Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

SUR UN TYPE SPÉCIAL D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 22 septembre 1958)

En poursuivant l'étude entamée dans ses travaux antérieurs [4] et [5], l'auteur étudie un type spécial d'équations différentielles stochastiques, caractéristique des fonctions aléatoires poissoniennes.

1. Introduction

Nous supposons que le Lecteur connaisse notre interprétation de la notion d'équation différentielle stochastique exposée en [4] et qu'il n'ignore pas non plus notre travail [5]. Nous utiliserons donc couramment les notions, notations et symboles qui ont été introduits dans ces deux articles.

De même comme dans [4] et [5], nous nous bornons ici à l'étude des *fonctions aléatoires à accroissements indépendants* (f. a. a. i.), et cela *du point de vue de Bernoulli* seulement. Nous allons considérer des équations différentielles stochastiques

$$\delta X(t) \sim F(t, \mathrm{d}t)\,, \tag{1.1}$$

en supposant, pour simplifier, que l'équation soit donnée dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et que la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ cherchée satisfasse à la condition à l'origine

$$\mathbf{P}\{\omega\colon\ X(0) = 0\} = 1\,. \tag{1.2}$$

Dans notre article [5], nous avons étudié le type spécial d'équations différentielles stochastiques de la forme

$$\delta X(t) \sim Y\,.\,g(\mathrm{d}t)\,, \tag{1.3}$$

où $Y \in \mathfrak{X}^*$ et $g(h)$ était une fonction non-décroissante de $h \geqq 0$, vérifiant la condition

$$\lim_{h\to 0+} g(h) = g(0) = 0\,. \tag{1.4}$$

Parmi les solutions des équations de ce type on trouve par exemple la fonction aléatoire de Wiener-Lévy (cf. [5], § 4). Par contre, il découle des théorèmes démontrés dans [5] que les fonctions aléatoires poissoniennes, qui représentent, à côté des fonctions du type de Wiener-Lévy, l'autre groupe important de f. a. a. i. continues en probabilité, ne peuvent pas figurer parmi les solutions des équations du type (1.3) quels que soient Y et g, à l'exception, bien entendu, de la solution triviale.

Le présent article a pour but de montrer un autre type spécial d'équations différentielles stochastiques (1.1), qui est caractéristique des fonctions aléatoires poissoniennes et des f. a. a. i. apparentées à celles-là; nous nous occuperons aussi des questions d'intégrabilité des équations de ce type. L'article peut donc être considéré comme un pendant du travail [5].

2. Notions et considérations auxiliaires

I. Nous rappelons d'abord la notion bien connue de mélange de deux lois de répartition (cf. p. ex. [3]), or nous en prenons un cas spécial seulement: si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions caractéristiques correspondant aux deux lois en question et $0 \leqq c \leqq 1$, alors la fonction caractéristique du mélange de ces deux lois (en rapport de $c : (1 - c)$) sera

$$\varphi(s) = c\, \varphi_1(s) + (1 - c)\, \varphi_2(s)\,. \tag{2.1}$$

Le cas spécial auquel nous nous intéressons particulièrement est celui où $\varphi_2(s) \equiv 1$. Alors (2.1) devient

$$\varphi(s) = c\, \varphi_1(s) + 1 - c = 1 + c[\varphi_1(s) - 1]\,. \tag{2.2}$$

En revenant à la notation courante à l'aide des variables aléatoires, nous écrirons la relation (2.2) sous forme de

$$X \sim c \circ X_1\,. \tag{2.3}$$

II. Soit $X \in \mathfrak{X}^*$, soit φ sa fonction caractéristique, et posons

$$\varphi^\circ(s) = \exp\,[\varphi(s) - 1]\,. \tag{2.4}$$

Il s'ensuit du théorème de B. de Finetti (voir p. ex. [2]) que φ° est aussi une fonction caractéristique, voire d'une loi indéfiniment divisible. Nous désignerons par X° la variable aléatoire dépendant de cette loi-là; X étant donné, X° est déterminé à l'équivalence $\sim$ près.

Un exemple extrêmement simple de cette transformation est fourni par la variable aléatoire X presque sûrement égale à un; on voit aisément que X° dépend alors de la loi de Poisson au paramètre égal à un.

Nous allons démontrer encore le simple énoncé suivant:

Soit $X \in \mathfrak{X}^*$ et supposons que X° dépende d'une loi stable. Alors $\mathbf{P}\{\omega\colon\ X = 0\} = 1$.

Démonstration. Ecrivons la fonction-ψ de X° sous sa forme canonique (cf. [1], § 33), nous trouvons pour la fonction caractéristique φ de X l'expression

$$\varphi(s) = 1 + i\gamma s - c|s|^\alpha[1 + i\beta\, \omega(s, \alpha) \,.\, \operatorname{sgn} s]\,,$$

donc $\Re\, \varphi(s) = 1 - c|s|^\alpha$. Comme on a forcément $|\varphi(s)| \leqq 1$ pour tout s, il en vient $c = 0$. De manière tout à fait analogue nous trouvons aussi $\gamma = 0$, donc enfin $\varphi(s) \equiv 1$, c. q. f. d.

Remarque 1. On a évidemment

$$[X \sim X^\circ] \Leftrightarrow [\mathbf{P}\{\omega\colon X = 0\} = 1]\,. \tag{2.5}$$

III. Nous allons introduire encore une opération. Soit $X \in \mathfrak{X}$, soit $\psi(s)$ sa fonction-ψ, soit $c \geqq 0$. Par $c \times X$ nous désignerons la variable aléatoire dont la fonction-ψ est $c\, \psi(s)$. Pour $0 \leqq c \leqq 1$, $X \in \mathfrak{X}^*$, nous trouvons alors la relation intéressante que voici

$$c \times X^\circ \sim (c \circ X)^\circ\,. \tag{2.6}$$

Tandis que le premier membre de (2.6) est défini pour n'importe quel $c \geqq 0$, le second membre peut être dépourvu de sens pour $c > 1$; l'équivalence (2.6) a néanmoins lieu même pour les $c > 1$ pour lesquels le second membre a un sens.

3. Equations de mélange

Soit donnée l'équation différentielle stochastique (avec erreur)

$$\delta X(t) \sim \mathrm{d}t \circ Y\,, \quad Y \in \mathfrak{X}^*\,. \tag{3.1}$$

Nous allons étudier les conditions d'intégrabilité de cette équation et trouver la forme générale de sa solution. Nous exploitons dans ce but les propriétés de la fonction exponentielle e^z au voisinage du point $z = 0$: il en découle que pour la fonction-${}_3\psi$ et pour la fonction caractéristique correspondante ${}_3\varphi = \exp {}_3\psi$ d'une f. a. a. i. nous avons l'égalité suivante

$$\frac{\partial}{\partial h}\, {}_3\psi(t, h; s)\bigg|_{h=0+} = \frac{\partial}{\partial h}\, {}_3\varphi(t, h; s)\bigg|_{h=0+}\,. \tag{3.2}$$

Le second membre de l'équation (3.1) a d'après (2.2) la fonction caractéristique

$$\varphi(h; s) = 1 + h[\varphi_0(s) - 1]\,, \tag{3.3}$$

φ_0 étant la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y. En vertu de (3.2) nous trouvons à partir de (3.3) l'expression pour la fonction-${}_2\psi$ de la dérivée $\mathbf{D}\, X$

$$\overline{\psi}(t, s) = \varphi_0(s) - 1\,, \tag{3.4}$$

ce qui correspond à l'équation (cf. [4], § 3, (3.2))

$$\mathrm{D}X(t) \sim Y^\circ\,. \tag{3.5}$$

Comme $Y^\circ \in \mathfrak{X}$ pour chaque $Y \in \mathfrak{X}^*$ nous voyons que *l'équation* (3.1) *est intégrable pour n'importe quel* $Y \in \mathfrak{X}^*$. En même temps, (3.5) permet d'établir la forme générale des solutions des équations du type (3.1): ce seront les fonctions aléatoires linéaires, dont la fonction-${}_2\psi$ est exprimable à l'aide de la formule de B. de Finetti (cf. [1], p. 177) sans composantes constante et normale:

$$ {}_2\psi_X(t; s) = t \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} (e^{isx} - 1)\, \mathrm{d}F(x) \,; \tag{3.6} $$

ici F est directement la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

Il s'ensuit de la relation (3.2) que l'équation (3.1) est équivalente à l'équation

$$ \delta X(t) \sim (\mathrm{d}t \circ Y)^\circ \,, \tag{3.7} $$

donc — en vertu de (2.6) — aussi à l'équation (sans erreur)

$$ \mathrm{d}X(t) \sim \mathrm{d}t \times Y^\circ \,. \tag{3.8} $$

Considérons maintenant au lieu de (3.1) l'équation plus générale, et qui rapelle déjà (1.3),

$$ \delta X(t) \sim g(\mathrm{d}t) \circ Y \,, \tag{3.9} $$

où la fonction g jouit des propriétés citées paragraphe 1. En procédant d'une manière analogue au cas précédent nous trouvons au lieu de (3.4) l'expression

$$ \overline{\psi}(t, s) = [\varphi_0(s) - 1] \,.\, \lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h} = g'(0+)[\varphi_0(s) - 1] \,. \tag{3.10} $$

En excluant le cas peu intéressant de $\varphi_0(s) \equiv 1$ nous voyons que la *condition nécessaire et suffisante de l'intégrabilité de l'équation* (3.9) *est l'existence de la dérivée finie* $g'(0+)$. (Si $\varphi_0(s) \equiv 1$, ou bien $g'(0+) = 0$, la solution sera triviale.) Au lieu de (3.6) nous avons

$$ {}_2\psi_X(t; s) = t \,.\, g'(0+) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{isx} - 1)\, \mathrm{d}F(x) \,. \tag{3.11} $$

Remarque 2. La correspondance entre ψ et F, engendrée par la formule de B. de Finetti, n'est pas biunivoque de sorte que deux équations (3.9) différentes avec g et Y différents peuvent conduire à une même solution. Si par exemple $0 < g'(0+) \leqq 1$ alors pour h petit on aura $g(h) = h\, g'(0+) + o(h)$ et l'équation (3.9) pourra être réduite à une équation (3.1) si nous prenons au lieu de Y la variable aléatoire $g'(0+) \circ Y$. En général, les équations $\delta X(t) \sim g(\mathrm{d}t) \circ Y$ et $\delta X(t) \sim \dfrac{1}{a} g(\mathrm{d}t) \circ (a \circ Y)$ auront la même solution, pourvu que, bien entendu, $0 < a \leqq 1$. Si en (3.9) nous avons $g'(0+) > 1$, la réduction précédente n'est pas praticable en général, or si nous écrivons l'équation en question sous la forme $\delta X(t) \sim g(\mathrm{d}t) \times Y^\circ$, ou encore $\mathrm{d}X(t) \sim [g'(0+)\, \mathrm{d}t] \times Y^\circ$, nous pourrons la réduire à (3.8) en prenant au lieu de Y° la variable aléatoire $g'(0+) \times Y^\circ$.

Remarque 3. Différemment de ce que nous avons vu pour les équations (1.3), il n'existe pas pour une équation (3.9) de fonction g telle que l'on ait $\mathrm{d}X(t) \sim g(\mathrm{d}t) \circ Y$ pour n'importe quel $Y \in \mathfrak{X}^*$.

4. Cas non-homogène

Les résultats du paragraphe précédent peuvent être facilement étendus au cas des f. a. a. i. non-homogènes. Soit $\boldsymbol{Z}$ une f. a. v. i. définie pour $t \geqq 0$ et considérons l'équation

$$\delta X(t) \sim \mathrm{d}t \, {}_{\circ}Z(t) \, . \tag{4.1}$$

Tout comme dans le cas précédent il est possible de montrer son équivalence à l'équation

$$\mathrm{d}X(t) \sim \mathrm{d}t \times Z^{\circ}(t) \tag{4.2}$$

soit aussi

$$\mathrm{D}X(t) \sim Z^{\circ}(t) \, . \tag{4.3}$$

Le cas le plus général sera représenté par les équations de la forme

$$\delta X(t) \sim g(t, \mathrm{d}t) \, {}_{\circ}Z(t) \, . \tag{4.4}$$

La condition nécessaire de leur intégrabilité sera, bien entendu, l'existence d'une fonction finie $g'(t)$, $t \geqq 0$, vérifiant

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial h} g(t, h) \bigg|_{h=0+} \, . \tag{4.5}$$

Nous aurons alors

$$\mathrm{D}X(t) \sim g'(t) \times Z^{\circ}(t) \, , \tag{4.6}$$

de sorte que

$$\overline{\psi}(t, s) = g'(t)[{}_2\varphi_Z(t; s) - 1] \, . \tag{4.7}$$

En vertu de (1.2) il vient de (4.7)

$$ {}_2\psi_X(t; s) = \int_0^t g'(u)[{}_2\varphi_Z(u, s) - 1] \, \mathrm{d}u \, . \tag{4.8}$$

En dehors de l'existence de (4.5) il nous faudra donc (cf. [4]) supposer encore l'intégrabilité de la fonction $\overline{\psi}$ de (4.7). Si dans (4.4) $Z(t)$ ne dépend pas de t, (4.8) deviendra

$$ {}_2\psi_X(t; s) = [\varphi_Z(s) - 1] \, . \int_0^t g'(u) \, \mathrm{d}u \, . \tag{4.9}$$

5. Fonctions aléatoires poissoniennes

La propriété caractéristique d'une fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ poissonienne est exprimée par le fait que son accroissement fini $\Delta_h X(t)$ est non-nul avec une probabilité qui est $O(h)$ seulement. Cette propriété trouve son expression justement dans les équations différentielles stochastiques du type (3.1), ou bien (3.9); soit (4.4) et (4.9) pour le cas non-homogène. Si nous prenons en (3.1) pour Y la variable aléatoire presque sûrement égale à un, nous aurons d'après § 2, II,

$$ {}_2\psi_X(t; s) = t(e^{is} - 1) . \tag{5.1} $$

Prenons maintenant la variable aléatoire Y dépendant d'une loi discrète

$$ \mathbf{P}\{\omega\colon Y = a_k\} = p_k , \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \ a_0 = 0; \ a_k \neq 0, \ k = 1, 2, \ldots \tag{5.2} $$

La signification intuitive de ce choix fait pour l'équation (3.1) est évidente: on aura

$$ \begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega\colon \Delta_h X(t) = 0\} &= 1 - h(1 - p_0) + o(h) , \\ \mathbf{P}\{\omega\colon \Delta_h X(t) = a_k\} &= hp_k + o(h) , \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.3} $$

La solution de l'équation (3.1) sera alors la fonction aléatoire poissonienne composée homogène, avec la fonction-${}_2\psi$

$$ {}_2\psi_X(t; s) = t \, . \sum_{k=1}^{\infty} p_k(e^{isa_k} - 1) . \tag{5.4} $$

Par contre, pour toute fonction aléatoire poissonienne linéaire dont la fonction-${}_2\psi$ est de la forme (5.4) il est possible d'écrire une équation du type (3.1) dont elle est la solution: ces équations-là sont caractérisées par la loi discrète (5.2) de la variable aléatoire Y.

Il découle de notre proposition démontrée paragraphe 2 que les solutions des équations (3.1) ou (3.9) ne peuvent pas dépendre de lois stables (à l'exception, bien entendu, de la solution triviale). Par contre, les solutions des équations du type (1.3) dépendent toujours de lois stables. Il s'en ensuit donc que la classe des solutions de toutes les équations de la forme (1.3) et la classe des solutions des équations (3.9) ont la solution triviale pour leur *seul élément commun*.

LITTÉRATURE

[1] *B. W. Gniedenko, A. N. Kołmogorow*: Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, Warszawa 1957.

[2] *E. Lukacs*: Remarks concerning characteristic functions; Annals of Math. Stat., *28* (1957), 717–723.

[3] *H. Robbins*: Mixture of distributions; Annals of Math. Stat., *19* (1948), 360–369.

[4] *F. Zítek*: Equations différentielles stochastiques; Czechoslovak Math. Journal, *8* (83), 1958, 465–472.

[5] *F. Zítek*: Sur l'intégrabilité d'une équation différentielle stochastique; Czechoslovak Math. Journal, *8* (83), 1958, 473–482.

Резюме

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ТИПЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 22/IX 1958 г.)

Предполагается, что читатель знаком с теорией стохастических дифференциальных уравнений в смысле работ [4] и [5]. Вводятся следующие обозначения:

(I) Если X — случайная величина с характеристической функцией $\varphi(s)$ и $0 \leqq c \leqq 1$, то $c_\circ X$ обозначает случайную величину с характеристической функцией $1 + c[\varphi(s) - 1]$, и

(II) X° обозначает случайную величину с характеристической функцией $\exp[\varphi(x) - 1]$.

(III) Если X — безгранично делимая случайная величина с ψ-функцией $\psi(s)$ и $0 \leqq c < \infty$, то $c \times X$ обозначает случайную величину с ψ-функцией $c\ \psi(s)$.

В настоящей работе исследуются стохастические дифференциальные уравнения вида (3.1) или более общего вида (3.9), причем g — неубывающая функция неотрицательного аргумента, удовлетворяющая (1.4). Оказывается, что необходимым и достаточным условием для интегрируемости уравнений вида (3.9) является существование собственной производной функции g в точке нуль справа; уравнения (3.1) интегрируемы для любых Y. Уравнения (3.1), (3.5), (3.7) и (3.8) эквивалентны.

В четвертом параграфе исследуются условия интегрируемости и общий вид решения для неоднородных (во времени) случайных функций с независимыми приращениями. Для интегрируемости стохастического дифференциального уравнения типа (4.4) (где $\boldsymbol{Z}$ — случайная функция с независимыми значениями) необходимо и достаточно, чтобы: а) существовала собственная частная производная (4.5), б) функция (4.7) была интегрируемой (в смысле Римана).

В пятом параграфе указывается, что пуассоновские случайные функции с ${}_2\psi$-функциями вида (5.4) можно охарактеризовать как решения стохастических дифференциальных уравнений вида (3.1), где Y — случайная величина с дискретным законом распределения вида (5.2).

Далее в работе показано, что класс решений всех стохастических дифференциальных уравнений типа (3.9) и класс решений всех уравнений типа (1.3), (которые были исследованы уже в [5]), имеют только один общий элемент: тривиальное решение.