Tibor Šalát
Absolut konvergente Reihen und das Hausdorffsche Mass

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 372–389

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100363

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

ABSOLUT KONVERGENTE REIHEN UND DAS HAUSDORFFSCHE MASS

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingelangt am 3. September 1958)

Der Begriff des Masses, welcher von F. HAUSDORFF in der Arbeit [1] eingeführt wurde und der durch die Arbeiten von V. JARNÍK, A. S. BEZIKOVIČ, VL. KNICHAL, B. VOLKMANN und anderer Autoren vertieft wurde, hat schon in der Arithmetik des Kontinuums weite Verwendung gefunden.

In dieser Arbeit werden wir vom Standpunkt des Hausdorffschen Masses einige lineare Punktmengen studieren, diese Mengen sind durch gewisse absolut konvergente Reihen definiert. Weiter benützen wir den Begriff des Hausdorffschen Masses zum Studium der Verteilung der Faktoren 1, -1 in diesen absolut konvergenten Reihen. Wir zeigen, dass hier einige Sätze gelten, welche analogisch mit einigen Sätzen über dyadische Entwicklungen der reellen Zahlen übereinstimmen.

1

In diesem Teil der Arbeit führen wir einen allgemeinen Satz über das Hausdorffsche Mass an, dabei werden wir zum Beweis dieses Satzes eine im wesentlichen von B. Volkmann stammende Modifikation der Methode von Jarník benutzen (siehe [2]).

Es sei $M \subset E_1 = (-\infty, +\infty)$, $\alpha > 0$, $\varrho > 0$, dann setzen wir $L\varrho(M, \alpha) = \inf_V \sum_{i \in V} |i|^\alpha$, wo wir die untere Grenze durch alle „ϱ-Überdeckungen" V der Menge M nehmen, d. h. durch alle diejenigen Mengen V, die aus einem abzählbaren System offener Intervalle bestehen (die Länge des Intervalles i wird durch $|i|$ bezeichnet), für jedes Intervall $i \in V$ $|i| \leqq \varrho$ gilt und $M \subset \bigcup_{i \in V} i$. Dann existiert

$$L(M, \alpha) = \lim_{\varrho \to 0+} L_\varrho(M, \alpha)$$

und $L(M, \alpha)$ nennen wir α-dimensionales Hausdorffsches Mass der Menge M.

Das auf diesem Wege definierte Mass erfüllt beide Axiome des äusseren Masses von Carathéodory. Offenbar ist $0 \leqq L(M, \alpha) \leqq +\infty$. Die untere Grenze aller derjenigen $\alpha > 0$, für welche $L(M, \alpha) = 0$ ist, nennen wir Hausdorffsche Dimension der Menge M und wir bezeichnen sie mit $\dim M$. Für $\alpha > 1$ ist offenbar $L(M, \alpha) = 0$, darum ist stets $0 \leqq \dim M \leqq 1$.

Zum beweis der Relation $\dim M = \delta$ genügt es zu zeigen:

a) $L(M, \alpha) = 0$ für $\alpha > \delta$.
b) $L(M, \alpha) = +\infty$ für $\alpha < \delta$ (wenn $\delta > 0$).

Das Hausdorffsche Mass (und auch die Hausdorffsche Dimension) der Menge könnte auch dann positiv sein, wenn das Lebesguesche Mass der Menge Null ist. Darum können wir das Hausdorffsche Mass zur feineren Klassifikation der Nullmengen (d. h. der Mengen, deren Lebesguesches Mass Null ist) benutzen.

Es sei weiter $M \subset \langle -A, A\rangle$, $A > 0$, und $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$; $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$; $I_1 \subset \langle -A, A\rangle$, wo I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine aus einer endlichen Anzahl g_n paarweise teilfremder abgeschlossener Intervalle i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ bestehende Menge ist und die Intervalle i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ gleiche Länge λ_n haben. Dabei bezeichnet man mit I_n sowohl die Menge $\{i_n^1, i_n^2 \ldots, i_n^{g_n}\}$ als auch die Menge $\bigcup_{m=1}^{g_n} i_n^m$, ein Missverständnis kann nicht eintreten. Es existiere $a \in (0, 1)$ so, dass $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leqq a$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $\lambda_0 = 2A$ ist. Im weiteren bezeichnen wir $\tau(n) = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ und setzen $l = \varliminf_{n\to\infty} \tau(n)$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} \tau(n)$, $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$ (wenn der rechtsseitige Grenzwert existiert).

Weiter führen wir die Funktion $f(x)$ ein, welche auf dem Intervall $\langle 0, a\rangle$ so definiert ist:

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{x}} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq a\,.$$

Wir beweisen vor allem diesen Satz:

Satz 1,1. *Es sei* $M \subset \langle -A, A\rangle$, $A > 0$ *und* $M = \bigcap_{n\to\infty}^{\infty} I_n$; $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$; $I_1 \subset \langle -A, A\rangle$, *jede der Mengen* I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *besteht aus einer endlichen Anzahl* g_n *teilfremder abgeschlossener Intervalle* i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ *der gleichen Länge* λ_n. *Es sei* $g_n = 2^{n\mu_n}$ *und* $\mu = \varliminf_{n\to\infty} \mu_n < +\infty$. *Jedes der Intervalle* i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ *enthält die gleiche Anzahl der Intervalle* $i_{n+1}^m \in I_{n+1}$.

Dann gilt

$$\mu\, f(l) \leqq \dim M \leqq \mu\, f(L)\,.$$

Beweis. a) *Wir zeigen, dass* $\dim M \leqq \mu\, f(L)$ *ist. Es sei* $\alpha > (\mu + \eta)\, f(L)$, $\eta > 0$ *d. h.* $\alpha > \dfrac{(\mu+\eta)\log 2}{\log \dfrac{1}{L}}$ *für* $L > 0$; $\alpha > 0$ *für* $L = 0$. *Dann existiert* $\varepsilon > 0$ *so, dass*

$$D = q^{\mu+\eta}(L+\varepsilon)^\alpha < 1 \, .$$

Weiter existiert ein n_0 so, dass für alle $n \geqq n_0$ $\tau(n) < L + \varepsilon$ ist. Es sei $\varrho > 0$. Es bedeute I_n^0 das Innere der Menge I_n, dann, wie bekannt, ist (siehe [3]) $\dim M_1 = \dim M$, wo $M_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^0$ gilt. Es ist offenbar

$$L_\varrho(M_1, \alpha) \leqq \inf_{n \geqq n'} g_n \lambda_n^\alpha \, ; \quad \lambda_{n'} \leqq \varrho \, , \quad n' \geqq n_0 \, .$$

Setzen wir $n_k = n' + s_k$, wo die Folge $1 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \ldots$ diejenige Folge ist, dass $\mu_{n_k} \to \mu$. Dann gilt für diese n_k

$$g_{n_k}\lambda_{n_k}^\alpha = 2^{n'\mu_{n'+s_k}}\, \lambda_{n'}^\alpha \, . \, 2^{s_k \mu_{n'+s_k}} \prod_{r=0}^{s_k-1} \tau^\alpha(n'+r) \leqq (2^{n'\mu_{n'+s_k}} \, . \, \lambda_{n'}^\alpha) \, . \, 2^{s_k(\mu_{n'+s_k}-(\mu+\eta))} . \, D^{s_k} \, .$$

Weiter genügt es zu beachten, dass $D^{s_k} \to 0$ wenn $k \to \infty$, $2^{n'\mu_{n'+s_k}} \, . \, \lambda_{n'}^\alpha = O(1)$ und $2^{s_k(\mu_{n'+s_k}-\mu+\eta))} = O(1)$.

Daraus folgt, dass für jedes $\eta > 0$

$$\dim M_1 \leqq (\mu + \eta)\, f(L) \, , \quad \dim M = \dim M_1 \leqq \mu\, f(L) \, .$$

b) Wir zeigen, dass $\dim M \geqq \mu\, f(l)$. Für $l = 0$ oder $\mu = 0$ ist das trivial. Es sei darum $l > 0$, $\mu > 0$ und es sei $\eta > 0$, $\eta < \mu$, $\alpha < \dfrac{(\mu-\eta)\log 2}{\log \dfrac{1}{l}}$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass

$$d = 2^{\mu-\eta}(l-\varepsilon)^\alpha > 1 \, .$$

Es existiert ein n_0 so, dass für alle $n \geqq n_0$ $\tau(n) > l - \varepsilon$ und $\mu_n > \mu - \eta$. Daraus folgt, dass man ein $\delta > 0$ so wählen kann, dass für alle natürliche n $\tau(n) > \delta$ ist. Setzen wir $\tau_2 = \dfrac{1}{\delta} + 2$ und $\varrho = \lambda_{n_{0+k}}$.

Nach der Definition von $L_\varrho(M, \alpha)$, $\varrho = \lambda_{n_0+k}$, existiert eine „$\varrho$-Überdeckung" V der Menge M so, dass $\sum_{i \in V} |i|^\alpha < L_\varrho(M, \alpha) + K$, $K > 0$. Da die Menge M eine kompakte Menge ist, existiert nach dem Borelschen Satz eine endliche Menge $V' \subset V$ so, dass $M \subset \bigcup_{i \in V'} i$ ist und offenbar $\sum_{i \in V'} |i|^\alpha \leqq \sum_{i \in V} |i|^\alpha$ gilt.

Es ist leicht zu ersehen, dass folgender Hilfssatz gilt:

Es sei j *ein Intervall,* $j \subset \langle -A, A \rangle$, α *eine reelle Zahl,* $0 < \alpha \leqq 1$. *Dann* *existiert eine aus der endlichen Anzahl der Intervalle i_n^m bestehende Menge R mit diesen Eigenschaften*

(a) $j \cap M \subset R$,

(b) $|i| < |j|$ *für jedes* $i \in R$,

(c) $\sum_{i \in R} |i|^\alpha < \tau_2 |j|^\alpha$.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes beachten wir, dass $\lambda_{n+1} < \lambda_n$, $\lambda_n \to 0$ und darum existiert ein n_1 so, dass $\lambda_{n_1} < |j| \leqq \lambda_{n_1-1}$. Bezeichnen wir mit R die Menge aller $i_{n_1} \in I_{n_1}$, für welche $i_{n_1} \cap j \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass R die Eigenschaften (a), (b), (c) hat. Aus $M \subset I_{n_1}$ folgt (a). Weiter gilt für die Anzahl $N(R)$ aller $i_{n_1} \in R$

$$N(R) \leqq \frac{|j|}{\lambda_{n_1}} + 2 \leqq \frac{\lambda_{n_1-1}}{\lambda_{n_1}} + 2 = \frac{1}{\tau(n_1 - 1)} + 2 < \frac{1}{\delta} + 2 = \tau_2 \,, \tag{1}$$

(b) gilt offenbar und (c) bekommen wir aus (b), (1).

Wenden wir diesen Hilfssatz auf jedes Intervall $i \in V'$ an, bekommen wir eine aus den Intervallen i_n^m bestehende Menge R', für jedes $i \in R'$ $|i| \leqq \lambda_{n_0+k}$ gilt und $M \subset \bigcup_{i \in R} i$, weiter

$$\sum_{i \in R'} |i|^\alpha < \tau_2 \sum_{i \in V} |i|^\alpha < \tau_2(L_\varrho(M, \alpha) + K) \,.$$

Wir zeigen, dass ein solches $k^* \geqq k$ existiert, dass

$$\sum_{i \in R'} |i|^\alpha \geqq g_{n_0+k^*} \lambda^\alpha_{n_0+k^*} \tag{2}$$

gilt. Es ist

$$g_{n_0+k^*} \lambda_{n_0+k^*} = 2^{(n_0+k^*)\mu_{n_0+k^*}} \lambda^\alpha_{n_0+k^*} = (2^{n_0\mu_{n_0+k^*}} \lambda^\alpha_{n_0}) \,.\, 2^{k^*\mu_{n_0+k^*}} \prod_{r=0}^{k^*-1} \tau^\alpha(n_0 + r) \geqq$$

$$\geqq (2^{n_0\mu_{n_0+k^*}} \lambda^\alpha_{n_0}) \, 2^{k^*(\mu_{n_0+k^*} - (\mu - \eta))} \,.\, d^{k^*} = F(n_0, k) \,.$$

Da $\mu_{n_0+k^*} > \mu - \eta$, $2^{k^*(\mu_{n_0+k^*} - (\mu-\eta))} \geqq \delta_1 > 0$ ist (für alle $k \geqq 1$), ähnlich ist $2^{n_0\mu_{n_0+k^*}} \lambda^\alpha_{n_0} > \delta_2 > 0$ und $d^{k^*} \to +\infty$ wenn $k^* \to \infty$. Daraus folgt, dass $\lim_{k \to \infty} F(n_0, k) = +\infty$.

Es ist also $\dim M \geqq \dfrac{(\mu - \eta) \log 2}{\log \dfrac{1}{l}}$ für jede η, $0 < \eta < \mu$ und so

$$\dim M \geqq \frac{\mu \log 2}{\log \dfrac{1}{l}} = \mu \, f(l) \,.$$

Es genügt noch zu beweisen, dass ein solches $k^* \geqq k$ existiert, dass $\sum_{i \in R'} |i|^\alpha \geqq g_{n_0+k^*} \lambda^\alpha_{n_0+k^*}$ ist. Um dieses einzusehen, bezeichnen wir $\min_{i \in R'} |i| = \lambda_{n_0+k''}$, $\max_{i \in R'} |i| = \lambda_{n_0+k'}$, dabei ist $k \leqq k' \leqq k''$. Wenn wir einige geeignete Intervalle der Menge weglassen, bekommen wir eine Menge R^* mit dieser Eigenschaft: Kein innerer Punkt irgend eines Intervalles der Menge R^* ist mehrfach mit Intervallen der Menge R^* bedeckt und dabei $M \subset \bigcup_{i \in R^*} i$. Es ist offenbar $\sum_{i \in R^*} |i|^\alpha \leqq \leqq \sum_{i \in R'} |i|^\alpha$. Wenn $k'' = k'$, dann ist $R^* = I_{k'}$ und die Behauptung gilt ($k^* = k'$). Es sei also $k'' - k' > 0$. Wir setzen $R^* = R_0^*$ und konstruieren durch Induktion eine (endliche) Folge der Mengen von Intervallen $R_0^*, R_1^*, \ldots, R_j^*, \ldots, R_{k''-k'}^*$. Es sei schon $R_0^*, R_1^*, \ldots, R_j^*$; $0 \leqq j < k'' - k'$ so konstruiert, dass jede der Mengen R_l^* ($l = 1, 2, \ldots, j$) aus einer endlichen Anzahl der Intervalle i_n^m besteht,

$$\lambda_{n_0+k''} \leqq |i_n^m| \leqq \lambda_{n_0+k'}$$

und jede der Mengen R_l^* ($l = 1, 2, \ldots, j$) hat diese Eigenschaften (welche R_0^* trivial hat):

α) $M \subset \bigcup_{i \in R_l^*} i$.

β) Die Intervalle der Menge R_l^* bedecken keinen inneren Punkt irgend eines Intervalles der Menge R_l^* mehrfach.

γ) $\sum_{i \in R_l^*} |i|^\alpha \leqq \sum_{i \in R^*_{l-1}} |i|^\alpha \leqq \ldots \leqq \sum_{i \in R_0^*} |i|^\alpha$.

δ) Die Längen der Intervalle der Menge R_l^* haben nicht mehr als $k'' - k' - - l + 1$ verschiedene Werte, dabei haben sie höchstens einen Wert (bezeichnen wir ihn mit $\lambda_{v(l)}$) unter den Werten $\lambda_{n_0+k''}, \lambda_{n_0+k''-1}, \ldots, \lambda_{n_0+k''-l}$ (also $n_0 + k'' - - l \leqq v(l) \leqq n_0 + k''$).

Die Menge R_{j+1}^* führen wir so ein: Wenn es kein $v(j)$ der erwähnten Eigenschaft gibt, dann setzen wir $R_{j+1}^* = R_j^*$. Es ist leicht zu sehen, dass alle Eigenschaften α), β), γ), δ) auch durch R_{j+1}^* erfüllt werden. Wenn ein solches $v(j)$ existiert, dann bezeichnen wir mit S_j die Menge aller in R_j^* enthaltenen Intervalle $i_{v(j)}$. Aus $I_{v(j)} \subset I_{n_0+k''-j-1}$ folgt, dass jedes der Intervalle $i_{v(j)}$ in irgend einem Intervall $i_{n_0+k''-j-1}$ enthalten ist. Dieses Intervall $i_{n_0+k''-j-1}$ gehört nach β) nicht zu R_j^*. Die Menge aller dieser Intervalle $i_{n_0+k''-j-1}$ (jedes $i_{n_0+k''-j-1}$ enthält wenigstens ein Intervall $i_{v(j)}$) bezeichnen wir mit U_j und ihre Anzahl mit C_j. Dann besteht S_j offenbar aus allen $C_j \dfrac{g_{v(j)}}{g_{n_0+k''-j-1}}$ in den Intervallen der Menge U_j enthaltenen Intervallen $i_{v(j)}$.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Es gilt

$$g_{v(j)} \lambda_{v(j)}^\alpha \geqq g_{n_0+k''-j-1} \lambda_{n_0+k''-j-1}^\alpha ,$$

dann bekommen wir R_{j+1}^* aus R_j^* auf solchem Wege, dass wir S_j durch die Menge U_j ersetzen. Dann haben wir

$$\sum_{i \in R_{j+1}^*} |i|^\alpha = \sum_{i \in R_j^*} |i|^\alpha - C_j \frac{g_{v(j)}}{g_{n_0+k''-j-1}} \lambda_{v(j)}^\alpha + C_j \lambda_{n_0+k''-j-1}^\alpha \leqq \sum_{i \in R_j^*} |i|^\alpha .$$

2. Es gilt

$$g_{v(j)}\lambda^{\alpha}_{v(j)} < g_{n_0+k''-j-1}\lambda^{\alpha}_{n_0+k''-j-1},$$

dann bedeute U'_j die Menge aller zu R^*_j gehörenden Intervalle $i_{n_0+k''-j-1}$ und C'_j sei die Anzahl dieser $i_{n_0+k''-j-1}$. S'_j bedeute die Menge aller in der Menge U'_j enthaltenen Intervalle $i_{v(j)}$ $\left(\text{ihre Anzahl ist } C'_j \dfrac{g_{v(j)}}{g_{n_0+k''-j-1}}\right)$. Dann gehört nach β) kein Intervall aus S'_j zu R^*_j. Wir bekommen jetzt R^*_{j+1} aus R^*_j so, dass wir alle Intervalle der Menge U'_j durch die Intervalle der Menge S'_j ersetzen. Es ist

$$\sum_{i \in R^*_{j+1}} |i|^\alpha = \sum_{i \in R^*_j} |i|^\alpha - C'_j \lambda^\alpha_{n_0+k''-j-1} + C'_j \frac{g_{v(j)}}{g_{n_0+k''-j-1}} \lambda^\alpha_{v(j)} \leqq \sum_{i \in R^*_j} |i|^\alpha .$$

Also γ) gilt in beiden Fällen und die Gültigkeit der α), β), δ) (für $j + 1$) ist auch leicht zu beweisen.

Also alle Intervalle der Menge $R^*_{k''-k'}$ haben die gleiche Länge l (nach δ)), $l = \lambda_{n_0+k^*}$, $k' \leqq k^* \leqq k''$ und mit Rücksicht auf α), β) ist $R^*_{k''-k'} = I_{k^*}$ und dieses mit γ) gibt (2).

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

F o l g e r u n g. Wenn $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$ existiert, dann gilt $\dim M = \mu f(l^*)$.

2

In diesem Teil der Arbeit werden wir uns vom Standpunkt des Hausdorffschen Masses mit dem Studium gewisser linearer Punktmengen beschäftigen.

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit den positiven Gliedern und es sei für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Bedingung

$$a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \tag{3}$$

erfüllt.

Die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, welche die Form $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ haben ($\varepsilon_n = 1$ oder -1, $n = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnen wir mit W. Jeder Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n > R_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ kann man die oben definierte Menge W zuordnen. Wir werden die Eigenschaften dieser Mengen W studieren, diese Mengen werden wir kurz W-Mengen nennen. Es ist leicht zu sehen, dass alle diese Mengen perfekt und symetrisch bezüglich 0 sind. Das Lebesguesche Mass der zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gehörenden Menge W ist

$$\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \,.\, R_n$$

(siehe [4]). Die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes folgt aus der Beziehung (3). Aus der Beziehung (3) bekommt man leicht

$$a_1 > R_1 = a_2 + R_2 > 2R_2 = 2(a_3 + R_3) > 2^2R_3 > \dots,$$

also $\{2^{n+1}R_n\}^{\infty}$ ist eine fallende Folge.

Wir werden jetzt die Struktur der zur Reihe $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gehörenden Menge W beschreiben. Lässt man aus dem Intervall $\langle -A, A\rangle$ das Intervall $\Delta_1^1 = (-a_1 + R_1, a_1 - R_1)$ weg, bekommen wir die Menge I_1 (Bezeichnung aus dem ersten Teil der Arbeit). I_1 besteht aus den zwei Intervallen i_1^1 und i_1^2,

$$i_1^1 = \langle -A, -a_1 + R_1\rangle, \quad i_1^2 = \langle a_1 - R_1, A\rangle,$$

jedes der Intervalle i_1^1, i_1^2 hat die Länge $2R_1$. Lässt man aus i_1^1 das Intervall $\Delta_2^1 = (-a_1 - a_2 + R_2, -a_1 + a_2 - R_2)$ weg, bekommen wir zwei zur Menge I_2 gehörende Intervalle i_2^1 und i_2^2,

$$i_2^1 = \langle -A, -a_1 - a_2 + R_2\rangle, \quad i_2^2 = \langle -a_1 + a_2 - R_2, -a_1 + R_1\rangle.$$

Ähnlich bekommen wir durch Weglassung des Intervalles $\Delta_2^2 = (a_1 - a_2 + R_2, a_1 + a_2 - R_2)$ aus dem Intervall i_1^2 zwei zur Menge I_2 gehörende Intervalle i_2^3, i_2^4,

$$i_2^3 = \langle a_1 - R_1, a_1 - a_2 + R_2\rangle, \quad i_2^4 = \langle a_1 + a_2 - R_2, A\rangle.$$

Jedes der Intervalle i_2^m $(m = 1, 2, 3, 4)$ hat die Länge $2R_2$. Wir nennen das Intervall Δ_1^1 angrenzendes Intervall (der Menge W) der ersten Stufe, die Intervalle Δ_2^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ nennen wir angrenzende Intervalle (der Menge W) der zweiten Stufe. In dieser Konstruktion kann man weiter fortschreiten. Es sei schon die aus den Intervallen i_n^m $(m = 1, 2, \dots, 2^n)$ bestehende Menge I_n konstruiert. Jedes der Intervalle hat die Länge $\lambda_n = 2R_n$. Also

$$i_n^1 = \langle -A, -a_1 - a_2 - \dots - a_n + R_n\rangle,$$

$$i_n^2 = \langle -a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} + a_n - R_n, -a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} + a_n + R_n\rangle,$$

$$\dots i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle, \dots.$$

Für jedes Intervall i_n^m $(m = 1, 2, \dots, 2^n)$ ist charakteristisch, dass alle Zahlen $x \in W$, welche zum i_n^m gehören, in ihren Entwicklungen $x = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l a_l$ auf den ersten n Stellen dieselben Faktoren 1 und -1 haben, wie der linke (und auch der rechte) Endpunkt des Intervalles i_n^m. Wir sagen kurz, dass die Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ zum Intervall

$$i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle$$

gehört und umgekehrt. Durch Weglassung der angrenzenden Intervalle Δ_{n+1}^k (deren Anzahl 2^n ist), aus i_n^m lassen wir das Intervall

$$\Delta_{n+1}^{m} = (\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + R_{n+1},\ \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - R_{n+1})$$

weg, bekommen wir 2^{n+1} Intervalle, welche die Menge I_{n+1} bilden. Dabei ist $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Bei festem n ist also $\langle -A, A\rangle$ eine Vereinigung der 2^n Intervalle i_n^m der Menge I_n und der angrenzenden Intervalle Δ_k^l, $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq l \leqq 2^{k-1}$.

Wenden wir jetzt den Satz,1,1 auf die Mengen W an. Wir bekommen dieses Ergebnis:

Satz 2.1. *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und es sei $a_n > R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Bezeichnet man mit W die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, welche die Form $x = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ $(\varepsilon_n = 1$ oder $-1)$ haben. Dann gilt*

$$f(l) \leqq \dim W \leqq f(L)\,,$$

wo $l = \varliminf_{n\to\infty} \dfrac{R_{n+1}}{R_n}$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{R_{n+1}}{R_n}$ *ist.*

Beweis. I_n besteht in unserem Fall aus 2^n teilfremden abgeschlossenen Intervallen (jedes dieser Intervalle hat die Länge $\lambda_n = 2R_n$). Also $\mu = 1$ und $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\tau(n) = \dfrac{R_{n+1}}{R_n} < \dfrac{1}{2}$. Nach Satz 1,1 bekommen wir also

$$f(l) \leqq \dim W \leqq f(L)\,,$$

wo $l = \varliminf_{n\to\infty} \tau(n)$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} \tau(n)$ ist.

Bemerkung 1. Wenn $l^* = \lim_{n\to\infty} \tau(n)$ existiert, dann ist $\dim W = f(l^*)$. Für $l^* > 0$ ist also

$$\dim W = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{l^*}}\,.$$

Zum Beispiel für die Reihen, bei denen $R_n \sim K^{-n}$, $K > 2$ ist (d. h. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{R_n}{K^{-n}} = C$, $0 < C < +\infty$), zu diesen Reihen gehört auch die geometrische Reihe mit dem Quotienten $\dfrac{1}{K}$, gilt die Relation $\dim W = \dfrac{\log 2}{\log K}$.

Bemerkung 2. Den für die Dimensionen der W-Mengen geltenden Beziehungen kann man auch eine andere Form geben. Beachten wir, dass

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{R_{n+1}}{a_{n+1} + R_{n+1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{a_{n+1}}{R_{n+1}}}\,,$$

$$l = \frac{1}{1 + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{R_n}}, \quad L = \frac{1}{1 + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{R_n}}$$

ist und also

$$\frac{\log 2}{\log\left(1 + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{R_n}\right)} \leqq \dim W \leqq \frac{\log 2}{\log\left(1 + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{R_n}\right)}. \tag{4}$$

Diese Beziehung gilt immer, wenn wir $\dfrac{\log 2}{\log(+\infty)} = 0$ setzen. Im besonderen, wenn $l^* = \dfrac{1}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{R_n}}$ existiert, dann ist $\dim W = \dfrac{\log 2}{\log\left(1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{R_n}\right)}$, das gilt auch wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{R_n} = +\infty$ wenn wir $\dfrac{\log 2}{\log(+\infty)} = 0$ setzen. Wenn also $a_n \cong R_n$ ist, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{R_n} = 1$, dann ist $\dim W = 1$.

Wir führen im weiteren in zwei besonderen Fällen eine Beziehung zwischen $\dim W$ und den Verhältnissen der Glieder der zur Menge W gehörenden Reihe $\sum^{\infty} a_n$ an.

Satz 2,2. *Es sei* $\dim W = 0$. *Dann existiert zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine unendliche Anzahl natürlicher Zahlen* n *so, dass* $a_{n+1} < \varepsilon a_n$ *gilt.*

Beweis. Es sei $\dim W = 0$. Dann folgt aus (4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{R_n} = +\infty$. Aus der Beziehung

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{R_n} \frac{R_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{R_n}\left(1 + \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}}\right)$$

bekommt man die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\frac{a_n}{R_n} \leqq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqq 2\,\frac{a_n}{R_n}. \tag{5}$$

Also in diesem Fall bekommen wir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

und daraus folgt schon unmittelbar die Behauptung dieses Satzes.

In diesem Fall gibt es in der Reihe $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ eine unendliche Anzahl von Gliedern, die beliebig kleiner als die unmittelbar vor ihnen stehenden Glieder sind.

Satz 2,3. *Es sei* dim $W = 1$. *Dann existiert zu jedem* q, $0 < q < \frac{1}{2}$, *eine unendliche Anzahl natürlicher Zahlen* n *so, dass* $a_{n+1} > qa_n$ *gilt.*

Beweis. Es sei dim $W = 1$. Dann folgt aus (4) $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{R_n} = 1$ und nach (5) ist $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqq 2$, $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \frac{1}{2}$; daraus folgt unmittelbar die Behauptung dieses Satzes.

In diesem Fall gibt es in der Reihe $\sum\limits_1^\infty a_n$ eine unendliche Anzahl von Gliedern, die grösser als die q-vielfachen ($q < \frac{1}{2}$) der unmittelbar vor ihnen stehenden Glieder sind.

3

In diesem Teil der Arbeit werden wir die Verteilung der Faktoren $1, -1$ in den Entwicklungen der Zahlen der zur Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \quad (a_n > 0, \quad a_n > R_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gehörenden Menge W studieren.

Wir werden zu Beginn $\mu(W) > 0$ voraussetzen (das kann man mit geeigneter Wahl der Reihe $\sum\limits_1^\infty a_n$ erreichen). W ist, wie im zweiten Teil der Arbeit, die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, welche die Form

$$x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \tag{6}$$

($\varepsilon_n = 1$ oder -1, $n = 1, 2, \ldots$) haben.

Die eindeutige Entwicklung (siehe [5]) (6) der Zahl x nennen wir Vorzeichenentwicklung der Zahl x mit Rücksicht auf die Reihe $\sum\limits_1^\infty a_n$.

Wir bezeichnen im weiteren mit $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen 1 in der (endlichen) Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, mit $g(n, x)$ die Anzahl der Zahlen -1 in derselben Folge. Wir setzen

$$\underline{D}^*(f, x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad \overline{D}^*(f, x) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}.$$

(Wenn der rechtsseitige Grenzwert existiert.) Ähnlich definieren wir die Zahlen $\underline{D}^*(g, x)$, $\overline{D}^*(g, x)$, $D^*(g, x)$. Alle diese Zahlen sind aus dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$.

In der Arbeit [6] studiert man die Verteilung der Zahlen $1, -1$ in den Vorzeichenentwicklungen der Zahlen $x \in W$ vom Standpunkt des Lebesgueschen

Masses. Dort zeigt man, dass hier analoge Sätze zu den in dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen geltenden Sätzen gelten. So gilt

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$$

für fast alle $x \in W$.

(Das ist ein Analogon zu dem Borelschen Satze über die Verteilung der Ziffern in den dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen.) Es gilt auch ein zu einem gewissen Khintchinschen Satze analoger Satz: Für fast alle $x \in W$ ist

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n \log \log n}) .$$

In diesem Teil der Arbeit werden wir die Verteilung der Zahlen $1, -1$ in den Vorzeichenentwicklungen der Zahlen $x \in W$ vom Standpunkt des Hausdorffschen Masses studieren, dabei benützen wir das Ergebnis aus dem ersten Teil der Arbeit.

In der Arbeit [6] zeigt man, dass, wie schon bemerkt wurde, es möglich ist einige Ergebnisse, welche über die Verteilung der Ziffern in den dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen gelten, auch auf die Vorzeichenentwicklungen der Zahlen $x \in W$ zu übertragen. Wir zeigen bereits am Beginn dieses Teiles der Arbeit, dass man in dieser Richtung auch bei Benutzung des Hausdorffschen Masses fortschreiten kann.

Es bedeute $p(n, x)$ die Anzahl der Nullen in der (endlichen) Folge $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$, wenn $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ die dyadische Entwicklung der Zahl x ist, dann ist es möglich, wie Vl. Knichal in [3] und A. S. Bezikovič in [7] gezeigt haben, die Hausdorffsche Dimension der Menge $M(\zeta)$ zu berechnen. $M(\zeta)$, $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ bedeutet dabei die Menge aller $x \in (0, 1)$, für die die Ungleichung $p(n, x) < \zeta n$ eine unendliche Anzahl von Lösungen in den natürlichen Zahlen n hat und für $\dim M(\zeta)$

$$\dim M(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta)}{\log \frac{1}{2}}$$

gilt. Wir bemerken noch, dass nach dem Borelschen Satze über die Verteilung der Ziffern in den dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen, $\mu(M(\zeta)) = 0$ ist, weil für jedes $x \in M(\zeta)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n, x)}{n} \leqq \zeta < \frac{1}{2}$$

ist.

Legen wir uns eine analoge Frage auch bei unseren Vorzeichenentwicklungen der Zahlen $x \in W$. Durch Lösung dieser Frage bekommen wir Satz 3,1, der ein zu dem Knichalschen Satze analoger Satz ist. Bei dem Beweis dieses Satzes werden wir das Ergebnis des Satzes 1,1 und folgenden Hilfsatz aus [2] benutzen:

Lemma 3,1. *Man bezeichne*

$$d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad 0 < \zeta \leqq \tfrac{1}{2}\,.$$

Die Funktion $\lambda(n)$ erfülle für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgende Ungleichungen:

$$\binom{n}{[\zeta n - 1]} \leqq \lambda(n) \leqq \sum_{i=0}^{[\zeta n]} \binom{n}{i}; \binom{n}{-1} = 0\,, \quad 0 < \zeta \leqq \frac{1}{2}\,.$$

Dann gilt $\lambda(n) = 2^{n d_n(\zeta)}$, wo $\lim\limits_{n\to\infty} d_n(\zeta) = d(\zeta)$.

Beweis. Siehe [2].

Satz 3,1. *Es sei $\mu(W) > 0$. Es bedeute $W(\zeta)$, $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ die Menge aller derjenigen $x \in W$, für die die Ungleichung $f(n, x) \leqq \zeta n$ unendlich viele Lösungen in natürlichen n hat. Dann gilt*

$$\dim W(\zeta) = d(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}}\,.$$

Bemerkung 3. Nach dem erwähnten Ergebnis aus der Arbeit [6] ist $\mu(W(\zeta)) = 0$, weil für jedes $x \in W(\zeta)$

$$\underline{D}^*(f, x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(n, x)}{n} < \frac{1}{2} \text{ ist}\,.$$

Beweis. a) Es sei

$$\alpha > d(\zeta) \tag{7}$$

und $\varrho > 0$. Wählen wir n_0 so gross, dass $2R_{n_0} \leqq \varrho$ ist. Dann ist für alle $m \geqq n_0$ $W(\zeta) \subset \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} U_n$, wo U_n die Vereinigung aller derjenigen i_n^m ist, zu denen solche Folgen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ gehören, die nie mehr als $[\zeta n]$ der Zahlen 1 enthalten. Die Anzahl P_n der in U_n enthaltenen Intervalle i_n^m ist offenbar

$$P_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{[\zeta n]}\,.$$

Wenn wir mit $W_1(\zeta)$ die Menge aller derjenigen $x \in W(\zeta)$ bezeichnen, die in allen Mengen U_n^0 enthalten sind (U_n^0 bedeutet das Innere der Menge U_n), dann ist $W_1(\zeta) \subset W(\zeta)$ und da $W(\zeta) - W_1(\zeta)$ eine abzählbare Menge ist, ist (siehe [3]) $\dim W(\zeta) = \dim W_1(\zeta)$. Weiter ist offenbar

$$L_\varrho(W_1(\zeta), \alpha) \leqq \sum_{n=m}^{\infty} P_n (2R_n)^\alpha\,.$$

Beachten wir, dass $2^n R_n \to \frac{1}{2}\mu(W) > 0$ und $P_n = 2^{nd_n(\zeta)}$ nach Lemma 3,1 gilt, so bekommen wir

$$L_\varrho(W_1(\zeta), \alpha) \leqq c_1 \sum_{n=m}^{\infty} 2^{nd_n(\zeta)} \cdot \bar{2}^{n\alpha} ;$$

dabei ist $d_n(\zeta) \to d(\zeta)$ und $c_1 > 0$, c_1 ist von m nicht abhängig. Also gilt

$$L_\varrho(W_1(\zeta), \alpha) \leqq c_1 \sum_{n=m}^{\infty} \bar{2}^{n(\alpha - d(\zeta) + o(1))}$$

und aus der Bedingung (7) folgt die Konvergenz der Reihe von rechts. Da die letzte Ungleichung für alle $m \geqq n_0$ gilt, ist

$$L_\varrho(W_1(\zeta), \alpha) = 0\,, \quad L(W_1(\zeta), \alpha) = 0\,,$$
$$\dim W(\zeta) = \dim W_1(\zeta) \leqq d(\zeta)\,.$$

b) Es sei $\alpha < d(\zeta)$ und s bedeute eine natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $W_n(s, \zeta)$ (n ist eine natürliche Zahl) die Vereinigung aller derjenigen $i_{ns}^m \in I_{ns}$, die folgende Eigenschaft haben: i_{ns}^m gehört zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{ns}$, in der für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die Anzahl der Zahlen 1 in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{is}$ gleich der Zahl $[is\zeta]$ ist. Es ist offenbar $W_{n+1}(s, \zeta) \subset W_n(s, \zeta)$. Setzen wir weiter $W(s, \zeta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n(s, \zeta)$. Es ist leicht zu sehen, dass $W(s, \zeta) \subset W(\zeta)$ und

$$D^*(f, x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n} = \zeta$$

für jedes $x \in W(s, \zeta)$ ist. Das kann man so beweisen: Aus der Ungleichung $is \leqq n < (i + 1)\, s$ folgt

$$\frac{is}{(i+1)\,s}\,\frac{f(is, x)}{is} \leqq \frac{f(n, x)}{n} \leqq \frac{f((i+1)\,s, x)}{(i+1)\,s}\,\frac{(i+1)\,s}{is} \tag{8}$$

und da x zu jeder Menge $W_n(s, \zeta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gehört, ist

$$f(is, x) = [is\zeta] \text{ für jedes } i = 1, 2, \ldots\,. \tag{9}$$

Für $n \to \infty$ ist $i \to \infty$ und aus (8) bekommen wir das sofort. Also nach (9) ist

$$W(s, \zeta) \subset W(\zeta)\,, \quad \dim W(\zeta) \geqq \dim W(s, \zeta)$$

für jedes $s = 1, 2, 3, \ldots$ Beachten wir noch, dass $W_n(s, \zeta)$ aus einer endlichen Anzahl $g_{n,s,\zeta}$ der Intervalle $i_{n,s,\zeta}^m$ besteht ($i_{n,s,\zeta}^m = i_{ns}^l$ für ein geeignetes l). Wenn $i_{n,s,\zeta}^m$ zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{ns}$ gehört, dann gehört jedes $i_{n+1,s,\zeta}^k \subset i_{n,s,\zeta}^m$ zur Folge

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{ns}, f_1, f_2, \ldots, f_s\,,$$

dabei ist die Anzahl der Zahlen 1 in der Folge $f_1, f_2, \ldots, f_s$ gleich der Zahl

$$[(n + 1)\, s\zeta] - [ns\zeta] = s\zeta_{n,s}\,.$$

Daraus kann man sehen, dass jedes der Intervalle $i_{n,s,\zeta}^m$ die gleiche Anzahl

$\dfrac{g_{n+1,s,\zeta}}{g_{n,s,\zeta}} = \binom{s}{s\zeta_{n,s}}$ der Intervalle $i^k_{n+1,s,\zeta}$ enthält. Da $g_{1,s,\zeta} = \binom{s}{[\zeta s]}$ ist, ist $g_{n,s,\zeta} = \prod_{i=1}^{n} \binom{s}{s\zeta_{i,s}}$. Es ist weiter offenbar $s\zeta - 1 \leqq s\zeta_{i,s} \leqq s\zeta + 1$, $\zeta_{i,s} \geqq \zeta - \dfrac{1}{s}$ und also für alle hinreichend grossen s

$$g_{n,s,\zeta} \geqq \binom{s}{[\zeta s - 1]}^n \quad \text{und} \quad \binom{s}{[\zeta s - 1]}^n = 2^{nsd_s(\zeta)}$$

im Sinne des Lemma 3,1.

Jetzt wenden wir den Satz 1,1 an. Bei der Bezeichnung des Satzes 1,1 ist $\mu = \varliminf_{n\to\infty} \mu_n \geqq s\, d_s(\zeta)$ und $l^* = \lim_{n\to\infty} \dfrac{R_{(n+1)s}}{R_{ns}}$ und da $2^k R_k \to \dfrac{1}{2}\mu(W) > 0$, folgt daraus $l^* = 2^{-s}$ und also

$$\dim W(s, \zeta) = \frac{\mu \log 2}{\log \dfrac{1}{l^*}} \geqq d_s(\zeta)\,.$$

Also

$$\dim W(\zeta) \geqq d_s(\zeta)$$

für alle hinreichend grossen s und

$$\dim W(\zeta) \geqq \lim_{s\to\infty} d_s(\zeta) = d(\zeta)\,.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Im Zusammenhang mit dem zum Satze von Borel analogen Satze aus der Arbeit [6] wird folgende Frage aufgeworfen:

Was kann man über die Verteilung der Zahlen 1, —1 in den Vorzeichenentwicklungen der Zahlen $x \in W$ sagen, wenn $\mu(W) = 0$ ist?

Wir geben in diesem Fall eine untere Abschätzung für $\dim \overline{W}$, wo $\overline{W}$ die Menge aller derjenigen $x \in W$ ist, für die

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$$

gilt.

Satz 3,2. *Es sei* $\mu(W) = 0$ *und* $\overline{W} = \underset{x\in W}{E}\, D^*(f, x) = \frac{1}{2}$. *Dann gilt* $\dim \overline{W} \geqq f(l)$, *wo* $l = \varliminf_{n\to\infty} \dfrac{R_{n+1}}{R_n}$.

Beweis. Für $l = 0$ ist der Satz trivial, weil $f(0) = 0$ ist. Es sei also $l > 0$. Bezeichnen wir bei geradem $s \geqq 2$ mit $W(n, s)$ die Menge, die aus allen denjenigen $i^m_{ns} \in I_{ns}$ besteht, die die folgende Eigenschaft haben:

i^m_{ns} gehört zu einer solchen Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{ns}$, dass für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots,$

n die Anzahl der Zahlen 1 in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{is}$ gleich der Zahl $\frac{1}{2}is$ ist. Es ist offenbar $W(n+1, s) \subset W(n, s)$. Wir setzen

$$W(s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W(n, s) .$$

Es ist sofort zu sehen, dass $W(s) \subset W$ und für jedes $x \in W(s)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$$

ist (das kann man ähnlich beweisen wie in dem vorhergehenden Satz). Also $W(s) \subset \overline{W}$ für jedes gerade $s \geqq 2$. Weiter $W(n, s)$ besteht aus einer endlichen Anzahl $g_{n,s}$ der Intervalle $i^m_{n,s}$, jedes dieser Intervalle hat die Länge $2R_{ns}$ (es ist $i^m_{n,s} = i^l_{ns}$ für ein geeignetes l). Es gehöre $i^m_{n,s}$ zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{ns}$ und es sei $i^k_{n+1,s} \subset i^m_{n,s}$. Dann gehört $i^k_{n+1,s}$ zur Folge

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{ns}, f_1, f_2, \ldots, f_s ,$$

dabei ist die Anzahl der Zahlen 1 in der Folge $f_1, f_2, \ldots, f_s$ gleich der Zahl $\frac{1}{2}(n+1)\, s - \frac{1}{2}ns = \frac{1}{2}s = f$. Ähnlich wie im vorhergehenden Satze kann man feststellen, dass $g_{n,s} \geqq \binom{s}{\frac{1}{2}s - 1}^n$ ist und jedes der Intervalle $i^m_{n,s}$ $(m = 1, 2, \ldots, g_{n,s})$ enthält die gleiche Anzahl der Intervalle $i^k_{n+1,s}$.

Wir wenden jetzt Satz 1,1 an. Daher, wie aus dem Beweis des Lemma 3,1 folgt (siehe [2]), hat Lemma 3,1 Gültigkeit auch dann, wenn wir statt n nur gerade natürliche Zahlen nehmen und erhalten daraus

$$g_{n,s} \geqq 2^{nsd_s(\frac{1}{2})} , \quad \lim_{s\to\infty} d_s(\tfrac{1}{2}) = d(\tfrac{1}{2}) = 1 ,$$

$$l' = \varliminf_{n\to\infty} \frac{R_{(n+1)s}}{R_{ns}} = \varliminf_{n\to\infty} \left[\frac{R_{(n+1)s}}{R_{(n+1)s-1}} \frac{R_{(n+1)s-1}}{R_{(n+1)s-2}} \cdots \frac{R_{ns+1}}{R_{ns}}\right] =$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} [\tau((n+1)\, s - 1)\, \tau((n+1)\, s - 2) \ldots \tau(ns)] ,$$

wo $\tau(k) = \dfrac{R_{k+1}}{R_k}$ ist. Es sei $l = \varliminf_{k\to\infty} \tau(k)$, $0 < \varepsilon < l^s$. Wählen wir $\varepsilon' > 0$ so, dass $\varepsilon' = l - \sqrt[s]{l^s - \varepsilon}$ ist, also $\varepsilon' < l$. Dann wird für alle hinreichend grossen n

$$\tau(ns)\, \tau(ns+1) \ldots \tau((n+1)\, s - 1) > (l - \varepsilon')^s = l^s - \varepsilon ,$$

also $l' \geqq l^s$ und so nach Satz 1,1

$$\dim W(s) \geqq \frac{\mu \log 2}{\log \dfrac{1}{l'}} \geqq \frac{s\, d_s(\frac{1}{2}) \log 2}{s \log \dfrac{1}{l}} ,$$

$$\dim \overline{W} = d_s\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\log 2}{\log \dfrac{1}{l}} = d_s\left(\frac{1}{2}\right) . f(l) .$$

Da das für alle geraden natürlichen Zahlen $s \geqq 2$ richtig ist, bekommen wir $\dim \overline{W} \geqq f(l)$.

Folgerung. Wenn $l^* = \lim_{n \to \infty} \tau(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$ existiert (diese Eigenschaft haben die Reihen $\sum_1^\infty a_n$, für die $R_n \sim K^{-n}$, $K > 2$ ist), dann gilt $\dim \overline{W} = \dim W$. In diesem Fall stellt die Menge $\overline{W}$ im Sinne des Hausdorffschen Masses „einen wesentlichen Teil" der Menge W vor.

LITERATUR

[1] *F. Hausdorff*: Dimension und äusseres Mass, Math. Ann., *79* (1917), 157—179.

[2] *B. Volkmann*: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen, Jour. rein. u. angew. Math. *190* (1952), 199—230.

[3] *Vl. Knichal*: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass, Věst. Král. Čes. spol. nauk, *XIV* (1933), 1—19.

[4] *T. Šalát*: O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi, Sbor. prác Prír. fak. UK, *II* (1957), 71—76.

[5] *T. Šalát*: O istých priestoroch radov s Baireovskou metrikou, Mat.-fyz. čas. SAV, *VII* (1957), 193—205.

[6] *T. Šalát*: Absolútne konvergentné rady a dyadické rozvoje, Mat.-fyz. čas. SAV, *VIII* (1958), 3—14.

[7] *A. S. Bezikovič*: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic System, Math. Ann. *110* (1934), 321—330.

Резюме

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И МЕРА ХАУСДОРФА

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

(Поступило в редакцию 3/IX 1958 г.)

В этой работе автор изучает с точки зрения меры Хаусдорфа линейные множества, определенные некоторыми абсолютно сходящиемися рядами.

В первой части автор доказывает общую теорему (теорема 1,1) о хаусдорфской размерности линейных множеств. Пусть $M \subset \langle -A, A \rangle$, $A > 0$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, $I_1 \subset \langle -A, A \rangle$, I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ состоит из конечного числа g_n непересекающихся замкнутых интервалов одинаковой длины λ_n. Пусть существует $a \in (0, 1)$ так, что для $n = 1, 2, 3, \ldots$ будет $\tau_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leqq a$. Далее, положим $l = \varliminf_{n \to \infty} \tau(n)$, $L = \varlimsup_{n \to \infty} \tau(n)$ и на интервале

$\langle 0, a\rangle$ определим функцию $f(x)$ так: $f(0) = 0$ и для $0 < x \leqq a$ пусть $f(x) = \dfrac{\log 2}{\log \dfrac{1}{x}}$.

Тогда справедлива

Теорема 1,1. *Пусть множество M обладает указанными выше свойствами. Пусть*

$$g_n = 2^{n\mu_n}, \quad \mu = \varliminf_{n\to\infty} \mu_n < +\infty,$$

пусть каждое из множеств I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ состоит из g_n интервалов i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$, пусть каждый из интервалов i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$ содержит одинаковое число интервалов $i_{n+1}^m \in I_{n+1}$. Тогда

$$\mu f(l) \leqq \dim M \leqq \mu f(L).$$

Следствие. Если существует $l^* = \lim\limits_{u\to\infty} \tau(n)$, то $\dim M = \mu f(l^*)$.

В дальнейшем автор использует результат теоремы 1,1 для изучения множеств W, определенных следующим образом: Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходящийся ряд с положительными членами, пусть $a_k > R_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ Отсюда следует $\dfrac{R_{n+1}}{R_n} < \dfrac{1}{2}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначим через W множество всех тех вещественных чисел x, которые можно выразить в виде $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, где $\varepsilon_n = 1$ или -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Тогда имеет место

Теорема 2,1. $f(l) \leqq \dim W \leqq f(L)$, *где*

$$l = \varliminf_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

и функция $f(x)$ определена на интервале $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, как и в теореме 1,1.

Следствие. Если существует $l^* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R_{n+1}}{R_n}$, то $\dim W = f(l^*)$. Следовательно, для $l^* > 0$ будет $\dim W = \dfrac{\log 2}{\log \dfrac{1}{l^*}}$.

Из результата теоремы 2,1 легко получить соотношение между $\dim W$ и величинами членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ в двух крайних случаях.

Теорема 2,2. *Пусть* $\dim W = 0$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует бесконечное количество натуральных чисел* n *так, что* $a_{n+1} < \epsilon a_n$.

Теорема 2,3. *Пусть* $\dim W = 1$. *Тогда для каждого* q, $0 < q < \frac{1}{2}$, *существует бесконечное количество натуральных чисел* n *так, что* $a_{n+1} > > q a_n$.

Пусть $x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \in W$. Обозначим в дальнейшем через $f(n, x)$ количество чисел 1 в (конечной) последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, через $g(n, x)$ количество чисел -1 в той же последовательности. Пусть в дальнейшем $\mu(M)$ обозначает лебеговскую меру множества M; тогда легко показать, что

$$\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n .$$

Теорема 3,1. *Пусть* $\mu(W) > 0$. *Обозначим символом* $W(\zeta)$, $0 < \zeta < \frac{1}{2}$, *множество всех тех* $x \in W$, *для которых неравенство* $f(n, x) \leqq \zeta n$ *имеет бесконечное количество решений в натуральных числах* n. *Тогда*

$$\dim W(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta)\log(1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} .$$

Эта теорема является аналогом теоремы, доказанной *Вл. Книхалом* и *А. С. Безиковичем* (см. (3) и (7)) о распределении цифр в двоичных разложениях вещественных чисел интервала (0, 1).

Если $\mu(W) > 0$, то, как показал автор в работе [6], для почти всех $x \in W$ (в смысле меры Лебега) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$. Итак, лебеговская мера $\mu(\overline{W})$ множества $\overline{W} = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x \in W} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x, n)}{n} = \frac{1}{2}$ равна $\mu(W)$. Аналогичный результат дает теорема 3,2 для меры Хаусдорфа.

Теорема 3,2. *Пусть* $\mu(W) = 0$; *обозначим*

$$\overline{W} = \mathop{\mathrm{E}}_{x \in W} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2} .$$

Тогда $\dim \overline{W} \geqq f(l)$, *где* $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$.

Следствие. Если существует $l^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$, что имеет наличие например в случае рядов $\sum_1^\infty a_n$, для которых $\sum_{m=1}^\infty a_{n+m} = R_n \sim K^{-n}$, $K > 2$, то $\dim W = \dim \overline{W}$.