Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 243–264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100350

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

LES SURFACES R DANS LES ESPACES PROJECTIFS DE DIMENSION IMPAIRE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 28 avril 1958)

Dans le présent Mémoire on étudie les surfaces à réseau conjugué dans un espace projectif $S_{2\ +1}$, admettant une déformation projective C_{n+1}. Dans la seconde partie de ce travail on établit les fondements de la théorie des congruences de droites dans S_{2n+1}.

1. Soit donnée dans un espace projectif S_{2n+1} de dimension impaire $2n + 1$ ($n \geqq 2$) une surface π $y = y(u, v)$ sur laquelle les courbes paramétriques $du\, dv = 0$ forment un réseau conjugué. Les coordonnées des points de la surface π vérifient alors l'équation

$$y_{uv} = \alpha y_u + \beta y_v + \gamma y\ . \tag{1}$$

Les invariants de Darboux

$$h = \alpha_u - \alpha\beta - \gamma\ , \quad k = \beta_v - \alpha\beta - \gamma \tag{2}$$

sont invariants par rapport à la transformation $y = \lambda y'$. A également lieu l'énoncé que voici: Soit donnée l'équation (1) et une autre équation

$$y'_{uv} = \alpha' y'_u + \beta' y'_v + \gamma' y' \tag{3}$$

et supposons que nous ayons

$$h = h'\ , \quad k = k'\ , \tag{4}$$

il existe alors $\lambda = \lambda(u, v)$ tel que la transformation $y = \lambda y'$ fait changer (1) en (3). Pour la démonstration voir p. ex. G. Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux* (1924, Bucarest-Paris), p. 57 sqq.

On peut associer à la surface π toute une suite de transformées de Laplace. Soit $z = z(u, v)$ une de deux transformées de Laplace de la surface π, il est possible alors de considérer la surface (y) comme surface focale de la congruence L formée par les droites $[yz]$. Je signale que, partout dans ce qui suit, je supposerai, sauf avis contraire, que les transformées de Laplace de la surface π considérées ne dégénerent pas.

Dans la congruence L, les surfaces $du\, dv = 0$ sont nécessairement développables; il est possible de choisir la normalisation des points arithmétiques y et z de telle façon que l'on ait

$$y_u = \alpha z\,, \quad z_v = \beta y\,. \tag{5}$$

Il est évident que le k-ième ($k = 0, 1, \ldots$) espace osculateur de la surface focale (y) ou (z) respectivement est

$$\left.\begin{array}{ll} & [y, z, y^{0,1}, z^{1,0}, y^{0,2}, z^{2,0}, \ldots, y^{0,k-1}, z^{k-1,0}, y^{0,k}] \\ \text{ou} & \\ & [y, z, y^{0,1}, z^{1,0}, y^{0,2}, z^{2,0}, \ldots, y^{0,k-1}, z^{k-1,0}, z^{k,0}] \end{array}\right\} \tag{6}$$

respectivement.

J'adopte ici la notation courante

$$f^{r,s} = \frac{\partial^{r+s} f}{\partial u^r\, \partial v^s}\,. \tag{7}$$

J'appelle k-ième espace osculateur de la congruence L le long de la droite $p \equiv [yz]$ l'union linéaire des k-èmes espaces osculateurs des surfaces focales (y) et (z) aux foyers situés sur p, c'est-à-dire l'espace

$$[y, z, y^{0,1}, z^{1,0}, y^{0,2}, z^{2,0}, \ldots, y^{0,k}, z^{k,0}]\,. \tag{8}$$

L'indice i de la congruence L soit alors le nombre, pour lequel l'i-ème espace osculateur le long de n'importe quelle droite de la congruence L est de dimension $2i + 1$, mais le $(i + 1)$-ème espace osculateur le long de chaque droite est de dimension plus petite que $2i + 3$. On a évidemmnet $i \leqq n$; dans ce qui suit, je m'occuperai exclusivement des congruences d'indice maximum $i = n$.

2. La surface (y) dans S_{2n+1} peut être déterminée par le système d'équations aux dérivées partielles

$$\left.\begin{array}{r} y^{1,0} = \alpha z\,, \quad z^{0,1} = \beta y\,, \quad y^{0,n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i y^{0,i} + \sum\limits_{i=0}^{n} b_i z^{i,0}\,, \\ z^{n+1,0} = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i y^{0,i} + \sum\limits_{i=0}^{n} e_i z^{i,0}\,. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Je trouve les conditions d'intégrabilité en comparant les coefficients auprès de $y^{0,i}$, $z^{i,0}$ ($i = 0, \ldots, n$) dans les équations

$$\pi_1^{0,n+1} = \pi_3^{1,0},\ \pi_2^{n+1,0} = \pi_4^{0,1}\,, \tag{10}$$

π_k ($k = 1, \ldots, 4$) étant le second membre de l'équation (1_i).

Dans la suite, je me servirai souvent de la relation

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{r=0}^{j-1} B_{jr} C_r = \sum_{t=0}^{k-1} S_t C_t \quad \text{où} \quad S_t = \sum_{s=t+1}^{k} A_s B_{st} \tag{11}$$

qui peut être vérifiée en développant directement ses deux membres.

Soit $k \geqq 1$, alors

$$y^{1,k} = (\alpha z)^{0,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{0,k-i} z^{0,i} = \alpha^{0,k} z + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{0,k-i} z^{0,i} .$$

Or on a

$$z^{0,i} = (\beta y)^{0,i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \beta^{0,i-j-1} y^{0,j} \quad (i \geqq 1) \tag{12}$$

de sorte qu'il vient pour $k \geqq 1$

$$y^{1,k} = \alpha^{0,k} z + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{0,k-i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \beta^{0,i-j-1} y^{0,j}$$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} y^{1,k} &= \alpha^{0,k} z + \sum_{t=0}^{k-1} \gamma_{kt} y^{0,t} \quad (k \geqq 1) , \\ \gamma_{kt} &= \sum_{s=t+1}^{k} \binom{k}{s} \binom{s-1}{t} \alpha^{0,k-s} \beta^{0,s-t-1} \quad (k \geqq 1; t = 0, \ldots, k-1) . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

On a donc spécialement

$$\pi_1^{0,n+1} = \alpha^{0,n+1} z + \sum_{t=0}^{n} \gamma_{n+1,t} y^{0,t} , \quad \gamma_{n+1,t} = \sum_{s=t+1}^{n+1} \binom{n+1}{s} \binom{s-1}{t} \alpha^{0,n+1-s} \beta^{0,s-t-1}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \pi_3^{1,0} = \sum_{i=0}^{n} a_i^{1,0} y^{0,i} + \sum_{i=0}^{n} b_i^{1,0} z^{i,0} + a_0 y^{1,0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\alpha^{0,1} z + \sum_{t=0}^{i-1} \gamma_{it} y^{0,t}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} z^{i,0} + b_n (\sum_{i=0}^{n} c_i y^{0,i} + \sum_{i=0}^{n} e_i z^{i,0}) . \end{aligned}$$

Si j'écris

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{t=0}^{i-1} \gamma_{it} y^{0,t} = \sum_{t=0}^{n-1} \varepsilon_t y^{0,t} \quad \text{où} \quad \varepsilon_t = \sum_{s=t+1}^{n} a_s \gamma_{st} \tag{14}$$

je trouve enfin

$$\left.\begin{aligned} \pi_3^{1,0} = (a_0^{1,0} + b_n c_0 + \varepsilon_0) y + (b_0^{1,0} + \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^{0,i} + b_n e_0) z + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^{1,0} + b_n c_i + \varepsilon_i) y^{0,i} + (a_n^{1,0} + b_n c_n) y^{0,n} + \sum_{i=1}^{n} (b_i^{1,0} + b_{i-1} + b_n e_i) z^{i,0} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

En comparant (14) et (15) j'obtiens une partie des conditions d'intégrabilité sous la forme de

$$a_0^{1,0} + b_n c_0 + \varepsilon_0 = \gamma_{n+1,0} , \tag{16}$$

$$b_0^{1,0} + a_0 \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^{0,i} + b_n e_0 = \alpha^{0,n+1} , \tag{17}$$

$$a_i^{1,0} + b_n c_i + \varepsilon_i = \gamma_{n+1,i} \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{18}$$

$$a_n^{1,0} + b_n c_n = \gamma_{n+1,n}\,, \tag{19}$$

$$b_i^{1,0} + b_{i-1} + b_n e_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{20}$$

En appliquant aux équations (9) la substitution

$$\begin{pmatrix} y & z & u & v & \alpha & \beta & a_i & b_i & c_i & e_i \\ z & y & v & u & \beta & \alpha & e_i & c_i & b_i & a_i \end{pmatrix} \tag{21}$$

le système (9) reste inchangé, tandis que (10_1) change en (10_2), de sorte que les conditions d'intégrabilité se complètent par les équations qui proviennent de (16)—(20) lors de la substitution (21). Si je pose

$$\gamma'_{kt} = \sum_{s=t+1}^{k} \binom{k}{s} \binom{s-1}{t} \alpha^{s-t-1,0} \beta^{k-s,0}\,, \tag{22}$$

$$\varepsilon'_t = \sum_{s=t+1}^{n} e_s \gamma'_{st} \tag{23}$$

ces équations seront

$$e_0^{0,1} + c_n b_0 + \varepsilon'_0 = \gamma'_{n+1,0}\,, \tag{24}$$

$$c_0^{0,1} + e_0 \beta + \sum_{i=1}^{n} e_i \beta^{i,0} + c_n a_0 = \beta^{n+1,0}\,, \tag{25}$$

$$e_i^{0,1} + c_n b_i + \varepsilon'_i = \gamma'_{n+1,i} \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{26}$$

$$e_n^{0,1} + b_n c_n = \gamma'_{n+1,n}\,, \tag{27}$$

$$c_i^{0,1} + c_{i-1} + c_n a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{28}$$

Les conditions d'intégrabilité du système (9) *sont donc* (16)—(20), (24)—(28), *où* γ_{kt}, ε_t, γ'_{kt}, ε'_t *sont déterminés par* (13), (14), (22) *et* (23).

3. Pour la surface (y) qui est une surface focale de la congruence $[yz]$ d'indice n, les points

$$y,\ y^{1,0},\ y^{0,1},\ y^{2,0},\ y^{0,2},\ \ldots,\ y^{n,0},\ y^{0,n} \tag{29}$$

sont linéairement indépendants. J'élimine le cas où les points $y^{n+1,0}$ et $y^{0,n+1}$ dépendent linéairement des points (29); la surface (y) pourra alors être déterminée aussi par le système

$$\left.\begin{aligned} y^{1,1} &= \alpha y^{1,0} + \beta y^{0,1} + \gamma y\,, \\ y^{0,n+1} &= my + \sum_{i=1}^{n} n_i y^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} p_i y^{0,i} + q y^{n+1,0}\,, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

on a $q \neq 0$. Il est difficile de calculer les conditions d'intégrabilité du système

(30), pour les besoins de ce qui suit je me borne à trouver les conditions d'intégrabilité du système

$$y^{1,1} = 0\,, \quad y^{0,n+1} = my + \sum_{i=1}^{n} n_i y^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} p_i y^{0,i} + q y^{n+1,0} \tag{31}$$

qui détermine les surfaces à réseau conjugué dont toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent. On trouve ces conditions d'intégrabilité en différentiant (31_2) d'après u et ensuite d'après v. En comparant alors les coefficients auprès de y, $y^{1,0}$, $y^{0,1}$, $y^{i,0}$, $y^{0,i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ et $y^{n+1,0}$ j'obtiens (on posant $\varepsilon = q^{-1}q_v$)

$$m^{1,1} + p_n^{1,0} - \varepsilon m^{1,0} = 0\,, \tag{32}$$

$$m^{0,1} + n_1^{1,1} + p_n^{1,0} n_1 - \varepsilon m - \varepsilon n_1^{1,0} = 0\,. \tag{33}$$

$$m^{1,0} + p_1^{1,1} + p_n^{1,0} p_1 - \varepsilon p_1^{1,0} = 0\,, \tag{34}$$

$$n_i^{1,1} + n_{i-1}^{0,1} + p_n^{1,0} n_i - \varepsilon n_i^{1,0} - \varepsilon n_{i-1} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)\,, \tag{35}$$

$$p_i^{1,1} + p_{i-1}^{1,0} + p_n^{1,0} p_i - \varepsilon p_i^{1,0} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)\,, \tag{36}$$

$$n_n^{0,1} + p_n^{1,0} q + q^{1,1} - \varepsilon n_n - \varepsilon q^{1,0} = 0\,. \tag{37}$$

4. Supposons que la surface (y), et donc aussi la congruence L qui y est associée, soit donnée par le système (9). Les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ de la surface (y) sont alors données, en vertu du fait que l'espace n-osculateur de la surface (y) est déterminé dans (6_1) pour $k = n$, par l'équation

$$[y, y^{0,1}, \ldots, y^{0,n}, z, z^{1,0}, \ldots, z^{n-1,0}, \mathrm{d}^{n+1}y] = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha\, \mathrm{d}u^{n+1} + b_n\, \mathrm{d}v^{n+1} = 0\,. \tag{38}$$

La substitution (21) appliquée à (38) détermine les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ de la surface (z) par l'équation

$$c_n\, \mathrm{d}u^{n+1} + \beta\, \mathrm{d}v^{n+1} = 0\,. \tag{39}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence $[yz]$ *soit* W *au sens de* M. A. TERRACINI (voir *Sulla teoria delle congruenze W*, Rend. del R. Inst. Lombardo, vol. LX, 1927), c'est-à-dire pour que, sur les surfaces focales (y) et (z) les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ se correspondent respectivement, *est que l'on ait*

$$\alpha\beta - b_n c_n = 0\,. \tag{40}$$

La surface (y) a pour ses transformées de Laplace les surfaces (z) et (x) où

$$x = y_v - \frac{\alpha_v}{\alpha}\, y\,. \tag{41}$$

Je vais trouver maintenant les quasiasymptotiques de la surface (x). La surface (x) a l'espace n-osculateur

$$\Psi = [y, y^{0,1}, \ldots, y^{0,n}, z, z^{1,0}, \ldots, z^{n-2,0}, y^{0,n+1}]\,, \tag{42}$$

les quasiasymptotiques considérées sont donc données par l'équation différentielle

$$[\Psi\, \mathrm{d}^{n+1}x] = [\Psi(x^{n+1,0}\, \mathrm{d}u^{n+1} + x^{0,n+1}\, \mathrm{d}v^{n+1})] = 0\,. \tag{43}$$

Dans ce qui suit, $w_1 \equiv w_2$ doit signifier $w_1 \equiv w_2 \pmod{\Psi}$. A partir de (41) nous trouvons que

$$x^{n+1,0} = y^{n+1,1} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha}\right)^{n-i+1,0} y^{i,0}\,,$$

ensuite nous avons

$$y^{n+1,1} = (\alpha z)^{n,1} = (\alpha_v z)^{n,0} + (\alpha\beta y)^{n,0}\,,$$

$$(\alpha_v z)^{n,0} \equiv n\alpha_{uv} z^{n-1,0} + \alpha_v z^{n,0}\,, \quad (\alpha\beta y)^{n,0} \equiv \alpha\beta y^{n,0} = \alpha\beta(\alpha z)^{n-1,0} \equiv \alpha^2\beta z^{n-1,0}\,,$$

$$y^{n,0} = (\alpha z)^{n-1,0} \equiv \alpha z^{n-1,0}\,, \quad y^{n+1,0} = (\alpha z)^{n,0} \equiv \alpha z^{n,0} + n\alpha_u z^{n-1,0}\,,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1,0} &\equiv n\alpha_{uv} z^{n-1,0} + \alpha_v z^{n,0} + \alpha^2\beta z^{n-1,0} - (n+1)\left(\frac{\alpha_v}{\alpha}\right)_u \alpha z^{n-1,0} - \\ &- \frac{\alpha_v}{\alpha}\left(\alpha z^{n,0} + n\alpha_u z^{n-1,0}\right) = \left(\frac{\alpha_u\alpha_v}{\alpha} - \alpha_{uv} + \alpha^2\beta\right) z^{n-1,0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Ensuite

$$x^{0,n+1} = y^{0,n+2} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha}\right)^{0,n-i+1} y^{0,i} \equiv y^{0,n+2}$$

c'est-à-dire

$$x^{0,n+1} \equiv (b^{0,1}_{n-1} + \alpha\beta b_n) z^{n-1,0} + b^{0,1}_n z^{n,0}\,. \tag{45}$$

Il s'ensuit de (43)—(45) que les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ de la surface (x) vérifient l'équation

$$\left(\frac{\alpha_u\alpha_v}{\alpha} - \alpha_{uv} + \alpha^2\beta\right) b_n\, \mathrm{d}u^{n+1} + (b_n b^{0,1}_{n-1} - b^{0,1}_n b_{n-1} + \alpha\beta b_n^2)\, \mathrm{d}v^{n+1} = 0\,. \tag{46}$$

La réunion des équations (38) et (46) est caractérisée par la relation

$$\frac{\alpha_u\alpha_v - \alpha_{uv}\alpha}{\alpha^2} - \frac{b_n b^{0,1}_{n-1} - b^{0,1}_n b_{n-1}}{b_n^2} = 0\,. \tag{47}$$

De (20_n) j'obtiens

$$b^{1,0}_n + b_{n-1} + b_n e_n = 0\,, \quad b^{1,1}_n + b^{0,1}_{n-1} + b^{0,1}_n e_n + b_n e^{0,1}_n = 0$$

c'est-à-dire

$$b_n b^{0,1}_{n-1} - b^{0,1}_n b_{n-1} = b^{1,0}_n b^{0,1}_n - b^{1,1}_n b_n - b^2_n e^{0,1}_n\,.$$

De (27) j'obtiens $e^{0,1}_n = \alpha\beta - b_n c_n$ de sorte que (47) se transforme en

$$\frac{\alpha_{uv}\alpha - \alpha_u\alpha_v}{\alpha^2} - \frac{b^{1,1}_n b_n - b^{1,0}_n b^{0,1}_n}{b^2_n} + \alpha\beta - b_n c_n = 0\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence [yx] *soit W est que*

$$\left(\log \frac{\alpha}{b_n}\right)_{uv} + \alpha\beta - b_n c_n = 0 \,. \tag{48}$$

Une surface à réseau conjugué dans S_{2n+1} sera appelée *surface R* si les quasi-asymptotiques de cette surface et de ses deux transformées de Laplace se correspondent. *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (y) *donnée par le système* (9) *soit une surface R, est que l'on ait* (40) + (48), *c'est-à-dire*

$$\alpha\beta - b_n c_n = 0 \,, \quad \left(\log \frac{\alpha}{b_n}\right)_{uv} = 0 \,. \tag{49}$$

5. Le changement le plus général des facteurs d'homogénéité des points y et z qui laisse inchangée la forme des équations (9), est le suivant

$$y = \mu\bar{y} \,, \quad z = \nu\bar{z} \,; \quad \mu = \mu(v) \,, \quad \nu = \nu(u) \,. \tag{50}$$

On a alors

$$\bar{\alpha} = \mu^{-1}\nu\alpha \,, \quad \bar{\beta} = \mu\nu^{-1}\beta \,, \quad \bar{b}_n = \mu^{-1}\nu b_n \,, \quad \bar{c}_n = \mu\nu^{-1}c_n \tag{51}$$

et les équations (38) et (39) substistent même après (50). Lors du changement des paramètres suivant

$$u = u(\bar{u}) \,, \quad v = v(\bar{v}) \tag{52}$$

ces équations deviennent

$$\left.\begin{aligned} \alpha \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\right)^{n+1} \mathrm{d}\bar{u}^{n+1} + b_n \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{n+1} \mathrm{d}\bar{v}^{n+1} = 0 \,, \\ c_n \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\right)^{n+1} \mathrm{d}\bar{u}^{n+1} + \beta \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^{n+1} \mathrm{d}\bar{v}^{n+1} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Je dirai d'une surface à réseau conjugué dans S_{2n+1} qu'elle est *isothermo-asymptotique,* s'il est possible de choisir sur elle les paramètres u, v ($\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$ étant le réseau conjugué) de telle sorte que l'équation des quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ soit $\mathrm{d}u^{n+1} - \mathrm{d}v^{n+1} = 0$.

On voit d'après (53_1) qu'*une surface* (y) *est isothermo-asymptotique si et seulement si l'on peut écrire*

$$\frac{\alpha}{b_n} = \frac{U}{V} \,, \quad U = U(u) \,, \quad V = V(v) \tag{54}$$

c'est-à-dire

$$\left(\log \frac{\alpha}{b_n}\right)_{uv} = 0 \,. \tag{55}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces (y) et (z) soient isothermo-asymptotiques, est (49). Si deux surfaces qui se succèdent dans la suite des transformées de Laplace sont isothermo-asymptotiques, alors elles sont toutes les deux des surfaces R. Si une surface donnée est R, alors elle est isothermo-asymptotique avec ses deux transformées de Laplace. En combinant ces résultats j'obtiens ce qui suit:

Considérons dans S_{2n+1} une suite de Laplace de surfaces et de congruences qui les réunissent. Si une surface de cette suite est une surface R, alors toutes les autres sont des surfaces R également (je parle alors d'*une suite R*). *Si deux surfaces qui se succèdent dans la suite sont isothermo-asymptotiques, alors la suite considérée est une suite R.*

6. On connait bien le rôle important joué par les surfaces R de l'espace à trois dimensions (et dont la définition et les porpriété s'accordent avec celles des surfaces R dans les espaces à plusieurs dimensions) à l'étude de la déformation projective. Je vais montrer qu'un rôle analogue est joué par les surfaces R dans S_{2n+1} si l'on étudie la déformation projective d'ordre $n + 1$ (donc C_{n+1}) des surfaces à réseau conjugué.

Soit donnée dans S_{2n+1} une autre surface $(\bar{y})$ à réseau conjugué, déterminée par le système

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}^{1,0} = \bar{\alpha}\bar{z}\,, \quad \bar{z}^{0,1} = \bar{\beta}\bar{y}\,, \quad \bar{y}^{0,n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{y}^{0,i} + \sum_{i=0}^{n} \bar{b}_i \bar{z}^{i,0}\,, \\ \bar{z}^{n+1,0} &= \sum_{i=0}^{n} \bar{c}_i \bar{y}^{0,i} + \sum_{i=0}^{n} \bar{e}_i \bar{z}^{i,0} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

et qui est avec la surface (y) en correspondance donnée par l'égalité des paramètres. Supposons que les surfaces (y) et $(\bar{y})$ soient en déformation C_3, alors pour chaque couple de points correspondant l'un à l'autre il existe une homographie K pour laquelle

$$\left.\begin{gathered} Ky = \bar{y}\,, \\ Ky_u = \bar{y}_u + \lambda_1\bar{y}\,, \quad Ky_{uu} = \bar{y}_{uu} + 2\lambda_1\bar{y}_u + \lambda_2\bar{y}\,, \\ Ky_{uuu} = \bar{y}_{uuu} + 3\lambda_1\bar{y}_{uu} + 3\lambda_2\bar{y}_u + \lambda_3\bar{y}\,, \\ Ky_v = \bar{y}_v + \mu_1\bar{y}\,, \quad Ky_{vv} = \bar{y}_{vv} + 2\mu_1\bar{y}_v + \mu_2\bar{y}\,, \\ Ky_{vvv} = \bar{y}_{vvv} + 3\mu_1\bar{y}_{vv} + 3\mu_2\bar{y}_v + \mu_3\bar{y} \end{gathered}\right\} \tag{57}$$

et

$$\left.\begin{gathered} Ky = \bar{y}\,, \quad K\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\bar{y} + \omega_1\bar{y}\,, \quad K\,\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}^2\bar{y} + 2\omega_1\,\mathrm{d}\bar{y} + \omega_2\bar{y}\,, \\ K\,\mathrm{d}^3y = \mathrm{d}^3\bar{y} + 3\omega_1\,\mathrm{d}^2\bar{y} + 3\omega_2\,\mathrm{d}\bar{y} + \omega_3\bar{y}\,. \end{gathered}\right\} \tag{58}$$

Pour les surfaces (y) et $(\bar{y})$ on a, bien entendu,

$$\left.\begin{aligned} y_{uv} &= Ay_u + By\,, \quad A = \frac{\alpha_v}{\alpha}\,, \quad B = \alpha\beta\,, \\ \bar{y}_{uv} &= \bar{A}\bar{y}_u + \bar{B}\bar{y}\,, \quad \bar{A} = \frac{\bar{\alpha}_v}{\bar{\alpha}}\,, \quad \bar{B} = \bar{\alpha}\bar{\beta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

On trouve aisément que

$$\omega_1 = \lambda_1\,\mathrm{d}u + \mu_1\,\mathrm{d}v\,, \tag{60}$$

en substituant en (58_3) et en comparant les coefficients auprès de $\bar{y}$, $\bar{y}_u$, $\bar{y}_v$ on obtient

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \mu_1 = A - \bar{A} \,, \tag{61}$$

$$\omega_2 = \lambda_2 \, du^2 + 2(B - \bar{B}) \, du \, dv + \mu_2 \, dv^2 + (A - \bar{A}) \, d^2v \,. \tag{62}$$

En comparant les coefficients auprès de $du \, dv^2 y_v$ et $du^2 \, dv y_u$ en (58_4) je trouve

$$A_u = \bar{A}_u \,, \quad B = \bar{B} \,, \tag{63}$$

il en vient alors pour les invariants de Darboux

$$h = \bar{h} = -B + A_u \,, \quad k = \bar{k} = -B \,. \tag{64}$$

Le lecteur vérifiera lui-même aisément le théorème général que voici:

Si deux surfaces à réseau conjugué dans S_m ($m \geqq 4$) sont en déformation C_3, il est possible de modifier leurs expressions analytiques de telle manière qu'elles vérifient toutes les deux à même équation de Laplace.

On trouve en particulier que si les surfaces (y) et $(\bar{y})$ données par les systèmes (9) et (56) sont en déformation C_3 on peut écrire leurs expressions analytiques de telle façon que l'on ait

$$\alpha = \bar{\alpha} \,, \quad \beta = \bar{\beta} \,. \tag{65}$$

7. Soient données dans S_m ($m \geqq 4$) deux surfaces (y) et $(\bar{y})$ à reseau conjugué vérifiant toutes les deux une seule équation de Laplace

$$x^{1,1} = Ax^{1,0} + Bx^{0,1} + Cx \tag{66}$$

et supposons qu'elles soient en déformation C_p ($p \geqq 3$). Alors il existe des homographies p-osculatrices pour lesquelles on a

$$Ky = \bar{y} \,, \quad Ky^{i,0} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j \bar{y}^{i-j,0} \,, \quad Ky^{0,i} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mu_j \bar{y}^{0,i-j} \,, \qquad \lambda_0 = \mu_0 = 1 \,; \quad i = 1, \ldots, p \,. \tag{67}$$

Alors nécessairement

$$K \, d^i y = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \omega_j \, d^{i-j} \bar{y} \,, \quad \omega_0 = 1; \; i = 0, \ldots, p \,. \tag{68}$$

D'une façon évidente on aura

$$K \, dy = d\bar{y} + (\lambda_1 \, du + \mu_1 \, dv) \, \bar{y} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega_1 = \lambda_1 \, du + \mu_1 \, dv \,, \tag{69}$$

il vient de (68_2) que l'on a (mod $\bar{y}$)

$$(\bar{y}_{uu} + 2\lambda_1 \bar{y}_u) \, du^2 + 2(A\bar{y}_u + B\bar{y}_v) \, du \, dv + (\bar{y}_{vv} + 2\mu_1 \bar{y}_v) \, dv^2 + \bar{y}_u \, d^2u + \bar{y}_v \, d^2v \equiv \bar{y}_{uu} \, du^2 + 2(A\bar{y}_u + B\bar{y}_v) \, du \, dv + \bar{y}_{vv} \, dv^2 + \bar{y}_u \, d^2u + \bar{y}_v \, d^2v + 2(\lambda_1 \, du + \mu_1 \, dv)(\bar{y}_u \, du + \bar{y}_v \, dv) \,.$$

En comparant les coefficients auprès de $\bar{y}_u$ du dv et $\bar{y}_v$ du dv on trouve

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0 \,. \tag{70}$$

Supposons que nous ayons

$$\lambda_j = \mu_j = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, q \leqq p - 2 \,. \tag{71}$$

Alors nous aurons

$$Ky = \bar{y} \,,$$

$$\left.\begin{array}{llll} Ky^{1,0} = \bar{y}^{1,0} \,, & Ky^{2,0} = \bar{y}^{2,0}, \ldots, Ky^{q,0} = \bar{y}^{q,0} \,, & Ky^{q+1,0} = \bar{y}^{q+1,0} + \lambda_{q+1}\bar{y}, \\ Ky^{0,1} = \bar{y}^{0,1} \,, & Ky^{0,2} = \bar{y}^{0,2}, \ldots, Ky^{0,q} = \bar{y}^{0,q} \,, & Ky^{0,q+1} = \bar{y}^{0,q+1} + \mu_{q+1}\bar{y} \end{array}\right\} \tag{72}$$

et évidemment aussi

$$Ky = \bar{y}, \ldots, K\,\mathrm{d}^q y = \mathrm{d}^q\bar{y}, \quad K\,\mathrm{d}^{q+1}y = \mathrm{d}^{q+1}\bar{y} + (\lambda_{q+1}\,\mathrm{d}u^{q+1} + \mu_{q+1}\,\mathrm{d}v^{q+1})\bar{y} \,. \tag{73}$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} Ky^{q+2,0} &= \bar{y}^{q+2,0} + (q+2)\,\lambda_{q+1}\bar{y}^{1,0} + \lambda_{q+2}\bar{y} \,, \\ Ky^{0,q+2} &= \bar{y}^{0,q+2} + (q+2)\,\mu_{q+1}\bar{y}^{0,1} + \mu_{q+2}\bar{y} \end{aligned} \tag{74}$$

et

$$\begin{aligned} K\,\mathrm{d}^{q+2}y = \mathrm{d}^{q+2}\bar{y} + (q+2)(\lambda_{q+1}\,\mathrm{d}u^{q+1} + \mu_{q+1}\,\mathrm{d}v^{q+1}) \,. \\ . \,(\bar{y}^{1,0}\,\mathrm{d}u + \bar{y}^{0,1}\,\mathrm{d}v) + \omega_{q+2}\bar{y} \,. \end{aligned} \tag{75}$$

En substituant (72) en (75) nous trouvons, en comparant les coefficients auprès de $\bar{y}^{1,0}$ et $\bar{y}^{0,1}$

$$(q+2)\,\lambda_{q+1}\,\mathrm{d}u^{q+2} = (q+2)(\lambda_{q+1}\,\mathrm{d}u^{q+1} + \mu_{q+1}\,\mathrm{d}v^{q+1})\,\mathrm{d}u,$$

$$(q+2)\,\mu_{q+1}\,\mathrm{d}v^{q+2} = (q+2)(\lambda_{q+1}\,\mathrm{d}u^{q+1} + \mu_{q+1}\,\mathrm{d}v^{q+1})\,\mathrm{d}v$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{q+1} = \mu_{q+1} = 0 \,. \tag{76}$$

Je viens donc de démontrer l'énoncé suivant:

Soient données dans S_m $(m \geqq 4)$ deux surfaces $y = y(u, v)$ et $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$ verifiant la même équation de Laplace et qui sont en déformation C_p $(p \geqq 3)$. Alors pour les homographies p-osculatrices on a nécessairement

$$Ky = \bar{y} \,, \quad Ky^{i,0} = \bar{y}^{i,0} \,, \quad Ky^{0,i} = \bar{y}^{0,i} \quad (i = 1, \ldots, p-1) \,. \tag{77}$$

8. Supposons que deux surfaces (y) et $(\bar{y})$, données par les systèmes (9) et (56) soient en déformation C_{n+1}. Il est possible alors de modifier leurs expressions analytiques de telle façon que l'on ait (65); pour les homographies $(n+1)$-osculatrices on a d'après ce qui précède

$$Ky = \bar{y} \,, \quad Ky^{i,0} = \bar{y}^{i,0} \,, \quad Ky^{0,i} = \bar{y}^{0,i} \quad (i = 1, \ldots, n) \,. \tag{78}$$

A partir des équations $Ky^{i,0} = \bar{y}^{i,0}$ on obtient dejà aisément

$$Kz = \bar{z} \,, \quad Kz^{i,0} = \bar{z}^{i,0} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \,. \tag{79}$$

Ensuite, il vient nécessairement

$$Ky^{n+1,0} = \bar{y}^{n+1,0} + \lambda \bar{y} , \quad Ky^{0,n+1} = \bar{y}^{0,n+1} + \mu \bar{y} . \tag{80}$$

De la première équation découle

$$Kz^{n,0} = \bar{z}^{n,0} + \nu \bar{y} . \tag{81}$$

De (80_2) j'obtiens

$$a_i = \bar{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n) , \quad b_i = \bar{b}_i \quad (i = 0, \ldots, n) . \tag{82}$$

Pour les surfaces (y) et $(\bar{y})$ on a évidemment

$$\gamma_{kt} = \bar{\gamma}_{kt} , \quad \gamma'_{kt} = \bar{\gamma}'_{kt} , \quad \varepsilon_t = \bar{\varepsilon}_t , \quad \varepsilon'_t = \bar{\varepsilon}'_t . \tag{83}$$

Par soustraction des équations (18), $(\overline{18})$, ou (19), $(\overline{19})$, ou (20), $(\overline{20})$, ou bien encore (28), $(\overline{28})$ on obtient respectivement $b_n(c_i - \bar{c}_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, \ldots, n - 1$, ou bien $b_n(c_n - \bar{c}_n) = 0$, ou $b_n(e_i - \bar{e}_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, ou encore $c_1^{0,1} - \bar{c}_1^{0,1} + c_0 - \bar{c}_0 = 0$, c'est-à-dire

$$c_i = \bar{c}_i \quad (i = 0, \ldots, n) , \quad e_i = \bar{e}_i \quad (i = 1, \ldots, n) . \tag{84}$$

Maintenant on voit déjà aisément:

La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces (y), $(\bar{y})$ dans S_{2n+1} soient en déformation projective C_{n+1} est qu'il soit possible de modifier leurs expressions analytique de telle manière qu'elles ne diffèrent qu'en coefficients a_0 et e_0. Si deux surfaces (y) et $(\bar{y})$ sont en déformation projective C_{n+1}, alors les r-èmes transformées de Laplace ($r = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) de ces deux surfaces sont en déformation C_{n+1} également.

Si la surface (y) est projectivement déformable, le système (16)—(20), (24)—(28) est vérifié pour les fonctions a_0, e_0 et pour d'autres fonctions $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$ encore, sans que l'on ait $a_0 - \bar{a}_0 = e_0 - \bar{e}_0 = 0$. Par soustraction des équations (17), $(\overline{17})$, ou bien (25), $(\overline{25})$, j'obtients respectivement

$$\alpha(a_0 - \bar{a}_0) + b_n(e_0 - \bar{e}_0) = 0 , \quad c_n(a_0 - \bar{a}_0) + \beta(e_0 - \bar{e}_0) = 0 , \tag{85}$$

il faut donc que l'on ait

$$\alpha\beta - b_n c_n = 0 . \tag{86}$$

Par soustraction des équations (16), $(\overline{16})$, ou bien (24), $(\overline{24})$ je trouve $a_0^{1,0} = \bar{a}_0^{1,0}$ ou bien $e_1^{0,1} = \bar{e}_1^{0,1}$ respectivement, on doit donc avoir

$$\bar{a}_0 = a_0 + V , \quad \bar{e}_0 = e_0 + U ; \quad U = U(u) , \quad V = V(v) . \tag{87}$$

A partir de (85_1) j'obtiens $\alpha V + b_n U = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\log \frac{\alpha}{b_n}\right)_{uv} = 0 . \tag{88}$$

Pour toute surface projectivement déformable on a nécessairement (86) et (88); le lecteur vérifiera lui-même aisément que ces conditions-là sont aussi suffisantes.

S'il est donné une surface projectivement déformable (y), alors on a (88) et donc $\alpha : b_n = \psi(u) : \varphi(v)$. En exploitant cette relation on trouve en substituant (87) en (85_1) que $\psi V + \varphi U = 0$, c'est-à-dire $V = k\varphi$, $U = -k\psi$, où $k =$ const. *Si la surface (y), donnée par le système (9), est projectivement déformable, alors toutes ses déformations sont déterminées par le même système où l'on écrit toutefois $a_0 + k\varphi(v)$ et $e_0 - k\psi(u)$ au lieu de a_0 et e_0.* En conclusion j'obtiens:

Les seules surfaces à réseau conjugué dans S_{2n+1} qui admettent des déformations projectives C_{n+1} sont les surfaces R. Une surface R est déformable d'une infinité (∞^1) de façons.

9. Il est possible d'établir des résultats concernant même les surfaces projectivement déformables à réseau conjugué dans S_{2n+1}, dont toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent. Une surface de ce type est donnée par le système (30) avec les conditions d'intégrabilité (32)—(37). Si cette surface est en déformation projective C_{n+1} avec une autre surface

$$\bar{y}^{1,1} = 0\,, \quad \bar{y}^{0,n+1} = \overline{m}\bar{y} + \sum_{i=1}^{n} \bar{n}_i \bar{y}^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{y}^{0,i} + \bar{q}\bar{y}^{n+1,0}\,, \tag{89}$$

on aura, d'après ce qui précède, pour l'homographie $(n+1)$-osculatrice

$$Ky = \bar{y}\,, \quad K\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\bar{y}, \ldots, K\,\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}^n\bar{y}\,, \quad K\,\mathrm{d}^{n+1}y = \mathrm{d}^{n+1}\bar{y} + \omega\bar{y}\,, \tag{90}$$

c'est-à-dire $Ky^{n+1,0} \equiv \bar{y}^{n+1,0} \pmod{\bar{y}}$ et

$$n_i = \bar{n}_i\,, \quad p_i = \bar{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,, \quad q = \bar{q}\,. \tag{91}$$

Par là le problème de trouver les surfaces projectivement déformables du type considéré (on les appelle surfaces R^0) est réduit au suivant problème analytique: Il faut trouver le système de fonctions n_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$, q pour lesquelles il existe au moins deux fonctions différentes m et $\overline{m}$ qui vérifient avec n_i, p_i et q le système (32)—(37).

J'écris les équations (32)—(34) sous la forme de

$$m^{1,1} - \varepsilon m^{1,0} + p_n^{1,0}\, m = 0\,, \quad m^{0,1} - \varepsilon m + A = 0\,, \quad m^{1,0} + B = 0\,. \tag{92}$$

où

$$A = n_1^{1,1} + p_n^{1,0} n_1 - \varepsilon n_1^{1,0}\,, \quad B = p_1^{1,1} + p_n^{1,0} p_1 - \varepsilon p_1^{1,0}\,. \tag{93}$$

A partir de ($92_{1,3}$), ($92_{2,3}$), (92_3) j'obtiens

$$m^{1,1} = -\varepsilon B - p_n^{1,0} m\,, \quad m^{1,1} = \varepsilon^{1,0} m - \varepsilon B - A^{1,0}\,, \quad m^{1,1} = -B^{0,1}$$

donc

$$(\varepsilon^{1,0} + p_n^{1,0})\, m - A^{1,0} = 0\,, \quad p_n^{1,0} m + \varepsilon B - B^{0,1} = 0\,. \tag{94}$$

Alors deux cas peuvent se présenter:

I. Les équations (94) ne sont pas vérifiées identiquement en m, alors la surface est non-déformable.

II. Les équations (94) sont vérifiées identiquement en m. Alors pour la surface donnée les équations (92) sont complètement intégrables (par rapport à m) et la fonction m qui est ainsi déterminée dépend d'une constante. J'ai alors:

Une surface R^0 est caractérisée par les équations

$$\varepsilon^{1,0} = 0 \,, \quad p_n^{1,0} = 0 \,, \quad A^{1,0} = 0 \,, \quad \varepsilon B - B^{0,1} = 0 \tag{95}$$

et déformable de ∞^1 de façons.

Pour trouver les surfaces R^0 il faut résoudre le système (32)—(37), (95). Dans ce qui suit U ou bien U_i (V ou bien V_i) dénote une fonction de la variable u (v). J'obtiens alors à partir de (95_1)

$$q = UV \neq 0 \tag{96}$$

de sorte que $\varepsilon = V^{-1}V'$, ensuite, il découle de (95_2)

$$p_n = V_n \,. \tag{97}$$

A partir des équations (36) pour $i = n, \ldots, 2$ on trouve successivement

$$p_i = V_i \quad (i = 1, \ldots, n - 1) \,. \tag{98}$$

L'équation (37) se réduit à $n_n^{0,1} - \varepsilon n_n = 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{n_n}{q}\right)_n = 0$, ou bien encore

$$n_n = U_n V \,. \tag{99}$$

A partir des équations (37) pour $i = n, \ldots, 2$ on trouve successivement

$$n_i = U_i V \quad (i = 1, \ldots, n - 1) \,. \tag{100}$$

Les équations (33), (34) se réduisent à $m_v - V^{-1}V'm = m_u = 0$ avec la solution

$$m = kV \,, \quad k = \text{const} \,. \tag{101}$$

Le système de fonctions (96)—(101) vérifie tout le système (32)—(37), (95) et représente donc la solution générale.

La surface (30) est une surface R^0 si et selement si les fonctions $m, \ldots, q$ sont de la forme (96)—(101); on obtient ses déformations en changeant le nombre k. Par un choix convenable des paramètres u, v il est possible d'obtenir

$$U = V = 1 \tag{102}$$

de sorte que *la surface R^0 générale est donnée par le système*

$$y^{1,1} = 0 \,, \quad y^{0,n+1} = ky + \sum_{i=1}^{n} U_i y^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} V_i y^{0,i} + y^{n+1,0} \tag{103}$$

et dépend de $2n$ fonctions d'une variable. Par là je corrige l'erreur que j'ai commise dans mon travail antérieur *Déformations projectives de certaines surfaces à réseau conjugué* (Czech. Math. Journal *5* (*80*), 1955, 559—572) où j'affirmais qu'une surface R^0 dans S_5 dépend de six fonctions d'une variable.

On peut écrire la surface (103) sous la forme de

$$y = X(u) + Y(v) \tag{104}$$

où l'on a

$$Y^{(n+1)} = k(X + Y) + \sum_{i=1}^{n} U_i X^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} V_i Y^{(i)} + X^{(n+1)}, \tag{105}$$

il en vient par différentiation d'après u, ou v respectivement

$$\left.\begin{aligned} X^{(n+2)} + U_n X^{(n+1)} + \sum_{i=2}^{n} (U_{i-1} + U_i') X^{(i)} + (U_1' + k) X' = 0 \\ Y^{(n+2)} - V_n Y^{(n+1)} - \sum_{i=2}^{n} (V_{i-1} + V_i') Y^{(i)} - (V_1' + k) Y' = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Comme les transformées de Laplace de la surface (y) sont formées par les courbes $X'(u)$ et $Y'(v)$, on voit que *chaque transformée de Laplace de la surface R^0 est située dans un sous-espace à n dimensions.* Ensuite on voit aisément de (106) que *les courbes d'une couche du réseau conjugué de la surface R^0 sont projectives mutuellement et* que *chacune d'elles est située dans un sous-espace à $n + 1$ dimensions qui passe par un des espaces dans lequel sont situées les transformées de Laplace de la surface considérée.*

Supposons que $X(u_0) + Y(v)$, $X(u_1) + Y(v)$ soient deux courbes du réseau conjugué de la surface R^0, alors elles sont toutes les deux situées sur un cône ayant le point $X(u_0) - X(u_1)$ pour son sommet. En procédant au développement en série de Taylor nous trouvons immédiatement que ce point est situé dans l'espace déterminé par les points $X', \ldots, X^{(n+1)}$ et contenant donc aussi la transformée de Laplace $X'(u)$. En combinant ces résultats j'obtiens ce qui suit:

Une surface R^0 provient de la construction suivante: Supposons qu'il soit donné, dans l'espace S_{2n+1}, des espaces S_n, S_n', S_{n+1}, S_{n+1}'; $S_n \subset S_{n+1}$, $S_n' \subset S_{n+1}'$; soit $O \in S_{n+1} \cap S_{n+1}'$ et soient c, c' deux courbes pour lesquelles $O \in c \subset S_{n+1}$, $O \in c' \subset S_{n+1}'$. Soit P le point variable de la courbe c', $Q_P = OP \cap S_n'$, c_P soit la projection de la courbe c du point Q_P sur l'espace $(S_{n+1})_P \equiv (S_n, P)$. La surface en question est alors engendrée justement par les courbes c_P, $P \in c'$.

Cette construction représente une généralisation de la construction des réseau R à transformées de Laplace dégénérées, dans S_3, donnée par M. B. Segre dans *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni differenziali ad esse collegate* (Mem. della Acc. Italia, Vol. *II*, No 3, 1931).

10. Dans toutes les considérations précédentes il y a une lacune désagréable: on ignore si les surfaces R existent en général. Dans ce qui va suivre, je veux m'occuper plus en détail des questions d'existence et, en connexion avec celà, développer les commencements d'une théorie systématique des congruences de droites dans les espaces de dimension impaire.

Je vais procéder par les méthodes de Cartan. Soit $p_0 = [x_0 y_0]$, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, une droite arbitraire d'une congruence L de droites dans S_{2n+1} $(n \geqq 1)$, x_0, y_0 étant les foyers. Chacune des courbes $x = x(u_0, v)$, $y = y(u, v_0)$ est découpé sur la surface focale par une surface développable de la congruence et son n-ème espace osculateur est de dimension n. Je choisis le repère correspondant à la droite p_0 de telle manière que les points $A_1, A_3, \ldots, A_{2k+1}$ $(k = 0, \ldots, n)$ soient situés dans le k-ème espace osculateur de la courbe $x = x(u_0, v)$ et que les points $A_2, A_4, \ldots, A_{2k+2}$ $(k = 0, \ldots, n)$ soient situés dans le k-ème espace osculateur de la courbe $y = y(u, v_0)$. Il est alors aisé de voir qu'en normalisant d'une façon convenable les points du repère on peut obtenir

$$[A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{2n+1}, A_{2n+2}] = 1 \tag{107}$$

les équations fondamentales étant

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A_{2a-1} = \sum_{i=1}^{2a} \omega_{2a-1,i} A_i + \omega_1 A_{2a+1}\,, \quad \mathrm{d}A_{2a} = \sum_{i=1}^{2a} \omega_{2a,i} A_i + \omega_2 A_{2a+2}\,, \\ (a = 1, \ldots, n)\,, \\ \mathrm{d}A_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+2} \omega_{2n+1,i} A_i\,, \quad \mathrm{d}A_{2n+2} = \sum_{i=1}^{2n+2} \omega_{2n+2,i} A_i \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

où l'on pose pour des raisons de simplicité

$$\omega_{13} = \omega_1\,, \quad \omega_{24} = \omega_2 \tag{109}$$

et évidemment $[\omega_1 \omega_2] \neq 0$.

Les considérations qui vont suivre auront donc pour point de départ les équations

$$\omega_{2a-1,2a+2} = \omega_{2a,2a+1} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n) \tag{110}$$

et dans le cas de $n \geqq 2$ les équations

$$\omega_{2a-1,b} = \omega_{2a,b} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n-1;\ b = 2a+3, \ldots, 2n+2)\,, \tag{111}$$

$$\omega_{2a+1,2a+3} = \omega_{13}\,, \quad \omega_{2a+2,2a+4} = \omega_{24} \quad (a = 1, \ldots, n-1)\,. \tag{112}$$

Il vient de ces équations si l'on emploie la notation habituelle de Cartan

$$e_{2a-1,b} = e_{2a,b} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n;\ b = 2a+1, \ldots, 2n+2)\,. \tag{113}$$

Par différentiation extérieure des équations (110) on obtient

$$\left.\begin{aligned} [\omega_{2a-1,2a}\omega_2] + [\omega_1 \omega_{2a+1,2a+2}] = 0\,, \\ (a = 1, \ldots, n)\,. \\ [\omega_{2a,2a-1}\omega_1] + [\omega_2 \omega_{2a+2,2a+1}] = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Si $n \geqq 2$, les équations (111) sont complètement intégrables et la différentiation extérieure des équations (112) donne

$$\left.\begin{aligned} [\omega_1(\omega_{2a+3,2a+3} - \omega_{2a+1,2a+1} + \omega_{11} - \omega_{33})] = 0\,, \\ (a = 1, \ldots, n-1)\,. \\ [\omega_2(\omega_{2a+4,2a+4} - \omega_{2a+2,2a+2} + \omega_{22} - \omega_{44})] = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

De (114) découle l'existence de μ_a, ν_a, σ_a, ϱ_a $(a = 1, \ldots, n + 1)$ tels que

$$\omega_{2a-1,\,2a} = \mu_a \omega_1 + \nu_a \omega_2\,, \quad \omega_{2a,\,2a-1} = \sigma_a \omega_1 + \varrho_a \omega_2\,, \quad (a = 1, \ldots, n + 1)$$

en resubstituant on trouve $\mu_a + \nu_{a+1} = \varrho_a + \sigma_{a+1} = 0$ $(a = 1, \ldots, n)$. Je pose

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \alpha_1\,, \quad \nu_{a+1} = -\mu_a = \alpha_{a+1}\,, \quad -\mu_{n+1} = \alpha_{n+2}\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n) \\ &\sigma_1 = \beta_1\,, \quad \sigma_{a+1} = -\varrho_a = \beta_{a+1}\,, \quad -\varrho_{n+1} = \beta_{n+2}\,, \end{aligned}$$

et j'obtiens enfin

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{2a-1,\,2a} = -\alpha_{a+1}\omega_1 + \alpha_a \omega_2\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n + 1)\,. \\ &\omega_{2a,\,2a-1} = \beta_a \omega_1 - \beta_{a+1}\omega_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Pour $n \geqq 2$ il s'ensuit de (115) en vertu du lemme de Cartan

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{2a+3,\,2a+3} - \omega_{2a+1,\,2a+1} + \omega_{11} - \omega_{33} = \gamma_a \omega_1\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n - 1)\,. \\ &\omega_{2a+4,\,2a+4} - \omega_{2a+2,\,2a+2} + \omega_{22} - \omega_{44} = \varepsilon_a \omega_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

En différentiant l'équation (107) on obtient l'équation complètement intégrable

$$\sum_{i=1}^{2n+2} \omega_{ii} = 0\,. \tag{118}$$

Je vais modifier les équations (117). Soit $1 \leqq b \leqq n - 1$; en sommant les b premières équations (117_1) ou (117_2) j'obtiens respectivement

$$\begin{aligned} &\omega_{2b+3,\,2b+3} - \omega_{33} + b(\omega_{11} - \omega_{23}) = \sum_{a=1}^{b} \gamma_a \omega_1\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n - 1) \\ &\omega_{2b+4,\,2b+4} - \omega_{44} + b(\omega_{22} - \omega_{44}) = \sum_{a=1}^{b} \varepsilon_a \,.\, \omega_2\,, \end{aligned}$$

de sorte que les équations (117) peuvent être remplacées par les équations

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{2a+3,\,2a+3} = (a + 1)\,\omega_{33} - a\omega_{11} + \varphi_a \omega_1\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n - 1)\,. \\ &\omega_{2a+4,\,2a+4} = (a + 1)\,\omega_{44} - a\omega_{22} + \psi_a \omega_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

Or (116) et (119) implique

$$e_{2a-1,\,2a} = e_{2a,\,2a-1} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n + 1) \tag{120}$$

et pour $n \geqq 2$

$$\left.\begin{aligned} e_{2a+2,\,2a+3} &= (a+1)\,e_{33} - a e_{11}\,, \\ e_{2a+4,\,2a+4} &= (a+1)\,e_{44} - a e_{22}\,, \end{aligned} \qquad (a = 1, \ldots, n-1)\,. \right\} \tag{121}$$

Il s'ensuit de (118) que l'on a

$$\sum_{i=1}^{2n+2} e_{ii} = 0\,. \tag{122}$$

Le système (113) se compose de $2n(n+1)$ équations, le système (120) de de $2(n+1)$ équations et le système (121) de $2(n-1)$ équations, les équations (113), (120)—(122) sont linéairement indépendantes de sorte que le repère associé de la façon signalée ci-dessus à chaque droite de la congruence, dépend encore de $2n^2 + 2n + 3$ paramètres secondaires.

Si je pose

$$\omega_{10} = \omega_{2,-1} = \omega_{2n+3,\,2n+2} = \omega_{2n+4,\,2n+1} = 0 \tag{123}$$

je trouve en différentiant extérieurement (116) les équations

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_{a+1} + \alpha_{a+1}\overline{\omega_{2a,\,2a} - \omega_{2a-1,\,2a-1} - \omega_{33} + \omega_{11}} - \omega_{2a+1,\,2a})] - \\ &- [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_a + \alpha_a\overline{\omega_{2a,\,2a} - \omega_{2a-1,\,2a-1} - \omega_{44} + \omega_{22}} - \omega_{2a-1,\,2a-2})] = 0\,, \\ &[\omega_1(\mathrm{d}\beta_a + \beta_a\overline{\omega_{2a-1,\,2a-1} - \omega_{2a,\,2a} - \omega_{33} + \omega_{11}} - \omega_{2a,\,2a-3})] - \\ &- [\omega_2(\mathrm{d}\beta_{a+1} + \beta_{a+1}\overline{\omega_{2a-1,\,2a-1} - \omega_{2a,\,2a} - \omega_{44} + \omega_{22}} - \omega_{2a+2,\,2a-1})] = 0 \\ &\qquad\qquad (a = 1, \ldots, n+1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} \delta\alpha_a &= \alpha_a\vartheta_a + e_{2a-1,\,2a-2}\,, \\ \delta\beta_a &= \beta_a\vartheta_a^* + e_{2a,\,2a-3}\,, \end{aligned} \qquad (a = 1, \ldots, n+2) \right\} \tag{125}$$

où les formes de Pfaff ϑ_a, ϑ_a^* ne m'intéressent pas; les formes $e_{2a-1,\,2a-2}$, $e_{2a,\,2a-3}$ $(a = 2, \ldots, n+1)$ étant linéairement indépendantes il est possible de choisir le repère de sorte que l'on ait

$$\alpha_a = \beta_a = 0 \quad (a = 2, \ldots, n+1)\,. \tag{126}$$

On a alors

$$e_{2a-1,\,2a-2} = e_{2a,\,2a-3} = 0 \quad (a = 2, \ldots, n+1) \tag{127}$$

et les repères ainsi spécialisés dépendent encore de $2n^2 + 3$ paramètres secondaires. Les équations (116) deviennent

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \alpha_1\omega_2\,, & \omega_{2n+1,\,2n+2} &= -\alpha_{n+2}\omega_1\,, \\ \omega_{21} &= \beta_1\omega_1\,, & \omega_{2n+2,\,2n+1} &= -\beta_{n+2}\omega_2 \end{aligned} \tag{128}$$

et pour $n \geqq 2$

$$\omega_{2a-1,\,2a} = \omega_{2a,\,2a-1} = 0 \quad (a = 2, \ldots, n) \tag{129}$$

avec les conséquences différentielles

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega_1\omega_{32}] + [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})}] = 0\,,\\
&[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_{n+2} + \alpha_{n+2}\overline{\omega_{2n+2,\,2n+2} - \omega_{2n+1,\,2n+1} - \omega_{33} + \omega_{11})}] +\\
&\qquad + [\omega_2\omega_{2n+1,\,2n}] = 0\,,\\
&[\omega_1(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\overline{2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})}] + [\omega_2\omega_{41}] = 0\,,\\
&[\omega_1\omega_{2n+2,\,2n-1}] +\\
&+ [\omega_2(\mathrm{d}\beta_{n+2} + \beta_{n+2}\overline{\omega_{2n+1,\,2n+1} - \omega_{2n+2,\,2n+2} - \omega_{44} + \omega_{22})}] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{130}$$

et pour $n \geqq 2$

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega_1\omega_{2a+1,\,2a}] - [\omega_2\omega_{2a-1,\,2a-2}] = 0\,,\\
&[\omega_1\omega_{2a,\,2a-3}] - [\omega_2\omega_{2a+2,\,2a-1}] = 0\,.
\end{aligned}\quad (a = 2, \ldots, n)\,.\right\} \tag{131}$$

Les grandeurs $\alpha_1, \alpha_{n+2}, \beta_1, \beta_{n+2}$ sont des invariants relatifs, il s'ensuit des équations précédents que

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \alpha_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22})\,,\\
\delta\alpha_{n+2} &= \alpha_{n+2}(\overline{n+1}e_{33} - ne_{44} - ne_{11} + \overline{n-1}e_{22})\,,\\
\delta\beta_1 &= \beta_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11})\,,\\
\delta\beta_{n+2} &= \beta_{n+2}(\overline{n+1}e_{44} - ne_{33} - ne_{22} + \overline{n-1}e_{11})\,.
\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Ensuite on trouve facilement

$$\delta\omega_1 = (e_{11} - e_{33})\,\omega_1\,, \quad \delta\omega_2 = (e_{22} - e_{44})\,\omega_2\,; \tag{133}$$

en aditionnant les équations (121) on obtient en vertu de (122)

$$n(e_{33} + e_{44}) = (n - 2)(e_{11} + e_{22})\,. \tag{134}$$

On vérifie aisément le résultat que voici:

Les formes suivantes sont les formes invariantes fondamentales d'une congruence de droites dans l'espace S_{2n+1}: la forme ponctuelle

$$\varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2\,, \tag{135}$$

la forme hyperplanaire

$$\varphi^* = \alpha_{n+2}\beta_{n+2}\omega_1\omega_2\,, \tag{136}$$

les formes focales de première et de seconde espèce

$$F_1 = -\,\alpha_1\beta_{n+2}\,\frac{\omega_2^{n+2}}{\omega_1^n}\,, \quad F_2 = -\,\beta_1\alpha_{n+2}\,\frac{\omega_1^{n+2}}{\omega_2^n}\,, \tag{137}$$

les formes quasiasymptotiques de première et de seconde espèce (en supposant le cas général de $\alpha_{n+2}\beta_{n+2} \neq 0$)

$$G_1 = -\,\frac{\alpha_1\omega_2^{n+1}}{\alpha_{n+2}\omega_1^{n+1}}\,, \quad G_2 = -\,\frac{\beta_1\omega_1^{n+1}}{\beta_{n+2}\omega_2^{n+1}}\,. \tag{138}$$

L'expression

$$\Phi = \tfrac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2) = \frac{(\alpha_1\omega_2^{n+1} - \alpha_{n+2}\omega_1^{n+1})(\beta_1\omega_n^{n+1} - \beta_{n+2}\omega_2^{n+1})}{4\omega_1^n\omega_2^n} \tag{139}$$

sera appelée *élément linéaire projectif de la congruence de droites* considérée, dans le cas de $n = 1$ on obtient l'élément d'une congruence de droites en S_3, introduit par M. A. TERRACINI; voir aussi M. E. ČECH, *Transformations développables des congruences de droites* (Czech. Math. Journal *6* (*81*), 1956, 260—286). L'expression suivante est une généralisation de *l'invariant de Wälsch*:

$$I = \frac{\varphi}{\varphi^*} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_{n+2}\beta_{n+2}}\,. \tag{140}$$

Je signale enfin qu'il est possible d'orienter les congruences de droites de la façon bien connue; la notation pour les formes focales et quasiasymptotiques est choisi sous l'hypothese que (A_1) est la première surface focale.

11. La congruence de droites considérée est donnée par les équations linéaires (110)—(112), (118), (128), (129) qui se ferment par les équations quadratiques (115), (130), (131). Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a dans la notation habituelle $p = 2$, $q = 4n + 2$, $s_1 = 4n$, $s_2 = 2$, $N = 4n + 4$, ce qui ne donne, bien entendu, rien d'autre que le résultat connu: une congruence de droites en S_{2n+1} dépend de deux fonctions de deux variables.

Je vais trouver encore *le degré de généralité des congruences dont les formes* (135)—(138) *sont liées par deux relations indépendantes, pouvant d'ailleurs dépendre de u et v.* Je peux poser

$$\omega_1 = \mathrm{d}u\,, \quad \omega_2 = \mathrm{d}v\,, \tag{141}$$

d'où j'obtiens par différentiation extérieure

$$[\mathrm{d}u(\omega_{33} - \omega_{11})] = 0\,, \quad [\mathrm{d}v(\omega_{44} - \omega_{22})] = 0\,, \tag{142}$$

$$\omega_{33} - \omega_{11} = r_1\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega_{44} - \omega_{22} = r_2\,\mathrm{d}v\,. \tag{143}$$

Les relations citées peuvent évidemment être écrites sous la forme de

$$f_t(\alpha_1\beta_1, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}, \alpha_1\beta_{n+2}, \beta_1\alpha_{n+2}, u, v) = 0 \quad (t = 1, 2) \tag{144}$$

d'où j'obtiens par différentiation les relations linéairement indépendantes de la forme

$$\begin{aligned} &f_{1t}\,\mathrm{d}(\alpha_1\beta_1) + f_{2t}\,\mathrm{d}(\alpha_{n+2}\beta_{n+2}) + f_{3t}\,\mathrm{d}(\alpha_1\beta_{n+2}) + \\ &+ f_{4t}\,\mathrm{d}(\beta_1\alpha_{n+2}) + f_{5t}\,\mathrm{d}u + f_{6t}\,\mathrm{d}v = 0 \quad (t = 1, 2)\,. \end{aligned} \tag{145}$$

En vertu de

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha_1\beta_1) &= \beta_1\,\Delta\alpha_1 + \alpha_1\,\Delta\beta_1 + \alpha_1\beta_1(r_1\,\mathrm{d}u + r_2\,\mathrm{d}v)\,, \\ \mathrm{d}(\alpha_{n+2}\beta_{n+2}) &= \beta_{n+2}\,\Delta\alpha_{n+2} + \alpha_{n+2}\,\Delta\beta_{n+2} + \alpha_{n+2}\beta_{n+2}(r_1\,\mathrm{d}u + r_2\,\mathrm{d}v)\,, \\ \mathrm{d}(\alpha_1\beta_{n+2}) &= \beta_{n+2}\,\Delta\alpha_1 + \alpha_1\,\Delta\beta_{n+2} - \alpha_1\beta_{n+2}(\overline{\varphi_{n-1} + nr_1\,\mathrm{d}u} - \overline{\psi_{n-1} + (n+2)r_2\,\mathrm{d}v})\,, \\ \mathrm{d}(\beta_1\alpha_{n+2}) &= \beta_1\,\Delta\alpha_{n+2} + \alpha_{n+2}\,\Delta\beta_1 + \beta_1\alpha_{n+2}(\overline{\varphi_{n-1} + (n+2)\,r_1\,\mathrm{d}u} - \overline{\psi_{n-1} + nr_2\,\mathrm{d}v}) \end{aligned}$$

où

$$\Delta\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}) \,,$$
$$\Delta\alpha_{n+2} = \mathrm{d}\alpha_{n+2} + \alpha_{n+2}(\omega_{2n+2,\,2n+2} - \omega_{2n+1,\,2n+1} - \omega_{33} + \omega_{11}) \,,$$
$$\Delta\beta_1 = \mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) \,,$$
$$\Delta\beta_{n+2} = \mathrm{d}\beta_{n+2} + \beta_{n+2}(\omega_{2n+1,\,2n+1} - \omega_{2n+2,\,2n+2} - \omega_{44} + \omega_{22})$$

il est possible d'écrire (145) sous la forme de

$$\mu_{1t}\,\Delta\alpha_1 + \mu_{2t}\,\Delta\alpha_{n+2} + \mu_{3t}\,\Delta\beta_1 + \mu_{4t}\,\Delta\beta_{n+2} + \mu_{5t}\,\mathrm{d}u + \\ + \mu_{6t}\,\mathrm{d}v = 0 \quad (t = 1, 2) \,. \tag{145}$$

La différentiation extérieure de (145) conduit à des identités.

Si je considère maintenant le système (110)—(112), (118), (128), (129), (145) qui se ferme par les équadtios (115), (130), (131), il n'est plus difficile de trouver $p = 2$, $q = 4n + 2$, $s_1 = 4n + 2$, $s_2 = 0$, $N = 4n + 2$, ce qui donne le suivant.

Théorème généralisé de Cartan-Čech. *Les congruences de droites dans l'espace projectif* S_{2n+1} ($n \geqq 1$) *dont les formes* (135)—(138) *vérifient deux relations indépendantes existent et dépendent de* $4n + 2$ *fonctions d'une variable.*

Ce théorème résout le problème d'existence des surfaces R, car on trouve aisément que les quasiasymptotiques des surfaces (A_1) et (A_2) sont données par les équations

$$\alpha_1\omega_2^{n+1} - \alpha_{n+2}\omega_1^{n+1} = 0 \,, \quad \beta_1\omega_1^{n+1} - \beta_{n+2}\omega_2^{n+1} = 0 \,, \tag{146}$$

en raison de (141) la condition que les surfaces (A_1) et (A_2) doivent être isothermo-asymptotiques est équivalente à

$$\alpha_1 - \alpha_{n+2} = 0 \,, \quad \beta_1 - \beta_{n+2} = 0 \,. \tag{147}$$

J'en obtiens:

Les surfaces R dans l'espace S_{2n+1} dépendent de $4n + 2$ fonctions d'une variable.

Remarque. Dans ce qui précède, je viens également de poser les fondements de la théorie des congruences de droites dans les espaces de dimension impaire; j'ai étudié les congruences de droites dans les espaces de dimension paire dans mon travail antérieur *Congruences de droites dans les espaces projectifs à dimension paire,* Czech. Math. Journ. *8* (*83*), 1958, 274—284.

É. Cartan a trouvé que les surfaces R (et donc aussi les congruences R) dans S_3 dépendent de six fonctions d'une variable, M. E. Čech (*Transformations développables des congruences de droites*, Czech. Math. Journal, *6* (*81*), 1956, 260—286) a trouvé un thèoreme général qui est un cas spécial ($n = 1$) du théorème généralisé de Cartan-Čech cité ci-dessus.

Резюме

ПОВЕРХНОСТИ R В ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 28/IV 1958 г.)

На поверхности с сопряженной сетью в S_{2n+1} ($n \geqq 1$) существует $(n + 1)$-слой квазиасимптотических линий. Пусть $\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots$ — лапласова последовательность поверхностей с сопряженной сетью; прямолинейную конгруэнцию с фокальными поверхностями π_i, π_{i+1} обозначим через $\{\pi_i, \pi_{i+1}\}$. Поверхность π назовем поверхностью R, если конгруэнции $\{\pi_{-1}, \pi\}$ и $\{\pi, \pi_1\}$ принадлежат типу W, т. е. если на поверхностях π_{-1}, π, π_1 квазиасимптотические $\gamma_{n,n+1}$ соответствуют друг другу. Поверхность π мы назовем изотермо-квазиасимптотической, если на ней можно подобрать параметры u, v так, чтобы $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$ была сопряженной сетью и квазисимптотические линии $\gamma_{n,n+1}$ были даны уравнением $\mathrm{d}u^{n+1} - \mathrm{d}v^{n+1} = 0$. Мы получаем следующие результаты:

1. *Если поверхность π рассматриваемой лапласовой последовательности является поверхностью R, то и все поверхности последовательности являются поверхностями R.*

2. *Поверхность R является изотермо-квазиасимптотической.*

3. *Если две следующие друг за другом поверхности рассматриваемой лапласовой последовательности являются изотермо-квазиасимптотическими, то вся последовательность состоить из поверхностей R.*

4. *Поверхность R в S_{2n+1} зависит от $4n + 2$ функций одной переменной.*

5. *Поверхности в S_{2n+1}, допускающие проективные изгибания порядка $n + 1$ (т. е. C_{n+1}), и только они, являются поверхностями R.*

6. *Поверхность R в S_{2n+1} ($n \geqq 2$) допускает в точности ∞^1 проективных изгибаний C_{n+1}.*

Назовем поверхностью R^0 ту поверхность в S_{2n+1}, оба преобразования Лапласа которой вырождаются и которая допускает проективные изгибания C_{n+1}. Для поверхностей R^0 в S_{2n+1} автором получены следующие результаты:

7. *В общем случае поверхность R^0 полностью дана интегрируемой системой (103) и зависит от $2n$ функций одной переменной.*

8. *Любое из преобразований Лапласа поверхности R^0 лежит в n-мерном пространстве.*

9. *Кривые одного слоя сопряженной сети поверхности R^0 проективны друг другу и каждая из них лежит в $(n + 1)$-мерном пространстве.*

10. *Поверхность R^0 допускает ∞^1 проективных изгибаний C_{n+1}.*

11. *Поверхность R^0 можно построить следующим образом: Пусть в S_{2n+1} даны пространства S_n, S'_n, S_{n+1}, S'_{n+1}; пусть $S_n \subset S_{n+1}$, $S'_n \subset S'_{n+1}$, пусть $O \in S_{n+1} \cap S'_{n+1}$ и пусть c, c' — две кривые, для которых $O \in c \subset S_{n+1}$, $O \in c' \subset S'_{n+1}$. Пусть, далее, P — текущая точка кривой c', $Q_P = OP \cap S'_n$, c_P — проекция кривой c из точки Q_P на пространство $(S_{n+1})_P \equiv (S_n, P)$; тогда рассматриваемая поверхность образуется как раз кривыми c_P, $P \in c'$.*

Наконец, в работе положены основания теории прямолинейных конгруэнций в проективных пространствах, чем обобщается теория Э. Чеха (т. е. $n = 1$). Приводятся следующие результаты:

12. *Если специализировать репер прямолинейной конгруэнции в S_{2n+1} так, чтобы имели место соотношения* (110) — (112), (118), (128) *и* (129), *то формы* (135)—(138) *инвариантны.*

13. *Выражение* (139) *инвариантно, для $n = 1$ получаем известный проективный линейный элемент прямолинейной конгруэнции в S_3.*

14. *Прямолинейные конгруэнции в проективном пространстве S_{2n+1} $(n \geqq 1)$, формы которых* (135)—(138), *удовлетворяют двум независимым соотношениям (которые могут зависеть и от параметров u, v прямых конгруэнции), существуют и зависят от $4n + 2$ функций одной переменной. В частном случае получаем утверждение* 4.