Miroslav Novotný

Über quasi-geordnete Mengen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 327–333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100360

ÜBER QUASI-GEORDNETE MENGEN

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno

(Eingelangt am 24. März 1958)

In der Arbeit werden zwei verschiedene Arten von $\aleph_\nu$-universellen Mengen für quasi-geordnete Mengen konstruiert. Unter einer $\mathfrak{m}$-universellen Menge wird hier eine Menge mit einer binären Relation verstanden, die zu jeder quasi-geordneten Menge, deren Mächtigkeit höchstens $\mathfrak{m}$ gleich ist, eine isomorphe Teilmenge enthält.

In der mathematischen Literatur wurden die sogenannten $\mathfrak{m}$-universellen Mengen für einfach geordnete bzw. geordnete Mengen studiert, d. h. Mengen, die zu jeder einfach geordneten bzw. geordneten Menge, deren Mächtigkeit höchstens $\mathfrak{m}$ gleich ist, eine isomorphe Teilmenge enthalten. So hat z. B. F. HAUSDORFF die η_ξ-Mengen studiert ([4], S. 181). Ich habe einen Satz bewiesen, der in BIRKHOFFS Terminologie folgendermaßen formuliert werden kann [6]: Jede geordnete Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ ist zu einer Teilmenge der Kardinalpotenz $2^{\aleph_\nu}$ isomorph. Also ist die Kardinalpotenz $2^{\aleph_\nu}$ eine $\aleph_\nu$-universelle Menge, deren Mächtigkeit $2^{\aleph_\nu}$ gleich ist. Eine $\aleph_\nu$-universelle Menge von der Mächtigkeit $2^{\aleph_\nu}$ hat auch J. B. JOHNSTON konstruiert [5].

In der vorliegenden Arbeit werden universelle Mengen für quasi-geordnete Mengen konstruiert.

Es sei M bzw. M^* eine Menge mit einer binären Relation ϱ bzw. ϱ^*. Die Mengen M, M^* heißen isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung f der Menge M auf die Menge M^* gibt, für welche $f(x)\ \varrho^*\ f(y)$ genau dann gilt, wenn $x\varrho y$. Isomorphe Mengen nennen wir auch Mengen von gleichem Typus. Wenn die Relation ϱ auf der Menge M reflexiv und transitiv ist, so heißt die Menge quasi-geordnet; ist sie überdies antisymmetrisch, so heißt die Menge geordnet; die Relation ϱ wollen wir in diesen Fällen mit $\leqq$ bezeichnen. Ist die Menge M durch die Relation $\leqq$ geordnet, so heißt diese Relation Ordnungsrelation. Den Typus einer geordeten Menge nennen wir Ordnungstypus.[1])

Ist Q eine beliebige quasi-geordnete Menge, $x, y \in Q$, setzen wir $x \equiv y$ genau dann, wenn $x \leqq y$, $y \leqq x$ gilt. Es ist bekannt, daß die Relation $\equiv$ eine Äquiva-

[1]) In [2] heißt der Ordnungstypus „Number".

lenz ist, die eine Zerlegung der Menge Q definiert, die wir mit $\overline{Q}$ bezeichnen werden. Es sei $X, Y \in \overline{Q}$. Setzen wir $X \leqq Y$ genau dann, wenn $x \leqq y$ für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt, so ist die Menge $\overline{Q}$ durch diese Relation $\leqq$ geordnet. Für ein beliebiges $x \in Q$ wollen wir weiter mit $\alpha(x)$ die Klasse $X \in \overline{Q}$ bezeichnen, für die $x \in X$ gilt.

Es sei $\mathfrak{m}$ eine beliebig gegebene Kardinalzahl. $R(\mathfrak{m})$ soll eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ bedeuten, in der eine Ordnungsrelation so definiert ist, daß zwei verschiedene Elemente stets unvergleichbar sind. Mit $\mathfrak{m}$ wollen wir den Ordnungstypus aller zu $R(\mathfrak{m})$ isomorphen geordneten Mengen bezeichnen. Ist μ eine beliebig gegebene Ordnungszahl, so soll $R(\mu)$ die Menge aller Ordnungszahlen $\lambda < \mu$ bedeuten, deren Elemente der Größe nach geordnet sind. Mit μ wollen wir den Ordnungstypus aller zu $R(\mu)$ isomorphen Mengen bezeichnen. Endliche Ordnungszahlen sollen mit $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ bezeichnet werden, mit ω_ν wollen wir die kleinste Ordnungszahl von der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ bezeichnen. Also ist z. B. $R(\mathbf{2})$ eine einfach geordnete Menge, die aus den Elementen $\mathbf{0} < \mathbf{1}$ besteht; $\mathbf{2}$ ist der Ordnungstypus derselben. Ist G eine geordnete Menge, so ist $\breve{G}$ die zu G dual geordnete Menge. Also ist z. B. $\overset{\smile}{R(\omega_\nu)}$ die zu $R(\omega_\nu)$ dual geordnete Menge; ihren Ordnungstypus wollen wir mit $\breve{\omega}_\nu$ bezeichnen.

Ist f eine Abbildung der Menge M in die Menge N, so werden wir sie ausführlich mit $\{f(u)\}$ oder $\{f(u)\}_{u \in M}$ bezeichnen. Im Falle $M = R(\mu)$ soll jede Abbildung dieser Menge in die Menge N eine Folge vom Typus μ, die aus den Elementen der Menge N gebildet ist, heißen.

Für geordnete Mengen hat Birkhoff (vergl. [1], Kap. I, §§ 7, 8 oder [2]) drei Kardinal- und drei Ordnungsoperationen eingeführt und zwar Addition, Multiplikation und Potenzierung. Für diese Operationen werden wir die Birkhoff'sche Symbolik gebrauchen, also ist z. B. M^N die Kardinalpotenz, $A \oplus B$, ${}^N M$ die Ordnungssumme und Ordnungspotenz. Außerdem werden wir die Operationen mit Ordnungszahlen gebrauchen; diese werden ebenso wie in Hausdorffs Buch ([4], Kap. IV, § 2, Kap. V, § 2) definiert und symbolisiert. Also ist z. B. $\lambda + \mu$, $-\lambda + \mu$, $\lambda\mu$ die Summe, Differenz und Produkt zweier Ordnungszahlen. Der Gebrauch der Birkhoff'schen und Hausdorff'schen Symbolik kann in dieser Arbeit zu keinem Mißverständnis führen. Für eine endliche Ordnungszahl $\boldsymbol{n}$ schreibe ich $\aleph_{\nu+n}$, $\omega_{\nu+n}$ anstatt $\aleph_{\nu+\boldsymbol{n}}$, $\omega_{\nu+\boldsymbol{n}}$, wie es üblich ist.

Während die übrigen fünf Birkhoff'schen Operationen wieder zu geordneten Mengen führen, ist die Ordnungspotenz im allgemeinen nicht einmal quasigeordnet, wie M. M. Day gezeigt hat [3]. Jedoch sind die Ordnungspotenzen vom Typus ${}^{\aleph_\nu \oplus \breve{\omega}_\nu}\mathbf{2}$ in gewissem Sinne universelle Mengen für quasi-geordnete Mengen. Es gilt nämlich

Satz 1. *Es sei ν eine beliebig gegebene Ordnungszahl. Zu jeder quasi-geordneten Menge Q, deren Mächtigkeit höchstens $\aleph_\nu$ gleich ist, gibt es in der Menge vom Typus ${}^{\aleph_\nu \oplus \breve{\omega}_\nu}\mathbf{2}$ eine isomorphe Teilmenge.*

Beweis. I. Die zu Q oben konstruierte Menge $\bar{Q}$ ist geordnet und ihre Mächtigkeit ist höchstens $\aleph_\nu$ gleich. Also ist $\bar{Q}$ zu einer Teilmenge der Kardinalpotenz $R(2)^{R(\aleph_\nu)}$ isomorph [6]; die letztere ist aber der Ordnungspotenz ${}^{R(\aleph_\nu)}R(2)$ gleich. $\bar{Q}$ ist daher zu einer Teilmenge der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)}R(2)$ isomorph; das zu $X \in \bar{Q}$ gehörende Element der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)}R(2)$ ist eine Abbildung der Menge $R(\aleph_\nu)$ in die Menge $R(2)$, die wir mit $\{F_X(u)\}_{u \in R(\aleph_\nu)}$ bezeichnen wollen.

II. Es sei Φ die Menge aller Abbildungen der Menge $R(\omega_\nu)$ in die Menge aller Primzahlen $p > 1$; die Menge $R(\omega_\nu)$ wird dabei als fremd zur Menge $R(\aleph_\nu)$ vorausgesetzt. Zu jeder Abbildung $f \in \Phi$ definieren wir die Abbildung A_f der Menge $R(\omega_\nu)$ in die Menge $R(2)$: Für jedes $l \in R(\omega_\nu)$ soll $m \in R(\omega_\nu)$, $n \in R(\omega_0)$ solche Ordnungszahlen bedeuten, für welche $l = \omega_0 m + n$ gilt (solche gibt es und sind eindeutig bestimmt). Wir setzen dann

$$A_f(l) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ durch } f(m) \text{ teilbar ist.} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ durch } f(m) \text{ nicht teilbar ist.} \end{cases}$$

Es sei A die Menge aller A_f, $f \in \Phi$. Jede Abbildung $a \in A$ ist eine Abbildung der Menge $R(\omega_\nu)$ in die Menge $R(2)$; es ist daher $A \subseteq {}^{R(\omega_\nu)}R(2)$. Damit ist in der Menge A die Relation $\leqq$ definiert.

Sind $\{a(u)\}$, $\{b(u)\}$ beliebige Elemente der Menge A, so sieht man leicht folgendes ein: Wenn für ein Element $u_0 \in R(\omega_\nu)$ die Relation $a(u_0) = 1 > 0 = b(u_0)$ gilt, so gibt es ein Element $u_1 \in R(\omega_\nu)$, für welches $u_1 < u_0$ in $R(\omega_\nu)$ und $a(u_1) = 0 < 1 = b(u_1)$ gilt. Es ist daher $\{a(u)\} \nleqq \{b(u)\}$; ähnlich beweist man $\{b(u)\} \nleqq \{a(u)\}$. Die Mächtigkeit der Menge A ist der Mächtigkeit der Menge Φ gleich, also ist sie $\aleph_0^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} > \aleph_\nu$. Die Mächtigkeit einer beliebigen Menge $X \in \bar{Q}$ ist höchstens $\aleph_\nu$ gleich. Zu jeder Menge $X \in \bar{Q}$ gibt es daher eine eineindeutige Abbildung ψ_X der Menge X in die Menge $A \subseteq {}^{R(\omega_\nu)}R(2)$, die offenbar ein Isomorphismus der Menge X auf eine Teilmenge von A ist. Das Element $\psi_X(x)$ gehört zu der Menge ${}^{R(\omega_\nu)}R(2)$; es ist daher eine Abbildung der Menge $R(\omega_\nu)$ in die Menge $R(2)$, die wir mit $\{G_{X,x}(u)\}$ bezeichnen wollen.

III. Zu jedem $x \in Q$ definieren wir eine Abbildung $\{H_x(u)\}$ der Menge $R(\aleph_\nu) \oplus R(\omega_\nu)$ in die Menge $R(2)$:

$$H_x(u) = \begin{cases} F_{\alpha(x)}(u), & \text{wenn } u \in R(\aleph_\nu)\,. \\ G_{\alpha(x),x}(u), & \text{wenn } u \in R(\omega_\nu)\,. \end{cases}$$

Es gilt daher $\{H_x(u)\} \in {}^{R(\aleph_\nu) \oplus R(\omega_\nu)}R(2)$. In der Menge aller Abbildungen $\{H_x(u)\}$, $x \in Q$, ist damit die Relation $\leqq$ definiert.

Die Abbildung $x \to H_x$ ist ein Isomorphismus. In der Tat, diese Abbildung ist offenbar eineindeutig. Es sei $x, y \in Q$, $x \leqq y$. Es ist daher entweder (1) $\alpha(x) = \alpha(y)$ oder (2) $\alpha(x) < \alpha(y)$. Im ersten Falle haben wir $F_{\alpha(x)}(u) = F_{\alpha(y)}(u)$ für jedes $u \in R(\aleph_\nu)$. Da $\{G_{\alpha(x),x}(u)\}$, $\{G_{\alpha(x),y}(u)\} \in A$ ist, so ist auch $\{G_{\alpha(x),x}(u)\} \leqq$

$\leqq \{G_{\alpha(x),y}(u)\}$ in der Menge ${}^{\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$. Daraus folgt unmittelbar $\{H_x(u)\} \leqq$ $\leqq \{H_y(u)\}$ in der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)\oplus\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$. Im zweiten Falle ist $\{F_{\alpha(x)}(u)\} <$ $< \{F_{\alpha(y)}(u)\}$ in der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)}R(2)$ und daher auch $\{H_x(u)\} < \{H_y(u)\}$ in der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)\oplus\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$.

Es seien endlich $x, y \in Q$ Elemente mit der Eigenschaft $\{H_x(u)\} \leqq \{H_y(u)\}$ in ${}^{R(\aleph_\nu)\oplus\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$. Zwei Fälle können eintreten: (1) $F_{\alpha(x)}(u) = F_{\alpha(y)}(u)$ für jedes $u \in R(\aleph_\nu)$. (2) Es gibt ein Element $u_0 \in R(\aleph_\nu)$ mit der Eigenschaft $F_{\alpha(x)}(u_0) \neq$ $\neq F_{\alpha(y)}(u_0)$. Im ersten Falle haben wir $\alpha(x) = \alpha(y)$, also $x \leqq y$. Im zweiten Falle ist $\{F_{\alpha(x)}(u)\} < \{F_{\alpha(y)}(u)\}$ in der Menge ${}^{R(\aleph_\nu)}R(2)$ und daher auch $\alpha(x) <$ $< \alpha(y)$, woraus sich $x < y$ ergibt.

Also ist die Menge aller H_x, $x \in Q$, eine Teilmenge von ${}^{R(\aleph_\nu)\oplus\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$, die zu der Menge Q isomorph ist. Da die Menge ${}^{R(\aleph_\nu)\oplus\widetilde{R(\omega_\nu)}}R(2)$ den Typus ${}^{\aleph_\nu\oplus\breve{\omega}_\nu}2$ hat, ist damit alles bewiesen.

Es sei ν eine beliebig gegebene Ordnungszahl, N eine beliebig gegebene nichtleere Menge. Wir bezeichnen mit $F(\omega_\nu, N)$ die Menge aller Folgen vom Typus ω_ν, die aus den Elementen der Menge N gebildet sind. Es seien $\{a(u)\}_{u \in R(\omega_\nu)}$ $\{b(u)\}_{u \in R(\omega_\nu)}$ beliebige Folgen, die der Menge $F(\omega_\nu, N)$ angehören. Die zweite soll eine Teilfolge der ersten heißen, wenn es eine streng wachsende Folge $\{u(v)\}_{v \in R(\omega_\nu)}$ vom Typus ω_ν gibt, die aus den Ordnungszahlen $u(v) < \omega_\nu$ gebildet ist, für welche $a[u(v)] = b(v)$ bei jedem $v \in R(\omega_\nu)$ gilt. Für beliebige Folgen $\{a(u)\}$, $\{b(u)\}$ der Menge $F(\omega_\nu, N)$ setzen wir $\{b(u)\} \leqq \{a(u)\}$ dann und nur dann, wenn die Folge $\{b(u)\}$ eine Teilfolge der Folge $\{a(u)\}$ ist. Damit ist in der Menge $F(\omega_\nu, N)$ die binäre Relation $\leqq$ definiert. Man sieht leicht ein, daß diese Relation $\leqq$ eine Quasi-Ordnung der Menge $F(\omega_\nu, N)$ ist.

Bemerkung 1. Ist

$$a(u) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leqq u < \omega_0, \ u \text{ ungerade}, \\ 0 \text{ für } 0 \leqq u < \omega_0, \ u \text{ gerade, oder } \omega_0 \leqq u < \omega_\nu, \end{cases}$$

$$b(u) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leqq u < \omega_0, \ u \text{ gerade}, \\ 0 \text{ für } 0 \leqq u < \omega_0, \ u \text{ ungerade, oder } \omega_0 \leqq u < \omega_\nu, \end{cases}$$

so ist $\{a(u)\} \leqq \{b(u)\}$, $\{b(u)\} \leqq \{a(u)\}$, $\{a(u)\} \neq \{b(u)\}$ in der Menge $F[\omega_\nu, R(2)]$. Also ist die Relation $\leqq$ keine Ordnung.

Bemerkung 2. Haben die Mengen N, N^* die gleiche Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so sind die Mengen $F(\omega_\nu, N)$, $F(\omega_\nu, N^*)$ isomorph. Ihr Typus wird mit $F(\omega_\nu, \mathfrak{m})$ bezeichnet.

Auch die Mengen vom Typus $F(\omega_\nu, \mathfrak{m})$ sind in gewissem Sinne universelle Mengen für quasi-geordnete Mengen. Es gilt

Satz 2. *Es sei ν eine beliebig gegebene Ordnungszahl. Zu jeder quasi-geordneten Menge Q, deren Mächtigkeit höchstens $\aleph_\nu$ gleich ist, gibt es in der Menge vom Typus $F(\omega_{\nu+2}, \aleph_\nu)$ eine isomorphe Teilmenge.*

Beweis. I. Die zu Q oben konstruierte geordnete Menge $\overline{Q}$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{m} \leqq \aleph_\nu$. Es sei μ die kleinste Ordnungszahl von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Es sei $\{X(u)\}_{u \in R(\mu)}$ eine Folge, die aus allen Elementen der Menge $\overline{Q}$ gebildet ist, in der jedes Element dieser Menge genau einmal auftritt. Für jedes $X_0 \in \overline{Q}$ setzen wir noch $P(X_0) = \{X \mid X \in \overline{Q},\ X \leqq X_0\}$.[2])

Zu jedem $X_0 \in \overline{Q}$ wird jetzt die Folge $\{F_{X_0}(u)\}_{u \in R(\omega_{\nu+1})}$ vom Typus $\omega_{\nu+1}$ nach folgendem Gesetz gebildet:

(1) $F_{X_0}(0)$ ist jenes Element $X(u) \in P(X_0)$, welches den kleinsten Index u hat.

(2) Es sei $v \in R(\omega_{\nu+1})$, $v > 0$. Setzen wir voraus, daß $F_{X_0}(0), F_{X_0}(1), \ldots, F_{X_0}(u), \ldots$ für jedes $u < v$ konstruiert ist. Wir setzen $P(X_0, v) = \{X \mid X \in P(X_0),\ X \neq F_{X_0}(u)$ für jedes $u < v\}$.

(α) Ist die Menge $P(X_0, v)$ nicht leer, so setzen wir $F_{X_0}(v) = X(w)$, wo $X(w) \in P(X_0, v)$ jenes Element der Menge $P(X_0, v)$ ist, welches den kleinsten Index w hat.

(β) Ist die Menge $P(X_0, v)$ leer, so setzen wir $F_{X_0}(v) = 0$. Dabei setzen wir voraus, daß die Mengen $\overline{Q}$, $R(2)$ einander fremd sind.

II. Die Abbildung $X \to F_X$ ist ein Isomorphismus der Menge $\overline{Q}$ auf eine Teilmenge der Menge $F(\omega_{\nu+1}, N)$, wo $N = \overline{Q} \cup R(2)$.

Diese Abbildung ist offenbar eineindeutig. Für $X, Y \in \overline{Q}$ haben wir $X \leqq Y$ genau dann, wenn $P(X) \subseteq P(Y)$. Es gibt ein Element $w_0 \in R(\omega_{\nu+1})$ mit der Eigenschaft, daß $F_X(w) \in P(X)$ für jedes $w < w_0$ gilt, während $F_X(w) = 0$ für $w_0 \leqq w < \omega_{\nu+1}$ ist. Die Relation $P(X) \subseteq P(Y)$ ist daher dann und nur dann gültig, wenn es zu jedem $w < w_0$ ein $z(w) \in R(\omega_{\nu+1})$ gibt, für welches $F_X(w) = F_Y[z(w)]$ gilt; $\{z(w)\}_{w \in R(w_0)}$ ist dabei offenbar eine streng wachsende Folge. Letzteres findet gerade dann statt, wenn eine streng wachsende Folge $\{z(w)\}_{w \in R(\omega_{\nu+1})}$ vom Typus $\omega_{\nu+1}$ existiert, die aus den der Menge $R(\omega_{\nu+1})$ angehörenden Ordnungszahlen besteht und für die $F_X(w) = F_Y[z(w)]$ bei jedem $w \in R(\omega_{\nu+1})$ gilt. Das folgt aus der Tatsache, daß die Mächtigkeit der Mengen $P(X)$, $P(Y)$ kleiner als $\aleph_{\nu+1}$ ist; daher sind alle Glieder der Folgen $\{F_X(w)\}$, $\{F_Y(w)\}$ von einem Index an gleich Null. Also ist $X \leqq Y$ genau dann, wenn $\{F_X(w)\} \leqq \{F_Y(w)\}$ gilt.

III. Es sei jetzt A die Menge aller Folgen $\{a(u)\}_{u \in R(\omega_{\nu+2})}$ vom Typus $\omega_{\nu+2}$, die aus den Elementen der Menge $R(2)$ gebildet sind und die folgende Eigenschaft (α) haben:

(α) Ist $u \in R(\omega_{\nu+2})$, so existieren die Elemente $u', u'' \in R(\omega_{\nu+2})$, für welche $u' > u$, $u'' > u$, $a(u') = 0$, $a(u'') = 1$ gilt.

[2]) Es sei M eine Menge, E eine Eigenschaft, welche jedes Element $x \in M$ entweder hat oder nicht hat. Hat das Element $x \in M$ die Eigenschaft E, so schreiben wir $E(x)$. Dann ist $\{x \mid E(x)\}$ die Menge aller Elemente, die die Eigenschaft E haben.

Es ist jetzt $A \subseteq F[\omega_{\nu+2}, R(2)]$. Man überzeugt sich leicht, daß für $\{a(u)\}$, $\{b(u)\} \in A$ immer $\{a(u)\} \leqq \{b(u)\}$, $\{b(u)\} \leqq \{a(u)\}$ gilt. Die Mächtigkeit der Menge A ist der Mächtigkeit des Systems aller Folgen vom Typus $\omega_{\nu+2}$, die aus den der Menge $R(\omega_{\nu+2})$ gehörenden Ordnungszahlen gebildet sind, gleich; also ist sie $\aleph_{\nu+2}^{\aleph_{\nu+2}} > \aleph_{\nu+2} > \aleph_\nu$. Die Mächtigkeit einer beliebigen Menge $X \in \overline{Q}$ ist höchstens $\aleph_\nu$ gleich. Zu jeder Menge $X \in \overline{Q}$ gibt es daher eine eineindeutige Abbildung ψ_X der Menge X in die Menge $A \subseteq F[\omega_{\nu+2}, R(2)]$, die offenbar ein Isomorphismus der Menge X auf eine Teilmenge von A ist. Das Element $\psi_X(x)$ gehört zu der Menge $F[\omega_{\nu+2}, R(2)] \subseteq F(\omega_{\nu+2}, N)$; es ist daher eine Folge vom Typus $\omega_{\nu+2}$ die wir mit $\{G_{X,x}(u)\}_{v \in R(\omega_{\nu+2})}$ bezeichnen wollen.

IV. Zu jedem $x \in Q$ definieren wir jetzt eine Folge $\{H_x(u)\}_{u \in R(\omega_{\nu+2})}$ vom Typus $\omega_{\nu+2}$:

$$H_x(u) = \begin{cases} F_{\alpha(x)}(u), \text{ wenn } u \in R(\omega_{\nu+1}) \text{ ist} . \\ G_{\alpha(x),x}(-\,\omega_{\nu+1} + u), \text{ wenn } u \in R(\omega_{\nu+2}) - R(\omega_{\nu+1}) \text{ ist} . \end{cases}$$

Es gilt daher $\{H_x(u)\}_{u \in R(\omega_{\nu+2})} \in F(\omega_{\nu+2}, N)$. In der Menge aller Folgen $\{H_x(u)\}$, $x \in Q$, ist damit die Relation $\leqq$ definiert.

Die Abbildung $x \to H_x$ ist ein Isomorphismus. In der Tat, diese Abbildung ist offenbar eineindeutig. Es sei $x, y \in Q$, $x \leqq y$. Dann ist auch $\alpha(x) \leqq \alpha(y)$ und daher auch $\{F_{\alpha(x)}(u)\} \leqq \{F_{\alpha(y)}(u)\}$ in der Menge $F(\omega_{\nu+1}, N)$. Es gilt auch $\{G_{\alpha(x),x}(u)\} \leqq \{G_{\alpha(y),y}(u)\}$ in der Menge $F(\omega_{\nu+2}, N)$. Es gibt daher eine streng wachsende Folge $\{u(w)\}_{w \in R(\omega_{\nu+1})}$ vom Typus $\omega_{\nu+1}$, die aus den Ordnungszahlen der Menge $R(\omega_{\nu+1})$ gebildet ist, und eine streng wachsende Folge $\{v(w)\}_{w \in R(\omega_{\nu+2})}$ vom Typus $\omega_{\nu+2}$, die aus den Ordnungszahlen der Menge $R(\omega_{\nu+2})$ gebildet ist, mit den Eigenschaften

$$F_{\alpha(x)}(w) = F_{\alpha(y)}[u(w)] \text{ für jedes } w \in R(\omega_{\nu+1}) \text{ und } G_{\alpha(x),x}(w) = G_{\alpha(y),y}[v(w)] \text{ für jedes } w \in F(\omega_{\nu+2}) .$$

Wir definieren jetzt die Folge $\{z(w)\}_{w \in R(\omega_{\nu+1})}$ vom Typus $\omega_{\nu+2}$:

$$z(w) = \begin{cases} u(w) \text{ für jedes } w \in R(\omega_{\nu+1}) . \\ \omega_{\nu+1} + v(-\,\omega_{\nu+1} + w) \text{ für jedes } w \in R(\omega_{\nu+2}) - R(\omega_{\nu+1}) . \end{cases}$$

Dann ist $\{z(w)\}_{w \in R(\omega_{\nu+2})}$ eine streng wachsende Folge, die aus den Ordnungszahlen der Menge $R(\omega_{\nu+2})$ gebildet ist. Man überzeugt sich leicht, daß $H_y[z(w)] = H_x(w)$ für jedes $w \in R(\omega_{\nu+2})$ gilt. Es ist daher $\{H_x(u)\} \leqq \{H_y(u)\}$.

Es seien $x, y \in Q$ solche Elemente, für welche $\{H_x(u)\} \leqq \{H_y(u)\}$ gilt. Also gibt es eine aus den Ordnungszahlen der Menge $R(\omega_{\nu+2})$ gebildete streng wachsende Folge $\{u(v)\}_{v \in R(\omega_{\nu+2})}$ vom Typus $\omega_{\nu+2}$, für die $H_x(v) = H_y[u(v)]$ bei jedem $v \in R(\omega_{\nu+2})$ gilt. Zu jedem $X \in P[\alpha(x)]$ gibt es eine Ordnungszahl $v \in R(\omega_{\nu+1})$ mit der Eigenschaft $X = F_{\alpha(x)}(v) = H_x(v) = H_y[u(v)]$. Daraus folgt $u(v) < \omega_{\nu+1}$ und daher $X = H_y[u(v)] = F_{\alpha(y)}[u(v)] \in P[\alpha(y)]$. Also ist $P[\alpha(x)] \subseteq P[\alpha(y)]$ und daher auch $\alpha(x) \leqq \alpha(y)$ in der Menge $\overline{Q}$, woraus sich $x \leqq y$ ergibt.

Also ist die Menge aller H_x, $x \in Q$, eine Teilmenge von $F(\omega_{\nu+2}, N)$, die zu der Menge Q isomorph ist. Die Mächtigkeit von N ist $\aleph_\nu$ höchstens gleich. Ist $N_0 \supseteq N$ eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\nu$, so ist offenbar $F(\omega_{\nu+2}, N) \subseteq F(\omega_{\nu+2}, N_0)$. Also ist Q zu einer Teilmenge der Menge $F(\omega_{\nu+2}, N_0)$ isomorph. Da die letztere vom Typus $F(\omega_{\nu+2}, \aleph_\nu)$ ist, so ist damit alles bewiesen.

LITERATUR

[1] *G. Birkhoff*: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., v. *25*, revised ed., New York 1948.

[2] *G. Birkhoff*: Generalized arithmetic. Duke Math. Journ. *3* (1942), 283—302.

[3] *M. M. Day*: Arithmetic of ordered systems. Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945), 1—43.

[4] *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre. Veit & Comp., Leipzig 1914.

[5] *J. B. Johnston*: Universal infinite partially ordered sets. Proc. Amer. Math. Soc. *7* (1956), 507—514.

[6] *M. Novotný*: O representaci částečně uspořádaných množin posloupnosti nul a jedniček. Čas. pěst. mat. *78* (1953), 61—64.

Резюме

О КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

МИРОСЛАВ НОВОТНЫ (Miroslav Novotný), Брно

(Поступило в редакцию 24/III 1958 г.)

Теорема 1. *Для любого квазиупорядоченного множества, мощность которого меньше или равна* $\aleph_\nu$, *имеется в множестве типа* $\aleph_\nu{\oplus}\breve{\omega}_\nu 2$ *изоморфное подмножество.*

Пусть N — множество мощности $\mathfrak{m}$, $F(\omega_\nu, N)$ — множество всех последовательностей типа ω_ν, состоящих из элементов множества N. Для двух последовательностей $x, y \in F(\omega_\nu, N)$ полагаем $x \leqq y$ тогда и только тогда, если первая является подпоследовательностью второй. Таким образом множество $F(\omega_\nu, N)$ квазиупорядочено; обозначим через $F(\omega_\nu, \mathfrak{m})$ тип этого множества.

Теорема 2. *Для любого квазиупорядоченного множества, мощность которого меньше или равна* $\aleph_\nu$, *имеется в множестве типа* $F(\omega_{\nu+2}, \aleph_\nu)$ *изоморфное подмножество.*