Milan Sekanina

Замечания к факторизации бесконечной циклической группы

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 485–495

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100376

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

ЗАМЕЧАНИЯ К ФАКТОРИЗАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 15/IX 1957 г. и в переработанном виде 17/VIII 1958 г.)

Первая часть статьи посвящается разложению бесконечной циклической гриуппы на бесконечные множители. Во второй части описываются все факторизации множества всех целых неотрицательных чисел.

Целью настоящей статьи является исследование некоторых специальных вопросов, касающихся факторизации в смысле Ф. Хайоша (см. [1]) бесконечной циклической группы. Так как все бесконечные циклические группы изоморфны друг другу, можно без умаления общности ограничиться рассмотрением множества всех целых чисел $\mathfrak{L}$ со сложением в качестве групповой операции. Пусть $A, B \subset \mathfrak{L}$. Символом $A + B$ мы обозначаем множество всех чисел $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. Если B — одноэлементное множество $\{b\}$, то мы будем также писать $A + b$. Множество A мы называем периодическим, если существует $b \neq 0$ такое, что $A + b = A$. Если для $M, N \subset \mathfrak{L}$ существует число $a \in \mathfrak{L}$ такое, что $M + a = N$, мы будем также писать $M \doteqdot N$. Пусть $M = A + B$ и пусть каждое число $m \in M$ можно записать в виде $a + b$, $a \in A$, $b \in B$ одним единственным способом. Тогда мы будем писать также $M = A \dotplus B$, называть A и B факторами множества M и говорить, что они образуют факторизацию M. Каждой факторизацией $M = A \dotplus B$ дано разложение на множестве M в систему дизъюнктных множеств вида $A + b$, где b пробегает множество B. Наоборот, пусть дано разложение на множестве M, пусть элементы разложения имеют вид $C + d$, где $C \subset \mathfrak{L}$ и d пробегает множество D. Тогда будет $M = C \dotplus D$. Множество всех неотрицательных целых чисел обозначим через $\mathfrak{A}$, множество всех натуральных чисел — через $\mathfrak{Z}$. Пусть $M \subset \mathfrak{L}$. Для $x \in \mathfrak{A}$ положим

$$M[x] = \operatorname{card} \mathop{\mathrm{E}}_{y} [y \in M, -x \leqq y \leqq x] , \quad M\{x\} = \mathop{\mathrm{E}}_{y} [x \in M, y < x] .$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M[x]}{2x+1}$, обозначим его через $\chi(M)$.

I

1.1 лемма. *Пусть* $M \neq \emptyset$, $\chi(M) = 0$ *и* $M + t = M$. *Тогда* $t = 0$.

Доказательство. Допустим, что $t \neq 0$. Из импликации $M + t = M \rightarrow \rightarrow M = M - t$ следует, что можно предположить $t > 0$. Пусть $a \in M$. Тогда и $a + \{nt\} \subset M$. Для $k \in \mathfrak{Z}$ отсюда следует $M[kt] \geqq 2k$. Итак, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{M[kt]}{2kt+1} \geqq \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2k}{2kt+1} = \dfrac{1}{t} \neq 0$, что является противоречием.

1.2 лемма. *Пусть* $M \dotplus P = M \dotplus Q = \mathfrak{L}$. *Тогда* card P = card Q. Card P *мы обозначаем в таком случае через* $\varrho(M)$.[1])

Доказательство. Если $p \in P$, $p \in M + q$, то положим $q = f(p)$. Если бы для $p_1 \neq p_2$ имело место $p_1 = m_1 + q$, $p_2 = m_2 + q$, то было бы $p_1 + m_2 = p_2 + m_1$, $(p_1 + M) \cap (p_2 + M) \neq \emptyset$, что невозможно. Итак, $p_1 \neq p_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$, отображение f является *простым* и card $P \leqq$ card Q. Аналогично имеет место card $Q \leqq$ card P, следовательно, card P = card Q.

1.3 теорема. *Пусть* M — *фактор множества* $\mathfrak{L}$, $\varrho(M) = \aleph_0$. *Тогда* $\chi(M) = 0$.

Доказательство. Допустим, что существует последовательность $x_1, x_2, \ldots \to \infty$, $(x_i \geqq 0)$, для которой имеет место $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{M[x_i]}{2x_i+1} = \mu > 0$. Возьмем $n \in \mathfrak{Z}$ так, чтобы $n \,.\, 2\mu > 1$. Пусть $M + N = \mathfrak{B}$, $N = \{a_1, \ldots, \ldots, a_k, \ldots\}$. Пусть $x \in M + a_k$, откуда $x = y + a_k$ для подходящего $y \in M$, и пусть $-x_i \leqq x \leqq x_i$, откуда $-x_i - a_k \leqq y \leqq x_i - a_k$. Если $a_k > 0$ (соотв. $a_k < 0$) и если y не является одним из чисел $-x_i - a_k, \ldots, -x_i - 1$ (соотв. $x_i - a_k, x_i - a_k - 1, \ldots, x_i + 1$), то будет и $-x_i \leqq y \leqq x_i$. Этих y будет самое меньшее $(M + a_k)[x_i] - |a_k|$, следовательно $M[x_i] \geqq \geqq (M + a_k)[x_i] - |a_k|$. Пусть наоборот, $y \in M$, $-x_i \leqq y \leqq x_i$. Если y не является одним из чисел $x_i - a_k + 1, \ldots, x_i$ (соотв. $-x_i - a_k - 1, \ldots, \ldots, -x_i$), то будет и $-x_i \leqq y + a_k \leqq x_i$. Количество этих y — не менее $M[x_i] - |a_k|$. Итак $(M + a_k)[x_i] \geqq M[x_i] - |a_k|$. Отсюда

$$M[x_i] - |a_k| \leqq (M + a_k)[x_i] \leqq M[x_i] + |a_k|$$

(для $a_k = 0$ неравенство очевидно).

Таким образом

$$\frac{M[x_1] - |a_k|}{2x_i + 1} \leqq \frac{(M + a_k)[x_i]}{2x_i + 1} \leqq \frac{M[x_i] + |a_k|}{2x_j + 1}.$$

[1]) Сравни [2].

Отсюда

$$\mu \leqq \lim_{i\to\infty} \frac{(M + a_k)[x_i]}{2x_1 + 1} \leqq \mu$$

и, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{(M + a_k)[x_i]}{2x_i + 1} = \mu \, .$$

Итак, для каждого k, $1 \leqq k \leqq n$ существует i_k такое, что для $i > i_k$ будет

$$\frac{(M + a_k)[x_i]}{2x_i + 1} > \frac{\mu}{2} \, . \tag{1.1}$$

Пусть $i > \max(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Тогда для i и k, $1 \leqq k \leqq n$, справедливо (1.1), поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(M + a_k)[x_i]}{2x_i + 1} > n\frac{\mu}{2} > 1$$

откуда следует

$$\sum_{k=1}^{n} (M + a_k)[x_i] > 2x_i + 1 \, . \tag{1.2}$$

Однако, $M + a_k$ дизъюнктны, значит и $(M + a_k) \cap [-x_i, x_i]$ дизъюнктны. Так как $(M + a_k) \cap [-x_i, x_i]$ является частью интервала $[-x_i, x_i]$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (M + a_k)[x_i] \leqq 2x_i + 1 \, ,$$

что противоречит соотношению (1.2); теорема доказана.

1.4 следствие 1.1 и 1.3. *Пусть* $M \dotplus N = \mathfrak{L}$, $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = \aleph_0$. *Тогда ни* M, *ни* N *не являются периодическими множествами.*[2])

1.5 теорема. *Пусть* $M = \{a_n\}_1^\infty$ — *возрастающая последовательность целых чисел,* $a_1 = 1$. *Пусть существует* $N \in \mathfrak{Z}$ *такое, что для любого* $n \geqq N$ *имеет место*

$$a_{n+1} - a_n \geqq a_n - a_{n-1} \geqq \alpha^n - \alpha^{n-1} \, , \tag{1.3}$$

где α — *действительное число, больше чем 2. Пусть* Z — *конечное (или пустое) множество целых чисел. Тогда* M *будет фактором множества* $\mathfrak{L} - Z$.

Доказательство. Для любого $h \in \mathfrak{Z}$ обозначим через N_h множество всех натуральных чисел m таких, что $a_m - a_{m-1} > a_{m-1} + h$. Очевидно, для $h > g$ будет $N_h \subset N_g$. Покажем, что $\operatorname{card} N_h = \aleph_0$ для любого h. Допустим, что это не так. Тогда существуют h и m' так, что для $m \geqq m'$

---

[2]) Сравни с утверждением в п. 4 из [1].

будет $a_m - a_{m-1} \leqq a_{m-1} + h$. Таким образом справедлива система неравенст венств

$$\begin{aligned} a_{m'} &- a_{m'-1} \leqq a_{m'-1} + h\,, \\ a_{m'+1} &- a_{m'} \leqq a_{m'} + h\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m &- a_{m-1} \leqq a_{m-1} + h\,. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_{m'} &\leqq 2a_{m'-1} + h\,, \\ a_{m'+1} &\leqq 2a_{m'} + h \leqq 4a_{m'-1} + 3h\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m &\leqq 2a_{m-1} + h \leqq 2^{m-m'+1}_{m'-1} + (2^{m-m'+1} - 1)\,h\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для $m \geqq N$ будет согласно (1.3)

$$a_m - a_{m-1} \geqq \alpha^{m-1}(\alpha - 1)\,,$$

следовательно,

$$a_m \geqq \alpha^{m-1}(\alpha - 1) + a_{m-1}$$

откуда

$$a_m \geqq \alpha^{m-1}(\alpha - 1) + \alpha^{m-2}(\alpha - 1) + \dots + \alpha^{N-1}(\alpha - 1) + a_{N-1}\,. \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) следует для любого $m > \max(N, m')$

$$2^{m-m'+1}a_{m'-1} + (2^{m-m'+1} - 1)\,h \geqq (\alpha - 1)\,\alpha^{N-1}\frac{\alpha^{m-N+1} - 1}{\alpha - 1} + a_{N-1} =$$
$$= \alpha^m - \alpha^{N-1} + a_{N-1}\,,$$

откуда

$$2^{-m'+1}(\alpha_{m'-1} + h) \geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m + \frac{-\alpha^{N-1} + a_{N-1} + h}{2^m}\,.$$

Это противоречит предположению, что $\alpha > 2$. Итак, $\operatorname{card} N_h = \aleph_0$.

Упорядочим $\mathfrak{L} - Z$ в виде последовательности $\{x_0, x_1, \dots, x_t, \dots\}$. Для $Z \neq \emptyset$ положим $v = \max Z$, $u = \min Z$, для $Z = \emptyset$ положим $u = v = 0$. Существует $r_0 \geqq N$ такое, что для $n \geqq r_0$ имеет место

$$\begin{aligned} x_0 - u &< \alpha^{n-1}(\alpha - 1)\,, \\ v - x_0 &< \alpha^n(\alpha - 1)\,. \end{aligned}$$

Положим $M_0 = M + x_0 - a_{r_0}$. Тогда имеем

1. $x_0 \in M_0$.
2. $M_0 \cap Z = \emptyset$.

Действительно, для $b = a_{r_0-1} + x_0 - a_{r_0}$ и $c = a_{r_0+1} + x_0 - a_{r_0}$ будет

$$\begin{aligned} x_0 - b &= a_{r_0} - a_{r_0-1} \geqq \alpha^{r_0-1}(\alpha - 1) > x_0 - u\,, \\ c - x_0 &= a_{r_0+1} - a_{r_0} \geqq \alpha^{r_0}(\alpha - 1) > v - x_0\,. \end{aligned}$$

Итак, $b < u$, $c > v$. Так как из условия $x \in M$, $x \neq x_0$ следует $x \geqq c$ или $x \leqq b$ и, значит, $x \operatorname{non} \in Z$, и так как одновременно $x_0 \operatorname{non} \in Z$, то $M \cap Z = \emptyset$.

Предположим, что для всех $t < p$ определены множества $M_t \subset \mathfrak{L} - Z$ такие, что

$$\begin{aligned} &1^t)\ M_t \cap M_s = \emptyset \text{ для всех } s < t;\\ &2^t)\ M_t \stackrel{\cdot}{\cong} M;\\ &3^t)\ x_t \in \bigcup_{s \leqq t} M_s\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Пусть p_1 — наименьший индекс, для которого $x_{p_1} \in (\mathfrak{L} - Z) - \bigcup_{t<p} M_t$. Согласно 3^t) имеем $p_1 \geqq p$. Существует $r_p \geqq N$ такое, что для $n \geqq r_p$ будет

$$x_{p_1} - u < \alpha^{n-1}(\alpha - 1)\,,$$
$$v - x_{p_1} < \alpha^n(\alpha - 1)\,.$$

Пусть для $t < p$ будет $m_t = \min M_t$, следовательно, $M_t = M + m_t - 1$. Существует n_t такое, что для $n > n_t$ имеет место

$$a_n - a_{n-1} > x_{p_1} - m_t\,. \tag{1.7}$$

Положим $h_t = m_t - 1 - x_{p_1}$, $\delta_t = \max(n_t, r_p)$, $\delta = \max(\delta_0, \ldots, \delta_{p-1})$, $h = \max(h_0, \ldots, h_{p-1})$. Пусть m выбрано так, что $m + 1 \in N_h$, $m > \delta$. Положим $M_p = M + x_{p_1} - a_m$. Имеем $M + x_{p_1} - a_m \subset \mathfrak{L} - Z$. Дело в том, что $m > r_p$ и утверждение доказывается дословным повторением доказательства, проведенного выше для M_0. Покажем, что (1.6) справедливо и для $t = p$.

К 1^p). Пусть $0 \leqq t < p$. Из $x \in M_p$, $x < x_{p_1}$, вытекает, что $x = a_n + a_{p_1} - a_m$, где $0 < n' \leqq m - 1$. Значит, $x \leqq a_{m-1} + x_{p_1} - a_m$. Так как $m > n_t$, то согласно (1.7) будет $x < m_t$. Следовательно, $x \operatorname{non} \in M_t$. x_{p_1} по выбору этого числа не принадлежит M_t. Пусть, наконец, $x \in M_p$, $x > x_{p_1}$, следовательно $x = a_{n'} + x_{p_1} - a_m$, где $n' > m$. Положим $k = n' - m$. Так как $m + 1 \in N_{h_t}$, имеем

$$a_{m+1} - a_m > a_m + h_t = a_m + m_t - 1 - x_{p_1}\,,$$

то есть

$$a_{m+1} + x_{p_1} - a_m > a_m + m_t - 1\,. \tag{1.8}$$

Из (1.7) следует $a_m - a_{m-1} > x_{p_1} - m_t$, следовательно,

$$x_{p_1} - a_m < m_t - a_{m-1} \leqq m_t - 1\,. \tag{1.9}$$

Имеем

$$a_{m+k} + x_{p_1} - a_m = a_{m+1} + (a_{m+k} - a_{m+1}) + x_{p_1} - a_m$$

и

$$a_{m+k} - a_{m+1} \geqq a_{m+k-1} - a_m\,,$$

так как $m > N$. Отсюда и из соотношений (1.8) и (1.9) следует

$$a_{m+k} + m_t - 1 > a_{m+k} + x_{p_1} - a_m = a_{m+1} + (a_{m+k} - a_{m+1}) + x_{p_1} - a_m >$$
$$> (a_{m+k} - a_{m+1}) + a_m + m_t - 1 \geqq a_{m+k-1} + m_t - 1 \, .$$

Отсюда получаем $a_{m+k} + m_t - 1 > x > a_{m+k-1} + m_t - 1$. Однако, $a_{m+k-1} + m_t - 1$, $a_{m+k} + m_t - 1$ представляют собой два последовательных числа из M_t и значит $x \operatorname{non} \in M_t$. Итак, мы показали, что $M_p \cap M_t = \emptyset$. Свойства 2^p) и 3^p) очевидны. Если теперь положить $M' = \{0, m_1 - 1, \ldots, m_t - 1, \ldots\}$ то будет $M \dotplus M' = \mathfrak{L} - Z$, чем и заканчивается доказательство.

1.6 замечание. *Множество* $M = \{2^n\}_{n \in \mathfrak{A}}$ *не является фактором множества* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Допустим, что $M \dotplus N = \mathfrak{L}$. Без ограничения общности можно предположить, что $0 \in N$. Пусть для $k_1 \in N$ будет $0 \in M + k_1$. Тогда $0 = 2^n + k_1$ для некоторого n, то есть $k_1 = -2^n$. Отсюда следует $-2^n + 2^{n+1} = 2^n \in M + k_1 \neq M$, что противоречит предположению $0 \in N$.

1.7 замечание. *Множество* $M = \{n^2\}_{n \in \mathfrak{A}}$ *не является фактором множества* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Допустим, что $M \dotplus N = \mathfrak{L}$. Пусть опять $0 \in N$. Справедлива следующая теорема (доказательство см. напр. в [3], стр. 17):

(V) Пусть k — целое число. Тогда $x^2 - y^2 = k$ обладает решением в целых числах x и y, если и только если $k \not\equiv 2 \pmod 4$.

Имеем $n^2 \equiv 0$ или $1 \pmod 4$ для любого n. Далее, $5 \operatorname{non} \in M$. Существуют $t \in N$ и $m \in \mathfrak{A}$ такие, что $5 = m^2 + t$. Имеем $5 - m^2 \equiv 0 \pmod 4$ или $5 - m^2 \equiv 1 \pmod 4$. Согласно (V) существует неотрицательные целые числа x и y такие, что $5 - m^2 = x^2 - y^2$, то есть $5 - m^2 + y^2 = x^2$. Однако, $5 - m^2 + y^2 = y^2 + t \in M + t$, откуда $M \cap M + t \neq \emptyset$, что противоречит предположению.

Неразрешенным остается, например, случай множества $M = \{n^k\}_{n \in \mathfrak{A}}$, где $k \in \mathfrak{Z}$, $k > 2$.

II

Теперь мы займемся факторизацией множества всех неотрицательных целых чисел $\mathfrak{A}$. Покажем прежде всего, что можно ограничиться лишь теми факторизациями, факторы которых являются частями множества $\mathfrak{A}$. Действительно, справедлива лемма

2.1 лемма. *Пусть* $\mathfrak{A} = A \dotplus B$. *Тогда* A *и* B *— снизу ограниченные множества, причем* $\min A = -\min B$.

Доказательство. Допустим, например, что A не является снизу ограниченным множеством. Пусть $b \in B$. Тогда в A существует a такое, что $b + a < 0$, что противотречит соотношению $A \dotplus B = \mathfrak{A}$. Далее имеем $0 \in A + B$, откуда $0 = \min A + \min B$ и, следовательно $\min A = -\min B$.

2.2 лемма. *Пусть* $\mathfrak{A} = A \dotplus B$. *Тогда будет* $\mathfrak{A} = (A + (-\min A)) \dotplus (B + (-\min B))$.

Доказательство очевидно. Притом $A + (-\min A) \subset \mathfrak{A}$, $B + (-\min B) \subset \mathfrak{A}$. В дальнейшем изложении мы будем всегда предполагать, что для данной факторизации $\mathfrak{A} = A \dotplus B$ имеет место $A \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Из 2.1 ясно, что $\min A = \min B = 0$.

Доказательства следующих лемм вытекают непосредственно из определения факторизации.

2.3 лемма. *Пусть* $\mathfrak{A} = A \dotplus B$, $c \operatorname{non} \in A\{c\} + B\{c\}$. *Тогда* $c \in A$ *или* $c \in B$.

2.4 следствие. *Если* $A\{c\} + B\{c\} = \mathfrak{A}\{c\}$, *то* $c \in A$ *или* $c \in B$.

2.5 лемма. *Пусть* $\mathfrak{A} = A \dotplus B$, $A_1 \subset A\{c\}$, $B_1 \subset B\{c\}$ (*где* $c \in \mathfrak{A}$) *и* $A_1 \dotplus B_1 = \mathfrak{A}\{c\}$, *Тогда* $A_1 = A\{c\}$, $B_1 = B\{c\}$.

Следующая лемма описывает т. наз. простые числовые системы Кантора [4].

2.6 лемма. *Пусть* $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ *есть возрастающая последовательность* (*т. е* $k_1 < k_2 < \ldots < \kappa_n < \kappa_{n+1}$) *натуральных чисел, причем* $k_1 = 1$, $k_2 \setminus k_3, \ldots, k_n \setminus k_{n+1}$. *Положим* $m_1 = k_2$, $m_2 = \dfrac{k_3}{k_2}, \ldots, m_n = \dfrac{k_{n+1}}{k_n}$. *Пусть* x — *целое неотрицательное число, меньшее чем* k_{n+1}. *Тогда существует в точности одна* n-*ка целых неотрицательных чисел* $h_1, \ldots, h_n$ *такая, что для* $i = 1, \ldots, n$ *имеет место* $0 \leqq h_i < m_i$ *и, кроме того*

$$x = \sum_{i=1}^{n} h_i k_i\,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Покажем, что для данного x существует хотя бы одна система чисел $h_1, \ldots, h_n$ с предписанными свойствами. Доказательство проведем по методу полной индукции относительно числа n. Утверждение очевидно для $n = 1$, то есть для $x < k_2$, ибо достаточно положить $h_1 = x$. Итак, предположим, что существование системы чисел $h_1, \ldots, h_i$ доказано длю любого $y < k_{i+1}$, причем i — одно из чисел $1, 2, \ldots, n - 1$. Пусть для x будет $k_{i+1} \leqq x < k_{i+2}$. Так как $k_{i+1} \setminus k_{i+2}$, существует неотрицательное целое число h, большее или равное 1 и меньшее чем m_{i+1} такое, что $hk_{i+1} \leqq x < (h + 1)\, k_{i+1}$. Из этого соотношения следует $0 \leqq x - hk_{i+1} < k_{i+1}$, следовательно, по условию индукции существуют числа $h_1, \ldots, h_i$ с списанными выше свойствами такие, что $x - hk_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} h_j k_j$. Если положить $h_{i+1} = h$, то будет $x = \sum_{j=1}^{i+1} h_j k_j$, причем в правой части стоит сумма предписанного вида.

Однозначность следует из того, что существует самое большее $m_1 . m_2 . \ldots . m_n = k_{n+1}$ чисел вида (2.1), а это — как раз количество целых чисел из интервала $[0, k_{n+1} - 1]$.

Введем теперь некоторые обозначения, которые позволят нам вследствие 2.6 сократить дальнейшее изложение. О последовательности чисел k_1, $k_2, \ldots, k_{n+1}$, удовлетворяющей условиям из 2.6, мы скажем, что она обладает свойством (C). Множество всех чисел вида $\sum_{j=1}^{n}{}^{*} h_i k_i$ $(\sum_{i=1}^{n}{}^{**} h_i k_i)$,[3]) причем суммирование производится по нечетным (четным) индексам и $h_1, \ldots, h_n$ удовлетворяют соотношениям из 2.6, мы обозначим через $L(k_1, \ldots, k_{n+1})$ $(S(k_1, \ldots, k_{n+1}))$. Из леммы 2.6 следует

$$L(k_1, \ldots, k_{n+1}) \dotplus S(k_1, \ldots, k_{n+1}) = \mathfrak{A}\{k_{n+1}\} . \tag{2.2}$$

Пусть теперь $k_1, k_2, \ldots, (= \{k\})$ — бесконечная возрастающая последовательность положительных целых чисел, в которой $k_1 = 1$ и $k_i | k_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$. Тогда положим $L_{\{k\}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(k_1, \ldots, k_{n+1})$, $S_{\{k\}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(k_1, \ldots, k_{n+1})$. Так как $k_n \to \infty$, следует из (2.2)

$$\mathfrak{A} = L_{\{k\}} \dotplus S_{\{k\}} .$$

Главным результатом этой части является обращение последнего соотношения.

2.7 теорема. *Пусть* $\mathfrak{B} = A \dotplus B$ *и* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B = \aleph_0$. *Пусть* $1 \in A$. *Тогда существует бесконечная возрастающая последовательность положительных чисел* $r_1, r_2, \ldots$ $(= \{r\})$, *в которой* $r_1 = 1$ *и* $r_i \backslash r_{i+1}$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *такая, что* $A = L_{\{r\}}$, $B = S_{\{r\}}$.

Доказательство. Положим $r_1 = 1$; пусть r_2 — наименьшее число в $B - \{0\}$ (следовательно, числа $0, 1, 2, \ldots, r_2 - 1$ принадлежат к A). Теперь мы построим последовательность $\{r\}$ при помощи полной индукции. Предположим, что мы уже определили n чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ($n \geqq 2$; далее мы предположим, что n — черное, для нечетного n шаг индукции вполне аналогичен с некоторыми очевидными видоизменениями) и пусть эта последовательность имеет свойство (C). Положим $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \mu_i$. Далее предположим, что $r_n \in B$, $L(r_1, \ldots, r_n) \subset A$, $S(r_1, \ldots, r_n) \subset B$.

[3]) Пустую сумму мы считаем равной 0.

Пусть для натурального числа g и $c \in S(r_1, \ldots, r_n)$ имеет место

$$\begin{gathered} r_n + S(r_1, \ldots, r_n), \ldots, (g-1)\, r_n + S(r_1, \ldots, r_n) \subset B\,, \\ gr_n + y \in B \quad \text{для любого} \quad y < c,\ y \in S(r_1, \ldots, r_n)\,. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Положим $k_1 = r_1$, $k_2 = r_2, \ldots, k_n = r_n$, $k_{n+1} = (g+1) r_n$ и пусть $x = \sum_{i=1}^{n} h_i k_i$ есть выражение (2.1) для $x < g\, r_n + c$. Тогда $\sum_{i=1}^{n}{}^{*}\, h_i k_i \in L(r_1, \ldots, r_n)$, $\sum_{i=1}^{n}{}^{**} h_i k_i < gr_n + c$. Отсюда и из (2.3) имеем

$$B\{gr_n + c\} \dotplus L(r_1, \ldots, r_n) = \mathfrak{A}\{gr_n + c\}\,. \tag{2.4}$$

Так как мы предполагаем, что card $A = \aleph_0$, существуют g и c указанных свойств такие, что $gr_n + c \operatorname{non} \in B$ (иначе было бы $B + L(r_1, \ldots, r_n) = \mathfrak{A}$ и, значит, $A = L(r_1, \ldots, r_n)$, причем $L(r_1, \ldots, r_n)$ — конечное множество). Согласно 2.4 имеет место

$$gr_n + c \in A\,. \tag{2.5}$$

Допустим теперь, что $c > 0$. Тогда $c = h_2 r_2 + \ldots + h_i r_i$, где i — четное число (напомним, что оно меньше n) такое, что $h_i > 0$, следовательно, $0 < \mu_i - h_i < \mu_i$. Число $gr_n + c + (\mu_i - h_i)\, r_i$ является с одной стороны элементом $A + gr_n + h_2 r_2 + \ldots + h_{i-2} r_{i-2}$ (так как $\mu_i r_i = r_{i+1} \in A$), а с другой стороны, — элементом $A + (\mu_i - h_i)\, r_i$. Прлтом $(\mu_i - h_i)\, r_i \neq gr_n + h_2 r_2 + \ldots + h_{i-2} r_{i-2}$ и эти числа припадлежат оба к B. Но это противоречит равенству $\mathfrak{A} = A \dotplus B$. Итак, $c = 0$. Из (2.5) для $c = 0$ следует $g > 1$, так как вследствие $r_n \in B$ неможет быть $r_n \in A$. Положим $r_{n+1} = gr_n$. Из (2.3) следует

$$L(r_1, \ldots, r_{n+1}) \subset A\,, \quad S(r_1, \ldots, r_{n+1}) \subset B\,. \tag{2.6}$$

Этим самым мы провели шаг индукции от n к $n + 1$. Из (2.4) следует $S(r_1, \ldots, r_{n+1}) \dotplus L(r_1, \ldots, r_{n+1}) = \mathfrak{A}\{r_{n+1}\}$. Из 2.5 и (2.6) имеем $S(r_1, \ldots, r_{n-1}) = B\{r_{n+1}\}$, $L(r_1, \ldots, r_{n+1}) = A\{r_{n+1}\}$. Так как $r_n \to \infty$, будет $B = S_{\{r\}}$, $A = L_{\{r\}}$.

Описание факторизации в случае, когда оба фактора бесконечны, мы закончим следующим утверждением.

2.8. *Пусть* $k_1, k_2, \ldots (= \{k\}$ — *бесконечная возрастающая последовательность положительных целих чисел, в которой* $k_1 = 1$ *и* $k_i \backslash k_{i+1}$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$-S_{\{k\}} \dotplus L_{\{k\}} = \mathfrak{L}\,.$$

Притом $-S_{\{k\}}$ *означает множество всех чисел* $-x$, *где* $x \in S_{\{k\}}$.

Доказательство. Пусть $C = -S_{\{k\}} + L_{\{k\}}$. a) Имеем $C = -S_{\{k\}} \dotplus L_{\{k\}}$. Действительно, если $x = h_1 k_1 + h_3 k_3 + \ldots + h_{2i+1} k_{2i+1} - h_2 k_2 - \ldots - h_{2j} k_{2j} = h'_1 k_1 + \ldots + h'_{2i'+1} k_{2i'+1} - h'_2 k_2 - \ldots - h'_{2j'} k_{2j'}$ $\left(0 \leqq h_\iota, h'_\iota < \dfrac{k_{\iota+1}}{k_\iota} = m_\iota,\ h_\iota,\ h'_\iota\right.$ — целые числа), то можно, очевидно, предположить

$i = i'$ и $j = j'$ и тогда из 2.6 получим $h_{2\iota+1} = h'_{2\iota+1}$, $\iota = 1, \ldots, i$, $h_{2\varkappa} = h'_{2\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, j$. б) Покажем, что $C = \mathfrak{C}$. Для четного n положим $U_n = - S(k_1, \ldots, k_{n+1}) \dot{+} L(k_1, \ldots, k_{n+1}) (\subset C)$. Имеем $\min U_n, = - (m_2 = 1) k_2 - \ldots \ldots - (m_n - 1) k_n$, $\max U_n = (m_1 - 1)k_1 + \ldots + (m_n - 1)k_{n-1}$. Итак $U_n \subset \subset [\min U_n, \max U_n]$ и этот интервал содержит k_{n+1} целых чисел, то есть столько же, сколько их содержит U_n. Следовательно, $U_n = [\min U_n, \max U_n]$. Доказываемое утверждение следует непосредственно из того обстоятельства, что $\min U_n \to -\infty$, $\max U_n \to \infty$.

Остается описать факторизации множества $\mathfrak{A}$, в которых один фактор конечный. Видоизменением доказательства теоремы 2.7 нетрудно получить доказательство следующего утверждения.

2.9. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A} = A \dot{+} B$, card $A < \aleph_0$. *Тогда существует число* n *и последовательность* $k_1, \ldots, k_n$ *со свойством* (C) *такая, что* $A = L(k_1, \ldots, k_n)$ *и* $B = S(k_1, \ldots, k_n) \dot{+} \{0, k_n, 2k_n, \ldots\}$ *или* $A = S(k_1, \ldots, k_n)$ *и* $B = L(k_1, \ldots, k_n) \dot{+} \{0, k_n, 2k_n, \ldots\}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Hajós:* Sur la factorisation des groupes abeliens. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74* (1949), 157—162.

[2] *W. Sierpinski:* Sur une proprieté de la droite. Fundamenta mathematicae, *XXIX* (1934), 247—248.

[3] *W. Sierpinski:* O rozwiazywaniu rownań w liczbach całkowitych, Warszawa, 1956.

[4] *G. Cantor:* Über die einfachen Zahlensystemen, Zeitschrift für Math. u. Physik, *14* (1869), 121—128.

Summary

NOTES ON THE FACTORISATION OF INFINITE CYCLIC GROUPS

MILAN SEKANINA, Brno

(Received November 15, 1957)

The paper treats the factorisation — in Hajós' sense — of an infinite cyclic group; this is taken as the additive group $\mathfrak{C}$ of integers.

Let $M, A, B \subset \mathfrak{C}$. Then by definition $M = A \dot{+} B$ if every $m \in M$ can be expressed as $n = a + b$ with $a \in A$, $b \in B$, and if such an expression is unique. The sets A, B are then termed factors of M. If $a \neq 0$ and $A \dot{+} \{a\} = A$, then A is called periodic. The main results are the following:

1. *If* $A \dotplus B = \mathfrak{L}$ *and* card $A =$ card $B = \aleph_0$, *then neither* A *nor* B *are periodic* (theorem 1.4).

2. *Let* $M = \{a_n\}$ *be an increasing sequence of integers with* $a_1 = 1$ *and with the following property: there exist an integer* N *and a real number* $\alpha > 2$ *such that for all* $n \geqq N$ *we have* $a_{n+1} - a_n \geqq a_n - a_{n-1} \geqq \alpha^n - \alpha^{n-1}$. *Let* Z *be any finite (possibly void) subset of* $\mathfrak{L}$. *Then* M *is a factor of* $\mathfrak{L} - Z$ (theorem 1.5).

3. *All the factors of the set of non-negative integers are determined, using Cantor's elementary number systems*[1] (theorems 2.7, 2.9).

[1] see [4].