Czechoslovak Mathematical Journal

Mihail Benado

Remarques sur un théorème de monsieur Oleg N. Golovine

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 475–484

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100375

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 9 (84) ПРАГА 20. XI. 1959 г., No 4

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE MONSIEUR OLEG N. GOLOVINE

MIHAIL BENADO, Bucarest

(Reçu le 19 juin 1958)

L'article contient une généralisation du théorème suivant de M. O. Golovine: Si dans un produit régulier de deux groupes un des facteurs est normal, l'autre l'est aussi (il s'agit donc d'un produit direct). Le théorème est généralisé dans le sens que l'on considère d'une part au lieu de la normalité ordinaire la Y_q-normalité et, d'autre part, au lieu de deux facteurs on en prend un système quelconque.

1. Introduction

Dans son important travail [1] M. O. N. Golovine démontre entre autres la proposition suivante (théorème 1.9 de [1], Chap. II):

I. *Si un groupe $\mathscr{G}$ est le produit régulier de ses sousgroupes G, G^* et si G est un diviseur normal (ordinaire) de $\mathscr{G}$ alors G^* est aussi un diviseur normal ordinaire de $\mathscr{G}$ et, partant, $\mathscr{G}$ est le produit direct (ordinaire) de ses sousgroupes G, G^*.*

De mon côté, j'ai, au moyen de la notion de *commutatrice,* que j'ai introduite dans mon travail [2] (dont mes notes des Comptes Rendus [3], [4] sont un extrait), considérablement élargi la proposition I de ci-dessus en démontrant le théorème suivant (Satz 3.5 de [2]):

II. *Si le groupe $\mathscr{G}$ (ayant Σ pour domaine d'opérateurs) est le produit régulier de ses Σ-sousgroupes G, G^* et si G est un sous-groupe Y_q-normal de $\mathscr{G}$* (c'est-à-dire [4], 1.1 et 2.1) *si l'on a $q(\mathscr{G}, G) \leqq G$ pour quelque commutatrice (arbitraire mais fixe) q de $S^{\Sigma}(\mathscr{G})$, alors G^* est aussi un sousgroupe Y_q-normal de $\mathscr{G}$ (c'est-à-dire on a encore $q(\mathscr{G}, G^*) \leqq G^*$) et, partant, $\mathscr{G}$ est le produit Y_q-régulier de ses sousgroupes G, G^** ([4], 2.1).

On en obtient la proposition I de M. Golovine en prenant pour commutatrice q l'opération $k(X, Y) = X \circ Y$ de la commutation des sousgroupes, savoir le sousgroupe engendré par l'ensemble de tous les commutateurs $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ où $x \in X$ et $y \in Y$. Pour d'autres cas particuliers remarquables je renvoie le lecteur à mes travaux [2], [8] ainsi qu'à mes notes précitées.

Or, le but de la présente note est de faire valoir la proposition II précédente pour les produits réguliers d'un ensemble arbitraire (non vide) de groupes. Bien que je ne sache résoudre cette question pour toutes les relations de normalité $\curlyvee_q$ ([4], 1.1 et 1.2), c'est néanmoins pour une classe assez large de commutatrices q, notamment pour celles qui satisfont à l'axiome $\mathcal{K}10'$ (voir le § 2 de la présente note) que je vais démontrer la proposition suivante:

III. *Si le groupe $\mathcal{G}$ (ayant Σ pour domaine d'opérateurs) est le produit régulier de ses Σ-sousgroupes G_i, $i \in I$ (I = ensemble non vide mais par ailleurs arbitraire d'indices) et si tous les G_i, sauf peut-être un certain G_{i_0} ($i_0 \in I$), sont des sous-groupes $\curlyvee_q$-normaux de $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire, si l'on a $q(\mathcal{G}, G_i) \leqq G_i$ pour chaque $i \in I - \{i_0\}$) alors, G_{i_0} est lui-aussi un sousgroupe $\curlyvee_q$-normal de $\mathcal{G}$ et, par conséquent $\mathcal{G}$ est le produit $\curlyvee_q$-régulier de ses sousgroupes G_i, $i \in I$.*

Or, il convient de remarquer que tous les exemples de commutatrices que j'ai donnés dans mon travail [2] satisfont à l'axiome $\mathcal{K}10'$, comme je vais le faire voir au § 4 de cette note. Il en est de même pour la fonction „cartésienne" $m^*(X, Y) = W(U) \wedge \overline{X}^U \wedge \overline{Y}^U$, $U = X \vee Y$, $X, Y \in S^\Sigma(G)$ (W étant une famille arbitraire de mots), pourvu que la fonction $m^*(X, Y)$ soit *semihomomorphe*, cela veut dire telle que *pour tous les sousgroupes X, Y de $\mathcal{G}$ satisfaisant* à $X \geqq Y$ *et pour chaque homomorphisme φ de X on ait* $m^*(X, Y)\varphi = m^*(X\varphi, Y\varphi)$.

2. Quelques notations et définitions

2.1. Soit $\mathcal{G}$ un groupe ayant Σ pour domaine d'opérateurs; je dirai, pour abréger, que $\mathcal{G}$ est un Σ-groupe. Par Σ-sousgroupe de $\mathcal{G}$ j'entends un sous-groupe de $\mathcal{G}$ permis par Σ. Les majuscules latines désignent ordinairement des groupes et des sousgroupes.

L'ensemble partiellement ordonné (par la relation $\geqq$ ou $\leqq$ d'inclusion prise au sens de la théorie des ensembles) de tous les Σ-sousgroupes du Σ-groupe $\mathcal{G}$, forme comme on sait une structure (treillis) complète par rapport aux opérations d'union $\vee$ et d'intersection $\wedge$ au sens de la théorie des groupes. C'est cette structure que je désigne, dans ce qui suit, par $S^\Sigma(\mathcal{G})$.

Par ailleurs, la structure $S^\Sigma(\mathcal{G})$ *est une structure de Lie*[1]) (au sens que j'ai

[1]) J'attire l'attention du lecteur au fait que la définition des structures de Lie que j'ai proposée dans ma note [3] est un peu plus forte que celle que j'ai adoptée dans mon travail [2]; pour obtenir cette dernière définition, il suffit, dans la première:

défini dans mon travail [2], 1.5), par rapport à la commutation des sousgroupes (voir plus haut) prise pour multiplication définie dans $S^{\Sigma}(\mathscr{G})$.

2.2. Je dis, d'après M. Golovine [1], que le Σ-groupe $\mathscr{G}$ est le *produit régulier* de ses Σ-sousgroupes G_i, $i \in I$ (I = ensemble arbitraire mais non vide d'indices) lorsque les deux conditions suivantes sont remplies:

$$\mathscr{G} = \bigvee_{i \in I} G_i \,, \quad E = G_i \wedge \overline{G_i^*} \,, \quad i \in I$$

où l'on a posé

$$G_i^* = \bigvee_{i' \in I - \{i\}} G_{i'} \,, \quad i \in I, \tag{1}$$

attendu que $\overline{X}$ signifie, pour chaque $X \in S^{\Sigma}(\mathscr{G})$ le diviseur normal (ordinaire) engendré dans $\mathscr{G}$ par X (E désigne comme d'habitude le sousgroupe identique de $\mathscr{G}$).

Symbole $\mathscr{G} = (\underset{i \in I}{\times^R}) G_i$. (Cf. [5].)

2.3. Soit S une structure de Lie[1]) et soit q une commutatrice quelconque de S ([2], 1.7). Je considère dans cette note les commutatrices q satisfaisant à l'axiome supplémentaire suivant.

$\mathscr{K}10'$. *Pour chaque sous-ensemble* (*non-vide*) *d'éléments* $a_i \in S$, $i \in I$ *on a*

$$q(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} q(a_{i'}, a_{i'}^*) \,, \quad i \in I$$

où comme à 2.2 *on a posé* (mutatis mutandis) $a_i^* = \bigvee_{i' \in I - \{i\}} a_{i'} \,, \quad i \in I.$

Il est à peine besoin d'ajouter que cet axiome $\mathscr{K}10'$ (tout comme la plupart des axiomes de la definition des commutatrices) a un sens dans toute structure complète, qu'elle soit ou non une structure de Lie. Mais il importe en tout cas de remarquer que l'ensemble $\overline{Q}_1(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$ de toutes les commutatrices de $S^{\Sigma}(\mathscr{G})$ (2.1) caractérisées par les axiomes $\mathscr{K}1$, $\mathscr{K}2$, $\mathscr{K}3$, (Dq), $\mathscr{K}6$, $\mathscr{K}7$, $\mathscr{K}8$, $\mathscr{K}9$, $\mathscr{K}10$, $\mathscr{K}11$, $\mathscr{K}12$ de [3] ainsi que par les axiomes $\mathscr{K}9'$ (dont voici l'énoncé: *On a* $q(\bar{x}^u, \bar{y}^u) = q(x, y)$ *pour chaque couple* $x, y \in S$ *où l'on a posé* $u = x \vee y$, $\bar{x}^u = x \vee ux$, $\bar{y}^u = y \vee uy$; cf. [6], § 3 et [7], § 2) et $\mathscr{K}10'$ ci-dessus, — *partiellement ordonné par la relation*

$$„q_1 \leqq q_2 \Leftrightarrow q_1(X, Y) \leqq q_2(X, Y)“$$

---

1. De remplacer l'axiome $\mathscr{L}5$ par cet autre $\mathscr{L}5'$: *Pour chaque couple* $a, b \in S$ *on a* $a(b \vee ab) = ab$. 2. De supprimer l'axiome $\mathscr{L}8$.

Or, d'un côté, $\mathscr{L}5'$ est essentiellement une conséquence de $\mathscr{L}5$ et $\mathscr{L}8$ (moyennant $\mathscr{L}3$ et $\mathscr{L}4$); d'un autre côté, le seul endroit où, dans mes recherches [2], j'ai explicitement utilisé l'axiome $\mathscr{L}8$, c'est précisément dans la démonstration de la validité de l'assertion de $\mathscr{L}5'$.

C'est pourquoi j'ai jugé à propos d'affaiblir la définition des structures de Lie de la manière que je viens d'indiquer. C'est pourquoi aussi, lorsque dans la suite de cette note, il sera question des structures de Lie, c'est toujours le systéme d'axiomes de [3], ainsi modifié, qui sera sousentendu.

pour chaque couple $X, Y \in S^{\Sigma}(\mathscr{G})$ — *forme toujours une semistructure complète par rapport à l'union des commutatrices*, savoir

$$(\bigvee_{i \in I} q_i)(X, Y) = \bigvee_{i \in I} q_i(X, Y) \,, \quad X, Y \in S^{\Sigma}(\mathscr{G}) \tag{2}$$

(Cf. [2], 1.7.1, Eigenschaft 6). On a d'ailleurs ([4], 1.1 et [7], § 2),

$$\overline{Q}_1(S^{\Sigma}(\mathscr{G})) \subseteqq \overline{Q}_0(S^{\Sigma}(G)) \subseteqq \overline{Q}(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$$

où $\subseteqq$ est l'inclusion au sens de la théorie des ensembles et où les ensembles $\overline{Q}_0(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$ et $\overline{Q}_1(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$ sont tous les deux des *sous*-semistructures complètes (par rapport à l'union des commutatrices définie par (2)) de la semistructure complète (par rapport à la même opération) $\overline{Q}(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$.

C'est justement pourquoi, l'important théorème 2.4 de [4] (Hauptsatz 3.7.1 et Folgesatz 3.7.3 de [2]) reste vrai même si l'on se borne aux commutatrices de l'ensemble $\overline{Q}_1(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$.[2]) Mais, la classification qu'il fournit en ce cas de tous les produits réguliers qu'on peut définir sur un ensemble (non-vide) de groupes (voire de tous les sousgroupes de quelque groupe libre non commutatif) serait, en général, ,,moins fine" que celle que fournirait le même théorème 2.4 de [4] si l'on se bornait aux commutatrices de $\overline{Q}_0(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$ et cette dernière classification serait à son tour moins fine que celle que le théorème 2.4 en question nous fournirait si l'on travaillait avec les commutatrices de $\overline{Q}(S^{\Sigma}(\mathscr{G}))$.

D'autre part, dans mes travaux précités sur la théorie des produits réguliers, j'ai à plusieurs reprises souligné qu'en vue d'une classification aussi ,,fine" que possible de tous les produits réguliers (ou bien de tous les sousgroupes de quelque groupe libre, ou bien encore simplement de tous les groupes possibles) on a intérêt à choisir un ensemble aussi large que possible de fonctions q aussi riches en propriétés que possible. Or, je pense — et certains résultats de S. Moran [9] et de Mlle. Ruth Struik [10] rendent cette conjecture vraisemblable — que l'ensemble des fonctions cartésiennes (voir § 1), en est un tel (au moins dans le cas où $\mathscr{G}$ est un groupe libre). Je reviendrai ailleurs sur ces questions.

3. Démonstration du théoreme III (voir § 1)

Il s'agit de faire voir que les suppositions

$$\mathscr{G} = (\times_{i \in I}^{R}) \, G_i \,, \tag{3}$$

$$q(\mathscr{G}, G_i) \leqq G_i \,, \quad i \in I - \{i_0\} \tag{4}$$

[2]) Tous les autres résultats de [4] ([2], § 3) sont indépendants des axiomes $\mathscr{K}9'$ et $\mathscr{K}10'$.

entraînent la conclusion $q(\mathscr{G}, G_{i_0}) \leqq G_{i_0}$, pourvu que la commutatrice q satisfasse à l'axiome $\mathscr{K}10'$ (2.3).

Or, on a successivement pour chaque $i \in I - \{i_0\}$

$$q(G_i, G_i^*) \leqq q(G_i, \mathscr{G}) \quad \text{(d'après (1) et l'axiome } \mathscr{K}3\text{ [3])}$$
$$\leqq G_i \quad \text{(d'après l'axiome } \mathscr{K}1 \text{ [3] et les suppositions (4))}$$

Ainsi, on a

$$q(G_i, G_i^*) \leqq G_i\,, \quad i \in I - \{i_0\}\,. \tag{5}$$

D'autre part, on a (même pour chaque $i \in I$),

$$q(G_i, G_i^*) \leqq G_i \circ G_i^*\,, \quad \text{(d'après l'axiome } \mathscr{K}7 \text{ [3] et les relations (1))}$$
$$\leqq \overline{G_i^*}\,, \quad \text{(d'après [1], Chap. I, lemme 3.1!)}\,.$$

Ainsi

$$q(G_i, G_i^*) \leqq \overline{G_i^*}\,, \quad i \in I\,. \tag{5'}$$

Or, (5) et (5′) entraînent d'après (3) (voir 2.2), les relations

$$q(G_i, G_i^*) = E\,, \quad i \in I - \{i_0\}\,. \tag{5''}$$

Maintenant on tire de l'axiome $\mathscr{K}10'$ et de (5″) la conséquence

$$q(G_{i_0}, G_{i_0}^*) \leqq \bigvee_{i \in I - \{i_0\}} q(G_i, G_i^*) = E\,;$$

cela veut dire

$$q(G_{i_0}, G_{i_0}^*) = E\,, \tag{6}$$

et, par conséquent

$$q(\mathscr{G}, G_{i_0}) = q(G_{i_0} \vee G_{i_0}^*, G_{i_0}) = q(G_{i_0}, G_{i_0}) \vee q(G_{i_0}, G_{i_0}^*)\,,$$

(d'après l'axiome $\mathscr{K}4$ [3]),

$$= q(G_{i_0}, G_{i_0})\,, \quad \text{(d'après (6))}\,,$$
$$\leqq G_{i_0} \circ G_{i_0} \leqq G_{i_0}\,, \quad \text{(d'après l'axiome } \mathscr{K}7 \text{ [3] et la définition de } \circ\text{; voir § 1)}.$$

Ainsi $q(\mathscr{G}, G_{i_0}) \leqq G_{i_0}$, et c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'analyse de la dernière partie de la démonstration montre que pour assurer la validité de la conclusion désirée $q(\mathscr{G}, G_{i_0}) \leqq G_{i_0}$, il aurait suffi d'une condition plus faible que (6), et notamment la condition

$$q(G_{i_0}, G_{i_0}^*) \leqq G_{i_0}\,. \tag{6'}$$

Or, il n'en est rien; car (3), (5′) et (6′) entraînent nécessairement (6).

Il n'en reste pas moins que le théorème III admet la généralisation suivante:

III'. *Supposons qu'on ait* $\mathscr{G} = \bigvee_{i \in I} G_i$, $G_i \in S^{\Sigma}(\mathscr{G})$, $i \in I$ *et que pour chaque* $i \in I - \{i_0\}$ *on ait* $q(\mathscr{G}, G_i) \leqq G_i$, *Supposons encore que pour chaque* $i' \in I$ *tel que* $i' \neq i$ (où $i \in I - \{i_0\}$, *on ait* $G_{i'}\alpha_i \leqq G_{i_0}$. *Alors* $q(\mathscr{G}, G_{i_0}) \leqq G_{i_0}$ *(pourvu que naturellement, la commutatrice* q *satisfasse à l'axiome* $\mathscr{K}10'$).

Dans cet énoncé on a désigné par α_i, $i \in I$ les endomorphismes (de structure, mais non de groupe!) suivants [3])

$$X\alpha_i = G_i \wedge (X \vee \overline{G_i^*}) , \quad X \in S^{\Sigma}(\mathscr{G}) , \quad i \in I . \tag{7}$$

La démonstration du théorème III' est essentiellement identique à celle du théorème III, sauf que les égalités (5''), (6) sont à remplacer ici par les inégalités

$$q(G_i, G_i^*) \leqq G_{i_0} , \quad i \in I .$$

4. Cas particuliers remarquables du théorème III

Nous allons faire voir ici que les exemples de commutatrices que j'ai donnés dans mon travail ([2], 1.7.2 et § 2) satisfont tous à l'axiome $\mathscr{K}10'$. Je vais notamment le prouver pour les commutatrices „nilpotentes" ([3], exemples 1,2) et les commutatrices „résolubles" ou galoisiennes ([3], exemple 4); après cela le lecteur n'aura aucune peine a en faire de même pour les commutatrices de l'exemple 3 de [3].

Je vais tout d'abord développer ici, d'après mon travail [2], (à quelques détails près) les conséquences les plus élémentaires de la définition d'une structure de Lie.[1])

Soit S une structure de Lie et soit q une commutatrice quelconque de S; pour chaque paire $x, y \in S$ telle que $x \geqq y$ je pose, comme dans mon travail [2], 1.7.1

$${}^{\mathsf{Y}_q}\bar{y}^x = y \vee q(x, y) \; ; \text{[4]})$$

pour la commutatrice $k(x, y) = xy$ on aura en particulier

$$\bar{y}^x = y \vee xy \quad (x \geqq y) . \text{[4]})$$

Cela posé, on a d'abord la proposition suivante ([2], 1.6, Eigenschaft 1; cf. aussi [1], Chap. I, 3.1).

---

[3]) Il n'est pas trop difficile de montrer que les fonctions (7) possèdent toutes les propriétés usuelles des endomorphismes de rétracte sauf qu'ils n'ont pas généralement de noyau (cela veut dire qu'on a en général $E\alpha_i \neq E$ pour un $i \in I$ au moins). Ces propriétés, il est à peine besoin de le dire, sont tout à fait indépendantes des suppositions du thèorème III'.

[4]) C'est là un véritable opérateur de formeture (unitairement) relatif [11]; le lecteur pourra s'en rendre compte sans peine.

4.1. Lemme. *Pour chaque couple* $a, b \in S$ *on a* $ab = \bar{a}^u \bar{b}^u = \overline{ab}^u$, *attendu que* $u = a \vee b$.

Démonstration. On a (d'après $\mathscr{L}3$, $\mathscr{L}4$, [3]) $ab \leqq ub \leqq uu \leqq u$, donc

$$ab \leqq a \vee b \,. \tag{8}$$

Ensuite on a (d'après (8), $\mathscr{L}4$, $\mathscr{L}5'$, $\mathscr{L}7$, $\mathscr{L}2$, $\mathscr{L}5'$)

$$(a \vee b)\, a = (a \vee (b \vee ab))\, a = a^2 \vee (b \vee ab)\, a = a^2 \vee ab \,,$$

et partant

$$(a \vee b)\, a = a^2 \vee ab \,. \tag{9}$$

Enfin, on a (d'après (9), $\mathscr{L}4$, $\mathscr{L}5'$, $\mathscr{L}2$)

$$\bar{a}^u b = (a \vee ua)\, b = (a \vee a^2 \vee ab)\, b = (a \vee ab)\, b = ab \,,$$

donc

$$\bar{a}^u b = ab \,, \tag{10}$$

et, en remarquant qu'on a toujours $b \vee \bar{a}^u = u$, on aura encore, d'après (10) (et $\mathscr{L}2$)

$$\bar{a}^u \bar{b}^u = \bar{b}^u \bar{a}^u = b \bar{a}^u = \bar{a}^u b = ab \,.$$

Donc

$$ab = \bar{a}^u \bar{b}^u \,. \tag{11}$$

On en tire en particulier pour $x, y \in S$ tels que $x \geqq y$ l'égalité

$$x \bar{y}^x = xy \,, \tag{11'}$$

ce qui, d'après la définition de $\bar{y}^x$, entraîne à son tour

$$x \bar{y}^x \leqq \bar{y}^x \quad (x \geqq y) \tag{11''}$$

d'où l'on déduit encore, (d'après (11), $\mathscr{L}4$, $\mathscr{L}6$, $\mathscr{L}3$, $\mathscr{L}2$, (11))

$$u(ab) = u(\bar{a}^u \bar{b}^u) \leqq \bar{a}^u (u \bar{b}^u) \vee \bar{b}^u (u \bar{a}^u) \leqq \bar{a}^u \bar{b}^u \vee \bar{b}^u \bar{a}^u = ab \,,$$

ce qui donne $u(ab) \leqq ab$ et, partant,

$$\overline{ab}^u = ab \,. \tag{12}$$

Or, (11) et (12), c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

4.1.1. Corollaire. *S étant une structure de Lie* (v. rem.[1])) *et* a_i, u $(i \in I)$ *des éléments de S tels que* $a_i \leqq u$ *pour chaque* $i \in I$, *on a*:

1° $\overline{\bigvee_{i \in I} a_i}^u = \bigvee_{i \in I} \bar{a}_i^u$; 2° $u(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} u a_i$;

(*I = ensemble non-vide mais par ailleurs arbitraire, d'indices*).

Démonstration. On a d'après la définition $\overline{\bigvee_{i \in I} a_i}^u \geqq \bigvee_{i \in I} \bar{a}_i^u$.

Puis on a encore, d'après (11″) et $\mathscr{L}4$, $\mathscr{L}9$,

$$u(\bigvee_{i \in I} \bar{a}_i^u) = \bigvee_{i \in I} u \bar{a}_i^u = \bigvee_{i \in I} u a_i \,, \quad \text{(d'après (11'))} \,,$$

$$\leqq \bigvee_{i \in I} \bar{a}_i^u \,, \quad \text{(d'après la definition)} \,.$$

Ainsi

$$u(\bigvee_{i\in I}\bar{a}_i^u) \leqq \bigvee_{i\in I}\bar{a}_i^u \ (\geqq \bigvee_{i\in I} a_i)\,,$$

ce qui prouve[4]) qu'on a

$$\bigvee_{i\in I}\bar{a}_i^u \geqq \overline{\bigvee_{i\in I} a_i}^u\,,$$

et, partant, d'après l'inégalité réciproque (voir plus haut)

$$\overline{\bigvee_{i\in I} a_i}^u = \bigvee_{i\in I}\bar{a}_i^u\,.$$

C'est la première partie de l'énoncé. Quant à la seconde, on a successivement

$$\begin{aligned} u(\bigvee_{i\in I} a_i) &= u\overline{(\bigvee_{i\in I} a_i)}^u \quad \text{(d'après (11'))}\,,\\ &= u(\bigvee_{i\in I}\bar{a}_i^u) \quad \text{(d'après la première partie du corollaire)}\,,\\ &= \bigvee_{i\in I} u a_i \quad \text{(d'après } \mathscr{L}9 \text{ et (11'))}\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du corollaire.

4.2. Théorème. *Les commutatrices nilpotentes et les commutatrices galoisiennes d'une structure de Lie vérifient l'axiome* $\mathscr{K}10'$.

Démonstration. On a par définition ([2], Beispiel 2, (24')) pour chaque couple $x, y \in S$

$$k_{s+1}(x, y) = uk_s(x, y)\,, \quad s = 1, 2, 3, \ldots\,; \quad u = x \vee y\,,$$
$$k_1(x, y) = xy = k(x, y)\,.$$

Cette définition coïncide, comme il est aisé de s'en convaincre, avec celle que j'ai donnée dans ma note [3].

Nous allons prouver tout d'abord que la commutatrice $k(x, y)$ obéit à l'axiome $\mathscr{K}10'$. Soit donc $\{a_i, i \in I\}$ un ensemble quelconque (non-vide) d'éléments de S; on a alors successivement, en posant $a = \bigvee_{i\in I} a_i$, $a_i^* = \bigvee_{i'\in I-\{i\}} a_{i'}$, $i \in I$; cf. (1);

$$\begin{aligned} a_i a_i^* &= \bar{a}_i^a \overline{a_i^*}^a\,, \quad i \in I \quad \text{(d'après 4.1 et la définition des } a_i^*, i \in I)\,,\\ &= \bar{a}_i^a (\bigvee_{i'\in I-\{i\}} \bar{a}_{i'}^a) \quad \text{(d'après 4.1.1 et la définition des } a_i^*, i \in I)\,,\\ &= \bigvee_{i'\in I-\{i\}} \bar{a}_i^a \bar{a}_{i'}^a \quad \text{(d'après (11'') et } \mathscr{L}9 \text{ [3])}\,,\\ &\leqq \bigvee_{i'\in I-\{i\}} \overline{a_{i'}^*}^a \bar{a}_{i'}^a \end{aligned}$$

(car, d'après la définition de a_i^* on a $a_i \leqq a_{i'}^*$, pour chaque $i' \in I - \{i\}$; d'où l'on tire aisément $\bar{a}_i^a \leqq \overline{a_{i'}^*}^a$, $i' \in I - \{i\}$; voir la note[4]); puis, se rappeler $\mathscr{L}3$ [3] et les propriétés élémentaires des structures complètes).

$$= \bigvee_{i'\in I-\{i\}} a_{i'} a_{i'}^* \quad \text{(essentiellement d'après (11))}.$$

Ainsi on a pour chaque $i \in I$, $a_i a_i^* \leqq \bigvee_{i'\in I-\{i\}} a_{i'} a_{i'}^*$, cela veut dire que

$$k_1(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i'\in I-\{i\}} k_1(a_{i'}, a_{i'}^*)$$

ce qui n'est que l'axiome $\mathscr{K}10'$ pour la commutatrice $k_1 = k$.

Or, si nous supposons que l'inégalité

$$k_s(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} k_s(a_{i'}, a_{i'}^*)$$

soit vraie pour un nombre naturel $s > 1$, on en déduit d'après $\mathscr{L}3$

$$ak_s(a_i, a_i^*) \leqq a(\bigvee_{i' \in I - \{i\}} k_s(a_{i'}, a_{i'}^*)) = \bigvee_{i' \in I - \{i\}} ak_s(a_{i'}, a_{i'}^*)\ ,$$

(d'après $\mathscr{L}9$ [3] ou bien d'après 4.1.1, 2°. Car d'après 4.1 on a $(x \vee y)(xy) \leqq \leqq xy \leqq x \vee y$ pour chaque paire $x, y \in S$ d'où l'on déduit facilement qu'on a ici $ak_s(a_i, a_i^*) \leqq k_s(a_i, a_i^*) \leqq a$ pour chaque $s = 1, 2, 3, \ldots$ et chaque $i \in I$); on aura donc, compte tenu de la définition des k_s

$$k_{s+1}(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} k_{s+1}(a_{i'}, a_{i'}^*)$$

ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

Passons maintenant aux commutatrices galoisiennes; on a par définition ([2], Beispiel 3, (27''')), pour chaque couple $x, y \in S$

$$g_{s+1}(x, y) = g_s(ux, uy)\ , \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$g_1(x, y) = xy\ , \quad u = x \vee y\ .$$

Le lecteur prouvera aisément (par ex. moyennant une induction finie) que cette définition coïncide avec celle que j'ai donnée dans [3].

Or, puisque pour $s = 1$ on a par définition $g_1(x, y) = k_1(x, y) = xy$ et que le théorème est de la sorte déjà prouvé pour $s = 1$ (voir plus haut), nous pouvons supposer que l'inégalité

$$g_s(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} g_s(a_{i'}, a_{i'}^*)$$

ait été déjà prouvée pour $s > 1$ et pour chaque sous-ensemble (non-vide) a_i, $(i \in I)$ d'éléments de la structure. On aura alors successivement pour chaque $i \in I$

$$g_{s+1}(a_i, a_i^*) = g_s(aa_i, aa_i^*)$$

(d'après la définition; $a = \bigvee_{i \in I} a_i = a_i \vee a_i^*$, $i \in I$)

$$\leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} g_s(aa_{i'}, aa_{i'}^*)$$

(car, d'après 4.1.1, on a $a^2 = \bigvee_{i \in I} aa_i = aa_i \vee aa_i^*$, et $\bigvee_{i' \in I - \{i\}} aa_{i'} = aa_i^*$, pour chaque $i \in I$, donc on est en droit d'appliquer l'hypothèse inductive),

$$= \bigvee_{i' \in I - \{i\}} g_{s+1}(a_{i'}, a_{i'}^*) \text{ (d'après la définition)}\ .$$

On a ainsi

$$g_{s+1}(a_i, a_i^*) \leqq \bigvee_{i' \in I - \{i\}} g_{s+1}(a_{i'}, a_{i'}^*)\ ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

LITÉRATURE

[1] *Oleg N. Golovine:* Produits nilpotents de groupes, Recueil math. Moscou, t. *27* (*69*) Cahier 3, (1950), 427—454 (en russe).
[2] *Mihail Benado:* Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin IV (manuscrit).
[3] *Mihail Benado:* Sur la théorie générale des produits réguliers, Comptes Rendus t. *244* (1957), 1595—1597.
[4] *Mihail Benado:* Sur la théorie générale des produits réguliers, Comptes Rendus t. *244* (1957), 1702—1704.
[5] *Mihail Benado:* Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin, I, Math. Nachrichten Bd. *14*, Heft 4/6 (1956), 213—234.
[6] *Mihail Benado:* Sur la théorie générale des produits réguliers de Monsieur O. N. Golovine, V, Publications Scientifiques de l'Université d'Alger, *4* (1957), 111—143.
[7] *Mihail Benado:* Sur la théorie générale des produits réguliers, Comptes Rendus t. *245* (1957), 267—270.
[8] *Mihail Benado:* Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin III, à paraître dans les Mathematische Nachrichten.
[9] *S. Moran:* Associative operations of groups I, Proceedings of the London Math. Soc. Third Series, vol. *VI*, No. 24 (1956), 581—596.
[10] *Ruth R. Struik:* On associative products of groups, Trans. of Amer. Math. Soc., vol. *81*, No. 2 (1956), 425—452.
[11] *Mihail Benado:* Sur une interprétation topologique de la notion de normalité unitaire, Bull. Sci. Math. (Paris), t. *81*, Cahier 2 (1957), 87—112.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О. Н. ГОЛОВИНА

МИХАИЛ БЕНАДО (Mihail Benado), Бухарест

(Поступило в редакцию 19/VI 1958 г.)

В статье доказывается следующая теорема:

Пусть Σ-группа $\mathscr{G}$ (т. е. группа $\mathscr{G}$ с областью операторов Σ) является правильным произведением (с. м. [1]) *своих Σ-подгрупп G_i, $i \in I$ (I —* произвольное *непустое множество индексов). Пусть $i \in I$. Для любого $i \in I - \{i\}_0$ пусть справедливо $q(\mathscr{G}, G_i) \leqq G_i$, где q есть* ,,commutatrice'' (*см. определение в* [3]) *на структуре всех Σ-подгрупп Σ-группы $\mathscr{G}$. Тогда и $q(\mathscr{G}, G_i) \leqq G_{i_0}$.*

Теорема доказана только для того случая, когда ,,*commutatrice*'' q выполняет кроме аксиом, указанных в определении, еще одну аксиому, обозначенную через $\mathscr{K}10'$ (см. п. 2 текста). Далее показано, что все ,,*commutatrices*'', приведенные в виде примеров в [3], удовлетворяют этой дополнительной аксиоме.