Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE AFFINE DES COURBES PLANES

TIBERIU MIHĂILESCU, Cluj, Roumanie

(Reçu le 15 mai 1958)

L'article présente les éléments de géométrie différentielle des courbes planes dans le cadre du groupe affine général en employant la méthode du repère mobile.

A l'aide du repère local de classe zéro associé aux points d'une courbe on étudie les courbes de courbure affine constante auxquelles on associe un point remarquable — le centre affine de la courbe — on définit un invariant global — le rapport de trois points d'une courbe — et on considère la développée affine et les courbes affines parallèles.

Dans la plupart des travaux concernant les propriétés différentielles affines des courbes planes on trouve seulement l'étude de celles de ces propriétés qui sont invariantes par rapport à quelque sous-groupe du groupe affine général du plan.

Ainsi, O. Mayer et Al. Myller, dans [1], s'occupent exclusivement de la géométrie différentielle des courbes planes dans le cadre du sous-groupe centro-affine et du sous-groupe centro-affine unimodulaire. W. Blaschke [2] et E. Cartan [3] traitent le même sujet par rapport au groupe affine unimodulaire.

Les propriétés différentielles invariantes par rapport au groupe affine général à six paramètres du plan ont été considérées dans une mesure très réduite et d'une manière sporadique.

En employant les invariants différentiels des courbes planes par rapport au sous-groupe affine unimodulaire à cinq paramètres, W. Blaschke a construit certaines expressions invariantes par rapport au groupe affine général lesquelles il a utilisées dans le problème des courbes W affines, expressions qui ne sont pas accompagnées d'aucune signification géométrique.

Cette lacune a été comblée ultérieurement par G. Călugăreanu et Gh. Th. Gheorghiu [5] pour l'élément d'arc affine et la courbure générale affine considérées par W. Blaschke.

Dans ce qui suit nous présentons les éléments d'une étude des propriétés différentielles des courbes planes dans le cadre du groupe affine général du plan par la méthode du repère mobile dans la forme donnée par E. Cartan [3].

On détermine le repère affine associé à un point d'une courbe donnée (C), on établit les formules de Frenet de la famille de repères obtenue et on envisage quelques problèmes concernant les développantes du type Cartan et les développées affines.

Les figures d'un caractère plus général associées à la courbe (C) et les problèmes considérés pour le groupe centro-affine et le sous-groupe centro-affine unimodulaire par O. Mayer et Al. Myller [1] peuvent être transposés sans aucune difficulté et traités à l'aide du repère mobile déterminé.

1. Le plus général repère affine dans le plan est formé par un point arbitraire M et deux vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ linéairement indépendants, le point M étant leur origine commune.

Un point P du plan est déterminé par rapport à un repère affine fixe par le vecteur de position

$$\vec{P} = \vec{M} + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \,, \tag{1}$$

x_1, x_2 étant les coordonnées relatives du point par rapport au repère $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ce repère dépend de six paramètres. Deux de ces paramètres, les coordonnées absolues du point M nommées paramètres de position du point, sont les paramètres *principaux*, les autres quatres paramètres — les composantes des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — sont les paramètres *secondaires*.

Pour une variation de tous les paramètres, le point M et les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ subissent des variations données par les formules

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{M} &= \omega_{01}\vec{e}_1 + \omega_{02}\vec{e}_2 \,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 &= \omega_{11}\vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 \,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 &= \omega_{21}\vec{e}_1 + \omega_{22}\vec{e}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où ω_{ik} $(i = 0, 1; k = 1, 2)$ sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des six paramètres.

D'une manière plus précise, les formes ω_{01}, ω_{02} dépendent seulement des différentielles des paramètres de position t_1, t_2 du point M et les formes ω_{h1}, ω_{h2} $(h = 1, 2)$ ne contiennent que les différentielles des composantes ξ_{h1}, ξ_{h2} du vecteur $\vec{e}_h$.

Les formes ω_{ik}, nommées aussi composantes du déplacement infinitésimal affine, vérifient les relations extérieures ([3], p. 186)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}\omega_{0i} &= [\omega_{01}, \omega_{1i}] + [\omega_{02}, \omega_{2i}] \,, \\ \mathrm{D}\omega_{ik} &= [\omega_{i1}, \omega_{1k}] + [\omega_{i2}, \omega_{2k}] \,, \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2) \right\} \tag{3}$$

qui sont les équations de structure du groupe affine général du plan, le symbole D indiquant la différentiation extérieure.

Etant donnée une courbe plane (C), définie par rapport au repère fixe par deux fonctions analytiques d'un même argument

$$t_i = t_i(t)\,, \quad (i = 1, 2)\,, \tag{4}$$

on peut associer à un point M de cette courbe un repère affine en prenant de la manière la plus générale possible deux vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ linéairement indépendants.

L'ensemble des repères associés de cette manière au point M constitue une famille à quatre paramètres. Tous les éléments de cette famille peuvent être obtenus d'un seul d'entre eux, choisi d'ailleurs arbitrairement, par les transformations d'un sous-groupe à quatre paramètres du groupe affine général, sous-groupe qui est *le sous-groupe de stabilité* du point M et qui, par conséquent, est le sous-groupe centro-affine.

Nous dirons que la famille est de classe 4 et nous la désignerons par (R_4).

L'ensemble des repères de quatrième classe associés aux point de la courbe (C) forme un famille à cinq paramètres, à savoir: un paramètre principal qui est le paramètre de position du point M et quatre paramètres secondaires qui sont les composantes ξ_{1i}, ξ_{2i} $(i = 1, 2)$ des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Pour les repères de cette famille les composantes ω_{01}, ω_{02} ont la forme

$$\omega_{0i} = a_{0i}\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, 2)\,, \tag{5}$$

les coefficients a_{0i} étant des fonctions de t et des quatre paramètres secondaires

$$a_{0i} = a_{0i}(t;\, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22})\,. \tag{6}$$

Il s'ensuit qu'entre les deux composantes il existe une relation de dépendance linéaire que nous pouvons supposer être de la forme

$$\omega_{02} = a_1\omega_{01} \tag{7}$$

où a_1 est *a priori* une fonction de t et ξ_{ik}, la dépendance par rapport à l'argument t étant réalisée par l'intermédiaire des fonctions (4) et de leurs dérivées du premier ordre.

Par conséquent, le coefficient a_1 est une fonction dont l'ordre différentiel est égal à 1.

Pour pouvoir exécuter les opérations de particularisation du repère mobile, il est nécessaire d'établir la dépendance *effective* de la fonction a_1 des paramètres secondaires.

En différentiant extérieurement la relation (7) et tenant compte des équations de structure, on obtient l'équation extérieure

$$[\Delta a_1, \omega_{01}] = 0\,, \tag{8}$$

de laquelle on déduit l'équation

$$\Delta a_1 = \mathrm{d}a_1 + a_1(\omega_{22} - \omega_{11}) + \omega_{12} - a_1^2\omega_{21} = a_2\omega_{01}\,, \tag{9}$$

où a_2 est un coefficient dont l'ordre différentiel est égal à 2.

Pour une variation δ due seulement aux paramètres secondaires, c'est-à-dire si l'on passe d'un repère de la famille (R_4) associé à un point M à un repère infiniment voisin appartenant à la même famille et ayant comme origine le même point M, la fonction a_1 admet une variation

$$\delta a_1 = a_1(e_{11} - e_{22}) + a_1^2 e_{21} - e_{12} \quad (e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)) \tag{10}$$

déduite de (9) en tenant compte de l'équation $\omega_{01}(\delta) = 0$ qui est valable puisque le point M reste fixe.

Cette variation ne peut pas être identiquement nulle car dans ce cas de (10) il résulterait une relation de dépendance linéaire entre les formes $e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$.

Par conséquent, la fonction a_1 dépend effectivement des paramètres ξ_{ik} et on peut faire une opération de sélection parmi les repères (R_4) en choisissant ceux des repères de cette famille dont les paramètres secondaires vérifient la relation

$$a_1 = 0\,. \tag{11}$$

De cette manière on sépare dans (R_4) un sous-ensemble formé par les repères dont le vecteur $\vec{e}_1$ est tangent en M à la courbe, comme il résulte de la première des équations (2), qui devient

$$\mathrm{d}\vec{M} = \omega_{01}\vec{e}_1\,. \tag{12}$$

La famille des repères ainsi déterminés admet un groupe de stabilité à trois paramètres constitué par l'ensemble des transformations affines qui laissent invariants un point et une droite qui contient ce point.

Cette famille, appelée la famille (R_3) des repères de classe 3, est caractérisée par les relations

$$\omega_{02} = 0\,, \quad \omega_{12} = a_2\omega_{01}\,, \tag{13}$$

la dernière étant une conséquence différentielle de la première.

Par rapport à un repère (R_3) associé à un point M, l'équation locale d'un arc de la courbe (C) formé par les points situés dans le voisinage de M a la forme

$$x_2 = f(x_1) = \sum_1^n \lambda_p x_1^p + (n+1)\,, \tag{14}$$

en dénotant par $(n + 1)$ un terme résiduel dont l'ordre différentiel est égal à $n + 1$.

Pour déterminer les coefficients λ_p du développement (14) on doit remarquer d'abord qu'un point P de l'arc considéré est un point fixe du plan. Les variations de ses coordonnées locales x_1, x_2, données par la relation (1), vérifient un système de Pfaff qui s'obtient en différentiant cette relation et en tenant compte du système (2).

On obtient le système

$$\mathrm{d}x_i + \omega_{0i} + x_1\omega_{1i} + x_2\omega_{2i} = 0 \quad (i = 1, 2)\,, \tag{15}$$

qui exprime les conditions de fixité d'un point du plan.

Moyennant ces conditions on déduit de (14)

$$\mathrm{d}x_2 = \sum_1^n (p+1)\,\lambda_{p+1}x_1^p\,\mathrm{d}x_1 + \sum_1^n \mathrm{d}\lambda_p x_1^p + (n+1)\,,$$

c'est-à-dire

$$-\,\omega_{02} - x_1\omega_{12} - (\sum \lambda_p x_1^p)\,\omega_{22} =$$
$$= \sum (p+1)\,\lambda_{p+1}x_1^p\{-\,\omega_{01} - x_1\omega_{11} - (\sum \lambda_\alpha x_1^\alpha)\,\omega_{21}\} + \sum \mathrm{d}\lambda_p x_1^p + (n+1)\,.$$

En identifiant, il résulte la formule de récurrence

$$\mathrm{d}\lambda_p + \lambda_p(\omega_{22} - \omega_{11}) - \Gamma_{21}\omega_{21} = (p+1)\,\lambda_{p+1}\omega_{01} \tag{16}$$

où

$$\Gamma_{21} = \sum_{\alpha,\beta} (\alpha+1)\,\lambda_{\alpha+1}\lambda_\beta \quad (\alpha+\beta=p)\,, \quad \lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}a_2\,. \tag{17}$$

Par rapport à un repère (R_3) caractérisé par les relations (13), l'équation locale de la courbe est donc

$$x_2 = \frac{a_2}{2}\,x_1^2 + (3)\,. \tag{18}$$

Pour obtenir le terme du troisième ordre on différentie extérieurement la seconde des relations (13)

$$[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{22} - 2\omega_{11}),\, \omega_{01}] = 0$$

et on déduit l'équation

$$\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{22} - 2\omega_{11}) = a_3\omega_{01}\,, \tag{19}$$

a_3 étant un coefficient du troisième ordre différentiel.

Le développement (14) devient

$$x_2 = \frac{a_2}{2}\,x_1^2 + \frac{a_3}{6}\,x_1^3 + (4)\,. \tag{20}$$

De l'équation (19) il résulte que pour une variation des trois paramètres secondaires qui restent — un paramètre du vecteur $\vec{e}_1$ qui admet seulement les transformations qui lui conservent la direction, et deux paramètres du vecteur $\vec{e}_2$ — la fonction a_2 admet la variation

$$\delta a_2 = a_2(2e_{11} - e_{22})\,. \tag{21}$$

Mais pour une variation de cette espèce (t = const.) la forme $\Omega = 2e_{11} - e_{22}$ est une différentielle totale exacte puisque $\mathrm{D}\Omega = 3a_2[e_{01}, e_{21}] = 0$, donc $\Omega = \mathrm{d}u$, u étant une fonction des trois paramètres secondaires mais qui contient paramétriquement l'argument t.

On déduit de (21)

$$a_2 = a_2^0 e^{u-u_0}\,, \tag{22}$$

a_2^0, u^0 représentant les valeurs des fonctions a_2, u pour un repère initial $(R_3)_0$ de la famille, pris d'ailleurs arbitrairement.

Si pour un repère (R_3) la fonction a_2 est nulle, pour tout autre repère de la famille (R_3) cette fonction conserve cette valeur, c'est-à-dire que l'équation

$$a_2 = 0 \tag{23}$$

est associée d'une manière invariante à la famille (R_3) et possède par conséquent une signification géométrique.

Dans un déplacement du point M sur une courbe pour laquelle l'équation (23) existe, le vecteur tangent $\vec{e}_1$ devient

$$\vec{e}_1 + d\vec{e}_1 = (1 + \omega_{11})\,\vec{e}_1\,.$$

Il a donc une direction fixe et par conséquent, la courbe est une ligne droite, ce qu'on peut déduire encore de l'équation locale qui se réduit à $x_2 = 0$, tous les coefficients λ_p étant nuls comme il résulte de (16) et (17).

Si a_2 n'est pas identiquement nul, les points pour lesquels cette fonction s'annule sont des points d'inflexion parce que, dans un tel point, le développement (20) devient $x_2 = \dfrac{a_3}{6}\,x_1^3 + (4)$.

Laissant de côté le cas banal des lignes droites et le cas des points d'inflexion, nous supposerons dans tout ce qui va suivre $a_2 \neq 0$.

En différentiant extérieurement (19) on trouve

$$[da_3 + a_3(\omega_{22} - 3\omega_{11}) - 3a_2^2\omega_{21},\, \omega_{01}] = 0\,,$$

d'où

$$da_3 + a_3(\omega_{22} - 3\omega_{11}) - 3a_2^2\omega_{21} = 3a_2^2 a_4\omega_{01}\,, \tag{24}$$

a_4 étant un coefficient du quatrième ordre.

La relation $\delta a_3 = a_3(3e_{11} - e_{22}) + 3a_2^2 e_{21}$ démontre la dépendance effective de la fonction a_3 des paramètres secondaires, qui peuvent par conséquent être astreints à vérifier la relation $a_3 = 0$, et par cette opération on extrait de la famille (R_3) une famille (R_2) de classe 2.

L'annulation du coefficient a_3 possède une signification géométrique.

Une conique arbitraire, dont l'équation locale est

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0\,,$$

coupe la courbe donnée (20) aux points dont les coordonnées x_1 ont des valeurs qui vérifient l'équation

$$a_{33} + 2a_{13}x_1 + (a_{11} + a_2a_{23})\,x_1^2 + (a_2a_{12} + \tfrac{1}{3}a_3a_{23})\,x_1^3 + (4) = 0\,. \tag{25}$$

On en déduit que les coniques du plan qui ont avec la courbe (C) un contact du troisième ordre en M appartiennent au faisceau

$$3a_2^2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + \lambda x_2^2 - 6a_2x_2 = 0 , \tag{26}$$

leurs centres étant situés sur la droite

$$3a_2^2x_1 + a_3x_2 = 0 . \tag{27}$$

En annulant a_3 on détermine donc un des paramètres secondaires en fonction de deux autres de telle manière que le vecteur $\vec{e}_2$ du repère local soit parallèle à la droite des centres (27), qui s'appelle *la normale affine* de la courbe au point M.

La famille (R_2) des repères de classe 2 est caractérisée par les relations

$$\left.\begin{array}{c} \omega_{02} = 0 , \quad \omega_{12} = a_2\omega_{01} , \\ da_2 + a_2(\omega_{22} - 2\omega_{11}) = 0 , \\ \omega_{21} = - a_4\omega_{01} . \end{array}\right\} \tag{28}$$

De la dernière de ces relations on déduit l'équation extérieure

$$[da_4 - a_4\omega_{22}, \omega_{01}] = 0$$

et la consèquence de cette équation

$$da_4 - a_4\omega_{22} = 2a_5\omega_{01} . \tag{29}$$

Les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ des repères (R_2) sont déterminés en direction. Ils admettent le sous-groupe à deux paramètres $\vec{e}_i' = \mu_i\vec{e}_i$ $(i = 1, 2)$. Puisque, pour une variation des paramètres secondaires, la fonction a_4 admet la variation $\delta a_4 = a_4e_{22}$ déduite de (29), on établit de la même manière comme plus haut que l'équation

$$a_4 = 0 \tag{30}$$

est invariante pour la famille (R_2).

Les relations caractéristiques des repères mobiles associès aux courbes définies par (30) sont:

$$\omega_{02} = 0 , \quad \omega_{12} = a_2\omega_{01} , \quad \omega_{21} = 0 , \quad da_2 + a_2(\omega_{22} - 2\omega_{11}) = 0$$

et admettent les conséquences différentielles extérieures $D\omega_{01} = 0$, $D\omega_{11} = 0$, $D\omega_{22} = 0$. La forme ω_{01} est la différentielle d'une fonction $s = s(t)$ qui dépend seulement de t et les formes ω_{11}, ω_{22} sont les différentielles totales exactes de deux fonctions $u_1(\mu_1, \mu_2)$, $u_2(\mu_1, \mu_2)$ qui dépendent seulement des deux paramètres restants, c'est-à-dire des paramètres μ_1, μ_2.

On peut donc déterminer ces paramètres de manière que les fonctions u_1, u_2 se réduisent à deux constantes qui peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement.

Il en résulte $\omega_{11} = \omega_{22} = da_2 = 0$, donc la fonction a_2 se réduit aussi à une constante qui doit être différente de zéro.

Des relations $\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}s\vec{e}_1$, $\mathrm{d}\vec{e}_1 = a_2\,\mathrm{d}s\vec{e}_3$, $\mathrm{d}\vec{e}_2 = 0$ on déduit l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^3\vec{M}}{\mathrm{d}s^3} = 0$ dont l'intégrale générale est

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + s\vec{M}'_0 + \tfrac{1}{2}s^2\vec{M}''_0\,, \tag{31}$$

M_0 étant un point arbitraire de la courbe.

L'équation (30) caractérise par conséquent les paraboles.

Si a_4 n'est pas identiquement nul, les points où cette fonction s'annule s'appellent *points paraboliques.*

En considérant les paraboles comme des courbes élémentaires du groupe affine général et en excluant aussi le cas des points paraboliques, nous supposerons $a_4 \neq 0$.

2. En dehors de l'équation invariante (30), la famille (R_2) admet des formations invariantes infinitésimales.

Une fonction des coefficients des relations caractéristiques (28) $f(a_2, a_4)$ est un invariant *fini* du quatrième ordre si pour toute variation du repère à l'intérieur de la famille (R_2) associée à un point M, la variation de la fonction considérée est nulle.

De (28) on déduit $\delta a_2 = a_2(2e_{11} - e_{22})$, $\delta a_4 = a_4 e_{22}$, donc

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \frac{\partial f}{\partial a_4}\,\delta a_4 = 2a_2\frac{\partial f}{\partial a_2}\,e_{11} + \left(-\,a_2\frac{\partial f}{\partial a_2} + a_4\frac{\partial f}{\partial a_4}\right)e_{22}\,.$$

Les invariants finis du quatrième ordre sont les solutions du système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$X_1 f = 2a_2\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0\,, \quad X_2 f = -\,a_2\frac{\partial f}{\partial a_2} + a_4\frac{\partial f}{\partial a_4} = 0 \tag{32}$$

qui n'admet que la solution banale $f = \text{const.}$

La famille des repères (R_2) ne possède pas d'invariant fini du quatrième ordre.

Outre ces invariants finis qui sont des fonctions de point, on considère des invariants associés aux figures qui sont formées d'un point M de la courbe et d'un autre point situé dans le voisinage de ce point.

Ces fonctions, qu'on nomme *invariants infinitésimaux,* dépendent donc du paramètre principal du point M et du paramètre $t + \mathrm{d}t$, partie principale du paramètre d'un point M_1 du voisinage de M.

Ils peuvent donc être exprimés comme fonctions

$$f(a_2, a_4, \omega_{01}) \tag{33}$$

de a_2, a_4 et de la forme ω_{01} qui depénd de $\mathrm{d}t$.

De l'équation de structure $\mathrm{D}\omega_{01} = [\omega_{01}, \omega_{11}]$ écrite sous la forme

$$\mathrm{d}\omega_{01}(\delta) - \delta\omega_{01}(d) = \omega_{01}(d)\,\omega_{11}(\delta) - \omega_{01}(\delta)\,\omega_{11}(d)$$

on obtient

$$\delta\omega_{01} = - e_{11}\omega_{01} , \tag{34}$$

dans l'hypothèse que le symbole δ désigne une variation des paramètres secondaires pour laquelle, comme l'on sait, on a $\omega_{01}(\delta) = 0$.

De l'expression de la variation de la fonction (33)

$$\delta f = \left(2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - \omega_{01} \frac{\partial f}{\partial \omega_{01}}\right) e_{11} + \left(- a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + a_4 \frac{\partial f}{\partial a_4}\right) e_{22}$$

on déduit que les invariants infinitésimaux du quatrième ordre de la famille (R_2) sont les solutions du système complet

$$\left.\begin{aligned} X_1 f &= 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - \omega_{01} \frac{\partial f}{\partial \omega_{01}} = 0 , \\ X_2 f &= - a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + a_4 \frac{\partial f}{\partial a_4} = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

dont la solution générale est donnée par une fonction arbitraire d'une intégrale de ce système.

On peut prendre comme intégrale fondamentale la fonction rationnelle

$$\varphi = a_2 a_4 \omega_{01}^2 . \tag{36}$$

Les invariants finis de la famille (R_2) apparaissent dès que l'on considère les éléments différentiels du cinquième ordre.

De (29) on obtient, par différentiation extérieure, l'équation

$$\mathrm{d}a_5 - a_5(\omega_{11} + \omega_{22}) = a_6\omega_{01} \tag{37}$$

(a_6 étant un coefficient du sixième ordre) qui prolonge le système des relations caractéristiques (28) et de laquelle résulte la variation

$$\delta a_5 = a_5(e_{11} + e_{22}) \tag{38}$$

subie par la fonction a_5 pour une variation des deux paramètres secondaires restants.

Les invariants finis du cinquième ordre sont les solutions du système complet

$$\left.\begin{aligned} X_1 f &= 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - a_5 \frac{\partial f}{\partial a_5} = 0 , \\ X_2 f &= - a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + a_4 \frac{\partial f}{\partial a_4} + a_5 \frac{\partial f}{\partial a_5} = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

et les invariants infinitésimaux du même ordre vérifient le système complet à quatre variables

$$\left.\begin{aligned} \overline{X_1 f} &= X_1 f - \omega_{01} \frac{\partial f}{\partial \omega_{01}} = 0 , \\ \overline{X_2 f} &= X_2 f = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Les solutions du système (39) sont des fonctions d'une intégrale du système, par ex. de

$$I = \frac{a_5^2}{a_2 a_4^3}, \tag{41}$$

et la solution générale du système (40) s'exprime par une fonction arbitraire de deux intégrales indépendantes.

L'une d'elles est l'invariant infinitésimal (36) et l'on peut prendre pour la seconde intégrale la fonction

$$\varphi_1 = \frac{a_5 \omega_{01}}{a_4}. \tag{42}$$

Les invariants φ, φ_1, I de la famille (R_2) sont liés par la relation

$$\varphi I = \varphi_1^2, \tag{43}$$

ce qui montre que les fonctions φ, I seules sont des invariants fondamentaux.

Pour déterminer les significations géométriques de ces invariants on associe localement aux points d'une courbe de nouvelles figures géométriques.

Ainsi, du faisceau de coniques qui ont avec la courbe en M un contact d'ordre 3, faisceau qui est représenté par rapport à un repère (R_2) par l'équation

$$a_2 x_1^2 + \mu x_2^2 - 2x_2 = 0 \tag{44}$$

déduite de (26), on extrait la parabole unique de cette famille

$$a_2 x_1^2 - 2x_2 = 0 \tag{45}$$

qui a un contact d'ordre 4 avec la courbe (C), comme on le démontre aisément en utilisant le développement

$$x_2 = \frac{a_2}{2} x_1^2 + \frac{a_2^2 a_4}{8} x_1^4 + \frac{a_2^2 a_5}{40} x_1^5 + (6) \tag{46}$$

associé à la famille (R_2) jusqu'à l'ordre 5 inclusivement.

Cette courbe est appelée *parabole osculatrice* en M à la courbe (C).

Les valeurs de x_1 qui correspondent aux points communs à la courbe et à une conique à centre arbitraire du faisceau (44) sont les solutions de l'équation

$$a_2^2(\mu - a_4)\, x_1^4 - \frac{a_2^3 a_5}{5} x_1^5 + (6) = 0, \tag{47}$$

de laquelle on déduit que le faisceau (44) contient une seule conique à centre ayant un contact d'ordre 4 avec (C) en M.

Elle est représentée par l'équation

$$a_2 x_1^2 + a_4 x_2^2 - 2x_2 = 0, \tag{48}$$

se nomme *conique osculatrice* (C_2) en M à (C) et son centre est le point

$$\vec{C}_2 = \vec{M} + \frac{1}{a_4} \vec{e}_2. \tag{49}$$

Les points d'une courbe (C), qui ne sont pas des points paraboliques $(a_4 = 0)$, se classifient en points elliptiques $(a_2a_4 > 0)$ et points hyperboliques $(a_2a_4 < 0)$ d'après le genre de cette conique osculatrice.

Dans le cas d'un point elliptique, les tangentes à l'ellipse osculatrice qui sont parallèles à la normale affine coupent la tangente à (C) en M aux points

$$\vec{T}_\varepsilon = \vec{M} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{a_2a_4}}\,\vec{e}_1 \quad (\varepsilon^2 = 1)\,. \tag{50}$$

Si M est un point hyperbolique, les tangentes à l'hyperbole conjuguée parallèles à la normale affine donnent les points

$$\vec{T}_\varepsilon = \vec{M} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\,a_2a_4}}\,\vec{e}_1 \quad (\varepsilon^2 = 1)\,. \tag{51}$$

La droite déterminée par un point M' situé dans le voisinage de M et par un point arbitraire M_0 de la tangente à (C) en M coupe le diamètre conjugué à la normale affine au point M_1.

De la relation

$$\overrightarrow{M_0M'} = \left(\frac{a_2a_4}{2}\,x_1^2 + (3)\right)\overrightarrow{M_0M_1} \tag{52}$$

on déduit que l'invariant infinitésimal (36) représente la partie principale du rapport des vecteurs parallèles $\overrightarrow{M_0M'}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, parce que les abscisses des points M' du voisinage de M sont équivalentes aux formes ω_{01} correspondantes, comme cela résulte de la première des formules (2).

La normale affine a en commun avec la conique osculatrice le point M et le point $\vec{P} = \vec{M} + \frac{2}{a_4}\,\vec{e}_2$.

L'ensemble des points P constitue une courbe (C') associée à la courbe donnée d'une manière intrinsèque et invariante par rapport au groupe affine général.

La tangente à (C) au point P est déterminée par ce point et le vecteur directeur

$$\mathrm{d}\vec{P} = -\,\frac{\omega_{01}}{a_4^2}\,(a_4^2\vec{e}_1 + 4a_5\vec{e}_2)\,.$$

La parallèle menée par M à cette droite coupe la parabole osculatrice aux points M et

$$\vec{Q} = \vec{M} + \frac{8a_5}{a_2a_4^2}\,(a_4^2\vec{e}_1 + 4a_5\vec{e}_2)\,, \tag{53}$$

et la tangente en P à la conique osculatrice au point

$$\vec{P}_1 = \vec{M} + \frac{a_4}{2a_5}\,\vec{e}_1 + \frac{2}{a_4}\,\vec{e}_2\,. \tag{54}$$

A un facteur numérique inessentiel près, la relation

$$\overrightarrow{MQ} = 16 \frac{a_5^2}{a_2 a_4^3} \overrightarrow{MP_1} \tag{55}$$

fournit la signification géométrique de l'invariant fini (41) que l'on appelle *l'invariant de courbure affine.*

La tangente à (C) au point M a en commun avec la tangente en P à la courbe (C') et avec la droite PM' respectivement les points

$$\vec{P}_0 = \vec{M} - \frac{2a_4}{a_5} \vec{e}_1 , \quad \vec{M}_0 = \vec{M} + x_1 \left(1 + \frac{a_2 a_4}{2} x_1^2 + (4)\right) \vec{e}_1 .$$

De la relation

$$\overrightarrow{MM_0} = \frac{2a_5 x_1}{a_4} \left(1 + \frac{a_2 a_4}{2} x_1^2 + (4)\right) \overrightarrow{P_0 M} \tag{56}$$

on déduit que la partie principale du rapport des vecteurs parallèles $\overrightarrow{MM_0}$, $\overrightarrow{P_0 M}$ est équivalente, en négligeant le facteur numérique 2, à l'invariant infinitésimal du cinquième ordre (42) que l'on nomme *forme de courbure affine*

3. L'invariant infinitésimal (36) étant indépendant des paramètres secondaires du repère, est une fonction qui dépend seulement du paramètre principal t et de $\mathrm{d}t$ et dont la valeur au point M est positive ou négative suivant que le point $M(t)$ est elliptique au hyperbolique.

Si un arc de la courbe (C), correspondant aux valeurs prises par t dans un intervalle déterminé $[t_0, t]$, est formé par des points elliptiques $(a_2 a_4 > 0)$, alors la forme $\varepsilon\sqrt{\varphi}$ est une différentielle invariante

$$\mathrm{d}s = \varepsilon\sqrt{a_2 a_4} \omega_{01} , \tag{57}$$

avec laquelle on peut construire l'invariant intégral

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a_2 a_4} \omega_{01} \tag{58}$$

déterminé au signe et à une constante additive près.

Pour les arcs formés de points hyperboliques $(a_2 a_4 < 0)$ l'invariant intégral respectif est

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{-a_2 a_4} \omega_{01} . \tag{59}$$

Cet invariant est *l'arc affine* de la courbe.

4. Pour exécuter la dernière étape de l'opération de particularisation du repère on remarque en premier lieu que la forme $\Omega = \omega_{22} - 2\omega_{11}$ est une différentielle totale exacte puisque l'on a $\mathrm{D}\Omega = 0$, en tenant compte des relations caractéristiques de la famille (R_2).

Les formes ω_{11}, ω_{22} dépendent seulement des différentielles des deux paramètres secondaires de la famille, par conséquent la forme Ω est la différentielle totale d'une fonction u qui dépend de ces deux paramètres.

On peut soumettre ces paramètres à la condition qu'un d'eux soit une fonction de l'autre de manière que la fonction u se réduise à une valeur constante donnée d'ailleurs arbitrairement.

Par conséquent on a $\Omega = \mathrm{d}u = 0$.

Après cette opération il reste un seul paramètre secondaire, et l'équation $\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{22} - 2\omega_{11}) = 0$ se réduit à $\mathrm{d}a_2 = 0$, donc le coefficient a_2 a une valeur constante, différente de zéro, mais complètement arbitraire.

On a obtenu ainsi la famille (R_1) des repères de classe 1.

Une variation due au dernier paramètre secondaire que nous noterons avec ξ, transmet au coefficient a_4 la variation $\delta a_4 = a_4 e_{22}$ où e_{22} est de la forme

$$e_{22} = a(\xi, t)\, \delta\xi = \delta\, \mathsf{v}\, (\xi, t)\,, \tag{60}$$

$\mathsf{v}\, (\xi, t)$ étant une fonction qui contient aussi le paramètre principal t.

Il résulte que, pour une variation finie de ξ, c'est-à-dire si l'on passe d'un repère initial $(R_1)_{\xi_0}$ à un autre repère $(R_1)_\xi$ de la famille (R_1), la fonction a_4 vérifie la relation

$$a_4(\xi, t) = a_4(\xi_0, t)\, e^{\mathsf{v}(\xi, t) - \mathsf{v}(\xi_0, t)},$$

de laquelle on déduit qu'il est possible de déterminer une valeur de ξ en chaque point de la courbe de telle manière que la fonction $a_4(\xi, t)$ se réduise pour tous les points de la courbe à une même valeur constante $k \neq 0$, donnée arbitrairement.

La paramètre ξ est défini en fonction de t par l'équation

$$\mathsf{v}(\xi, t) = \mathsf{v}(\xi_0, t) + \ln \frac{k}{a_4(\xi_0, t)}\,.$$

Par cette dernière opération, à chaque point M de la courbe (C) qui n'est ni un point parabolique, ni un point d'inflexion, est associé un repère unique.

L'ensemble de ces repères constitue la famille (R_0) de classe zéro, le groupe de stabilité corespondant étant réduit à la transformation identique.

Les valeurs constantes des coefficients a_2, a_4 se choisissent de manière à réaliser, pour les formules (2) qui donnent les variations des éléments fondamentaux des repères (R_0), une structure simple et commode pour les calculs.

Ainsi, dans le cas d'un point elliptique, on peut prendre

$$a_2 = a_4 = 1\,, \tag{61}$$

et les relations caractéristiques deviennent

$$\omega_{02} = 0\,, \quad \omega_{12} = \omega_{01}\,, \quad \omega_{21} = -\,\omega_{01}\,, \quad \omega_{11} = -\,a_5\omega_{01}\,, \quad \omega_{22} = -\,2a_5\omega_{01}\,.$$

En notant

$$\omega_{01} = \mathrm{d}s\,, \quad a_5 = c\,, \tag{62}$$

les formules (2), qui sont les formules de Frenet associées à la courbe (C), s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{M} &= \mathrm{d}s\vec{e}_1\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 &= (-\,c\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 &= -\,(\vec{e}_1 + 2c\vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MT_1}$, $\overrightarrow{MC_2}$ sont donc les vecteurs fondamentaux $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ des repères (R_0).

Pour un point hyperbolique on prend les valeurs $a_2 = 1$, $a_4 = -\,1$ et, avec les mêmes notations (62), les formules de Frenet deviennent

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{M} &= \mathrm{d}s\vec{e}_1\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 &= (c\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 &= (\vec{e}_1 + 2c\vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

les vecteurs fondamentaux étant $\overrightarrow{MT_1}$, $\overrightarrow{MC_2}$, le point T_1 étant donné par (51).

Les systèmes (63), (65) peuvent être englobés dans une transcription commune

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{M} &= \mathrm{d}s\vec{e}_1\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_1 &= (-\,\varepsilon c\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,, \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 &= -\,\varepsilon(\vec{e}_1 + 2c\vec{e}_2)\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

en prenant $\varepsilon = +\,1$ pour les points elliptiques et $\varepsilon = -\,1$ pour les points hyperboliques.

Par rapport à un repère (R_0) l'équation locale de la courbe, jusqu'au terme de l'ordre 6 inclusivement, est donnée par le développement

$$x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2 + \frac{\varepsilon}{8}\,x_1^4 + \frac{c}{20}\,x_1^5 + \frac{2(c' + 3\varepsilon c^2) + 15}{240}\,x_1^6 + (7)\,, \tag{67}$$

l'accent indiquant l'opération de dérivation par rapport à l'arc affine s.

L'élimination des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ des équations du système (66) conduit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{M}}{\mathrm{d}s^3} + 3\varepsilon c\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2} + (\varepsilon c' + 2c^2 + \varepsilon)\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{68}$$

vérifiée par les vecteurs de position des points de la courbe donnée (C), équation qui est valable aussi pour les courbes qui sont les équivalentes affines de (C).

La connaissance de la *courbure affine* c en fonction de l'arc affine s n'est pas suffisante pour déterminer — dans le cadre du groupe affine général — une courbe unique, à cause de l'ambiguité due à l'existence du facteur ε.

Une relation de la forme $c = c(s)$ détermine par conséquent deux types de courbes, à savoir le type elliptique correspondant à la valeur $\varepsilon = +1$ et dont tous les points sont des points elliptiques, et le type hyperbolique ($\varepsilon = -1$) à points hyperboliques.

Par exemple, les courbes de courbure affine nulle sont les coniques à centre, celles définies par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{M}}{\mathrm{d}s^3} + \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad (\varepsilon = +1)$$

étant des ellipses et les coniques définies par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{M}}{\mathrm{d}s^3} - \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad (\varepsilon = -1)$$

étant des hyperboles.

5. Les courbes dont la courbure affine générale est constante ont été déterminées par W. Blaschke ([2], p. 24).

Dans le cas où

$$c^2 - 4\varepsilon > 0\,, \tag{69}$$

l'intégrale générale de l'équation (68) est

$$\vec{M} = e^{r_1 s}\vec{C}_1 + e^{r_2 s}\vec{C}_2 + \vec{C}_0\,, \tag{70}$$

$\vec{C}_i$ ($i = 0, 1, 2$) étant les vecteurs de position de trois points fixes du plan non collinéaires et pris d'une manière arbitraire et r_1, r_2 étant les racines de l'équation

$$r^2 + 3\varepsilon c r + (2c^2 + \varepsilon) = 0\,. \tag{71}$$

Les courbes (70) sont les transformées affines de la courbe

$$X_1 = e^{r_1 s}\,, \quad X_2 = e^{r_2 s}\,, \tag{72}$$

qui peut être representée par l'équation unique

$$X_2 = X_1^r \quad \left(r = \frac{r_2}{r_1}\right). \tag{73}$$

La courbe (72) est transformée en elle-même par les transformations du groupe affine à un paramètre

$$\overline{X}_1 = e^{r_1\sigma}X_1\,, \quad \overline{X}_2 = e^{r_2\sigma}X_2\,,$$

le point qui correspond à la valeur s de l'arc affine étant transformé dans le point qui correspond à la valeur $s + \sigma$.

L'inégalité (69) est vérifiée dans le cas de $\varepsilon = -1$ pour toutes les valeurs de c. Les courbes de courbure affine constante et du type hyperbolique qui appartiennent à cette classe existent pour une valeur quelconque de la constante c, tandis que les courbes du type elliptique existent seulement pour les valeurs de c qui vérifient l'inégalité $c^2 > 4$.

Dans le cas où

$$c^2 - 4\varepsilon < 0 \, , \tag{74}$$

l'intégrale générale est

$$\vec{M} = e^{as}\cos bs\, \vec{C}_1 + e^{as} \sin bs \vec{C}_2 + \vec{C}_0 \tag{75}$$

où

$$a = \frac{3\varepsilon c}{2} \, , \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon - c^2} \, .$$

Les courbes respectives sont les équivalentes affines de la courbe

$$X_1 = e^{as} \cos bs \, , \quad X_2 = e^{as} \sin bs \, , \tag{76}$$

qui est une transformée affine de la spirale logarithmique.

La courbe est transformée en elle-même par le groupe affine à un paramètre

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1 &= e^{a\sigma}(X_1 \cos b\sigma - X_2 \sin b\sigma) \, , \\ \overline{X}_2 &= e^{a\sigma}(X_1 \sin b\sigma + X_2 \cos b\sigma) \, , \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

les points équivalents correspondant aux valeurs s, $s + \sigma$.

Cette classe contient seulement des courbes du type elliptique et seulement pour les valeurs de c qui vérifient l'inégalité $c^2 < 4$.

Les courbes de courbure affine constante correspondent donc aux cercles du groupe isométrique, tant par la propriété d'avoir la courbure constante que par la propriété d'être transformées en elles-mêmes par un sous-groupe à un paramètre du groupe fondamental respectif.

L'analogie est accentuée par l'existence d'un point associé à une courbe de courbure affine constante dont la situation par rapport à la courbe est semblable à celle du centre d'un cercle par rapport au cercle.

Si l'on associe à chaque point d'une courbe donnée (C) d'une manière intrinsèque et invariante par rapport au groupe affine une droite unique (Δ), on obtient une famille de droites à un paramètre qui admet une enveloppe (Γ) associée à la courbe (C).

Le degré de généralité de cette figure peut être restreint en posant la condition que (Δ) soit affinement fixe par rapport au repère mobile associé aux points de la courbe (C) et que son enveloppe (Γ) se réduise à un point.

Une droite qui satisfait la condition de rigidité affine est représentée localement par une équation de la forme $x_2 = ux_1$ où $u = \text{const.}$

Un point de cette droite $\vec{P} = \vec{M} + x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3$ décrit une courbe tangente à la droite parallèle au vecteur directeur

$$\mathrm{d}\vec{P} = \{\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}s - \varepsilon(c + u)\, x_1\, \mathrm{d}s\}\, \vec{e}_1 + \{u\, \mathrm{d}x_1 + x_1(1 - 2\varepsilon cu)\, \mathrm{d}s\}\, \vec{e}_2 \, .$$

Si les droites (Δ) forment un faisceau, elles existent les relations

$$\frac{dx_1}{ds} + \{1 - \varepsilon(u + c)\, x_1\} = 0\,, \qquad u\,\frac{dx_2}{ds} + (1 - 2\varepsilon uc)\, x_1 = 0\,, \tag{78}$$

desquelles par l'élimination de la fonction x_1 on déduit l'équation

$$(\varepsilon u^2 - \varepsilon uc + 1)(2\varepsilon uc - 1) - \varepsilon u^2 c' = 0 \tag{79}$$

qui détermine le coefficient directeur u.

Puisque ce coefficient est constant il s'ensuit que c doit être constant et l'équation (79) se réduit à

$$(\varepsilon u^2 - \varepsilon uc + 1)(2\varepsilon uc - 1) = 0\,. \tag{80}$$

Il y a donc deux cas à envisager.

a) $\varepsilon u^2 - \varepsilon uc + 1 = 0$.

En éliminant $\frac{dx_1}{ds}$ de (78) on obtient l'équation $(\varepsilon u^2 - \varepsilon uc + 1)\, x_1 = u$ et dans ce cas la valeur de x_1 qui détermine sur (Δ) le point fixe P est impropre.

b) $2\varepsilon uc - 1 = 0$.

Les relations (78) deviennent $\frac{dx_1}{ds} = \varepsilon(u + c)\, x_1 - 1$, $u\,\frac{dx_1}{ds} = 0$, donc $\frac{dx_1}{ds} = 0$, $x_1 = \frac{1}{\varepsilon(u + c)}$, c'est-à-dire

$$u = \frac{\varepsilon}{2c}\,, \quad x_1 = \frac{2\varepsilon c}{2c^2 + \varepsilon}\,, \quad x_2 = \frac{1}{2c^2 + \varepsilon} \qquad (2c^2 + \varepsilon \neq 0)\,. \tag{81}$$

Par conséquent, le problème est possible seulement pour les courbes de courbure affine générale constante à l'exception des courbes du type hyperbolique dont la courbure a la valeur

$$c = \eta\,\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (\eta^2 = 1)\,, \tag{82}$$

et que nous désignerons par la notation (C_0).

Pour toute courbe de courbure constante, distincte de (C_0), il existe une droite unique $\varepsilon x_1 - 2cx_2 = 0$ associée à chaque point de la courbe, droite qui est affinement rigide par rapport au repère mobile de la courbe (C), et toutes ces droites passent par un point fixe

$$\vec{P} = \vec{M} + \frac{2\varepsilon c}{2c^2 + \varepsilon}\,\vec{e}_1 + \frac{1}{2c^2 + \varepsilon}\,\vec{e}_2 \tag{83}$$

qui appartient à la conique de la famille (44)

$$x_1^2 + 2\varepsilon x_2^2 - 2x_2 = 0 \tag{84}$$

qui contient le centre de la conique osculatrice.

Les polaires du point P par rapport à la conique osculatrice et à la parabole osculatrice

$$\left.\begin{array}{ll}(\Delta_1) & 2\varepsilon c x_1 - 2c^2 x_2 - 1 = 0\,, \\ (\Delta_2) & 2\varepsilon c x_1 - (2c^2 + \varepsilon)\, x_2 - 1 = 0\end{array}\right\} \tag{85}$$

et la tangente à la courbe (C) concourent au point $\vec{P}_1 = \vec{M} + \dfrac{1}{2\varepsilon c}\vec{e}_1$ et la relation

$$\overline{\vec{MT}}_1 = 2\varepsilon c \overline{\vec{MP}}_1 \tag{86}$$

donne la signification géométrique de la courbure affine des courbes à courbure constante.

Il est à remarquer que non seulement les coordonnées absolues du point P sont constantes — à cause de son fixité — mais aussi les coordonées relatives par rapport aux différents repères sont constantes et cette propriété appartient au cercle isométrique.

L'aire du triangle formé par un point M de la courbe, le centre de la conique osculatrice respective et le point fixe P conserve une valeur constante $(MPC_2) = \dfrac{2c}{2c^2 + \varepsilon}$ lorsque le point M se déplace sur la courbe.

Le point P peut être considéré, pour une courbe de courbure affine constante qui n'est pas une courbe (C_0), comme l'analogue du centre d'un cercle. On peut l'appeler *centre affine* de la courbe.

Pour les courbes du type elliptique ce point est situé à l'intériuer de toutes les coniques osculatrices.

Dans le cas d'exception des courbes (C_0), l'équation (68) devient

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{M}}{\mathrm{d}s^3} - 3c\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

et admet l'intégrale générale $\vec{M} = \vec{C}_1 s + \vec{C}_2 e^{3cs} + \vec{C}_0$, qui définit une classe de courbes affinement équivalentes à la courbe

$$X_2 = e^{\eta\frac{3\sqrt{2}}{2}X_1} \qquad (\eta^2 = 1)\,.$$

A chaque point d'une courbe (C_0) est associée une droite de coefficient directeur $u = -\,\eta\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui est parallèle à une direction fixe du plan.

6. La méthode employée par E. Cartan ([4], p. 57) en géométrie différentielle projective pour définir le birapport de quatre points d'une courbe plane peut être utilisée aussi en géométrie différentielle affine pour définir le rapport de trois points d'une courbe.

Un point de la parabole osculatrice

$$\vec{P} = \vec{M} + t\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{e}_2$$

où t est une fonction de l'arc affine s, décrit une courbe (Γ) associée à la courbe donnée (C) d'une manière intrinsèque et affinement invariante.

La tangente en un point de la courbe (Γ) est déterminée par le vecteur directeur

$$\mathrm{d}\vec{P} = \left(\mathrm{d}t + \mathrm{d}s - \varepsilon ct\,\mathrm{d}s - \frac{\varepsilon}{2}\,t^2\,\mathrm{d}s\right)\vec{e}_1 + t(\mathrm{d}t + \mathrm{d}s - \varepsilon ct\,\mathrm{d}s)\,\vec{e}_2\,.$$

En négligeant la solution $t = 0$, on trouve que les points de la parabole osculatrice qui décrivent des courbes (Γ) dont la tangente en un point P est parallèle à la tangente à la courbe (C) au point correspondant, sont données par les fonctions $t(s)$ qui sont des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} - \varepsilon ct + 1 = 0\,, \tag{89}$$

dont l'intégrale générale est

$$t = [C - \varphi(s)]\,e^{\varepsilon\varrho(s)} \tag{90}$$

où $\varrho(s) = \int_{s_0}^{s} c(s)\,\mathrm{d}s$ est la *courbure intégrale affine* de l'arc $[s_0, s]$ et

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} e^{-\varepsilon\varrho(s)}\,\mathrm{d}s\,. \tag{91}$$

La parabole osculatrice contient donc un ensemble infini de points qui décrivent des courbes (Γ) dont les tangentes sont parallèles aux tangentes de (C). Elles s'appellent *développantes de Cartan.*

On associe à la figure formée par trois développantes (Γ_i), $(i = 1, 2, 3)$ qui correspondent à trois solutions distinctes de (90) un invariant affine de nature globale

$$(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} = \frac{C_1 - C_3}{C_2 - C_3}\,, \tag{92}$$

nommé *rapport* des développantes considérées.

La signification géométrique est donnée par la relation

$$\frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} = \frac{(P_1, P_3, Q_{13})}{(P_2, P_3, Q_{23})}$$

où (P_i, P_h, Q_{ih}) représente l'aire du triangle formé par deux points P_i, P_h de la parabole osculatrice relative à un point M de (C) et le point Q_{ih}, le pôle de la droite P_iP_h par rapport à cette parabole.

Trois développantes de Cartan coupent les paraboles osculatrices des points de la courbe (C) en des points dont le rapport est constant.

Puisqu'un point $M_1(s_1)$ de (C) est situé sur une seule développante de la famille (Γ), à savoir sur la courbe correspondant à la valer $C_1 = \varphi(s_1)$ de la constante d'intégration — il résulte que la figure formée par trois points M_i ($i = 1, 2, 3$) de la courbe (C) admet un invariant affine qui, par définition, est le rapport des trois développantes (Γ_i) qui contiennent les points considérés et qui s'appelle le *rapport des trois points*.

7. Un point de la normale affine

$$\vec{P} = \vec{M} + t(s)\,\vec{e}_2 \tag{49}$$

décrit une courbe (P) dont la tangente au point P est parallèle au vecteur

$$d\vec{P} = (1 - \bar{\varepsilon}t)\, ds\, \vec{e}_1 + (dt - 2\varepsilon ct\, ds)\, \vec{e}_2\,.$$

Il existe un seul point P pour lequel la courbe (P) est tangente à la normale affine

$$\vec{P} = \vec{M} + \varepsilon\vec{e}_2\,. \tag{96}$$

C'est le centre de la conique osculatrice qui se nomme *centre de courbure affine*.

L'ensemble de ces points forme la développée affine de la courbe (C) qui, par conséquent, est l'enveloppe des normales affines.

On peut associer aux points P de cette courbe un repère mobile (R_0) constitué en chaque point P par ce point et les vecteurs

$$\vec{\varepsilon}_1 = \lambda\vec{e}_2\,, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2\,, \tag{97}$$

λ, μ_1, μ_2 étant des coefficients à déterminer.

En utilisant les formules de Frenet valables pour le nouvel repère et tenant compte de (97) on obtient les relations

$$\left.\begin{array}{c}
\lambda\, ds_1 = -\, 2c\, ds\,, \\
\mu_1\, ds_1 = -\, \varepsilon\lambda\, ds\,, \quad (\mu_2 - \varepsilon c_1\lambda)\, ds_1 = d\lambda - 2\varepsilon c\lambda\, ds\,, \\
d\mu_1 - \varepsilon(c\mu_1 + \mu_2)\, ds = -\, 2\varepsilon c_1\mu_1\, ds_1\,, \\
d\mu_2 + (\mu_1 - 2\varepsilon c\mu_2)\, ds = -\, \varepsilon(\lambda + 2c_1\mu_2)\, ds_1\,,
\end{array}\right\} \tag{98}$$

s_1, c_1 étant l'arc affine et la courbure affine de la développée.

Des deux premières relations (98) il résulte

$$\left.\begin{array}{c}
ds_1 = -\dfrac{2c}{\lambda}\, ds\,, \\
\mu_1 = \dfrac{\varepsilon\lambda^2}{2c}\,,
\end{array}\right\} \tag{99}$$

et en substituant dans la pénultième on obtient la valeur de μ_2:

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon\lambda^2(3c^2 - \varepsilon c')}{6c^2}\,. \tag{100}$$

L'élimination de c_1 des deux dernières relations (98) conduit à l'équation

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \left\{\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 + \varepsilon c\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) - 1\right\} \mathrm{d}s\,, \tag{101}$$

qui donne la valeur de λ. Après avoir déterminé ces coefficients, on peut obtenir de l'une des dernières relations (98) l'expression de la courbure affine c_1 de la developpée.

Dans le cas métrique la normale de la développée est parallele à la tangente au point correspondant de la courbe (C).

Une situation semblable ne se réalise dans le cas affine que pour une classe spéciale de courbes pour lesquelles est valable l'équipollence $\vec{\varepsilon}_2 = \mu_1\vec{e}_1$.

Pour ces courbes on doit avoir donc la relation $\mu_2 = 0$ équivalente, d'après (100), à

$$3c^2 - \varepsilon c' = 0\,. \tag{102}$$

Les courbes dont les dévelopées ont la normale affine parallèle à la tangente à la courbe au point correspondant sont caractérisées par l'équation intrinsèque

$$c = \frac{1}{a - 3\varepsilon s}\,, \tag{103}$$

$a = \dfrac{1}{c_0}$ étant une constante arbitraire.

Dans ce cas, de (98) on déduit les relations

$$\mathrm{d}s_1 = -\varepsilon\,\mathrm{d}s\,, \quad c_1 = \varepsilon c\,.$$

Pour les courbes du type elliptique ($\varepsilon = +1$), la courbe et sa développée ont aux points correspondants les courbures affines égales et la somme des arcs affines est constante.

Pour les courbes du type hyperbolique ($\varepsilon = -1$) la correspondance entre la courbe et sa développée est réalisée avec l'égalité des arcs affines les courbures affines ayant des valeurs opposées aux points correspondants.

8. On obtient une généralisation des courbes parallèles du cas métrique en déterminant les points de la normale affine qui décrivent des courbes dont la tangente est parallèle à la tangente à (C) au point correspondant.

La fonction t doit satisfaire l'équation différentielle

$$\mathrm{d}t - 2\varepsilon ct\,\mathrm{d}s = 0\,, \tag{104}$$

d'où

$$t = ae^{2\varepsilon\varrho(s)}\,. \tag{105}$$

En associant au point P un repère (R_0)

$$\vec{\varepsilon}_1 = \lambda\vec{e}_1\,, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$$

de la manière indiquée dans le cas précédent, on obtient les relations

$$\left.\begin{aligned}(1-\varepsilon t)\,\mathrm{d}s &= \lambda\,\mathrm{d}s_1\,,\\ \mathrm{d}\lambda-\varepsilon c\lambda\,\mathrm{d}s &= (\mu_1-\varepsilon\lambda c_1)\,\mathrm{d}s_1\,,\quad \mu_2\,\mathrm{d}s_1=\lambda\,\mathrm{d}s\,,\\ \mathrm{d}\mu_1-\varepsilon(c\mu_1+\mu_2)\,\mathrm{d}s &= -\,\varepsilon(\lambda+2c_1\mu_1)\,\mathrm{d}s_1\,,\\ \mathrm{d}\mu_2+(\mu_1-2\varepsilon c\mu_2)\,\mathrm{d}s &= -\,2\varepsilon c_1\,\mu_2\,\mathrm{d}s_1\,.\end{aligned}\right\}\tag{106}$$

Il en résulte

$$\mathrm{d}s_1=\frac{1-\varepsilon t}{\lambda}\,\mathrm{d}s\,,\quad \mu_1=-\,\frac{2c\lambda^2 t}{3(1-\varepsilon t)^2}\,,\quad \mu_2=\frac{\lambda^2}{1-\varepsilon t}\,,\tag{107}$$

la valeur de λ étant donnée par l'équation

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=\left\{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2-\varepsilon c\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)-\varepsilon\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^2+\varepsilon\right\}\mathrm{d}s\,.\tag{108}$$

Les courbes ainsi associées à une courbe donnée (C) se nomment *courbes affinement parallèles à* (C).

Si (C) est arbitraire, il n'existe aucune courbe affinement parallèle dont la normale affine coïncide avec la normale affine de (C).

Cette coïncidence se réalise seulement si (C) est une courbe dont la courbure affine est nulle. C'est le cas des coniques à centre.

Dans ce cas la valeur de t se réduit à une constante arbitraire $t=a$ différente de zéro et de ε et de (106) on déduit les relations

$$c_1=0\,,\quad \lambda=1-a\varepsilon\,,\quad \mu_2=\varepsilon'(1-a\varepsilon)\,,\quad \mathrm{d}s_1=\varepsilon'\,\mathrm{d}s\quad(\varepsilon'^2=1)\,.\tag{109}$$

Les courbes affinement parallèles d'une conique à centre sont des coniques concentriques, homothétiques à la conique de base.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *O. Mayer* et *Al. Myller*: Géométrie centro-affine différentielle des courbes planes. Annales scientifiques de l'Université de Jassy, T. *XVIII*, 1933, 234—280.

[2] *W. Blaschke*: Vorlesungen über Differentialgeometrie, II, Berlin 1923.

[3] *É. Cartan*: La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Paris, 1937.

[4] *É. Cartan*: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris, 1937.

[5] *G. Călugăreanu* et *Gh. Th. Gheorghiu*: Sur l'interprétation géométrique des invariants différentiels fondamentaux en géométrie affine et projective des courbes planes. Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, T. *43* (1—2), 1941.

Резюме

АФФИННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ

ТИБЕРИУ МИХАИЛЕСКУ (Tiberiu Mihăilescu), Клуж, Румыния

(Поступило в редакцию 15/V 1958 г.)

Автор пользуется методом подвижного репера для изучения дифференциальных свойств плоских кривых, инвариантных относительно общей аффинной группы плоскости.

Различные этапы специализации репера описываются при помощи понятия класса какого-то семейства реперов. Бесконечное множество плоских аффинных реперов, поставленных в соответствие обыкновенной точке данной кривой, образует, по определению, семейство класса p (R_p), если все эти реперы эквивалентны по отношению к некоторой аффинной p-параметрической подгруппе, которую мы назовем группой устойчивости семейства (R_p).

У семейства (R_3) один из основных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ репера лежит на касательной к кривой, а у семейства (R_2) второй вектор лежит на аффинной нормали, то есть на геометрическом месте центров конических сечений, имеющих с кривой касание третьего порядка.

Каждой точке кривой, не являющейся ни параболической точкой, ни точкой перегиба, поставлен в соответствие один единственный репер, а именно, репер класса 0 (R_0), для которого векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ определяются при помощи соприкасающегося конического сечения.

Семейству (R_2) отнесен дифференциальный инвариант четвертого порядка, при помощи которого можно построить интегральный инвариант (аффинную дугу), и конечный инвариант пятого порядка (инвариант аффинной кривизны).

Каждый из этих инвариантов имеет свое определенное геометрическое истолкование. Формулы Френе позволяют составить дифференциальное уравнение для радиуса-вектора точки кривой.

Выражение, определяющее аффинную кривизну как функцию аффинной дуги, дает возможность различать два типа кривых. Кривые одного типа образованы эллиптическими точками, кривые же второго типа — гиперболическими.

Кривые нулевой аффинной кривизны являются центральными коническими сечениями. Если каждой точке кривой поставить в соответствие прямую с фиксированными координатами по отношению к локальным реперам, то кривые, для которых эти прямые образуют связку, будут

кривыми постоянной аффинной кривизны. Локальные координаты центра этой связки постоянны, и для кривых эллиптического типа этот центр лежит внутри всех соприкасающихся конических сечений.

На соприкасающейся параболе существует бесконечное количество точек, описывающих кривые, касательная к которым в любой точке параллельна касательной к данной кривой в соответствующей точке. Эти кривые являются эвольвентами Картана. Тройке этих кривых можно поставить в соответствие инвариант глобального характера, позволяющий дать определение отношения трех различных точек на кривой.

Кривая, образованная центрами соприкасающихся конических сечений, является эволютой данной кривой.

Если точкам этой кривой отнести семейство реперов класса 0, то можно определить кривые, для которых аффинная нормаль эволюты параллельна касательной к кривой.

На аффинной нормали существует бесконечное количество точек, описывающих кривые, касательные к которым параллельны касательной к данной кривой.

Аффинная нормаль к одной из этих кривых, вообще говоря, не совпадает с нормалью основной кривой. Совпадение имеет место лишь тогда, когда основная кривая является центральным коническим сечением; в этом случае аффинно параллельные кривые будут гомотетическими коническими сечениями.