t. g. Menge enstehen wird. Einige Beispiele von dieser Verbände findet man in Fig. 3.

5. Homomorphismen der Verbände. In [1] werden die Begriffe der Homomorphismen bezüglich des Supremums bzw. bezüglich des Infimums und der Begriff des Verbandshomomorphismus eingeführt. Die ersten zwei werden wir als $\vee$- bzw. $\wedge$-*Homomorphismus* bezeichnen.

5.1 Lemma. *Ein* $\vee$- *bzw.* $\wedge$-*Homomorphismus* φ *erfüllt folgende Bedingung*

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) \leqq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(y) \tag{7}$$

bzw.

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) \leqq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \wedge y) = \varphi(x)\,. \tag{8}$$

Beweis. Nach [1] sind die beiden betreffenden Homomorphismen die isotonen Abbildungen, sodass sie die Bedingung (3′) erfüllen. Gilt in (7) $\varphi(x \vee y) \neq \varphi(y)$, gilt nach (3′) $\varphi(y) < \varphi(x \vee y)$ und aus den Eigenschaften des $\vee$-Homomorphismus folgt $\varphi(y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) = \varphi(x \vee y)$, was ein Widerspruch ist. In dualer Weise beweist man (8) für den $\wedge$-Homomorphismus.

5.2 Lemma. *Es sei* φ *eine Abbildung des Verbandes* M *auf eine t. g. Menge* N. *Ist* φ *eine isotone Abbildung, die die Bedingung* (7) *bzw.* (8) *erfüllt, so gibt es zu jeden zwei Elementen* $\varphi(x), \varphi(y) \in N$ *ihres Supremum* $\varphi(x) \vee \varphi(y)$ *bzw. ihres Infimum* $\varphi(x) \wedge \varphi(y)$ *und es gilt* $\varphi(x) \vee \varphi(y) = \varphi(x \vee y)$ *bzw.* $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y)$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass $\varphi(x \vee y)$ die kleinste obere Schranke der Elemente $\varphi(x), \varphi(y) \in N$ ist. Dabei werden wir voraussetzen, dass es ein solches $\varphi(z) \in N$ gibt, für das $\varphi(x) \leqq \varphi(z) < \varphi(x \vee y)$, $\varphi(y) \leqq \varphi(z) < \varphi(x \vee y)$ gilt, und daraus werden wir einen Widerspruch ableiten. Den zweiten Teil des Lemmas beweist man in dualer Weise.

Ist $x \leqq y$ (und ähnlich im Falle $y < x$), ist $x \vee y = y$ und darum $\varphi(x \vee y) = \varphi(y)$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es sei weiter $x \parallel y$. Ist $\varphi(x) = \varphi(y)$, ist nach (7) wieder $\varphi(x \vee y) = \varphi(y)$ und auch im Falle $z = x$ (und ähnlich wenn $z = y$), d. h. wenn $z \parallel y$ ist, geht aus (7) $\varphi(z) = \varphi(y \vee z) = \varphi(y \vee x)$ hervor, was aber in beiden Fällen ein Widerspruch ist. Es sei nun weiter $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ und $x \neq z \neq y$.

Ist $z < x$, ist nach (3′) auch $\varphi(z) \leqq \varphi(x)$ und darum $\varphi(z) = \varphi(x) = \varphi(z \vee x)$. Es ist nun entweder $z < y$, also wieder $\varphi(z) = \varphi(y)$, d. h. auch $\varphi(x) = \varphi(y)$, oder $z > y$, sodass $x \vee z = x \vee y \vee z$ und darum $\varphi(x \vee y) > \varphi(z) = \varphi(x \vee y \vee z) \geqq \varphi(x \vee y)$ gilt, oder endlich $z \parallel y$ ist und nach (7) $\varphi(z \vee y) = \varphi(z)$ gilt, woraus $\varphi(z) = \varphi(x \vee z) = \varphi(y \vee z)$ folgt. In den Fällen $x \vee z \leqq y \vee z$ bzw. $y \vee z \leqq x \vee z$ ist $x \vee y \vee z \leqq y \vee z$ bzw. $x \vee y \vee z \leqq x \vee z$, sodass immer $\varphi(x \vee y) \leqq \varphi(x \vee y \vee z) \leqq \varphi(z)$, und endlich im Falle $x \vee z \parallel y \vee z$ nach (7) $\varphi(x \vee y \vee z) = \varphi(x \vee z)$ und darum $\varphi(x \vee y) \leqq \varphi(x \vee y \vee z) = \varphi(z)$ ist, was aber heisst, dass wir in allen vorigen Fällen einen Widerspruch abgeleitet haben. Es soll weiter weder $z \leqq x$ noch $z \leqq y$ nicht gelten.

Ist $z > x$, also $z = z \vee x$, dann ist entweder auch $z > y$ und darum $z \geqq x \vee y$, woraus nach (3′) $\varphi(z) \geqq \varphi(x \vee y)$ folgt, oder ist $z \parallel y$ und nach (7) muss $\varphi(z) = \varphi(y \vee z) = \varphi(x \vee y \vee z) \geqq \varphi(x \vee y)$ gelten, was aber in beiden Fällen wieder ein Widerspruch ist.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass $z \parallel x$ und $z \parallel y$ gilt. Nach (7) ist $\varphi(z) = \varphi(z \vee x) = \varphi(z \vee y)$ und wir werden zwei Möglichkeiten unterscheiden. Wenn

$z \vee x \leqq z \vee y$ gilt, also auch $x \vee y \vee z \leqq y \vee z$, gilt nach (3′) $\varphi(x \vee y) \leqq \varphi(x \vee y \vee z) \leqq \leqq \varphi(y \vee z) = \varphi(z)$ und wenn $z \vee x \parallel z \vee y$ gilt, dann muss nach (7) $\varphi(x \vee y \vee z) = = \varphi(z \vee x)$ und darum $\varphi(x \vee y) \leqq \varphi(x \vee y \vee z) = \varphi(z)$ gelten, was in beiden Fällen wieder ein Widerspruch ist.

5.3 Satz. *Eine isotone Abbildung, die einen Verband auf wieder einen Verband abbildet, ist dann und nur dann ein* $\vee$- *bzw.* $\wedge$-*Homomorphismus, wenn sie die Bedingung* (7) *bzw.* (8) *erfüllt.*

Beweis. Aus 5.1 folgt, dass die angeführten Bedingungen notwendig und aus 5.2, dass sie auch hinreichend sind.

Nach 5.2 jede t. g. Menge, die das Bild eines Verbandes in einer die Bedingungen (7) und (8) erfüllenden Abbildung ist, muss selbst ein Verband sein. Diese Abbildung muss nach 5.3 ein Verbandshomomorphismus sein.

5.4 Folgerung. *Jeder* **A**-*Homomorphismus* (*d. h. eine isotone Abbildung, die die Bedingung* (4) *erfüllt*), *der einen Verband wieder auf einen Verband abbildet, ist ein Verbandshomomorphismus.*

Beweis folgt aus 5.3, denn ein **A**-Homomorphismus die Bedingungen (7) und (8) leer erfüllt.

Nach 5.4 und 5.2 ist jedes **A**-homomorphe Bild eines Verbandes wieder ein Verband, sodass die Gültigkeit aller Sätze aus dem Abschnitte 2 auch in dem Falle beibehalten wird, wenn wir in ihnen den Termin „t. g. Menge“ durch den Termin „Verband“ ersetzen werden. Auf diese Weise sind namentlich auch die Begriffe des **A**-*Faktorverbandes*, des **A**-*einfachen Verbandes* und der **A**-*homomorphen Charakteristik* eines Verbandes eingeführt und einige Sätze von denselben abgeleitet. Dabei kann man selbstverständlich auch von den in einem Verbande *eingelegten Verbänden* sprechen und aus einigen spezialen Verbänden mittels der lexikographischen Summe einen neuen Verband konstruieren.

Ganz anders sieht die Situation im Falle des **B**- oder **C**-Homomorphismus aus. Leicht kann man zeigen (vgl. [1], Üb. 7, 45), dass eine Abbildung des Verbandes auf einen Verband, die die Bedingung (3) erfüllt und die ein $\vee$-Homomorphismus bzw. ein $\wedge$-Homomorphismus ist, schon ein Isomorphismus sein muss. Daraus folgt also, dass auch ein **B**-Homomorphismus, der zugleich entweder ein $\vee$- oder ein $\wedge$-Homomorphismus ist, sogar ein Isomorphismus sein muss.

5.5 Satz. *Ein* **C**-*Homomorphismus* φ (*d. h. eine isotone Abbildung, die die Bedingung* (4′) *erfüllt*), *der einen Verband auf einen Verband abbildet, ist dann und nur dann ein* $\vee$- *bzw.* $\wedge$-*Homomorphismus, wenn er folgende Bedingung*

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \tag{7′}$$

bzw.

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \tag{8′}$$

erfüllt.

Beweis. Aus 5.1 folgt, dass die angeführten Bedingungen notwendig sind. Wir wollen nur beweisen, dass die Bedingung (7′) auch hinreichend ist. Der Rest wird wieder auf duale Weise bewiesen.

Es sei also φ ein **C**-Homomorphismus, der den Verband M auf den Verband N abbildet und der die Bedingung (7′) erfüllt. Für $x, y \in M$ gilt entweder $x \leqq y$ und dann nach (3′) $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$ und darum ist $\varphi(x \vee y) = \varphi(y) = \varphi(x) \vee \vee \varphi(y)$, oder gilt $x \parallel y$. In diesem Falle kann nach (4′) entweder $\varphi(x) = \varphi(y)$ sein, sodass nach (7′) $\varphi(x \vee y) = \varphi(y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ gilt, oder $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$ sein. Es gilt dabei $x, y < x \vee y$, sodass nach dem Vorigem und nach (3′) $\varphi(x) < \varphi(x \vee y)$ und $\varphi(y) < \varphi(x \vee y)$ sein muss. Würde nun ein solches $\varphi(z) \in N$ existieren, dass $\varphi(x), \varphi(y) \leqq \varphi(z) < \varphi(x \vee y)$ ist, müsste sogar $\varphi(x), \varphi(y) < \varphi(z)$ und darum $x \neq z \neq y$ und $z \neq x \vee y$ sein, sodass nach (3′) und (4′) $x, y < z < x \vee y$ gelten würde. Dies ist aber ein Widerspruch und darum gilt wieder $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \vee \varphi(y)$.

5.6 Lemma. *Jedes* **C**-*homomorphe Bild eines Verbandes ist wieder ein Verband.*

Beweis. Es sei N eine t. g. Menge, die ein **C**-homomorphes Bild des Verbandes M ist. Nach 4.2 gibt es eine mit N isomorphe t. g. Faktormenge $\overline{M}$ auf M. Gilt für $X, Y \in \overline{M}$ $X \leqq Y$, so existiert $X \vee Y = Y$, und gilt es $X \parallel Y$, nach (2) gilt dann auch $x \parallel y$ für jedes $x \in X$, $y \in Y$ und darum ist $x \neq x \vee y \neq y$. Es muss weiter $x \vee y$ non $\in X$, $x \vee y$ non $\in Y$ gelten, denn aus $x \vee y \in X$ folgt einerseits $x \parallel y$ und anderseits $x \vee y > y$, was aber der Bedingung (1) widerspricht (X ist nämlich eine in M eingelegte t. g. Menge). Es existiert also ein solches $S \in \overline{M}$, für das $x \vee y \in S$ und nach (2) $X < S$, $Y < S$ gilt. Würde nun ein solches $Z \in \overline{M}$ existieren, dass $X \leqq Z < S$ und $Y \leqq Z < S$ ist, würde nach (2) $x \leqq z < x \vee y$ und $y \leqq z < x \vee y$ für $z \in Z$ gelten, was ein Widerspruch ist. Es existiert also wieder $X \vee Y = S$. Die Existenz des Infimums in $\overline{M}$ beweist man auf duale Weise.

Aus 5.6 folgt, dass alle Sätze des Abschnittes 4 über den **C**-Homomorphismus in Gültigkeit bleiben, wenn in ihnen der Termin ,,t. g. Menge" durch den Termin ,,Verband" ersetzt wird. Zum Unterschied von dem **A**-Homomorphismus brauchen nach 5.5 die **C**-homomorphen Bilder eines Verbandes nicht zugleich die Bilder in einem Verbandshomomorphismus sein.

6. Abschluss. Die Überlegungen in den vorigen Abschnitten 2.—4. haben gezeigt, dass in der Theorie der t. g. Mengen der Begriff des Homomorphismus auf verschiedene Weise eingeführt werden kann. Unter einem Homomorphismus kann man dabei vom Standpunkt der abstrakten Algebra jede solche Abbildung verstehen, die eine Menge mit bestimmten Relationen (nicht nur binären) auf eine andere mit gleichartigen Relationen auf solche Weise abbildet, dass alle Relationen beibehalten werden und dass dabei auf dem Vorbilde eine erzeugende Zerlegung bestimmt wird, d. h. eine Zerlegung, auf der natürlich und eindeutig eine Faktormenge mit gleichartigen Relationen definiert werden kann.

In diesem Sinne ist der allgemeinste Homomorphismus der Theorie der t. g. Mengen gerade der **C**-Homomorphismus und nicht z. B. die isotone Abbildung, denn diese lässt nach 4.1 keine natürliche Faktorisation mehr zu (sie lässt selbstverständlich andere minder natürliche und anschauliche Faktorisationen zu, vgl. [6], 12). Anderseits lassen die mehr spezialen Homomorphismen, wie der **A**- oder **B**-Homomorphismus, eine ausführlichere Charakterisation der einzelnen t. g. Mengen zu (nämlich mit Hilfe der **A**- bzw. **B**-homomorphen Charakteristiken), als es der Fall bei dem **C**-Homomorphismus ist. Es ist klar, dass die Anzahl sämtlicher Klassen der **C**-homomorphen Vorbilder der einzelnen t. g. Mengen viel kleiner ist als die von den **A**- oder **B**-homomorphen Vorbildern. Diese Klassen sind aber umfassender und lassen sich darum schwer charakterisieren. Die Situation ist noch schlimmer, wenn wir statt des **C**-Homomorphismus nur die isotone Abbildung, wie in [6], wählen würden. In diesem Falle ist nur eine kleine Hoffnung einige wichtige und zugleich übersichtliche Charakteristiken zu bekommen. Die isotonen Bilder einer t. g. Menge sind nämlich untereinander zu abweichend.

In welchem Ausmasse die untersuchten Homomorphismen einige üblichen Eigenschaften des Homomorphismus besitzen, kann man aus der Analogie mit der Gruppentheorie entscheiden. Es können einander dann folgende Begriffe entsprechen: der **C**-Homomorphismus und der Gruppenhomomorphismus, die **C**-Einfachheit und die Gruppeneinfachheit (die t. g. Menge mit einem einzigen Elemente und die Einsergruppe), die eingelegte t. g. Menge und der Normalteiler usw.

Die Überlegungen des Abschnittes 5 bieten bestimmte Möglichkeiten (Ausnützung der Sätze über den **C**-Homomorphismus) zur Untersuchung der Verbände von dem Standpunkte der Mengen mit binären Relationen und nicht, wie es üblich ist, vom Standpunkte der Mengen mit Operationen, d. h. mit ternären Relationen.

LITERATUR

[1] *G. Birkhoff*: Teoria struktur (russische Übersetzung der 2. Ausg.), Moskva 1952.

[2] *O. Borůvka*: Theorie rozkladů v množině (mit franz. Zusammenfassung), Spisy přír. fak. MU v Brně, Nr. *278* (1946), 3—37.

[3] *K. Čulík*: Zur Theorie der Graphen, Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 133—155.

[4] *K. Čulík*: O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin (mit russ. und deutsch. Zusammenfassung), Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 16—30.

[5] *B. Dushnik, E. W. Miller*: Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610.

[6] *M. L. Dugreil-Jacotin, R. Croisot*: Équivalences réguliéres dans un ensemble ordonné, Bull. d. l. Soc. Math. d. France *80* (1952), 11—35.

Резюме

О ГОМОМОРФИЗМАХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ И СТРУКТУР

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 17/IX 1958 г.)

В настоящей работе вводятся и изучаются три типа гомоморфизмов (**A**-, **B**- и **C**-гомоморфизмы) теории частично упорядоченных множеств. Все эти гомоморфизмы являются изотонными отображениями, однако они удовлетворяют еще дальнейшим условиям. С сругой стороны, эти гомоморфизмы (а именно, **C**-гомоморфизм) не должны быть гомоморфизмами структур в обычном смысле слова. Теории всех этих гомоморфизмов весьма похожи на теорию гомоморфизма графов в [3]. При этом оказывается, что основные понятия этих теорий (понятия вложенного частично упорядоченного множества, факторного частично упорядоченного множества, равно как и понятие простоты), естественным образом связаны с понятием лексикографической суммы и лексикографической неразложимости частично упорядоченных множеств (ср. [4]).

Рассуждения о различных гомоморфизмах показывают, что понятие гомоморфизма какой-либо алгебраической теории не является однозначно определенным, даже если исходить из предположения, что гомоморфизмом можно считать каждое отображение множества с отношениями на другое множество с аналогичными отношениями, если оно не только сохраняет эти отношения, но кроме того определяет на прообразе производящее разложение, т. е. разбиение, на котором можно естественным и легко обозримым способом определить фактор-множество с соответствующими отношениями. В этом смысле в теории частично упорядоченных множеств наиболее общим гомоморфизмом является именно **C**-гомоморфизм, а не простое изотонное отображение, которое, конечно, также допускает факторизацию, но значительно менее естественную и наглядную (ср. [6]).

С другой стороны, гомоморфизмы более частного характера (как **A**- или **B**-гомоморфизмы) дают возможность значительно более подробного описания отдельных частично упорядоченных множеств при помощи их **A**- или **B**-простых частично упорядоченных множеств. Ясно, что число **C**-простых частично упорядоченных множеств меньше, чем число **A**- или **B**-простых, также ясно, однако, что классы всех их **C**-гомоморфных (неизоморфных; прообразов значительно богаче, чем классы их **A**- или **B**-гомоморфных прообразов, в силу чего их гораздо труднее характеризовать.

Положение еще более ухудшается, если вместо **С**-гомоморфизма взять только лишь изотонное отображение.

Посредством **С**-гомоморфизма можно изучать структуры прежде всего как частично упорядоченные множества, а не (как это обычно делается) как множества с двумя специальными операциями.

Наконец, нетрудно найти аналогии между основными понятиями теории групп и понятиями теорий исследуемых гомоморфизмов.