Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Král

О Лебеговой площади замкнутых поверхностей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 470–471

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100372

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

О ЛЕБЕГОВОЙ ПЛОЩАДИ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(*Предварительное сообщение*)

ИОСЕФ КРАЛ (Josef Král), Прага

(Поступило в редакцию 24/III 1959 г.)

Предлагаемая статья посвящена в основном исследованию одного вопроса, поставленного Г. Федерером (H. Federer) в конце его работы "A note on the Gauss-Green theorem", Proc. Amer. Math. Soc. vol. 9 (1958), 447—451. Для случая трёхмерного пространства утвердительный ответ на этот вопрос дан теоремой 2.

Пусть $\mathscr{D}$ — система всех функций на трехмерном евклидовом пространстве E_3, обладающих непрерывными частными производными всех порядков и обращающихся в нуль на бесконечности (т. е. в дополнении некоторого достаточно большого куба). Частную производную функции f относительно i-того переменного обозначим через $D_i f$, трехмерную меру Лебега обозначим через L. Пусть, далее, $\mathfrak{A}_i^*$ — система всех L-измеримых множеств $A \subset E_3$, для которых существует вполне конечная обобщенная мера Φ_A^i на E_3 так, что равенство

$$\int_A D_i f \,\mathrm{d}\mathsf{L} = \int_{E_3} f \,\mathrm{d}\Phi_A^i$$

справедливо для всех $f \in \mathscr{D}$. Положим еще $\mathfrak{A}^* = \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{A}_i^*$.

Пусть S — замкнутая поверхность в E_3, т. е. связный непустой компакт в E_3, каждая точка которого имеет окрестность (относительно S), гомеоморфную евклидовой плоскости E_2. Известно, что множество $E_3 - S$ состоит из двух компонент — обозначим их через G_1, G_2 — общей границей которых является S.

Множество $\mathbf{D} \subset S$ назовем отмеченной областью на S, если оно гомеоморфно E_2. Пусть $\mathbf{D}$ — отмеченная область на S и пусть $\mathbf{D}_*$ — ограниченная односвязная область в E_2. Пусть, далее, T — гомеоморфное отображение $\mathbf{D}_*$ на $\mathbf{D}$ и пусть T_i — отображение области $\mathbf{D}_*$ в плоскость $E_2^i = \{x | x \in E_3, x_i = 0\}$, получаемое суперпозицией отображения T с ортогональной проекцией множества $\mathbf{D}$ на плоскость E_2^i. Площадь Лебега отображений T и T_i обозначим, соответственно, через $\mathscr{L}(\mathbf{D})$ и $\mathscr{L}_i(\mathbf{D})$. Это обозначение оправдано тем, что, как это вытекает из известных теорем теории лебеговой площади, числа $\mathscr{L}(\mathbf{D})$, $\mathscr{L}_i(\mathbf{D})$ не зависят от того, каким образом мы выбрали область $\mathbf{D}_*$ и гомеоморфизм T. Будем говорить, что $\mathscr{L}(S) < + \infty$ (соотв. $\mathscr{L}_i(S) < + \infty$), если существуют отмеченные области $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_s$ на S такие, что $\sum_{j=1}^{s} \mathscr{L}(\mathbf{D}_j) < + \infty$ (соотв. $\sum_{j=1}^{s} \mathscr{L}_i(\mathbf{D}_j) < + \infty$) и $S \subset \bigcup_{j=1}^{s} \mathbf{D}_j$.

Пусть теперь k — некоторое из чисел 1, 2 и пусть A — L-измеримое множество, удовлетворяющее соотношению $G_k \subset A \subset \overline{G}_k$ (где $\overline{G}$ — замыкание множества G в E_3). В этих обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. $A \in \mathfrak{A}_i^* \Rightarrow \mathscr{L}_i(S) < + \infty$.

Теорема 2. $A \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow \mathscr{L}(S) < + \infty$.

Далее, имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы оба множества G_1, G_2 содержались в системе $\mathfrak{A}^*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* $\mathsf{L}(S) = 0$ и $\mathscr{L}(S) < + \infty$.

Доказательства этих теорем, опирающиеся на исследования Л. Чесари (L. Cesari), Я. Маржика (J. Mařík), Т. Радо (T. Radó) и на некоторые факты комбинаторной топологии, будут изложены в статье, которая готовится к печати. Там же будут приведены дальнейшие библиографические указания. К сожалению, работы Де Джорджи (De Giorgi), упоминаемые Г. Федерером в его выше указанной работе, остаются пока недоступными автору этой статьи.

Summary

ON THE LEBESGUE AREA OF CLOSED SURFACES

(Preliminary Communication)

JOSEF KRÁL, Praha

(Received March 24, 1959)

The author states three theorems centring around a question that has been raised recently by H. Federer. For the case of the 3-space the question is answered affirmatively by theorem 2. Proofs and bibliographical comments will be given in a subsequent paper of the author's.