Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Frolík

Обобщения компактности и свойства Линделефа

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 172–217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100348`

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

ОБОБЩЕНИЯ КОМПАКТНОСТИ И СВОЙСТВА ЛИНДЕЛЕФА

ЗДЕНЕК ФРОЛИК (Zdeněk Frolík), Прага

(Поступило в редакцию 14/VI 1958 г.)

Статья содержит анализ некоторых ослаблений $\mathfrak{m}$-компактных пространств и пространств Линделефа.

Исходной точкой для настоящей работы послужил анализ понятия т. наз. псевдокомпактного пространства. При этом оказалось желательным рассмотреть — по возможности с единой точки зрения — ряд понятий (отчасти уже встречавшихся в литературе, отчасти новых) близких к понятию т. наз. $\mathfrak{m}$-компактного пространства или к обобщенному понятию т. наз. пространства Линделефа (т. е. пространства, каждое открытое покрытие которого содержит счетное подпокрытие; см., напр., J. Kelley [7], стр. 50). Отметим, что оба упомянутых понятия являются частным случаем компактности в данном отрезке мощностей, подробно рассмотренной Ю. Смирновым [11]; однако, наши обобщения идут в существенно ином направлении.

Дадим теперь сводку рассматриваемых понятий в виде двух таблиц и поясним их смысл.

Мы рассматриваем свойства (топологического пространства P) следующего типа: ,,каждое покрытие пространства P, принадлежащее некоторому классу $\{\mathsf{V}\}$ и имеющее мощность $\leqq \mathfrak{a}$, содержит покрытие (соответственно, почти-покрытие) мощности $< \mathfrak{b}$''; при этом почти-покрытием пространства P называется система его подмножеств, объединение которой плотно в P. В качестве класса $\{\mathsf{V}\}$ мы берем: (1) класс всех открытых покрытий, (2) класс всех покрытий N-множествами (см. 1,2), (3) класс всех локально конечных открытых покрытий, (4) класс всех нормальных покрытий (см. 1,6,3). Что касается $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то рассматриваются только следующие их комбинации: ∞ (т. е. $\mathfrak{a}$ — любое) и $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ и $\aleph_0$. Итак, получаем две таблицы — для покрытий и для почти-покрытий. В каждой из них в столбце с надписью $\{\mathsf{V}\}$ указаны упомянутые четыре класса покрытий, а в столбцах

Таблица I

	Класс $\{\mathsf{V}\}$	$(\infty, \mathfrak{m})$	$(\mathfrak{m}, f)$
1	открытые покрытия	пространство	
		$\mathfrak{m}$-линделефовское (2.1)	$\mathfrak{m}$-компактное (3.1)
2	покрытия N-множествами	$\mathfrak{m}$-квазилинделефовское (2.3)	$\mathfrak{m}$-квазикомпактное (3.3.1)
3	локально конечные открытые покрытия	$\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделе-фовское (2.5)	$\mathfrak{m}$-сильно-псевдокомпактное (3.2.3)
4	нормальные покрытия	$\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское (2.4)	$\mathfrak{m}$-псевдокомпактное (3.3.9)

с надписями $(\infty, \mathfrak{m})$ и $(\mathfrak{m}, \aleph_0)$ термины для соответствующих пространств[1]) а также раздел статьи, в котором они рассматриваются. Итак, рассмотрению подлежит 16 свойств топологических пространств (свойств, зависящих еще от $\mathfrak{m}$).

Для пространств со свойством ,,каждое покрытие класса $\{\mathsf{V}\}$ содержит конечное покрытие (почти-покрытие)“ мы будем обычно употреблять соответствующий термин из столбца $(\mathfrak{m}, \aleph_0)$, опуская приставку ,,$\mathfrak{m}$ —“; их можно, однако, называть и соответствующим термином с $\mathfrak{m} = \aleph_0$ из столбца $(\infty, \mathfrak{m})$. Итак, компактные (в другой употребительной терминологии, бикомпактные) пространства можно было бы также называть ,,$\aleph_0$-линделефовскими“. Что касается столбца $(\infty, \mathfrak{m})$, то в случае $\mathfrak{m} = \aleph_1$ иногда опускается приставка ,,$\mathfrak{m}$-“, т. е., напр., $\aleph_1$-линделефовские пространства называются просто линделефовскими.

В работе рассматриваются различные способы характеризации упомянутых свойств, соотношения между ними, вопросы наследственности и т. п. Топологическими произведениями пространств с рассматриваемыми свойствами мы предполагаем заняться в другой статье.

Разумеется, мы не рассматриваем детально все 16 типов пространств, приведенных в наших таблицах. Наиболее детально мы займемся пространствами, указанными в строках 3 и 4 обеих таблиц; у $\mathfrak{m}$-компактных и почти $\mathfrak{m}$-компактных пространств будут рассмотрены только некоторые свойства,

[1]) Так, напр., $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство (строка 4 — ',,нормальные покрытия“, столбец $(\infty, \mathfrak{m})$) есть пространство, каждое нормальное покрытие которого содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$. Впрочем, все определения, указанные в таб. 1 и 2, приводятся полностью в дальнейшем тексте статьи.

Таблица 2

	Класс $\{\mathsf{V}\}$	$(\infty, \mathfrak{m})$	$(\mathfrak{m}, \aleph_0)$
1	открытые покрытия	пространство	
		почти $\mathfrak{m}$-линделефовское (2.2)	почти $\mathfrak{m}$-компактное (3.2)
2	покрытия N-множествами	почти $\mathfrak{m}$-квазилинделефовское (2.3)	почти $\mathfrak{m}$-квазикомпактное (2.3)
3	локально конечные открытые покрытия	почти $\mathfrak{m}$-сильно-псевдо-линделефовское (2.5.4, 3.4)	почти $\mathfrak{m}$-сильно-псевдо-компактное (2.5.4)
4	нормальные покрытия	почти $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское (2.4)	почти $\mathfrak{m}$-псевдокомпактное (3.3.9)

касающиеся действительных функций на этих пространствах. О $\mathfrak{m}$-линделефовских пространствах мы упоминаем, собственно говоря, только для полноты изложения; почти $\mathfrak{m}$-линделефовские пространства мы предполагаем рассмотреть в отдельной статье. Наконец, некоторые свойства, указанные в таблице, по существу вообще отпадают; напр., легко установить (см. 3.2.3), что псевдокомпактность и $\mathfrak{m}$-псевдокомпактность эквивалентны.

Некоторые из рассматриваемых свойств эквивалентны с замкнутостью пространства по отношению к точкам, обладающим свойством (W) и имеющим полную систему окрестностей мощности $< \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — заданная мощность; свойство (W) при этом может означать или что точка имеет свойство Хаусдорфа, или что она регулярна или вполне регулярна. В связи с этим рассматриваются (см., напр., 3.4) также некоторые свойства указанного типа, не совпадающие ни с одним из свойств в табл. 1, 2. Кроме того, при рассмотрении наследственности (для замкнутых подмножеств) $\mathfrak{m}$-псевдо-линделефовского свойства мы приходим к пространствам, которые можно характеризовать тем, что в них каждое множество мощностьи $\mathfrak{m}$ имеет точку сгущения. Рассмотрение этих пространств при $\mathfrak{m} = \aleph_0$ связано со свойствами точечно-конечных покрытий.

В § 1 настоящей статьи приводится ряд определений и лемм, отчасти хорошо изестных.

Основное содержание статьи составляют § 2 и § 3.

Окончательный вид работа получила после просмотра проф. М. Катетовым, который мне тоже предложил тему этой работы. За это я ему выражаю большую благодарность.

1

1.1. Укажем сначала некоторые общие определения и обозначения, которыми мы будем пользоваться.

Символы вида $\{x|\mathsf{V}(x)\}$, $\{f(x)|x \in X\}$ и т. п. употребляются в обычном смысле. Системы множеств обозначаются или отдельными буквами, напр., $\mathbf{V}$ или символами вида $\{X_\alpha|\alpha \in A\}$, а иногда также кратко знаком, напр., $\{G\}$. Объединение системы множеств будет обозначаться, напр., через $\bigcup \mathbf{V}$ или $\bigcup \{X_\alpha|\alpha \in A\}$ и т. п. (аналогично и для пересечения).

Вещественные функции на множестве M мы будем называть просто функциями на M. Если f и g — функции на M, то значение символов $f \geqq g$, $f + g$ fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ очевидно; $|f|$ обозначает функцию, принимающую в точке x значение $|f(x)|$, а $\|f\|$ обозначает $\sup\{|f(x)||x \in M\}$. Если f_n — функции на M, то $f_n \downarrow 0$ означает, что $f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f_n(x) \to 0$ для любого $x \in M$.

Если $\{f_\alpha|\alpha \in A\}$ — система функций на множестве M и для любого $x \in M$ $f_\alpha(x) \neq 0$ только для конечного числа индексов α, то функция f, определенная равенством $f(x) = \sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$, будет обозначаться через $\sum\{f_\alpha|\alpha \in A\}$ или $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$.

Введем еще следующие обозначения: если f — функция на M, то $\mathsf{Z}(f) = \{x|f(x) = 0\}$, $\mathsf{N}(f) = \{x|f(x) \neq 0\}$.

Условимся, наконец, что буквы $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ означают всегда бесконечные мощности.

1.2. Термин „топологическое пространство“ (или просто „пространство“) означает во всей статье т. наз. топологическое T_1-пространство (т. е. предполагается выполнение следующих аксиом для замыкания: $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$; $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; если M конечно, то $\overline{M} = M$). Замыкание множества M в пространстве P обозначается обычно через $\overline{M}$, а иногда подробнее через $\overline{M}^P$.

Общеизвестные определения из теории топологических пространств мы не приводим. Укажем только, что т. наз. открытое ядро множества M в пространстве P, т. е. множество $P - \overline{P - M}$, мы будем обозначать через $\operatorname{Int} M$ и будем называть M регулярно открытым (регулярно замкнутым), если $M = \operatorname{Int} \overline{M}$ (соответственно, $M = \overline{\operatorname{Int} M}$).

Множества вида $\mathsf{N}(f)$ (соответственно, $\mathsf{Z}(f)$), где f — непрерывная функция в пространстве P, мы будем называть N-множествами (соответственно, Z-множествами). Покрытие пространства P, состоящее из N-множеств, мы будем называть N-покрытием.

Пространство P мы будем называть слабо регулярным, если для любого открытого $U \neq \emptyset$ существует открытое $V \neq \emptyset$ с $\overline{V} \subset U$, слабо вполне регулярным, если для любого открытого $U \neq \emptyset$ существует N-множество $V \neq \emptyset$ с $V \subset U$.

1.3. Чеховское компактное расширение. Если P — вполне регулярное пространство, то βP обозначает его т. наз. максимальное компактное[2]) расширение (т. е. компактное хаусдорфово пространство $R \supset P$ такое, что $\overline{P} = R$ и что всякую ограниченную непрерывную функцию на P можно продолжить в непрерывную функцию на R).

1.3.1. Если P — дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$, то мощность βP равна $2^{2^{\mathfrak{m}}}$.

Доказательство можно найти в [9] или в работе Поспишила [10]. Простое доказательство приводится также у Банашевского [2].

1.3.2. Пусть N — бесконечное счетное множество. Существует несчетная система $\mathbf{N}$ бесконечных подмножеств множества N такая, что пересечение любых различных множеств из $\mathbf{N}$ конечно.

1.3.3. Пусть N — бесконечное счетное дискретное пространство. Пусть $Q \subset \beta N$ и пусть у каждого бесконечного $X \subset N$ имеется точка сгущения, принадлежащая Q. Тогда Q несчетно.

Доказательства этих двух известных лемм мы опускаем.

1.3.4. Пусть N — бесконечное счетное дискретное пространство. Пусть $Q \subset \beta N$ и пусть каждое бесконечное $X \subset N$ имеет точку сгущения, принадлежащую Q. Если $S \subset Q - N$, то каждое бесконечное $X \subset N$ имеет точку сгущения, принадлежащую $Q - (\overline{S} - S)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\overline{X} \cap (Q - (\overline{S} - S) - N) \neq \emptyset$ для любого бесконечного $X \subset N$. Возьмем такое X. Тогда $\overline{X} \cap (Q - N) \neq \emptyset$ и потому или $\overline{X} \cap (Q - (\overline{S} - S) - N) \neq \emptyset$ (что и требовалось доказать) или $\overline{X} \cap \overline{S} \neq \emptyset$ и, следовательно, так как $\overline{X}$ открыто в βN, $\overline{X} \cap S \neq \emptyset$, откуда вытекает $\overline{X} \cap (Q - (\overline{S} - S) - N) \neq \emptyset$.

1.3.5. Пусть N — бесконечное счетное дискретное пространство. Пусть $Q \subset \beta N$ и пусть каждое бесконечное $X \subset N$ имеет точку сгущения, принадлежащую Q. Если $S \subset Q - N$, S счетно, то каждое бесконечное $X \subset N$ имеет точку сгущения, принадлежащую $Q - S$.

Эта лемма легко вытекает из 1.3.3 и 1.3.4.

---

[2]) Термин ,,компактный" мы употребляем в том смысле, в каком часто употребляется название ,,бикомпактный" (т. е. мы называем пространство компактным, если всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие).

1.4. Полунепрерывные функции. Пусть f — функция на пространстве P. Если $x \in P$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки x такая, что $f(y) < f(x) + \varepsilon$ или, соответственно, $f(y) > f(x) - \varepsilon$ для всех $y \in U$, то мы говорим, что f *непрерувна сверху* (соответственно, *снузу*) *в точке* x (или, иначе, что f имеет в точке x свойство C_+ или, соответственно, C_-). Если f непрерывна сверху (снизу) в каждой точке $x \in P$, то мы говорим, что она *непрерывна*[3]) *сверху (снизу)* в P и пишем $f \in \mathsf{C}_+(P)$ или, соответственно, $f \in \mathsf{C}_-(P)$. Полунепрерывными в P мы называем функции, принадлежащие $\mathsf{C}_+(P) \cup \mathsf{C}_-(P)$.

Отметим следующие почти очевидные предложения.

1.4.1. Для $f \in \mathsf{C}_+(P)$ (соответственно, $f \in \mathsf{C}_-(P)$) необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа c множество $\{x|f(x) < c\}$ (соответственно, $\{x|f(x) > c\}$) было открытым.

1.4.2. Если $f_\alpha \in \mathsf{C}_+(P)$ для каждого $\alpha \in A$ и $\{f_\alpha(x)|\alpha \in A\}$ ограничено снизу для каждого $x \in P$, то функция $f = \inf\{f_\alpha|\alpha \in A\}$ принадлежит $\mathsf{C}_+(P)$.

1.4.3. Если f, $g \in \mathsf{C}_+(P)$, то $f + g \in \mathsf{C}_+(P)$. Если $f \in \mathsf{C}_-(P)$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in P$, то $1/f \in \mathsf{C}_+(P)$.

1.4.4. Характеристическая функция замкнутого (открытого) множества непрерывна сверху (снизу).

1.4.5. $\mathsf{C}_+(P) \cap \mathsf{C}_-(P)$ есть множество всех непрерывных функций на P.

1.5. Частично полунепрерывные функции. Пусть f — функция на пространстве P. Если $x \in P$ и если для любого $\varepsilon > 0$ и любой окрестности U точки x существует непустое открытое $V \subset U$ такое, что $f(y) < f(x) + \varepsilon$ (соответственно, $f(y) > f(x) - \varepsilon$) для $y \in V$, то мы говорим, что f *частично непрерывна сверху* (соответственно, *снизу*) *в точке* x или что она имеет в точке $x \in P$ свойство P_+ (соответственно, P_-). Если f имеет свойство P_+ (соответственно, P_-) в каждой точке $x \in P$, то мы говорим, что она *частично непрерывна сверху* (соответственно, *снизу*) в P или имеет свойство P_+ (соответственно, P_-) в P, и пишем $f \in \mathsf{P}_+(P)$ (соответственно, $f \in \mathsf{P}_-(P)$). Вместо $\mathsf{C}_+(P) \cap \mathsf{P}_-(P)$ мы пишем $\mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$, вместо $\mathsf{C}_-(P) \cap \mathsf{P}_+(P)$ мы пишем $\mathsf{C}_-\mathsf{P}_+(P)$.

1.5.1. Пусть f — функция на пространтсве P. Для того, чтобы было $f \in \mathsf{P}_+(P)$ или, соответственно, $f \in \mathsf{P}_-(P)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа c было

$$\{x|f(x) < c\} \subset \overline{\mathrm{Int}\,\{x|f(x) < c\}}$$

или, соответственно,

$$\{x|f(x) > c\} \subset \overline{\mathrm{Int}\,\{x|f(x) > c\}}\,.$$

[3]) Мы употребляем термин „непрерывная сверху (снизу)“ вместо обычного „полунепрерывная сверху (снизу)“.

Доказательство проводим только для $\mathsf{P}_+(P)$. Положим $G(c) = \{x | f(x) < c\}$. Пусть $f \in \mathsf{P}_+(P)$. Пусть $x \in G(c)$ и пусть U — любая окрестность x. Нам надо только доказать, что $U \cap \operatorname{Int} G(c) \neq \emptyset$. Найдем $\varepsilon > 0$, так, чтобы $f(x) + \varepsilon < c$. По определению свойства P_+ существует непустое открытое $V \subset U$ так, что $f(y) < f(x) + \varepsilon$ для $y \in V$. Очевидно, $V \subset G(c)$, $V \subset \operatorname{Int} G(c)$ и потому $U \cap \operatorname{Int} G(c) \neq \emptyset$.

Пусть теперь $G(c) \subset \overline{\operatorname{Int} G(c)}$ для каждого c; докажем, что $f \in \mathsf{P}_+(P)$. Пусть $x \in P$, пусть U — окрестность x, $\varepsilon > 0$. Положим $V = \operatorname{Int} U \cap \cap \operatorname{Int} G(f(x) + \varepsilon)$. Так как $x \in G(f(x) + \varepsilon)$, то $x \in \overline{\operatorname{Int} G(f(x) + \varepsilon)}$ и потому $V \neq \emptyset$; очевидно, что V открыто и $f(y) < f(x) + \varepsilon$ для $y \in V$. Итак, $f \in \mathsf{P}^+(P)$.

Легко усмотреть, что сумма двух функций из $\mathsf{P}_+(P)$ может не принадлежать $\mathsf{P}_+(P)$. Однако, легко доказываются следующие утверждения.

1.5.2. (1) Если $f \in \mathsf{C}_+(P)$, $g \in \mathsf{P}_+(P)$, то $(f + g) \in \mathsf{P}_+(P)$.

(2) Если $f(x) > 0$ для всех $x \in P$, $f \in \mathsf{C}_-\mathsf{P}_+(P)$ то $1/f \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$.

(3) Характеристическая функция регулярно замкнутого множества принадлежит $\mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$.

1.6. Псевдометрики и нормальные покрытия.

1.6.1. Пусть P — пространство. Непрерывная функция φ на $P \times P$ называется псевдометрикой в P, если выполнены (для любых $x, y, z \in P$) условия

$$(*) \quad \varphi(x, x) = 0\,, \quad \varphi(x, y) \geqq 0\,, \quad \varphi(x, y) \leqq \varphi(z, x) + \varphi(y, z)\,.$$

Если φ — псевдометрика в P, $x \in P$, $\emptyset \neq M \subset P$, то мы полагаем $\varphi(x, M) = \inf_{y \in M} \varphi(x, y)$.

1.6.2. Пусть P — пространство. Для того, чтобы функция φ на $P \times P$, удовлетворяющая условиям (*) была псевдометрикой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in P$ множество $U(x, \varphi, \varepsilon) = \{y | \varphi(x, y) < \varepsilon\}$ было открытым.

1.6.3. Если $\mathbf{N}$ — система множеств, M — множество, то мы называем *звездой* множества M относительно $\mathbf{N}$ и обозначаем через $\mathsf{S}(M, \mathbf{N})$ объединение всех $N \in \mathbf{N}$, имеющих общие элементы с M. Пусть $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ — системы множеств. Если для любого $N_1 \in \mathbf{N}_1$ существует $N_2 \in \mathbf{N}_2$ такое, что $N_1 \subset N_2$, то мы говорим, что $\mathbf{N}_1$ *вписано* в $\mathbf{N}_2$ и пишем $\mathbf{N}_1 < \mathbf{N}_2$; если для любого $N_1 \in \mathbf{N}_1$ существует $N_2 \in \mathbf{N}_2$ такое, что $\mathsf{S}(N_1, \mathbf{N}_1) \subset N_2$, то мы говорим, что $\mathbf{N}_1$ *звездно вписано* в $\mathbf{N}_2$ и пишем $\mathbf{N}_1 \overset{*}{<} \mathbf{N}_2$.

Последовательность $\{\mathbf{N}_k\}_{n=1}^{\infty}$ открытых покрытий пространства P называется *нормальной*, если $\mathbf{N}_{k+1} \overset{*}{<} \mathbf{N}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Открытое покрытие $\mathbf{N}$ пространства P называется *нормальным*, если существует нормальная последовательность покрытий $\{\mathbf{N}_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\mathbf{N}_1 < \mathbf{N}$.

1.6.4. Между псевдометриками и нормальными последовательностями покрытий существует тесная связь. Чтобы ее сформулировать, введем следующее обозначение: если φ — псевдометрика в пространстве P, то $\mathbf{N}(\varphi, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, означает систему всех $U(x, \varphi, \varepsilon)$, $x \in P$ (см. 1.6.2). Легко установить, что $\mathbf{N}(\varphi, \varepsilon)$ — нормальное открытое покрытие (так как имеем $\mathbf{N}(\varphi, \delta) \overset{*}{<} \mathbf{N}(\varphi, \varepsilon)$ при $\delta \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$).

Теорема. *Для каждой нормальной последовательности $\{\mathbf{N}_k\}_{k=1}^{\infty}$ открытых покрытий пространства P существует псевдометрика φ в P со следующим свойством: для любого $k = 1, 2, \ldots$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbf{N}(\varphi, \varepsilon) < \mathbf{N}_k$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $k = 1, 2, \ldots$ такое, что $\mathbf{N}_k < \mathbf{N}(\varphi, \varepsilon)$.*

Доказательство см. [13].

1.6.5. Пусть $\mathbf{N}$ — нормальное открытое покрытие пространства P, $M \subset P$. Тогда существует непрерывная функция f в P такая, что $0 \leqq f \leqq 1$, $f(x) = 1$ для $x \in M$, $f(x) = 0$ для $x \in P - \mathsf{S}(M, \mathbf{N})$.

Это, по существу, — известная лемма Урысона. Доказательство см. в [13].

1.6.6. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство, $F \subset P$ замкнуто. Тогда для любой псевдометрики φ в F существует псевдометрика ψ в P такая, что $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$ для $x \in F$, $y \in F$.*

Эта теорема принадлежит Хаусдорфу. Доказательство см., напр., в [1].

1.6.7. Пусть φ — псевдометрика в пространстве P, ψ — псевдометрика в $M \subset P$. Псевдометрика ψ называется *равномерно непрерывной по отношению к* φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $x, y \in M$ из $\varphi(x, y) < \delta$ вытекает $\psi(x, y) < \varepsilon$.

1.6.8. Теорема. *Пусть P — пространство, $M \subset P$, φ — псевдометрика в P, ψ — псевдометрика в M, равномерно непрерывная по отношению к φ. Тогда псевдометрику ψ можно продолжить на P (т. е. существует псевдометрика ψ' в P такая, что $\psi'(x, y) = \psi(x, y)$ для $x, y \in M$).*

Доказательство. Возьмем отображение f пространства P на некоторое множество Q такое, что $f(x) = f(y)$, если и только если $\varphi(x, y) = 0$; вместо $f(x)$ будем писать x^*. Определим функции φ^* на $Q \times Q$, ψ^* на $M^* \times M^*$, где $M^* = f(M)$, равенствами $\varphi^*(x^*, y^*) = \varphi(x, y)$, $\psi^*(x^*, y^*) = \psi(x, y)$. Очевидно, φ^* является метрикой в Q, ψ^* — псевдометрикой в M^*; отображение f пространства P на Q (с метрикой φ^*) непрерывно, псевдометрика ψ^* равномерно непрерывна по отношению к φ^*. Из этого легко вытекает, что можно продолжить ψ^* до псевдометрики в $\overline{M}^*$ (замыкание в Q); продолженную псевдометрику мы обозначим также через ψ^*. Теперь, согласно 1.6.6, можно продолжить ψ^* до псевдометрики $\overline{\psi}$ на Q.

Полагая $\psi'(x, y) = \psi(x^*, y^*)$ для $x, y \in P$, получаем псевдометрику ψ' с требуемыми свойствами.

Замечание. Как известно, предложения 1.6.6 и 1.6.8 можно значительно обобщить; мы ограничиваемся указанными частными случаями, которые нам только и понадобятся в дальнейшем.

1.6.9. Введем следующие определения: множество $M \subset P$ *нормально* (*вполне нормально*) вложено в пространство P, если всякую ограниченную непрерывную функцию (соответственно, псевдометрику) в M можно продолжить до непрерывной функции (соответственно, псевдометрики) в P. С помощью этих понятий можно, например, высказать предложение 1.6.6 так: всякое замкнутое подмножество метризуемого пространства P вполне нормально вложено в P.

1.6.10. Напомним еще, что пространство называется *вполне нормальным*, если всякое его открытое покрытие нормально, *паракомпактным*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие (система $\{X_\alpha\}$ подмножеств пространства P называется, как известно, локально конечной, если каждое $x \in P$ обладает окрестностью, пересекающей лишь конечное число множеств X_α). Как известно (см., напр. [12]), пространство Хаусдорфа паракомпактно, если и только если оно вполне нормально.

1.6.11. Метризуемое пространство вполне нормально — см. [11].

1.6.12. *Если $\{U_a | a \in A\}$ — нормальное открытое покрытие пространства P, то существуют $A' \subset A$ и $V_a \subset U_a$, $a \in A'$, такие, что $\{V_a | a \in A'\}$ — локально конечное (открытое) $\mathbf{N}$-покрытие.*

Доказательство. Согласно 1.6.4, существует псевдометрика φ в P и $\varepsilon > 0$ такие, что $\mathbf{N}(\varphi, \varepsilon) < \{U_a\}$.

Возьмем отображенче f пространства P на некоторое множество Q такое, что $f(x) = f(y)$, если и только если $\varphi(x, y) = 0$; введем в Q метрику φ^*, определив ее равенством $\varphi^*(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. Тогда f является непрерывным отображением P на полученное метрическое пространство Q.

Согласно 1.6.11, существует локально конечное открытое покрытие $\{G_b | b \in B\}$ пространства Q, вписанное в $\mathbf{N}(\varphi^*, \varepsilon)$. Так как $U(\varphi, x, \varepsilon) = f^{-1}(U(f(x), \varphi^*, \varepsilon))$, то $\{f^{-1}(G_b) | b \in B\} < \mathbf{N}(\varphi, \varepsilon) < \{U_a | a \in A\}$. Найдем для каждого $b \in B$ элемент $\alpha(b) \in A$ так, чтобы $f^{-1}(G_b) \subset U_{\alpha(b)}$. Обозначим через A' множество всех $\alpha(b)$ и для $a \in A'$ положим $W_a = U\{G_b | \alpha(b) = a\}$, $V_a = f^{-1}(W_a)$. Легко видеть, что $V_a \subset U_a$, $\bigcup \{V_a | a \in A'\} = P$, система $\{W_a | a \in A'\}$ является локально конечным открытым покрытием Q. Из этого сразу вытекает (так как в Q всякое открытое множество является $\mathbf{N}$-множеством), что $\{V_a | a \in A'\}$ имеет требуемые свойства.

1.7. CR-редукция. Пусть P —пространство. Обозначим через $\mathsf{C}(P)$ множество ограниченных непрерывных функций на P. Определим на P отношение эквивалентности следующим образом: $x \sim y$ означает, что $f(x) = f(y)$ для всех $f \in \mathsf{C}(P)$. Обозначим через x^* класс эквивалентности, содержащий $x \in P$; для $M \subset P$ обозначим через M^* множество всех x^*, где $x \in M$. Если $f \in \mathsf{C}(P)$, то f^* будет обозначать функцию на P^*, определяемую равенством $f^*(x^*) = f(x)$; множество всех f^* обозначим через C^*.

Введем в P^* топологию следующим образом: $x^* \in \overline{M}^*$, если (и только если) $f^*(x^*) \in \overline{f^*(M^*)}$ для каждого $f^* \in C^*$. Пространство P^* с этой топологией мы будем обозначать через $\operatorname{cr} P$ и называть CR-редукцией пространства P. Очевидно, что $\mathsf{C}(\operatorname{cr} P) = C^*$. Если обозначить через φ отображение, сопоставляющее $x \in P$ класс $x^* \in \operatorname{cr} P$ (т. наз. естественное отображение), то φ является непрерывным отображением P на $\operatorname{cr} P$; $X \subset \operatorname{cr} P$ является N-множеством, если и только если $\varphi^{-1}(X)$ есть N-множество в P.

2. Обобщенные пространства Линделефа.

В этом параграфе мы рассматриваем свойства, указанные в столбце $(\infty, \mathfrak{m})$ наших таблиц 1 и 2, точнее говоря, те из этих свойств, которые соответствуют классам локально конечных открытых покрытий и нормальных открытых покрытий (т. е. свойства из строк 3 и 4 столбца таблиц 1 и 2). Определения остальных ,,линделефовских свойств" (свойств из столбца $(\infty, \mathfrak{m})$ наших таблиц) приводятся (в 2.1, 2.2, 2.3) для полноты изложения. Буква $\mathfrak{m}$ означает во всем параграфе бесконечную мощность.

2.1. Определение. Пространство называется $\mathfrak{m}$-*линделефовским*, если каждое его открытое покрытие содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$, $\aleph_1$-линделефовские пространства называются *просто линделефовскими*. Очевидно, что $\aleph_0$-линделефовские пространства совпадают с компактными.

Замечание. $\mathfrak{m}$-линделефовские пространства можно охарактеризовать при помощи различных условий, см., напр., [11].

2.2. Пространство называется *почти* $\mathfrak{m}$-*линделефовским*, если всякое его открытое покрытие содержит почти-покрытие мощности $< \mathfrak{m}$.

Легко доказывается следующее утверждение:

2.2.1. Для того, чтобы пространство P было почти $\mathfrak{m}$-линделефовским, необходимо и достаточно следующее условие:

если $\mathbf{A}$ — монотонная система открытых подмножеств P и для любой подсистемы $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$ мощности $< \mathfrak{m}$ пересечение $\bigcap \{\overline{U} | U \in \mathbf{A}'\}$ непусто, то $\bigcap \{\overline{U} | U \in \mathbf{A}\} \neq \emptyset$.

2.3. Определение. Пространство называется $\mathfrak{m}$-*квазилинделефовским* (*почти* $\mathfrak{m}$-*квазилинделефовским*), если всякое его покрытие N-множествами содержит покрытие (почти-покрытие) мощности $< \mathfrak{m}$.

2.3.1. Для того, чтобы вполне регулярное пространство было $\mathfrak{m}$-линделефовским (почти $\mathfrak{m}$-линделефовским), необходимо и достаточно, чтобы оно было $\mathfrak{m}$-квазилинделефовским (почти $\mathfrak{m}$-квазилинделефовским).

2.4. Определение. Пространство P называется *$\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским*, если всякое его нормальное открытое покрытие содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$. Псевдометрика φ в пространстве P называется *$\mathfrak{m}$-вполне ограниченной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $M \subset P$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для каждого $x \in P$, $\aleph_0$-вполне ограниченная метрика называется просто *вполне ограниченной*.

2.4.1. Теорема. *Следующие свойства пространства P эквивалентны*:

(1) *P является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским;*

(2) *если нормальное открытое покрытие пространства P имеет мощность $\mathfrak{m}$, то оно содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$;*

(3) *каждая псевдометрика в P $\mathfrak{m}$-вполне ограничена;*

(4) *существует $\mathfrak{m}' > \mathfrak{m}$ такое, что всякая $\mathfrak{m}'$-вполне ограниченная псевдометрика в P $\mathfrak{m}$-вполне ограничена*;

(5) *каждая локально конечная система непересекающихся непустых N-множеств имеет мощность $< \mathfrak{m}$*;

(6) *каждая локально конечная система непустых N-множеств имеет мощность $< \mathfrak{m}$*;

(7) *всякое вполне нормально вложенное замкнутое дискретное подмножество пространства P имеет мощность $< \mathfrak{m}$*;

(8) *всякое метризуемое пространство, являющееся непрерывным образом P, есть $\mathfrak{m}$-линделефовское пространство*;

(9) *всякое вполне нормальное пространство, являющееся непрерывным образом P, есть $\mathfrak{m}$-линделефовское пространство.*

Доказательству предпошлем одну лемму.

2.4.2. Лемма. *Пусть задана система $\{f_a | a \in A\}$ непрерывных функций на пространстве P, и пусть система $\mathbf{N} = \{\mathsf{N}(f_a) | a \in A\}$ локально конечна. Для $(x, y) \in P \times P$ положим $\varphi_a(x, y) = |f_a(x) - f_a(y)|$. Тогда $\varphi = \sum \{\varphi_a | a \in A\}$ является псевдометрикой в P, а функция $f = \sum \{f_a | a \in A\}$ непрерывна в P.*

Доказательство. Пусть $(x, y) \in P \times P$. Так как $\mathbf{N}$ локально конечна, существуют окрестности U, V точек x, y такие, что множества $A_1 = \{a | a \in A,\ U \cap \mathbf{N}(f_a) \neq \emptyset\}$, $A_2 = \{a | a \in A,\ V \cap \mathbf{N}(f_a) \neq \emptyset\}$ конечны. Для $(x', y') \in U \times V$ имеем $\varphi(x', y') = \sum\{\varphi_a | a \in A_1 \cup A_2\}$. Из этого вытекает (так как $A_1 \cup A_2$ конечна), что φ непрерывна в $U \times V$ и, следовательно (так как (x, y) — любая точка $P \times P$), непрерывна в P. Аналогично устанавливается выполнение условий 1.6.1(*) для φ.

Доказательство непрерывности f мы опускаем.

2.4.3. Доказательство теоремы 2.4.1. План доказательства: (5) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5); (1) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) (символ $\Rightarrow$ означает здесь и в дальнейшем, конечно, логическую импликацию).

I. (5) $\Rightarrow$ (7). — Пусть $M \subset P$ имеет свойства, указанные в (7); нужно вывести из (5), что мощность M меньше $\mathfrak{m}$. Для $(x, y) \in M \times M$ положим $\psi(x, y) = 1$, если $x \neq y$, а $\psi(x, y) = 0$, если $x = y$. Тогда ψ — псевдометрика в P и, по определению вполне нормального вложения (1.6.9), существует псевдометрика φ в P такая, что $\varphi(x, y) = \psi(x, x)$ для $(x, y) \in M \times M$. Для $x \in M$ положим $U_x = \{z \in P | \varphi(z, x) < \frac{1}{4}\}$. Легко установить, что U_x — непересекающиеся N-множества. Возьмем $a \in P$; положим $V = \{z \in P | \varphi(z, a) < < \frac{1}{4}\}$. Если бы существовали $x \in M$, $x' \in M$, $x \neq x'$ такие, что $V \cap U_x \neq \emptyset$, $V \cap U_{x'} \neq \emptyset$, то мы бы получили $\varphi(x, a) < \frac{1}{2}$, $\varphi(x', a) < \frac{1}{2}$ что невозможно ввиду $\varphi(x, x') = 1$. Итак, V пересекает не более одного U_x. Следовательно, $\{U_x\}$ локально конечна. Из (5) теперь следует, что мощность $\{U_x\}$, а потому и M меньше $\mathfrak{m}$.

II. (7) $\Rightarrow$ (3). — Пусть φ — псевдометрика в P; пусть $\varepsilon > 0$. Легко установить на основании т. наз. принципа максимального множества (леммы Цорна), что существует множество $M \subset P$ такое, что $\varphi(x, y) \geqq \varepsilon$ для $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y$, и $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для любого $x \in P$. Очевидно, что для любого $a \in P$ $\varphi(a, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ не более чем для одной точки $x \in M$; итак, M — замкнутое дискретное множество. Если ψ — псевдометрика в M, то, очевидно, ψ равномерно непрерывна по отношению к φ, так что, согласно 1.6.8, можно продолжить ψ до псевдометрики в P; итак, M вполне нормально вложена в P. Из (7) теперь вытекает, что мощность M меньше $\mathfrak{m}$. Следовательно (так как $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для всех $x \in P$), псевдометрика φ $\mathfrak{m}$-вполне ограничена.

III. (3) $\Rightarrow$ (1). — Пусть $\mathbf{N}$ — нормальное открытое покрытие P. Из определения нормального покрытия и 1.6.4 вытекает, что существует псевдометрика φ в P и $\varepsilon > 0$ так, что $\mathbf{N}(\varphi, \varepsilon) < \mathbf{N}$. Из (3) вытекает, что существует $M \subset P$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для всех $x \in P$. Обозначим через $\mathbf{M}$ систему всех $U(x, \varphi, \varepsilon)$, $x \in M$ (мы употребляем обозначения из 1.6.2 и 1.6.4). Тогда $\mathbf{M}$ имеет мощность $< \mathfrak{m}$, $\mathbf{M} < \mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ является открытым покрытием P. Следовательно, $\mathbf{N}$ содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$.

IV. Соотношение (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

V. (2) $\Rightarrow$ (4). — Очевидно, достаточно доказать, что из (2) вытекает следующее утверждение: если φ — псевдометрика в P и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество M мощностьи $\leqq \mathfrak{m}$ такое, что $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для всех $x \in P$, то φ $\mathfrak{m}$-вполне ограничена. Итак, пусть φ имеет указанное свойство. Пусть $\varepsilon > 0$; возьмем M, соответствующее числу $\frac{1}{2}\varepsilon$. Система $\mathbf{M} = \{U(x, \varphi, \varepsilon) | x \in M\}$ является открытым покрытием P мощности $\leqq \mathfrak{m}$, и притом нормальным, так как $\mathbf{N}(\varphi, \frac{1}{2}\varepsilon) < \boldsymbol{M}$. Из (2) вытекает, что существует $M' \subset M$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\{U(x, \varphi, \varepsilon) | x \in M'\}$ является покрытием P и, следовательно, $\varphi(x, M') < \varepsilon$ для любого $x \in P$.

VI. (4) $\Rightarrow$ (5). — Предположим, что выполняется (4), но не (5). Тогда существует локально конечная система $\{N_a | a \in A\}$ мощности $\mathfrak{m}$ такая, что N_a — непустые непересекающиеся N-множества. Пусть $N_a = N(f_a)$, где f_a — непрерывная функция в P; можно предполагать, что для каждого $a \in A$ существует $x_a \in N_a$ такое, что $f_a(x_a) > 1$. Тогда равенством $\varphi(x, y) = \sum_a |f_a(x) - f_a(y)|$ определяется (см. 2.4.2) псевдометрика φ в P. Легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $a \in A$ существует конечное множество $K_a \subset N_a$ такое, что $\varphi(x, K_a) < \varepsilon$ для $x \in N_a$; из этого сразу вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $M \subset P$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\varphi(x, M) < \varepsilon$ для всех $x \in P$. Из (4) теперь вытекает, что φ $\mathfrak{m}$-вполне ограничена, что однако невозможно, так как из $f_a(x_a) > 1$ вытекает $\varphi(x_a, x_b) > 1$ при $a \in A$, $b \in A$, $a \neq b$.

VII. (1) $\Rightarrow$ (9). — Пусть f — непрерывное отображение P на вполне нормальное Q. Если $\{G_a | a \in A\}$ — открытое покрытие Q, то $\{G_a\}$ нормально, из чего легко вытекает, что нормально также $\{f^{-1}(G_a)\}$. Согласно (1), $\{f^{-1}(G_a)\}$, а потому также $\{G_a\}$ содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$.

VIII. Соотношение (9) $\Rightarrow$ (8) вытекает из 1.6.11.

IX. (8) $\Rightarrow$ (3). — Пусть φ — псевдометрика в P. Определим отображение f пространства P на некоторое Q так, чтобы $f(x) = f(y)$, если и только если $\varphi(x, y) = 0$; положим $\varphi^*(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. Тогда f является непрерывным отображением P на Q (с метрикой φ^*). В силу (8), пространство Q является $\mathfrak{m}$-линделефовским и потому при любом $\varepsilon > 0$ открытое покрытие $\mathbf{N}(\varphi^*, \varepsilon) = \{U(z, \varphi^*, \varepsilon) | z \in Q\}$ содержит покрытие мощности $< \mathfrak{m}$, т. е. существует $T \subset Q$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\bigcup \{U(z, \varphi^*, \varepsilon) | z \in T\} = Q$. Взяв $S \subset P$ мощности одинаковой с T и такое, что $f(S) = T$, имеем $\varphi(x, S) < \varepsilon$ для любого $x \in P$. Следовательно, φ $\mathfrak{m}$-вполне ограничено.

X. (3) $\Rightarrow$ (6). Пусть (6) не выполняется; тогда существует локально конечная система $\{N_a | a \in A\}$ непустых $\boldsymbol{N}$-множеств, имеющая мощность $\mathfrak{m}$. Существуют непрерывные функции f_a и точки $x_a \in N_a$ такие, что $N_a = \mathsf{N}(f_a)$, $f_a(x_a) > 1$. Построим псевдометрику φ при помощи f_a способом, указанным в VI. Легко установить, что φ не является $\mathfrak{m}$-вполне ограниченной, т. е. (3) не выполняется.

XI. Так как соотношение (6) $\Rightarrow$ (5) очевидно, то доказательство теоремы 2.4.1. полностью закончено.

2.4.4. Непрерывный образ $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовского пространства также является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.

2.4.5. *Для того, чтобы пространство P было $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{cr} P$ *было $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.*

Доказательство. Естественное отображение f пространства P на $\operatorname{cr} P$ (см. 1.7) непрерывно, так что согласно 2.4.4 условие необходимо. Если φ — псевдометрика в P, то, очевидно, при $f(x) = f(y)$ имеем $\varphi(x, y) = 0$; полагая $\varphi^*(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$, получаем псевдометрику φ^* в $\operatorname{cr} P$. Если $\operatorname{cr} P$ — $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство, то по 2.4.1 φ^* $\mathfrak{m}$-вполне ограничена, так что, как легко видеть, также φ $\mathfrak{m}$-вполне ограничена. Из этого вытекает (см. 2.4.1, свойство (3)) достаточность условия в 2.4.5.

2.4.6. *Если P — вполне регулярно, мощность $\beta P - P$ меньше чем $2^{2^{\mathfrak{m}}}$, то P — $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство.*

Доказательство. В противном случае существует, согласно 2.4.1, свойство (7), вполне нормально вложенное замкнутое дискретное $M \subset P$ мощности $\mathfrak{m}$. Тогда $\overline{M}^{\beta P} = \beta M$, $\beta M - M \subset \beta P - P$ (так как M замкнута) и мощность βM равна $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ (см. 1.3.1), так что $\beta P - P$ имеет мощность $\geqq 2^{2^{\mathfrak{m}}}$, что противоречит нашему предположению.

2.4.7. *Если пространство P — $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское, $M \subset P$ является замыканием непустого N-множества, то M также является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда M не имеет свойства (6) из 2.4.1, т. е. существует локально конечная в M система $\{\mathsf{N}(f_a) | a \in A\}$, имеющая мощность $\mathfrak{m}$; здесь f_a — непрерывные функции в M. Пусть $M = \overline{\mathsf{N}(g)}$, g непрерывна в P. Положим $h_a(x) = f_a(x)\, g(x)$ для $x \in M$, $h_a(x) = 0$ для $x \in P - M$; тогда h_a непрерывны в P, $\mathsf{N}(h_a) = \mathsf{N}(f_a) \cap \mathsf{N}(g)$, $\mathsf{N}(h_a)$ непусты и, очевидно, $\{\mathsf{N}(h_a)\}$ локально конечна в P. Согласно 2.4.1, это противоречит $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским свойствам P.

2.4.8. *Пространство P называется почти $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским, если всякое его нормальное открытое покрытие содержит почти-покрытие мощности $< \mathfrak{m}$.*

2.4.9. *Почти $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовские пространства совпадают с $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовскими.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство является почти $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским. Пусть теперь P — почти $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское; пусть φ — псевдометрика в P. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $M \subset P$ мощности $< \mathfrak{m}$ такое, что $\bigcup \{U(x, \varphi, \frac{1}{2}\varepsilon) | x \in M\}$ плотно в P; из этого однако сразу вытекает, что $\bigcup \{U(x, \varphi, \varepsilon) | x \in M\} = P$. Итак, P имеет свойство (3) из 2.4.1.

2.4.10. Всякое $\mathfrak{m}$-квазилинделефовское пространство является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.

Доказательство. Вытекает немедленно из 1.6.12.

2.5. $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовские пространства.

2.5.1. Топологическое пространство P мы назовем $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским, если каждое его открытое локально конечное покрытие содержит покрытие мощности меньшей, чем $\mathfrak{m}$.

2.5.2. Лемма. *Пусть в пространстве P существует локально конечная система $\{U_a | a \in A\}$ непустых открытых множеств, причем мощность A равна $\mathfrak{m}$. Тогда*

(1) *Существует локально конечная дизъюнктная система $\{V_b | b \in B\}$ непустых открытых множеств такая, что мощность B равна $\mathfrak{m}$.*

(2) *Существует локально конечное неприводимое открытое покрытие мощности $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть $\{U_a | a \in A\}$ имеет указанные свойства. Пусть ϑ — наименьшее порядковое число мощности m. Пусть $0 < \alpha < \vartheta$. Пусть для всех $\beta < \alpha$ определены индексы $a_\beta \in A$, точки $x_\beta \in U_{a_\beta}$, открытые окрестности V'_β точек x_β и конечные множества индексов $A_\beta \subset A$ так, что

(i) $a_\beta \in A - \bigcup \{A_\gamma | \gamma < \beta\}$

и

(ii) $V'_\beta \cap U_a \neq \emptyset \Rightarrow a \in A_\beta$.

Мощность множества $A - \bigcup \{A_\beta | \beta < \alpha\}$ равна $\mathfrak{m}$, поэтому можно взять $a_\alpha \in A - \bigcup \{A_\beta | \beta < \alpha\}$. Далее, возьмем $x_\alpha \in U_{a_\alpha}$; из локальной конечности вытекает существование окрестности V'_α точки x_α и конечного $A_\alpha \subset A$ такого, что имеет место (ii) для $\beta = \alpha$. Следовательно, существуют для всех $\beta < \vartheta$ элементы a_β, x_β, V'_β, A_β с указанными свойствами. Положим теперь $V_\beta = V'_\beta \cap U_{a_\beta}$. Из построения ясно, что система $\{V_\beta | \beta < \vartheta\}$ дизъюнктна и локально конечна. Итак, справедливо (1). Утверждение (2) является непосредственным следствием (1). Действительно, если $\{U\}$ есть дизъюнктная и локально конечная система непустых открытых множеств, то или $\{U\}$ само является покрытием, необходимо неприводимым, или если взять $x(U) \in U$, то множество всех $x(U)$ замкнуто и его дополнение образует вместе с множествами из $\{U\}$ покрытие с требуемыми свойствами.

2.5.3. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства P эквивалентны:*

(1) *P является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским.*

(2) *Каждое локально конечное покрытие непустыми открытыми множествами имеет мощность меньшую, чем $\mathfrak{m}$.*

(3) *Каждое локально конечное неприводимое открытое покрытие имеет мощность меньшую, чем $\mathfrak{m}$.*

(4) *Каждая локально конечная система непустых открытых множеств имеет мощность меньшую, чем $\mathfrak{m}$.*

(5) *Каждая дизъюнктная локально конечная система непустых открытых множеств имеет мощность меньшую, чем* $\mathfrak{m}$.

Доказательство. Очевидно (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Согласно лемме 2.5.2, имеем (1) $\Rightarrow$ (4) и (5) $\Rightarrow$ (4). Импликация (4) $\Rightarrow$ (5) очевидна.

Пример. Пусть P — топологическое пространство. Пусть $N \subset P$, $\overline{N} = P$. Пусть каждое бесконечное множество $M \subset N$ мощности $\mathfrak{m}$ имеет точку сгущения в P. Тогда пространство P является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским.

Доказательство. Предположим, что в пространстве P существует дизъюнктная локально конечная система непустых открытых множеств $\{U_a | a \in A\}$, причем мощность A равна $\mathfrak{m}$. Возьмем $x_a \in N \cap U_a$. Множество всех x_a имеет по условию точку сгущения в P и, следовательно, система $\{U_a | a \in A\}$ не является локально конечной.

2.5.4. Теорема. *Если P есть $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовское пространство, и если* $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, *то*

(6) *Каждое открытое покрытие $\{U_a;\ a \in A\}$ пространства P, имеющее следующее свойство: „Для каждого $x \in P$ существует окрестность V точки x так, что* $\operatorname{card} \{a;\ a \in A,\ V \cap U_a \neq \emptyset\} < \mathfrak{n}$", *содержит почти-покрытие мощности* $< \mathfrak{m}$. *Если, кроме того, $\mathfrak{m}$ — регулярное кардинальное число, то* (6) *имеет место и для* $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

Доказательство. Пусть условие (6) не выполняется. Пусть $\{U_a;\ a \in A\}$ — покрытие, не удовлетворяющее условию (6). В предположении, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ или $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ — регулярное кардинальное число, построим локально конечную систему непустых открытых множеств мощности $\mathfrak{m}$. Для $M \subset P$ обозначим $A(M) = \{a;\ a \in A,\ U_a \cap M \neq \emptyset\}$. По условию каждая точка $x \in P$ имеет окрестность V так, что $\operatorname{card} A(V) < \mathfrak{n}$. Пусть ϑ — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{m}$. Возьмем $x_0 \in P$. Существует открытое множество V_0 так, что $x_0 \in V_0$ и $\operatorname{card} A(V_0) < \mathfrak{n}$. Пусть $1 < \alpha < \vartheta$. Пусть для $\beta < \alpha$ определены точки $x_\beta \in P$ и открытые множества V_β так, что если положить

$$B(\beta) = \bigcup \{U_a;\ a \in \bigcup \{A(V_\gamma);\ \gamma < \beta\}\},$$

то будет $\operatorname{card} A(V_\beta) < n$, $x_\beta \in V_\beta$, $V_\beta \cap \overline{B(\beta)} = \emptyset$. Так как $\operatorname{card} \{\beta;\ \beta < \alpha\} < \mathfrak{m}$ и $\operatorname{card} A(V_\gamma) < \mathfrak{n}$ по условию, то $\operatorname{card} \bigcup \{A(V_\beta);\ \beta < \alpha\} < \mathfrak{m}$ в случае, если или $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ или $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ регулярно. Итак, по условию $\overline{B(\alpha)} \neq P$, и можно взять $x_\alpha \in (P - \overline{B(\alpha)})$. По условию существует открытая окрестность V'_α точки x_α так, что $\operatorname{card} A(V'_\alpha) < n$. Положим $V_\alpha = V'_\alpha \cap (P - \overline{B(\alpha)})$. Мы построили систему $\{V_\alpha;\ \alpha < \vartheta\}$ открытых множеств. По построению $\{A(V_\alpha);\ \alpha < \vartheta\}$ есть дизъюнктная система и U_a пересекает V_α, если и только если $a \in A(V_\alpha)$. Отсюда сразу следует, что система $\{V_\alpha;\ \alpha < \vartheta\}$ локально конечна, ибо если $x \in P$, то существует $a \in A$ так, что $x \in U_a$. Если же $a \in$

$\in A\ (V_\alpha)$, то U_a пересекает только V_α. Если a не содержится ни в одном из множеств $A(V_\alpha)$, то U_a не пересекает ни одну из V_α. Доказательство закончено.

2.5.5. Теорема. *Слабо регулярное пространство, имеющее свойство* (6) *из теоремы* 2.5.4 *для* $\mathfrak{n} = 2$ *является* $\mathfrak{m}$*-сильно-псевдолинделефовским.*

Доказательство. Пусть пространство P слабо регулярно (это значит, что каждое непустое открытое множество содержит некоторое непустое открытое множество вместе с его замыканием) и пусть P не является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским пространством. Согласно 2.5.3 существует локально конечная дизъюнктная система $\{U\}$ непустых открытых множеств, $\operatorname{card}\{U\} = \mathfrak{m}$. P слабо регулярно; значит, для каждого $U \in \{U\}$ существуют непустые открытые множества V' и V'' так, что $\overline{V'} \subset V'' \subset \overline{V''} \subset U$. Множества из $\{V''\}$ вместе с множеством $P - \bigcup \{\overline{V'}\}$ образуют, очевидно, покрытие, которое для $\mathfrak{n} = 2$ не выполняет условие (6).

2.5.6. Теорема. *Каждое непустое регулярное замкнутое подмножество* $\mathfrak{m}$*-сильно-псевдолинделефовского пространства является* $\mathfrak{m}$*-сильно-псевдолинделефовским пространством.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.10, поэтому мы ограничимся кратким его изложением. Пусть $U \neq \emptyset$ — открытое множество в пространстве P и пусть $\overline{U}$ не является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским пространством. Следовательно, существует локально конечная (в $\overline{U}$) система $\{H_a,\ a \in A\}$ непустых открытых множеств в $\overline{U}$, $\operatorname{card} A = \mathfrak{m}$. Пусть $U_a = U \cap H_a$. Очевидно, U_a непусты и открыты в P. Легко показать, что $\{U_a;\ a \in A\}$ — локально конечная система в P. Итак, P не является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским пространством. Доказательство завершено.

Очевидно, справедлива

2.5.7. Теорема. $\mathfrak{m}$*-сильно-псевдолинделефовское пространство является* $\mathfrak{m}$*-псевдолинделефовским. Слабо вполне регулярное* $\mathfrak{m}$*-псевдолинделефовское пространство является* $\mathfrak{m}$*-сильно-псевдолинделефовским пространством.*

В 2.4.10 мы доказали, что замыкание N-множества $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовского пространства есть $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство. Следующий пример показывает, что $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское свойство не переносится на регулярные замкнутые множества.

2.5.8. Пример. Существует $\aleph_0$-квазилинделефовское регулярное пространство P, не являющееся $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским ($\mathfrak{m}$-данное бесконечное кардинальное число). P содержит непустое открытое множество U так, что $\overline{U}$ не является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством.

Доказательство. Пусть A — множество индексов мощности $\mathfrak{m}$. Э. Хьюитт [5] и Й. Новак [8] построили бесконечное регулярное пространство, на котором каждая непрерывная функция является постоянной. Для любого $a \in A$ пусть R_a означает бесконечное регулярное пространство, на котором каждая непрерывная функция постоянна. Предположим, что $R_a \cap R'_a = \emptyset$ для $a \neq a'$. Возьмем $x_a, y_a \in R_a$, $x_a \neq y_a$. Положим

$$P = \bigcup \{R_a;\ a \in A\} \cup (\Omega)\ ,$$

где Ω означает какой-либо элемент, не входящий ни в одно из множеств R_a. На P определим топологию следующим образом: пусть R_a открыты и замкнуты в P и, если U_a суть окрестности точек x_a в R_a, то пусть $\bigcup \{U_a;\ a \in A'\} \cup (\Omega)$, где A' содержит с точностью до конечного числа все элементы из A, есть окрестность точки Ω. Пространство P является $\aleph_0$-квазилинделефовским, ибо каждое Z-множество имеет вид $(\Omega) \cup \bigcup$ $\bigcup \{R_a;\ a \in A'\}$, где $A' \subset A$, или $\bigcup \{R_a;\ a \in A''\}$, если A'' — конечное множество. То обстоятельство, что P есть $\aleph_0$-квазилинделефовское пространство, также следует из очевидного факта, что $\operatorname{cr} P$ является, собственно говоря, дискретным множеством мощности m, компактифицированным одной точкой. Пусть U_a и V_a — открытые окрестности соответственно точек x_a и y_a такие, что $U_a \cap V_a = \emptyset$. Пусть $V = \bigcup \{V_a;\ a \in A\}$. Очевидно, $\{V_a;\ a \in A\}$ — локально конечная система в P и, следовательно, P не является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским пространством. Из локальной конечности следует, что $\overline{V} = \bigcup \{\overline{V}_a;\ a \in A\}$. Множества $\overline{V}_a$ открыто-замкнуты в $\overline{V}$ и поэтому пространство $\overline{V}$ не является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.

Однако, справедливо

2.5.9. *Слабо регулярное пространство является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским, если и только если каждое его регулярное замкнутое подмножество есть $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство.*

Доказательство. Если пространство P является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским, то согласно (2.5.6) каждое его регулярное замкнутое подмножество будет $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским, а следовательно, и $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством. Наоборот, пусть P не является $\mathfrak{m}$-сильно-псевдолинделефовским пространством. Тогда существует локально конечная система непересекающихся непустых открытых множеств $\{U_a | a \in A\}$, где A имеет мощность $\mathfrak{m}$. Пространство P слабо регулярно, следовательно, существуют открытые $V_a \neq \emptyset$ так, что $\overline{V}_a \subset U_a$. Пусть $V = \bigcup \{V_a;\ a \in A\}$, тогда $\overline{V} = \bigcup \{\overline{V}_a;\ a \in A\}$. Определим на $\overline{V}$ псевдометрику φ таким образом:

$$\varphi(x, y) = \begin{matrix} 0 & \text{если для некоторого } a \text{ имеем } x \in V_a,\ y \in V_a \\ 1 & \text{если } x \in V_a,\ y \in V_{a'},\ a \neq a'\ . \end{matrix}$$

Множества $\overline{V}_a$ открыто-замкнуты в $\overline{V}$ и поэтому φ является, действительно, псевдометрикой на $\overline{V}$. Очевидно, φ не будет $\mathfrak{m}$-вполне ограниченной и, следовательно, $\overline{V}$ не является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством.

Теперь мы рассмотрим пространства, каждое замкнутое подмножество которых есть $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовское пространство.

2.6. F-наследственно $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовские пространства.

2.6.1. Определение. Топологическое пространство P мы назовем F-*наследственно* $\mathfrak{m}$-*псевдолинделефовским пространством*, если каждое замкнутое подмножество пространства P является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством.

2.6.2. Теорема. *Следующие свойства пространства P эквивалентны*:

(1) *P является* F-*наследственно* $\mathfrak{m}$-*псевдолинделефовским.*

(2) *Каждое множество мощности $\mathfrak{m}$ имеет точку сгущения.*

(3) *Каждая локально конечная система непустых подмножеств пространства P имеет мощность меньше $\mathfrak{m}$.*

(4) *Каждое неприводимое открытое покрытие пространства P имеет мощность меньше $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$ не является $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским, следовательно, (1) $\Rightarrow$ (2). Очевидно, (2) $\Rightarrow$ (1). Если $\{M_a;\ a \in A\}$ — локально конечная система непустых множеств и если $\operatorname{card} A = \mathfrak{m}$, то множество $M = \bigcup \{(x_a);\ a \in A\}$, где $x_a \in M_a$, имеет, очевидно, мощность $\mathfrak{m}$ (это имеет место уже когда система точечно конечна). Множество M не имеет точки сгущения, так как система $\{M_a\}$ локально конечна. Итак, (2) $\Rightarrow$ (3). Если $\{U_a;\ a \in A\}$ — неприводимое открытое покрытие мощности $\mathfrak{m}$, то

$$\{U_a - \bigcup \{U_{a'};\ a' \in A,\ a' \neq a\}\ ;\ a \in A\}$$

является локально конечной системой непустых множеств мощности $\mathfrak{m}$. Итак, (3) $\Rightarrow$ (4). Пусть существует дискретное замкнутое множество M мощности $\mathfrak{m}$. Для каждого $x \in M$ пусть $V(x) = (P - M) \cup (x)$. Очевидно, $\{V(x);\ x \in M\}$ есть неприводимое открытое покрытие мощности $\mathfrak{m}$. Итак, (4) $\Rightarrow$ (2).

2.6.3. Теорема. *Пусть пространство P является* F-*наследственно* $\mathfrak{m}$-*псевдолинделефовским. Если $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, то справедливо*

(5) *Пусть $\{\tilde{U}_a;\ a \in A\}$ — открытое покрытие пространства P. Для каждого $x \in P$ пусть $\operatorname{card} \{a;\ a \in A,\ x \in U_a\} < \mathfrak{n}$. Тогда существует $A' \subset A$ мощности меньше $\mathfrak{m}$ так, что $\{U_a;\ a \in A'\}$ является покрытием пространства P.*

Если $\mathfrak{m}$ регулярное кардинальное число, то (5) имеет место и для $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

Доказательство. Пусть условие (5) не выполняется. Пусть $\{U_a;\ a \in A\}$ — покрытие пространства P, не удовлетворяющее утверждению (5). В предположении, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ или $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ регулярно, построим локально конечную систему одноточечных множеств, имеющую мощность $\mathfrak{m}$. Для $x \in P$ положим $A(x) = \{a; a \in A, x \in U_a\}$. По условию имеем $\operatorname{card} A(x) < \mathfrak{n}$ для любого $x \in P$. Пусть ϑ — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{m}$. Возьмем $x_0 \in P$. Пусть $1 < \alpha < \vartheta$. Пусть для $\beta < \alpha$ нами определены точки x_β так, что

$$x_\beta \operatorname{non} \in B(\beta) = \bigcup \{U_a; a \in \bigcup \{A(x_\gamma); \gamma < \beta\}\} .$$

Так как $\operatorname{card} \{\beta; \beta < \alpha\} < \mathfrak{m}$ и $\operatorname{card} A(x_\gamma) < \mathfrak{n}$, то $\operatorname{card} \bigcup \{A(x_\beta); \beta < \alpha\} < \mathfrak{m}$ в случае, если или $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ или $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, а $\mathfrak{m}$ — регулярное число. Итак, по условию $B(\alpha) \neq P$, и можно взять $x_\alpha \in P - B(\alpha)$. Из построения ясно, что множества $A(x_\alpha)$ не пересекаются. Если $x \in P$, то существует $a \in A$ так, что $x \in U_a$. Индекс a принадлежит самое больше одному $A(x_\alpha)$ и, следовательно, U_a содержит не более одного x_α. Итак, $\{x_\alpha; \alpha < \vartheta\}$ является локально конечной системой мощности $\mathfrak{m}$ и, значит, P не является F-наследственно $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством.

2.6.4. Пример. Построим вполне регулярное $\aleph_0$-сильно-псевдолинделефовское пространство, которое содержит нормально вложенное дискретное замкнутое множество мощности $\mathfrak{m}$. Это, очевидно, пример $\aleph_0$-сильно-псевдолинделефовского пространства, не являющегося F-наследственно $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским.

Построение. Пусть M — дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$, пусть A — множество индексов мощности $\mathfrak{m}$. Существуют множества $M_a \subset M$ для $a \in A$ такие, что $M = \bigcup \{M_a; a \in A\}$, для каждого $a \in A$ будет $\operatorname{card} M_a = \mathfrak{m}$ и $M_a \cap M_{a'} = \emptyset$ для $a \neq a'$. Возьмем $x_a \in \overline{M}_a^{\beta M} - M$ (βM означает чеховское компактное расширение — см. 1.3) и положим $X = \{x_a; a \in A\}$. Пусть $P = \beta M - (\overline{X}^{\beta M} - X)$. Топологическое пространство P имеет требуемые свойства. Множество X дискретно, ибо $\overline{M}_a^{\beta M}$ есть окрестность точки x_a, которая не содержит $x_{a'}$ для $a' \neq a$. Множество X замкнуто в P, так как все его точки сгущения мы удалили. Докажем, что X нормально вложена в P. Пусть f — непрерывная и ограниченная функция на X. На множестве M определим ограниченную функцию F следующим образом: для $x \in M_a$ пусть $F(x) = f(x_a)$. Функцию F можно непрерывно продолжить на βM, а, значит, и на P. Пусть F^* — непрерывное продолжение F на P. Очевидно, $F^*(x_a) = f(x_a)$, следовательно, F^* является непрерывным продолжением функции f на пространство P. Остается доказать, что P является $\aleph_0$-сильно-псевдолинделефовским. Согласно примеру за теоремой 2.5.3 достаточно доказать, что каждое бесконечное подмножество N множества M имеет точку сгущения в P. Пусть c_N — характеристическая функция множества N в M. Пусть c_N^* — ее непрерывное расширение на βM. Если N не имеет в P точки сгущения, то $C_N^*(P - M) = (0)$ и, в частности, $c_N^*(X) = (0)$, т. е. N не имеет в βM точки сгущения, что противоречит компактности βM.

3. Ослабленно компактные пространства.

В настоящем параграфе мы будем изучать пространства, удовлетворяющие условиям вида: „Каждое покрытие со свойством (V) мощности меньшей или равной $\mathfrak{m}$ содержит конечное покрытие (почти-покрытие)". Ввиду того, что условия такого вида связаны с замкнутостью пространства относительно точек, имеющих определенные свойства и данный характер,[4]) приведем прежде всего несколько определений. Точку $x \in P$ мы назовем *хаусдорфовской точкой пространства* P, если для каждой точки $y \in P$, отличной от x, существует окрестность V точки x так, что $y \operatorname{non} \in \overline{V}$. Точку x назовем *регулярной точкой*, если для каждого замкнутого множества F, не содержащего точку x, существует открытая окрестность V точки x так, что $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Наконец, точка x *вполне регулярна*, если для каждого замкнутого множества F, не содержащего точку x, существует непрерывная функция f так, что $f(x) = 0$ и $f(F) = (1)$. Мы скажем, что пространство P является $\mathfrak{m}$ — H-замкнутым ($\mathfrak{m}$ — R-замкнутым, $\mathfrak{m}$ — CR-замкнутым), если для каждого пространства $R = P \cup (\xi)$ справедливо утверждение: если характер точки ξ в R бесконечен и не превышает $\mathfrak{m}$, то точка ξ не является хаусдорфовской (регулярной, вполне регулярной) точкой пространства R.

Более подробное обсуждение мы произведем только для случая $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Для других значений $\mathfrak{m}$ мы ограничимся лишь характеризацией при помощи полунепрерывных функций, которая нам понадобится при исследовании топологического произведения.

3.1.1. Теорема. *Следующие свойства пространства P эквивалентны*:

(1) *P является $\mathfrak{m}$-компактным.*

(2) *Если $\{F_a;\ a \in A\}$ — центрированная система замкнутых множеств и если* card $A \leqq \mathfrak{m}$, *то* $\bigcap \{F_a;\ a \in A\} \neq \emptyset$.

(3) *Пусть $\{f\}$ — множество сверху непрерывных функций на пространстве P, выполняющих условия*

(i) *для любых $f_1,\ f_2 \in \{f\}$ существует $f_3 \in \{f\}$ так, что $f_3 \leqq \min\,(f_1,\ f_2)$.*

(ii) *для любого $x \in P$ имеет место* $\inf \{f(x)\} = 0$. *Если* card $\{f\} \leqq m$, *то существуют* $f_n \in \{f\}$ так, что $\|f_n\| \to 0$.

Доказательство. Очевидно, что (1) эквивалентно (2). Если система $\{F_a;\ a \in A\}$ не удовлетворяет условию (2), то система $\mathbf{N} = \{F_{a_1} \cap \cap F_{a_2} \cap \ldots \cap F_{a_n};\ a_i \in A,\ n$ — натуральное число$\}$ также не удовлетворяет условию (2), и система сверху непрерывных функций $\{c_F;\ F \in \mathbf{N}\}$, где c_F — характеристическая функция множества F, не удовлетворяет условию (3). Итак, (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть система $\{f\}$ не удовлетворяет условию (3). Тогда существует действительное число $\varepsilon > 0$ так, что для каждой функции

[4]) Характером точки x в пространстве P называется наименьшая мощность базы пространства P в точке (полной системы окрестностей точки x).

$f \in \{f\}$ будет $F(f) = \{x; f x) \geqq \varepsilon\} \neq \emptyset$. Функции f сверху непрерывны, следовательно, $F(f)$ замкнуты. $\{F(f)\}$ является центрированной системой, так как если $f_1, f_2 \in \{f\}$ и если f_3 — функция из условия (i), то, очевидно, $F(f_1) \cap F(f_2) \supset F(f_3) \neq \emptyset$. $\bigcap \{F(f)\} = \emptyset$, ибо для любого $x \in P$ имеем $\inf \{f(x)\} = 0$. Итак, система $\{F(f)\}$ не удовлетворяет условию (3). Следовательно (3) $\Rightarrow$ (2), чем и завершается доказательство.

$\aleph_0$-компактные пространства обычно называются *счетно-компактными*.

3.1.2. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства P эквивалентны*

(1) *P счетно компактно.*

(2) *P есть F-наследственно $\aleph_0$-псевдолинделефовское пространство (см.* 2.6.1).

(3) *Каждая сверху непрерывная функция является сверху ограниченной.*

(4) *Каждая сверху непрерывная и сверху ограниченная функция имеет максимум.*

(5) *Если f_n ($n = 1, 2, \ldots$) — сверху непрерывные функции и если $f_n \downarrow 0$, то $\|f_n\| \to 0$.*

Аналогичные характеризации при помощи снизу непрерывных функций мы опускаем.

Доказательство. Общеизвестно, что условие (1) эквивалентно условию: ,,каждое бесконечное множество имеет точку сгущения", что согласно 2.6.2 эквивалентно условию (2). Докажем, что условия (3)—(5) эквивалентны условию (2). Пусть последовательность $\{f_n\}$ не выполняет условие (5). Тогда существует $\varepsilon > 0$ так, что $\|f_n\| \geqq 4\varepsilon$ для любого n. Существуют точки $x_n \in P$ так, что $f_n(x_n) > 3\varepsilon$. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n)$. Если X конечно, то получается сразу же противоречие с условием $f_n \downarrow 0$. Пусть, следовательно, X бесконечно и пусть x_0 — его точка сгущения. Существует n_0 такое, что $(n \geqq n_0 \Rightarrow f_n(x_0) < 2\varepsilon)$, так как $f_n(x_0) \to 0$. Ввиду того, что f_{n_0} сверху непрерывна, существует окрестность U точки x_0 так, что $(x \in U \Rightarrow f_{n_0}(x) < 2\varepsilon)$. Из того, что последовательность $\{f_n\}$ монотонна, следует, что для $n \geqq n_0$ и $x \in U$ будет $f_n(x) < 2\varepsilon$. Точка x_0 есть точка сгущения множества X, поэтому существует $n_1 \geqq n_0$ так, что $x_{n_1} \in U$. Но это противоречит допущению, ибо $0 < 3\varepsilon < f_{n_1}(x_1) < 2\varepsilon$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (5).

Пусть существует сверху неограниченная и сверху непрерывная функция f. Пусть $g_n = \frac{1}{n} \max(0, f)$, $f_n = \min(1, g_n)$. Очевидно, функции f_n сверху непрерывны, $f_n \downarrow 0$ и $\|f_n\| = 1$ для любого n. Итак, (5) $\Rightarrow$ (3). Пусть f — сверху непрерывная функция, $f < 0$, $\sup_{x \in P} f(x) = 0$. Тогда $-\frac{1}{f}$ сверху непрерывна и сверху неограничена. Итак, (3) $\Rightarrow$ (4).

Остается доказать, что из условия (4) следует (2). Пусть не выполняется (2), то есть, существует бесконечное дискретное замкнутое множество N. Можно предположить, что N счетно и взять последовательность $\{x_i\}$ такую, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, а N состоит как раз из всех x_i. Определим теперь функцию f так: $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$, $f(x) = 0$ для остальных $x \in P$. Очевидно, f не выполняет условие (4) и доказательство закончено.

3.1.3. Теорема. *Счетно компактное пространство обладает следующими свойствами*

(6) *Каждое точечно конечное открытое покрытие пространства P содержит конечное покрытие.*

(7) *Если $\{U\}$ — открытое покрытие и если $\{\overline{U}\}$ — точечно конечная система, то $\{U\}$ содержит конечное покрытие.*

Если P — регулярное пространство, то каждое из условий (6) *и* (7) *эквивалентно счетной компактности.*

Доказательство. Первая часть теоремы является частным случаем теоремы 2.6.3. Очевидно, (6) $\Rightarrow$ (7). Пусть регулярное пространство P не является счетно компактным, т. е. содержит бесконечное дискретное замкнутое множество $N = \{x_1, x_2, \ldots\}$. P регулярно и, следовательно, каждая точка x_j имеет окрестность U_j такую, что $x_i \operatorname{non} \in \overline{U}_j$ для $i \neq j$. Пусть $V_i = U_i - \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} \overline{U}_j$. Система $\{V_i;\ i = 1, 2, \ldots\}$ дизъюнктна и, следовательно, точечно конечна. P регулярно и, следовательно, существуют открытые V'_i так, что $x_i \in V'_i \subset \overline{V}'_i \subset V_i$. Ясно, что $\{P - N, V'_1, V'_2, \ldots\}$ является точечно конечным открытым покрытием, не содержащим конечного покрытия. Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Нетрудно построить пространство, имеющее свойство (6) и не являющееся счетно компактным. Например, если на несчетном множестве M определить топологию так, что замкнуты только M и все счетные подмножества, то каждое счетное множество дискретно и замкнуто, но, очевидно, не выполняется (6). Автору не удалось построить хаусдорфово пространство, имеющее свойство (6) и не являющееся счетно компактным.

3.1.4. *Существует хаусдорфово пространство, имеющее свойство* (7) *и содержащее дискретное замкнутое множество мощности* $2^{2^{\aleph_0}}$.

Построение. Пусть $N = \{n\}$ — счетное дискретное пространство. Положим $K = \beta N - N$. Элементы пространства K будем обозначать через x, y, x_1, y' и т. п. На множестве

$$P = N \cup K \cup \{(n, x);\ n \in N, x \in K\}$$

определим топологию таким образом:

(1) точки (n, x) изолированы;

(2) определяющая система окрестностей точки $n \in N$ состоит из множеств

$$M_n(x_1, \ldots, x_k) = (n) \cup \{(n, x);\, x \neq x_1, \ldots, x_k\}\,,$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — точки из K (в конечном числе);

(3) точка $x \in K$ имеет следующие определяющие окрестности: если U — окрестность точки x в βN и если $x_1, \ldots, x_k \in K$ и $n_1, \ldots, n_j \in N$, то множество

$$M_x(U; x_1, \ldots, x_k; n_1, \ldots, n_j) = (x) \cup \{(n, x);\, n \neq n_1, \ldots, n_j\} \cup \\ \cup \{(n, y);\, n \in U,\, y \neq x_1, \ldots, x_k\}$$

является окрестностью точки x.

Нетрудно обнаружить, что пространство P хаусдорфово и что множество K дискретно и замкнуто. Пусть $\{V\}$ — открытое покрытие пространства K и пусть система $\{\overline{V}\}$ точечно конечна. Нужно доказать, что $\{V\}$ содержит конечное покрытие. Пусть M_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ — окрестности точек $x \in K$. Очевидно, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{M}_{x_i} \neq \emptyset$, и очевидно даже, что card $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{M}_{x_i} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число множеств V, содержащих точки из K. Пусть это будут множества $V_1, \ldots, V_k$. Итак, $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Отсюда следует, что существуют $n_1, \ldots, n_j \in N$ и $x_1, \ldots, x_m \in K$ так, что $n \in \bigcup\limits_{l=1}^{k} V_l$ для $n \neq n_1, \ldots, n_j$ и $(n, x) \in \bigcup\limits_{l=1}^{k} V_l$ для $x \neq x_1, \ldots, x_m$ и $n \neq n_1, \ldots, n_j$. Каждая из точек $n_1, \ldots, n_j$ принадлежит какому-нибудь множеству $V \in \{V\}$, скажем, $n_i \in V'_i$. Очевидно, множества $V_1, \ldots, V_k, V'_i, \ldots, V'_j$ содержат все точки из P, за исключением конечного множества. Итак, пространство P имеет свойство (7).

3.1.5. *Пусть N — счетное дискретное пространство. Тогда существуют счетно компактные пространства P и Q так, что $P \cup Q = \beta N$ и $P \cap Q = N$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{N}(M)$ означает систему всех бесконечных счетных подмножеств множества M. Существует отображение x, сопоставляющее каждому $S \in \mathbf{N}(\beta N)$ точку сгущения $x(S)$ множества S. Положим $P_0 = N$ и для $0 < \alpha < \omega_1$ пусть

$$P_\alpha = \bigcup \{P_\beta;\, \beta < \alpha\} \cup x[\mathbf{N}(\bigcup \{P_\beta;\, \beta < \alpha\})]\,.$$

Положим $P = \bigcup \{P_\alpha;\, \alpha < \omega_1\}$. Пространство P счетно компактно, так как каждое $S \in \mathbf{N}(P)$ содержится при некотором α в P_α и имеет поэтому точку сгущения $x(S)$ в $P_{\alpha+1}$. Мощность множества P равна $2^{\aleph_0}$, так как по трансфинитной индукции из (*) следует, что card $P_\alpha \leqq 2^{\aleph_0} \,.\, 2^{\aleph_0} + (2^{\aleph_0} \,.\, 2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ и, следовательно, card $P = 2^{\aleph_0} \,.\, \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Положим $Q = N \cup (\beta N - P)$.

Пространство Q счетно компактно, ибо если $S \in \mathbf{N}(\beta N)$, то card $\overline{S}^{\beta N} = 2^{2^{\aleph_0}}$, и, следовательно, так как card $P = 2^{\aleph_0}$, S имеет $2^{2^{\aleph_0}}$ точек сгущения в Q.

Замечание. Пространства P и Q со свойством из предыдущей теоремы построил впервые Й. Новак [9]. Так как построение, данное Новаком, излишне сложно, мы привели здесь новое построение.

3.1.6. *Пусть M — дискретное пространство мощности $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Существуют счетно компактные пространства P и Q так, что $P \cap Q = M$ и $P \cup Q \subset \beta M$.*

Доказательство. Идея аналогична идее построения 3.1.5. Пусть $\mathbf{N}(R)$ означает множество всех бесконечных счетных подмножеств множества R. Пусть $\overline{S}$ для $S \subset \beta M$ означает замыкание множества S в βM. Положим $Q' = \bigcup \{\overline{S}; S \in \mathbf{N}(M)\}$. Очевидно, если $N \in \mathbf{N}(Q')$, то существует $S \in \mathbf{N}(M)$ так, что $N \subset \overline{S}$. Пусть Q — такое подпространство пространства Q', что card $(\overline{S} - Q) \leqq 2^{\aleph_0}$ для любого $S \in \mathbf{N}(M)$. Тогда Q счетно компактно. Это вытекает сразу же из того, что каждое бесконечное замкнутое множество в Q' имеет мощность не меньшую, чем $2^{2^{\aleph_0}}$. Поэтому для доказательства 3.1.6 достаточно построить счетно компактное пространство P так, чтобы

(i) $M \subset P \subset Q'$

и

(ii) card $(P \cap \overline{S}) \leqq 2^{\aleph_0}$ для любого $S \in \mathbf{N}(M)$.

Здесь мы не можем рассуждать так просто, как в 3.1.5. Если бы мы взяли произвольное отображение $x(S)$ (см. 3.1.5), то условие (ii) совсем не обязательно бы выполнялось. В этом случае отображение x нужно выбрать подходящим образом.

Если $S \in \mathbf{N}(M)$, то пусть $\varphi(S) = \overline{S} - S$. Как известно, $\overline{S}$ — открыто-замкнутые множества в βM. Упорядочим множество всех $\varphi(S)$ согласно первому порядковому типу ϑ мощности $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Итак, мы имеем трансфинитную последовательность $\{K_\alpha; \alpha < \vartheta\}$. Для каждого $S \in \mathbf{N}(M)$, для которого $\varphi(S) \subset K_1$ возьмем $x(S) \in \varphi(S)$ и положим $P_1^1 = \{x(S); \varphi(S) \subset K_1\}$. Пусть у нас определены P_1^β для $\beta < \alpha < \vartheta$. Если $\varphi(S) \subset K_\alpha$ и если $\varphi(S) \cap K_\beta = \emptyset$ для $\beta < \alpha$, то возьмем $x(S) \in \varphi(S)$ и положим $P_1^\alpha = \{x(S)\}$. Пусть $R_1 = \bigcup \{P_1^\alpha; \alpha < \vartheta\}$. Из построения ясно, что каждое $S \in \mathbf{N}(M)$ имеет точку сгущения в R_1 и что card $(R_1 \cap \varphi(S)) \leqq 2^{\aleph_0}$ (очевидно, имеет место равенство). Пусть $1 < \delta < \omega_1$. Пусть для всех $\gamma < \delta$ у нас определены пространства $R_\gamma \subset Q'$ так, что

(1) Если $\gamma + 1 < \delta$, то каждое счетное бесконечное множество $S \subset R_\gamma$ имеет точку сгущения в $R_{\gamma+1}$.

(2) card $(K_\alpha \cap R_\gamma) \leqq 2^{\aleph_0}$ для каждого $\alpha < \vartheta$ и каждого $\gamma < \delta$.

Пусть $R'_\delta = \bigcup \{R_\gamma; \gamma < \delta\}$. Имеем card $(R'_\delta \cap K_\alpha) \leqq 2^{\aleph_0} . 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ и, следовательно, card $\mathbf{N}(R'_\delta \cap K_\alpha) \leqq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Для каждого множества $S \in \mathbf{N}(R'_\delta \cap K_1)$, не имеющего точки сгущения в R'_δ, возьмем одну из его точек сгущения и множество всех этих выделенных точек сгущения обозначим через P^1_δ. Если мы уже определили P^β_δ для $\beta < \alpha < \vartheta$, то для каждого множества $S \in \mathbf{N}(R'_\delta \cap K_\alpha)$, не имеющего точки сгущения в $R'_\delta \cup \bigcup \{P^\beta_\delta;\ \beta < \alpha\}$, возьмем точку сгущения $x(S)$ множества S и положим $P^\alpha_\delta = \{x(S)\}$. Положим

$$R_\delta = R'_\delta \cup \bigcup \{P^\alpha_\delta;\ \alpha < \vartheta\}\,.$$

Очевидно, каждое $S \in \mathbf{N}(R'_\delta)$ имеет точку сгущения в R_δ и нетрудно обнаружить, что условие (2) выполняется и для $\gamma = \delta$. Положим $P = U\{R_\delta;\ \delta < \omega_1\}$. Пространство P счетно компактно, так как каждое $S \in \mathbf{N}(P)$ содержится в каком-то пространстве R_δ и поэтому имеет точку сгущения в $R_{\delta+1}$. Условие (i), очевидно, выполняется. Условие (ii) вытекает из того, что

$$\operatorname{card}(P \cap K_\alpha) \leqq \sum_\delta \operatorname{card}(R_\delta \cap K_\alpha) \leqq 2^{\aleph_0}\,.\,2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\,.$$

Утверждение 3.1.6 доказано.

Следствие. Пересечение двух счетно компактных пространств может не быть $\mathfrak{m}$-псевдолинделефовским пространством.

3.2. $\mathfrak{m}$-почти-компактные пространства и сильно-псевдокомпактные пространства.

3.2.1. Теорема. *Следующие свойства пространства эквивалентны*:

(1) *P является $\mathfrak{m}$-почти-компактным* (*определение* 3.1.1).

(2) *P замкнуто относительно хаусдорфовых точек характера* $\leqq \mathfrak{m}$ (*см. определение в начале параграфе* 3).

(3) *Условие* (3) *теоремы* 3.1.2, *где вместо* $f \in \mathsf{C}_+(P)$ *мы требуем* $f \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.2. Обратим внимание, что (2), очевидно, эквивалентно условию

(2′) Если $\{U\}$ — центрированная система открытых множеств, то $(\operatorname{card}\{U\} \leqq \mathfrak{m} \Rightarrow \bigcap \{\overline{U}\} \neq \emptyset)$.

Если же $\{U\}$ не удовлетворяет условию (2′), то ясно, что $\{P - \overline{U}\}$ не удовлетворяет условию (1), и если $\{U\}$ не удовлетворяет условию (1), то $\{P - \overline{U}\}$ не удовлетворяет условию (2′). Итак, условие (1) эквивалентно условию (2′). Аналогично, как в доказательстве теоремы 3.1.2, докажем, что (2′) эквивалентно (3). Достаточно принять во внимание, что характеристическая функция регулярного замкнутого множества является элементом $\mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$.

3.2.2. *Регулярное замкнутое подмножество* $\mathfrak{m}$*-почти-компактного пространства является* $\mathfrak{m}$*-почти-компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{H\}$ — открытое покрытие пространства $\overline{U}$, где U — непустое открытое подмножество пространства P. $\{H \cup P - \overline{U}\}$ есть открытое покрытие пространства P одинаковой мощности с $\{H\}$. Если существуют $H_1, \ldots, H_n$ так, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{H}_i^P \cup \overline{P - \overline{U}} = P$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{H}_i^{\overline{U}} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{H}_i^P = \overline{U}$, ибо $\overline{P - \overline{U}} \subset P - U$. Итак, если P $\mathfrak{m}$-почти-компактно, то $\overline{U}$ $\mathfrak{m}$-почти-компактно.

3.2.3. Пространство назовем $\mathfrak{m}$-*сильно-псевдокомпактным*, если каждое локально конечное открытое покрытие мощности $\mathfrak{m}$ содержит конечное покрытие, *сильно-псевдокомпактным*, если каждое локально конечное покрытие содержит конечное покрытие. Ясно, что сильно-псевдо-компактные пространства совпадают с $\aleph_0$-сильно-псевдолинделефовскими пространствами. Из 2.5.2. нетрудно вывести, что пространство является сильно-псевдокомпактным, если и только если для какого-либо бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ оно $\mathfrak{m}$-сильно-псевдокомпактно. Итак, вводить понятие $\mathfrak{m}$-сильно-псевдокомпактного пространства излишне.

3.2.4. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства* P *эквивалентны*:

(1) P *сильно-псевдокомпактно.*

(2) P *является* $\aleph_0$*-почти-компактным.*

(3) *Если* $f \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$, *то* f *сверху ограничена.*

(4) *Если функция* $f \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$ *сверху ограничена, то* f *имеет максимум.*

(5) $f_n \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$, f_n *сверху ограничена* $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \|f_n\| \to 0$.

Доказательство. Пусть пространство P не является сильно-псевдокомпактным; тогда согласно 2.5.3 существует бесконечная счетная локально конечная система непустых открытых множеств $\{U_n;\, n = 1, 2, \ldots\}$. Положим $V_k = \bigcup \{U_n;\, n \geqq k\}$. Очевидно, $V_k \supset V_{k+1} \neq \emptyset$, итак, $\{V_k\}$ — счетная центрированная система открытых множеств и, очевидно,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} U_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \overline{U}_n = \emptyset\,;$$

следовательно, P не является $\aleph_0$-почти-компактным. Пусть пространство P не является $\aleph_0$-почти-компактным, тогда существует счетная центрированная система $\{U\}$ открытых множеств так, что $\bigcap \{\overline{U}\} = \emptyset$. Очевидно, система $\{U\}$ локально конечна и поэтому пространство P не является сильно-псевдокомпактным. Мы доказали, что условия (1) и (2) эквивалентны. Пусть не выполняется (5); тогда существует последовательность функций $\{f_n;\, n = 1, 2, \ldots\}$, не удовлетворяющих (5). Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ так, что $\|f_n\| > \varepsilon$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $M_n = \{x; f_n(x) > \varepsilon\}$. Имеем $M_n \subset \overline{\operatorname{Int} M_n}$, так как $f_n \in \mathsf{P}_-(P)$. Отсюда следует, что $\operatorname{Int} M_n \neq \emptyset$, ибо $M_n \neq \emptyset$. Имеет место

$$\overline{\operatorname{Int} M_n} = \overline{M}_n \subset \{x; f_n(x) \geqq \varepsilon\},$$

так как $f_n \in \mathsf{C}_+(P)$. Очевидно, $M_n \supset M_{n+1}$ и, следовательно, $\operatorname{Int} M_n \supset \supset \operatorname{Int} M_{n+1}$. Если бы существовала точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\operatorname{Int} M_n}$, было бы $f_n(x) \geqq \varepsilon$ для любого n, что невозможно, ибо $f_n(x) \to 0$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (5). Пусть не имеет места (3) и пусть f — функция, не удовлетворяющая условию (3). Положим $f_n = \min\left(1, \frac{1}{n} \max(0, f)\right)$. Очевидно, последовательность $\{f_n; n = 1, 2, \ldots\}$ не удовлетворяет условию (5), значит, (5) $\Rightarrow$ (3). Пусть не имеет места (4) и f не удовлетворяет условию (4). Пусть $M = \sup\{f(x); x \in P\}$. Очевидно, функция $1/M - f$ не удовлетворяет условию (3). Мы доказали (3) $\Rightarrow$ (4). Остается доказать, что из условия (4) следует (2). Пусть не имеет места (2); тогда существует счетная монотонная система открытых множеств $\{U_n\}$ с пустым пересечением замыканий. Пусть f_n — характеристическая функция множества $\overline{U}_n$. Положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$. Из локальной конечности системы $\{U_n\}$ следует, что f сверху непрерывна. Из локальной конечности монотонной системы $\{U_n\}$ следует, что $f \in \mathsf{P}_-(P)$. Очевидно, f не имеет максимума. Итак, (4) не имеет места и доказательство закончено.

Из определения непосредственно следует

3.2.5. Топологическое пространство счетно компактно, если и только если оно счетно почти-компактно и счетно паракомпактно. Топологическое пространство компактно, если и только если оно счетно почти-компактно и паракомпактно.

3.2.6. Определение (Урысон [14]). Топологическое пространство мы назовем *квазинормальным*, если два любых непересекающихся замкнутых множества, одно из которых бесконечно и дискретно, можно отделить открытыми множествами.

3.2.7. Теорема. *Топологическое пространство счетно компактно, если и только если оно квазинормально и счетно почти-компактно.*

Доказательство. Счетно компактное пространство, очевидно, счетно H-замкнуто и квазинормально. Пусть поэтому пространство P квазинормально. Пусть пространство P не является счетно компактным, т. е. содержит счетное дискретное замкнутое множество $F = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $x_n \neq x_m$ для $m \neq n$. Положим еще $F_n = \{x_k; k \geqq n + 1\}$. Так как P квазинормально, а F_k замкнуты и дискретны, можно путем индукции определить открытые множества U_k и V_k так, что $U_k \supset F_k$, $x_k \in V_k \subset U_{k-1}$, $V_k \cap U_k = \emptyset$ и $\overline{U}_k \subset U_{k-1}$. Из построения ясно, что множество $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ замкнуто. Далее, $F \cap F_0 = \emptyset$. Итак, из квазинормальности опять вытекает существование открытых множеств U и V так, что $F_0 \subset V$, $F \subset U$ и $V \cap U = \emptyset$. Мы утверждаем, что система откыртых множеств $\{V \cap V_k\}_{k=1}^{\infty}$ локально конечна. Если $x \in P - F_0$, то существует n_0 так, что f non $\in \overline{U}_{n_0}$. $P - \overline{U}_{n_0}$ есть окрестность точки x, пересекающая только множества $V_1 \cap \overline{V}, \ldots, V_{n_0} \cap V$. Если $x \in F_0$, то U — окрестность точки x, не пересекающая ни одного $V \cap V_k$. Итак, P не является счетно почти-компактным, чем и завершается доказательство.

3.3. $\mathfrak{m}$-квазикомпактные топологические пространства.

3.3.1. Определение. Топологическое пространство называется $\mathfrak{m}$-*квазикомпактным*, если каждое N-покрытие мощности $\leqq \mathfrak{m}$ содержит конечное покрытие. Пространство, $\mathfrak{m}$-квазикомпактное для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$, мы назовем *квазикомпактным*.

3.3.2. Теорема. *Следующие свойства пространства эквивалентны*:

(1) *P является $\mathfrak{m}$-квазикомпактным.*

(2) *Если $\{Z\}$ — центрированная система Z-множеств и если* card $\{Z\} \leqq \mathfrak{m}$, *то* $\bigcap \{Z\} \neq \emptyset$.

(3) *P является $\mathfrak{m}$-CR-замкнутым.*

(4) *Пусть $\{f\}$ — система ограниченных непрерывных функций, обладающая свойствами*

(i) *для любых $f_1, f_2 \in \{f\}$ существует $f \in \{f\}$ так, что $f \leqq \min (f_1, f_2)$.*

(ii) *для любого $x \in P$ имеет место* $\inf \{f(x)\} = 0$.

Тогда, если card $\{f\} \leqq \mathfrak{m}$, *существуют $f_n \in \{f\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что* $\|f_n\| \to 0$.

(5) *CR-редуцированное пространство* cr P *является $\mathfrak{m}$-квазикомпактным.*

Доказательство. Очевидно, что условие (1) эквивалентно условию (2). Условие (3), очевидно, эквивалентно условию (3′). Если $\{N\}$ — центрированная система N-множеств и если мощность системы $\{N\}$ меньше или равна $\mathfrak{m}$, то $\bigcap \{\overline{N}\} \neq \emptyset$.

Если теперь $\{Z\}$ — центрированная система Z-множеств и если card $\{Z\} \leqq \mathfrak{m}$, то существует центрированная система N-множеств $\{N\}$ так, что card $\{N\} \leqq \mathfrak{m}$ и $\bigcap \{\overline{N}\} = \bigcap \{Z\}$. Действительно, если $Z \in \{Z\}$, то существуют N-множества $N_n(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $\bigcap \{\overline{N_n(Z)};\ n = 1, 2, \ldots\} = \bigcap \{N_n(Z);\ n = 1, 2, \ldots\}$. Пусть $\{N\} = \{N_n(Z);\ n = 1, 2, \ldots,\ Z \in \{Z\}\}$. Очевидно, $\bigcap \{\overline{N}\} = \bigcap \{Z\}$, и, следовательно, из условия (3′) вытекает условие (2). Пусть теперь $\{N\}$ — центрированная система N-множеств,

$\operatorname{card}\{N\} \leqq \mathfrak{m}$. Для каждого $N \in \{N\}$ существуют Z-множества $Z_n(N)$ так, что $\overline{N} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n(N)$. Пусть $\{Z\} = \{Z_n(N);\ n = 1, 2, \ldots, N \in \{N\}\}$. Очевидно, $\operatorname{card}\{Z\} \leqq \mathfrak{m}$ и $\bigcap\{Z\} = \bigcap\{\overline{N}\}$. Отсюда следует, что из условия (2) вытекает условие (3′). Пусть $\{f\}$ — система ограниченных непрерывных функций, выполняющих условия (i) и (ii). Для каждого $f \in \{f\}$ пусть $M(f) = \{x;\ f(x) \geqq \varepsilon\}$, где ε — данное положительное число. Из условия (ii) следует, что $\bigcap_{i=1}^{k}\{M(f)\} = \emptyset$. Если $\operatorname{card}\{f\} \leqq \mathfrak{m}$, то согласно (2) существуют $f_1, \ldots, f_k \in \{f\}$ так, что $\bigcap_{i=1}^{k} M(f_i) = \emptyset$. Согласно (i) существует $f \in \{f\}$ так, что $f \leqq \min(f_1, \ldots, (f_k)$ и, следовательно, $M(f) = \emptyset$, иначе говоря $f < \varepsilon$. Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $f \in \{f\}$ так, что $\|f\| \leqq \varepsilon$, т. е. условие (2) влечет условие (4). Пусть неверно (2) и $\{Z\}$ — система, не удовлетворяющая условию (2). Очевидно, для каждого Z-множества Z существуют непрерывные ограниченные функции f_n^Z $(n = 1, 2, \ldots)$, так, что $f_n^Z(Z) = (1)$, $f_n^Z \geqq 0$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{N}(f_n^Z) = Z$. Пусть $\emptyset = \{f_n^Z;\ Z \in \{Z\},\ n = 1, 2, \ldots\}$. Положим $\{f\} = \{\min(f_1, \ldots, f_k);\ k$ — натуральное число и $f_1, \ldots, f_k \in \Phi\}$. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{card}\{f\} \leqq \mathfrak{m}$ и что справедливы (i) и (ii). Тем не менее $\{x;\ f(x) \geqq 1\} \neq \emptyset$ для любой $f \in \{f\}$. Итак, (4) не имеет места и, следовательно, условие (4) влечет условие (2).

Очевидно, непрерывный образ $\mathfrak{m}$-квазикомпактного пространства является $\mathfrak{m}$-квазикомпактным пространством. Следовательно, если P есть $\mathfrak{m}$-квазикомпактное пространство, то и $\operatorname{cr} P$ $\mathfrak{m}$-квазикомпактно. Пусть $\operatorname{cr} P$ $\mathfrak{m}$-квазикомпактно. Пусть $\{Z\}$ — центрированная система Z-множеств в P. Пусть ξ — естественное отображение P на $\operatorname{cr} P$. Если Z является Z-множеством в P, то $\xi(Z)$ будет Z-множеством в $\operatorname{cr} P$ и, следовательно, $\{\xi(Z);\ Z \in \{Z\}\}$ — центрированная система Z-множеств в $\operatorname{cr} P$, и, очевидно, $\bigcap\{Z\} = \xi^{-1}(\bigcap\{\xi(Z)\})$. Отсюда следует, что $(5) \Rightarrow (2)$; доказательство закончено.

3.3.3. *Топологическое пространство P квазикомпактно тогда и только тогда, если пространство* $\operatorname{cr} P$ *компактно.*

3.3.4. *Вполне регулярное пространство квазикомпактно тогда и только тогда, если оно компактно.*

Доказательство. Докажем прежде всего 3.3.4. Очевидно, компактное пространство квазикомпактно. Пусть P — вполне регулярное квазикомпактное пространство. Пусть $\{F\}$ — центрированная система замкнутых множеств в P. Для каждого замкнутого множества F существует система Z-множеств $\mathbf{N}(F)$ так, что $\bigcap \mathbf{N}(F) = F$. Пусть $\mathbf{N} = \bigcup\{\mathbf{N}(F);\ F \in \{F\}\}$. Очевидно, $\bigcap \mathbf{N} = \bigcap\{F\}$. Очевидно, что $\mathbf{N}$ — центрированная система, значит, $\bigcap \mathbf{N} \neq \emptyset$. Доказательство теоремы 3.3.4. закончено. Если пространство P квазикомпактно, то, согласно 3.3.2, пространство $\operatorname{cr} P$ квазикомпактно и, согласно 3.3.4, $\operatorname{cr} P$ компактно. Если $\operatorname{cr} P$ компактно, то $\operatorname{cr} P$ квазикомпактно и, следовательно, согласно 3.3.2, пространство P квазикомпактно.

3.3.5. Теорема. $\mathfrak{m}$-*почти-компактное топологическое пространство является* $\mathfrak{m}$-*квазикомпактным.*

Доказательство непосредственно следует из сравнения условия (4) теоремы 3.3.2 и условия (3) теоремы 3.2.1, ибо, если f — непрерывная функция, то $f \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$. Приведем еще доказательство, использующее только определение. Пусть пространство P $\mathfrak{m}$-почти-компактно. Пусть $\{N\}$-покрытие $\mathbf{N}$-множествами, $\operatorname{card}\{N\} \leqq \mathfrak{m}$. Если N есть $\mathbf{N}$-множество, то существуют $\mathbf{N}$-множества $N_n(N)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $\overline{N_n(N)} \subset N$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n(N) = N$. Пусть $\mathbf{N} = \{N_n(N);\ N \in \{N\}$ и $n = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, $\mathbf{N}$ — покрытие и $\operatorname{card} \mathbf{N} \leqq \mathfrak{m}$. P является $\mathfrak{m}$-почти-компактным, следовательно, существуют $N_1, \ldots, N_k \in \mathbf{N}$ так, что $\overline{N}_1 \cup \ldots \cup \overline{N}_k = P$. Пусть N_i' $(i = 1, \ldots, k)$ — множество из $\{N\}$, для которого $\overline{N}_i \subset N_i'$. Очевидно, $N_1' \cup \ldots \cup N_k' = P$, и доказательство закончено.

3.3.6. Теорема. *Пусть пространство P таково, что всякое его* N-*покрытие мощности* $\leqq \mathfrak{m}$ *содержит конечное почти-покрытие. Тогда P* $\mathfrak{m}$-*квазикомпактно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{N}$ есть покрытие N-множествами, $\operatorname{card} \mathbf{N} \leqq \mathfrak{m}$. Для каждого множества $N \in \mathbf{N}$ существуют множества $N_n(N)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $\overline{N_n(N)} \subset N$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n(N) = N$. Пусть $\mathbf{M} = \{N_n(N);\ N \in \mathbf{N},\ n = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, $\operatorname{card} \mathbf{M} \leqq \mathfrak{m}$. По условию существуют $N_1, \ldots, N_k \in \mathbf{M}$ так, что $\overline{N}_1 \cup \ldots \cup \overline{N}_k = P$. Существуют N_i' $(i = 1, \ldots, k)$ из системы $\mathbf{N}$ так, что $N_i' \supset \overline{N}_i$. Итак, $N_1' \cup \ldots \cup N_k' = P$ и доказательство закончено.

3.3.7. *Пусть пространство P* $\mathfrak{m}$-*квазикомпактно. Пусть N есть* N-*множество в P. Тогда $\overline{N}$ является* $\mathfrak{m}$-*квазикомпактным пространством.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\overline{N}$ удовлетворяет условию (3) из теоремы 3.3.2 или условию (3′), приведенному в доказательстве теоремы 3.3.2. Итак, пусть $\mathbf{N}$ — центрированная система N-множеств в $\overline{N}$. Очевидно, $\mathbf{N} \cap N$ (что означает систему всех $N' \cap N$, где $N' \in \mathbf{N}$) есть центрированная система N-множеств в P и, следовательно, по предположению $\bigcap \{\overline{N}';\ N' \in \mathbf{N} \cap N\} \neq \emptyset$. Однако, $\bigcap \{\overline{N}'^P;\ N' \in \mathbf{N} \cap N\} = \bigcap \{\overline{N}'^{\overline{N}};\ N' \in \mathbf{N} \cap N\}$ и, значит, $\bigcap \{\overline{N}';\ N' \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$.

3.3.8. Пример. *Существует почти-компактное пространство P и* Z-*множество $Z \subset P$ такое, что Z вложено в E_2 и не является компактным (и, следовательно, не является даже квазикомпактным).*

Построение. Пусть $Q = \{(x, y) | 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\} \subset E_2$. На множестве $P = Q \cup (1, 1)$ определим топологию так: пусть пространство Q открыто в P и пусть окрестности определения точки (1,1) имеют вид

$$\{(x, y);\ 1 - \varepsilon < x < 1,\ 0 < y \leqq 1\} \cup (1,1)\ .$$

Очевидно, что пространство P почти-компактно. Положим $Z = \{(x, 0);\ 0 \leqq x < 1\} \cup (1,1)$. Нетрудно проверить, что Z есть Z-множество в P. Очевидно, Z не является компактным; и потому (как метрическое пространство) оно даже и не квазикомпактно.

3.3.9. Определение. Топологическое пространтсво мы назовем *псевдокомпактным*, если каждое его нормальное покрытие содержит конечное покрытие.

Замечание. По определению 2.4 пространство псевдокомпактно, если и только если оно является $\aleph_0$-псевдолинделефовским. Из теоремы 2.4.1 ясно, что если для каждой-либо бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ справедливо утверждение ,,каждое нормальное покрытие мощности $\leqq \mathfrak{m}$ содержит конечное покрытие", то пространство псевдокомпактно. Итак, не имеет смысла вводить понятие $\mathfrak{m}$-псевдокомпактного пространства.

3.3.10. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства P эквивалентны*:

(1) *P псевдокомпактно (т. е. является $\aleph_0$-псевдолинделефовским).*

(2) *P является $\aleph_0$-квазикомпактным.*

(3) *Каждая непрерывная функция на P ограничена.*

(4) *Каждая непрерывная ограниченная функция на P имеет максимум.*

(5) *Если f_n непрерывны и ограничены ($n = 1, 2, \ldots$) и если $f_n \downarrow 0$, то $\|f_n\| \to 0$.*

(6) *Каждое нормальное пространство, являющееся непрерывным образом пространства P является счетно компактным.*

(7) *Пусть $\mathsf{C}(P)$ — линейное пространство ограниченных непрерывных функций на P. Пусть A — множество всех линейных форм J на $\mathsf{C}(P)$ таких, что*

$$f \in \mathsf{C}(P)\ ,\quad f \geqq 0 \Rightarrow J(f) \geqq 0\ ,\quad f_n \in \mathsf{C}(P)\ ,\quad \|f_n\| \to 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0\ .$$

Пусть B — множество всех линейных форм J на $\mathsf{C}(P)$ таких, что:

$$f_n \in \mathsf{C}(P)\ ,\quad f_n \downarrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0\ .$$

Тогда $A \subset B$.

Доказательство. Прежде всего докажем $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3)$. Если ограниченная неотрицательная непрерывная функция f не имеет максимума, то $\dfrac{1}{\|f\| - f}$ есть неограниченная непрерывная функция. Итак, $(3) \Rightarrow (4)$. Если неверно (2), то существует счетная центрированная система

Z-множеств $\{Z_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$, имеющая пустое пересечение. Существуют неотрицательные непрерывные функции f_n так, что $Z_n = \mathsf{Z}(f_n)$. Положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(f_n, \frac{1}{2^n}\right)$. Очевидно, $\mathsf{Z}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = \emptyset$. Итак, $f > 0$. Одновременно $\inf\{f(x);\ x \in P\} = 0$, так как, если $x \in \bigcap_{k=1}^{n} Z_k$, $f(x) < \frac{1}{2^n}$. Функция $-f$ непрерывна и не имеет максимума. Итак, (4) неверно и, следовательно, (4) $\Rightarrow$ (2). Пусть неверно (5) и $\{f_n\}$ есть последовательность функций, не удовлетворяющая условию (5). Существует $\varepsilon > 0$ так, что $\|f_n\| > \varepsilon$ для любого n. Положим $Z_n = \{x;\ f_n(x) \geqq \varepsilon\}$. Очевидно, $\{Z_n\}$ является центрированной системой Z-множеств и $\bigcap \{Z_n\} = \emptyset$. Итак, P не является $\aleph_0$-квазикомпактным, и мы доказали таким образом, что (2) $\Rightarrow$ (5). Пусть существует неограниченная непрерывная функция f. Положим $f_n = \min\left(1, \frac{1}{n}|f|\right)$. Функции f_n непрерывны, $f_n \downarrow 0$ и $\|f_n\| = 1$ для любого n. Итак, (5) не имеет места, т. е. (5) $\Rightarrow$ (3). Если существует неограниченная функция f, то $\varphi(x, y) = |f(x) - f(y)|$ есть псевдометрика, не являющаяся вполне ограниченной. Итак, (1) $\Rightarrow$ (3). Если P не псевдокомпактно, то согласно 2.4.3, VI существует неограниченная непрерывная функция и, следовательно, (3) $\Rightarrow$ (1). Итак, условия (1)—(5) эквивалентны. Из теоремы 3.2.7 мы знаем, что нормальное счетно почти-компактное пространство является счетно компактным. Вполне регулярное псевдокомпактное пространство является сильно-псевдокомпактным, то есть счетно почти-компактным. Непрерывный образ псевдокомпактного пространства есть псевдокомпактное пространство. Итак, если P псевдокомпактно, то имеет место (6). По теореме 2.4.1, если пространство P не является псевдокомпактным, то существует непрерывный метризуемый образ пространства P, не являющийся компактным, ни даже счетно компактным. Итак, (6) $\Rightarrow$ (1). Остается доказать, что условие (7) эквивалентно предыдущим условием. Очевидно, (5) $\Rightarrow$ (7). Пусть пространство P не псевдокомпактно, тогда согласно 3.3.2 (5) $\operatorname{cr} P$ не псевдокомпактно и, следовательно, согласно (5) существуют непрерывные ограниченные функции f_n на $\operatorname{cr} P$ так, что $f_n \downarrow 0$ и $\|f_n\| = 1$ для любого n. Пусть $Z_n = \{x;\ x \in \operatorname{cr} P,\ f_n(x) > \frac{1}{2}\}$. Очевидно, $Z_n \supset Z_{n+1} \neq \emptyset$, следовательно $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Z}_n^{\beta(\operatorname{cr} P)} \neq \emptyset$. Возьмем $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Z}_n^{\beta(\operatorname{cr} P)}$ и определим

$$J(f) = f^*(x_0)\ ,$$

где f^* — непрерывное расширение функции f на $\beta(\operatorname{cr} P)$. Очевидно, что J есть линейная неотрицательная форма на $\mathsf{C}(P)$, принадлежащая A и не принадлежащая B, так как $f_n \downarrow 0$, но $J(f_n) \geqq \frac{1}{2}$ для любого n. Доказательство теоремы закончено.

3.3.11. *Если $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, то существует псевдокомпактное пространство, не содержащее ни одного бесконечного счетно компактного пространства.*

Построение. Пусть N — счетное дискретное пространство. Для каждого бесконечного $N' \subset N$ возьмем его точку сгущения $x(N')$ в βN. Пусть R состоит из всех $z \in N$ и всех $x(N')$. Очевидно, $\operatorname{card} R = 2^{\aleph_0}$, и, следовательно, в предположении, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, можно расположить $R - N$ в виде трансфинитной последовательности $\{x_\alpha | \alpha < \omega_1\}$, где ω_1 — первое несчетное порядковое число. Пусть для $\alpha < \omega_0$ будет $y_\alpha = x_\alpha$. Пусть $\gamma \geqq \omega_0$ и пусть для $\alpha < \gamma$ нами определены y_α. Согласно 1.3.4 имеем $\overline{\{y_\alpha;\ \alpha < \gamma\}}^R \neq R - N$ (ибо $\{\alpha;\ \alpha < \beta\}$ есть счетное множество). Пусть γ_1 — наименьший индекс γ', для которого $x_{\gamma'}$ non $\in \overline{\{y_\alpha;\ \alpha < \gamma\}}$. Положим $y_\gamma = x_{\gamma_1}$. Положим $P = N \cup \{y_\alpha;\ \alpha < \omega_1\}$. Докажем, что пространство P уже обладает требуемыми свойствами. P псевдокомпактно, так как каждое бесконечное $N' \subset N$ имеет точку сгущения в P. Действительно, если γ — наименьший индекс, для которого $x_\gamma \in \overline{N}'$, то $x_\beta \in P$, ибо $\overline{N}'$ — открытое множество. Если S — счетная часть $P - N$, то $\operatorname{card} \overline{S}^P \leqq \aleph_0$, ибо существует $\alpha < \omega_1$ так, что $S \subset \{y_\gamma;\ \gamma < \alpha\}$ и, следовательно, точки y_γ для $\gamma \geqq \alpha$ не могут принадлежать $\overline{S}$ по построению. Остальные точки образуют счетное множество. На основании 1.3.3 нетрудно обнаружить, что $\aleph_1$ бесконечных подмножеств множества S не имеют точек сгущения в P. P регулярно, поэтому можно взять $x_n \in S$ и окрестность U_n точек x_n так, что $\{U_n\}$ будет дизъюнктной системой. Пусть $S' = \{x_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, $\overline{S'}^{\beta N} = \beta S'$ и поэтому, если бы каждое бесконечное подмножество множества S' имело точку сгущения, то согласно 1.2.2 должно было бы быть $\operatorname{card} \overline{S'}^P \geqq \aleph_1$. Итак, P не содержит бесконечного счетно компактного пространства. Доказательство закончено.

Замечание. Из предыдущих рассуждений следует (напр., 3.3.7), что замыкание N-множества псевдокомпактного пространства является псевдокомпактным пространством. Теперь мы приведем пример вполне регулярного псевдокомпактного пространства, содержащего Z-множество, которое не является псевдокомпактным пространством.

3.3.12. *Существует вполне регулярное псевдокомпактное пространство, содержащее Z-множество, которое не является псевдокомпактным.*

Построение. Пусть N — счетное дискретное пространство, пусть K — счетное компактное пространство с одной точкой сгущения Ω. Для каждого бесконечного $S \subset N \times [K - (\Omega)]$ возьмем точку сгущения $x(S)$ множества S в $\beta(N \times K)$ и положим $P = (N \times K) \cup \bigcup \{x(S);\ S$ — бесконечная часть $N \times [K - (\Omega)]\}$. Будем считать, что $K = \Omega \cup \{1, 2, 3, \ldots\}$ и определим на $N \times K$ непрерывную функцию f следующим образом:

$$f(n, k) = \frac{1}{k} \quad \text{для} \quad n \in N,\ k \in K - (\Omega)\,, \quad f(n, \Omega) = 0$$

Пусть f^* — непрерывное продолжение f на P. Пусть $Z = \mathsf{Z}(f^*)$. Легко обнаружить, что $N \times (\Omega)$ является открыто-замкнутой частью Z, и что, следовательно, Z не псевдокомпактно.

3.3.13. Теорема. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство. Следующие два свойства K эквивалентны:*

(1) *если $P \subset K$, $\beta P = K$, то P псевдокомпактно;*

(2) *если $x \in K$ имеет несчетный характер, то для каждой непрерывной функции f на K существует окрестность U точки x такая, что f постоянна на U.*

Доказательство. Пусть $P \subset K$, $K = \beta P$, P не псевдокомпактно. Согласно 2.4.1 пространство P содержит нормально вложенное бесконечное дискретное множество N. Возьмем $x \in \overline{N}^K - N$. Точка x не имеет счетный характер, так как иначе существовала бы непрерывная функция f на P, которую нельзя было бы продолжить на точку x, в противоречие с тем, что $K = \beta P$. Очевидно, существует непрерывная функция, не являющаяся постоянной ни в одной окрестности точки x. Наоборот, пусть K имеет свойство (2). Пусть $P \subset K$, $\beta P = K$. Нужно доказать, что P псевдокомпактно. Пусть f — ограниченная непрерывная функция на P, f^* — расширение функции f на K. Докажем, что f имеет максимум. Пространство K компактно, поэтому функция f^* имеет максимум в некоторой точке $x \in K$. Если $x \in P$, то доказательство закончено. Пусть $x \in K - P$. Точка x не может иметь счетный характер, следовательно, существует окрестность U точки x, в которой функция f^* постоянна. Множество P плотно в K, следовательно, $U \cap P \neq \emptyset$. Возьмем $y \in P \cap U$. По построению $f^*(y) = f^*(x)$, следовательно, f имеет в точке y максимум, что и требовалось доказать.

3.4. Счетно R-замкнутые и почти сильно-псевдокомпактные пространства.

До сих пор мы изучали пространства, удовлетворяющие условиям вида: ,,Каждое покрытие со свойством (V) мощности $\leqq \mathfrak{m}$ содержит покрытие (почти-покрытие) мощности меньше $\mathfrak{n}$", причем мы ограничились несколькими частными случаями в смысле выбора $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$; у свойства (V) мы ограничились открытыми покрытиями, покрытиями N-множествами, локально конечными и нормальными покрытиями. Теперь мы обратим внимание на комбинаторно конечные покрытия.[5] В 3.2 и 3.3 мы изучали $\mathfrak{m}$-H-замкнутые и $\mathfrak{m}$-CR-замкнутые пространства. Мы выпустили $\mathfrak{m}$-R-замкнутые пространства, являющиеся промежуточными между $\mathfrak{m}$-H-замкнутыми и $\mathfrak{m}$-CR-замкнутыми пространствами, так как $\mathfrak{m}$-H-замкнутое пространство является $\mathfrak{m}$-R-замкнутым пространством, а $\mathfrak{m}$-R-замкнутое пространство является $\mathfrak{m}$-CR-замкнутым. Это было сделано потому, что о $\mathfrak{m}$-R-замкнутых пространствах автору, в общем, почти ничего интересного не известно. Теперь этот пробел будет заполнен для случая $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Одновременно будет

[5]) Система множеств **A** комбинаторно конечна, если каждое $A \in$ **A** пересекает только конечное число множеств системы **A**.

заполнен еще один пробел. Мы выпустили пространства, на которых каждое локально конечное открытое покрытие содержит конечное почти-покрытие (почти сильно-псевдокомпактные пространства). Мы их рассмотрим здесь, так как примеры сходны с примерами для счетно R-замкнутых пространств.

3.4.1. Определение. Пространство P мы назовем *счетно-R-замкнутым*, если оно удовлетворяет условию: если U_n ($n = 1, 2, \ldots$) открыты в P и если $U_n \supset \overline{U}_{n+1} \neq \emptyset$ для любого n, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$.

Замечание. Нетрудно видеть, что последнее определение эквивалентно определению в начале § 3.

3.4.2. Теорема. *Следующие свойства топологического пространства P эквивалентны:*

(1) *P есть счетно R-замкнутое пространство.*

(2) *Если U_n открыты, $U_n \neq P$, $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \neq P$.*

(3) *Если U_n открыты, $\emptyset \neq \overline{U}_n \subsetneq U_{n+1}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ не является замкнутым множеством.*

(4) *Каждое комбинаторно конечное открытое покрытие содержит конечное покрытие.*

(5) *Каждое комбинаторно конечное открытое покрытие конечно.*[6])

Доказательство. Докажем $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$. Пусть $\{U_n\}$ не удовлетворяет условию (2). Положим $H_n = P - \overline{U}_n$. Имеет место

$$\emptyset \neq \overline{H}_{n+1} = \overline{P - \overline{U}_{n+1}} \subset P - U_{n+1} \subset P - \overline{U}_n = H_n$$

и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P - \overline{U}_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (P - U_n) = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$$

и, следовательно, система $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию (1), то есть $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\{U_n\}$ не удовлетворяет условию (3), тогда $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ замкнуто. Одновременно U открыто, так как является суммой открытых множеств. Пусть $V_n = U_n \cup (P - U)$. Легко обнаружить, что последовательность множеств $\{V_n\}$ не удовлетворяет условию (2), то есть $(2) \Rightarrow (3)$. Пусть неверно (4); это значит, что существует комбинаторно конечное открытое покрытие $\{U_a;\ a \in A\}$, не содержащее конечного покрытия. Возьмем $a_1 \in A$ и положим $V_1 = U_{a_1}$, $A_1 = (a_1)$. Пусть для $k < n$ ($n \geqq 2$) нами определены конечные множества индексов A_k и множества $V_k = \bigcup \{U_a;\ a \in A_1 \cup \ldots \cup A_k\}$ так, что $\overline{V}_{k-1} \subsetneq V_k$. Пусть $A_n' = \{a;\ a \in A,\ U_a \cap V_{n-1} \neq \emptyset\}$.

[6]) Разумеется, система множества $\{X_a \mid a \in A\}$ считается конечной, если конечно число $a \in A$ таких, что $X_a \neq \emptyset$.

Положим $A_n = A'_n$, если $A'_n \neq A_{n-1}$. Если же $A'_n = A_{n-1}$, то возьмем произвольное $a \in (A - A_{n-1})$ и положим $A_n = A'_n \cup (a)$. Множество A'_n конечно, ибо A_{n-1} конечно по предположению индукции и покрытие $\{U_a\}$ комбинаторно конечно. Положим $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Множество F, очевидно, открыто. Множество F замкнуто, так как

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \bigcup \{\overline{U}_a;\ a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \overline{\bigcup \{U_a;\ a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}}\,.$$

Последнее равенство справедливо, так как система $\{U_a;\, a \in A\}$ локально конечна. Итак, последовательность множеств $\{V_n\}$ не удовлетворяет условию (3), то есть (3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\{U_a;\, a \in A\}$ — комбинаторно конечное открытое покрытие пространства P. Согласно (4) существуют индексы $a_1, \ldots, a_n$ так, что $U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n} = P$. Каждое множество U_a пересекает какое-то U_{a_i}, и так как лишь конечное число множеств U_a пересекает каждое U_{a_i}, множество A конечно. Итак, (4) $\Rightarrow$ (5). Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность открытых множеств, $U_n \supset \overline{U}_{n+1} \neq \emptyset$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$, другими словами, пусть неверно (1). Положим $U_0 = P$ и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим $V_n = U_n - \overline{U}_{n+2}$. Очевидно $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — комбинаторно конечное открытое покрытие и имеется бесконечное количество непустых V_n. Итак, (5) не имеет места, то есть (5) $\Rightarrow$ (1). Теорема доказана.

3.4.3. Теорема. *Пространство P счетно* R*-замкнуто, если и только если каждое комбинаторно конечное открытое покрытие содержит конечное почти-покрытие.*

Доказательство. Пусть $\{U_a;\, a \in A\}$ — открытое комбинаторно конечное покрытие пространства P. Пусть существуют $a_1, \ldots, a_n$ так, что $\overline{U}_{a_1} \cup \ldots \cup \overline{U}_{a_n} = P$. Множества U_a открыты, следовательно, каждое U_a пересекает какое-нибудь U_{a_i}, и так, как лишь конечное число множеств U_a пересекает каждое U_{a_i}, множество A конечно. Итак, условие теоремы является достаточным; его необходимость очевидна.

3.4.4. Определение. Топологическое пространство мы назовем *почти сильно-псевдокомпактным*, если каждое локально конечное покрытие содержит конечное почти покрытие.

3.4.5. Почти сильно-псевдокомпактное пространство является счетно R-замкнутым.

Доказательство непосредственно следует из 3.4.3.

3.4.6. *Открыто-замкнутое подмножество счетно* R*-замкнутого пространства является счетно* R*-замкнутым пространством.*

Доказательство следует непосредственно из определения.

3.4.7. *Слабо регулярное счетно* R*-замкнутое пространство является сильно-псевдокомпактным.*

Доказательство. Пусть пространство P слабо регулярно и не является сильно-псевдокомпактным. Тогда существует счетная непересекающаяся локально конечная система непустых открытых множеств $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. P слабо регулярно, следовательно, для каждого n существует последовательность открытых непустых множеств $\{V_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $V_n^k \supset \overline{V}_n^{k+1}$ для любого k. Положим $H_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k^n$. Очевидно, $H_n \supset \overline{H}_{n+1} \neq \emptyset$ и $\bigcap H_n = \emptyset$. Итак, P не является счетно R-замкнутым.

3.4.8. *Счетно* R*-замкнутое пространство псевдокомпактно.*

Доказательство следует, напр., из того, что P псевдокомпактно, если и только если оно счетно CR-замкнуто.

3.4.9. Пример. *Построим хаусдорфово почти сильно-псевдокомпактное (а, значит, и счетно* R*-замкнутое) пространство P, не являющееся сильно-псевдокомпактным. Далее построим непустое открытое подмножество U пространства P так, чтобы $\overline{U}$ не было счетно* R*-замкнутым пространством.*

Построение пространства P. Для $n = 1, 2, \ldots$ пусть I_n — топологические пространства, гомеоморфные с интервалом $\langle 0, 1\rangle$. Гомеоморфизм интервала $\langle 0, 1\rangle$ на I_n обозначим через φ_n. Предположим, что множества I_n и $\langle 0, 1\rangle$ взаимно не пересекаются. Пусть $N = \{r_1, r_2, \ldots\}$ есть счетное множество, плотное в интервале $\langle 0, 1\rangle$, $r_i \neq r_k$ для $i \neq k$ и $0 \text{ non} \in N$. Положим $J_n = I_n - \varphi_n(N)$. Пусть еще $b_1, b_2, \ldots$ — отличные друг от друга элементы, $b_n \text{ non} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup \langle 0, 1\rangle$. Обозначим $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. На множестве $P = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ определим топологию так:

(1) множества J_n открыты в P;

(2) определяющими окрестностями точки b_i будут множества вида

$$(b_i) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(U) \cap J_k)\,,$$

где U — окрестность точки r_i в интервале $\langle 0, 1\rangle$. Легко обнаружить, что P — хаусдорфово пространство.

(A) Пространство P не является сильно-псевдокомпактным. Достаточно построить бесконечную локально конечную систему непустых открытых множеств. Для $n = 1, 2, \ldots$ пусть

$$U_n = \varphi_n\left[\left(\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right)\right] \cap J_n\,,$$

где $\left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \left\{t;\ \frac{2}{3^n} < t < \frac{1}{3^{n-1}}\right\}$. Докажем, что $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — локально конечная система. Если $x \in J_k$, то J_k есть окрестность точки x, пересекающая только U_k (то есть $J_k \cap U_i = \emptyset$ для $i \neq k$). Итак, пусть $x = b_i$. Очевидно, что система множеств $\left\{\left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ локально конечна в интервале $(0, 1\rangle = \{t;\ 0 < t \leq 1\}$ и, следовательно, так как $r_i \in (0, 1\rangle$, существует окрестность V точки r_i так, что V пересекает лишь конечное число интервалов $\left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right)$. Очевидно, множество

$$(b_i) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(V) \cap J_k]$$

является окрестностью точки b_i, которая пересекает лишь конечное число множеств U_n.

(Б) *Пространство P почти сильно-псевдокомпактно.* Прежде всего докажем утверждение:

(α) *Пусть V — открытое множество, содержащее множество B. Тогда $\overline{V} = P$.*

Достаточно доказать, что для любого k будет $J_k \subset \overline{V}$. Очевидно, $\overline{N \cup \varphi_k^{-1}(J_k \cap V)}$ открыто в интервале $\langle 0, 1\rangle$. Следовательно $\overline{\varphi_k^{-1}(J_k \cap V) - N} = \langle 0, 1\rangle$; итак, $J_k \subset \overline{V \cap J_k}$.

(β) *Пространство $J_k \cup B$ почти компактно* ($k = 1, 2, \ldots$).

Пусть $\{U\}$ — открытое покрытие пространства $J_k \cup B$. Нетрудно обнаружить, что $\{\operatorname{Int} \overline{\varphi_k^{-1}(U \cap J_k)}\}$ является открытым покрытием интервала $\langle 0, 1\rangle$. Интервал $\langle 0, 1\rangle$ компактен, поэтому существуют $U_1, \ldots, U_n$ так, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int} \overline{\varphi_k^{-1}(U_i \cup J_k)} = \langle 0, 1\rangle .$$

Легко убедиться, что $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i \supset J_k \cup B$.

(γ) Если $\{U\}$ — локально конечная система открытых множеств в P, то $B \cap U \neq \emptyset$ только для конечного числа U. Если $B \cap U \neq \emptyset$, то $U \cap J_1$ — непустое открытое множество в $J_1 \cup B$. Пространство $J_1 \cup B$ является, согласно (β), почти компактным, поэтому и сильно-псевдокомпактным, следовательно, оно не содержит бесконечной локально конечной системы непустых открытых множеств. Это значит, что $U \cap J_1 \neq \emptyset$ лишь для конечного числа U.

Теперь уже нетрудно доказать, что пространство P почти сильно-псевдокомпактно. Пусть $\{U\}$ — локально конечное покрытие пространства P.

Пусть $\mathbf{A} = \{U; U \cap B \neq \emptyset\}$. Согласно ($\gamma$) система $\mathbf{A}$ конечна. Так как $\{U\}$ — покрытие, то $\bigcup \{U; U \in \mathbf{A}\} \supset B$. Согласно ($\alpha$) будет

$$\overline{\bigcup \{U; U \in \mathbf{A}\}} = P .$$

Утверждение (Б) доказано.

(В) *Построим открытое $U \subset P$ так, чтобы пространство $\overline{U}$ не было счетно* R*-замкнутым пространством.* Пусть $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n — множества из части (А). Там мы доказали, что система $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ локально конечна. Итак,

$$\overline{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n .$$

Очевидно, множества $\overline{U}_n$ одновременно открыты и замкнуты в $\overline{U}$. Положим $V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{U}_k$. Очевидно, $\overline{V}_n = V_n \subset V_{n-1}$ для любого $n \geqq 2$. Очевидно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset$; следовательно, пространство $\overline{U}$ не является счетно R-замкнутым.

Замечание. Автору не удалось установить, существует ли счетно R-замкнутое пространство, не являющееся почти сильно-псевдокомпактным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Arens R.*: Extension of functions on fully normal spaces. Pac. J. Math., *II*, No. 1 (1952), 11—22.

[2] *Banaschewski B.*: Über den Ultrafilterraum. Math. Nachr. *13* (1955), 273—282.

[3] *Colmez J.*: Sur les espaces précompacts. C. R. Acad. Sci. Paris *233* (1951), 1552—53.

[4] *Čech E.*: On bicompact spaces. Ann. of Math. *38* (1937), 823—844.

[5] *Hewitt E.*: On two problems of Urysohn. Annals Math. *47* (1946), 503—509.

[6] *Hewitt E.*: A ring of real-valued continuous functions. Trans. Amer. Mat. Soc. *64* (1948), 45—99.

[7] *Kelley J.*: General topology. N. York (1955).

[8] *Novák J.*: Regulární prostor, na němž je každá spojitá funkce konstantní. Čas. pěst. mat. *73* (1948), 58—68.

[9] *J. Novák*: On the cartesien product of two compact spaces. Fund. Math. *XL* (1953), 106—112.

[10] *Pospíšil B.*: On bicompact spaces. Publ. Eac. Sci. Univ. Masaryk, No *270* (1939), 1—16.

[11] *Смирнов Ю. М.*: О топологических пространствах, компактных в данном отрезке мощностей. Изд. Ак. Наук СССР, *14* (1950), 155—178.

[12] *Stone A. H.*: Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948), 977—982.

[13] *Tukey J.*: Convergence and uniformity in topology. Annals of Math. Studies, No *2* (1940).

[14] *Урысон П. С.*: О компактных топологических пространствах. Труды по топологии II, Москва-Ленинград (1951), 848—963.

Summary

GENERALISATIONS OF COMPACT AND LINDELÖF SPACES

ZDENĚK FROLÍK, Praha

(Received June 14, 1958)

In the present paper we study some generalisations of compact and Lindelöf spaces. We begin with some definitions. An N-*set* in a topological space P is a set of the form $\mathsf{N}(f) = \{x; f(x) \neq 0\}$, where f is a real-valued continuous function on P. An N-*cover* is a cover, each member of which is an N-set. A family A of subsets of a space P is called *almost-cover* (of P), if $\mathbf{U}A$ is a dense set in P. Definitions of the spaces investigated are given in the following tables:

Tab. 1

	(V)	$(\infty, \mathfrak{m})$	$(\mathfrak{m}, f)$
1	open cover	$\mathfrak{m}$-*Lindelöf*	$\mathfrak{m}$-*compact*
2	N-cover	$\mathfrak{m}$-*quasi-Lindelöf*	$\mathfrak{m}$-*quasicompact*
3	locally finite cover	$\mathfrak{m}$-*strongly-pseudo-Lindelöf*	$\mathfrak{m}$-*strongly-pseudocompact*
4	normal cover	$\mathfrak{m}$-*pseudo-Lindelöf*	$\mathfrak{m}$-*pseudocompact*

Tab. 2

	(V)	$(\infty, \mathfrak{m})$	$(\mathfrak{m}, f)$
1	open cover	almost $\mathfrak{m}$-Lindelöf	almost $\mathfrak{m}$-compact
2	N-cover	almost $\mathfrak{m}$-quasi-Lindelöf	almost $\mathfrak{m}$ quasicompact
3	locally finite cover	almost $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf	almost $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-compact
4	normal cover	almost $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf	almost $\mathfrak{m}$-pseudocompact

The space in i-th row and $(\infty, \mathfrak{m})$ column of tab. 1 (resp. tab. 2) is defined by the condition: "Each cover with property (V) (property (V) is in the column (V)) contains a cover (resp. almost-cover) of potency $< \mathfrak{m}$". The space in the i-th row and $(\mathfrak{m}, f)$ column of tab. 1 (resp. tab. 2) is defined by the pro-

perty: "Each covering with property (V) and potency $\leqq \mathfrak{m}$ contains a finite cover (resp. finite almostcover)", If a space P has this property for all infinite cardinal numbers, then we name the space P with corresponding term without $\mathfrak{m}$. This space may be called with corresponding term of column $(\infty, \mathfrak{m})$ with $\mathfrak{m} = \aleph_0$. For instance, if a space P is $\mathfrak{m}$-compact for all infinite cardinals $\mathfrak{m}$, then P is called a compact space or $\aleph_0$-Lindelöf space.

The purpose of this paper is to study the characterisations of the spaces defined, the relations among them and the heredity of these properties. We investigate particularly the spaces in the third and fourth rows. For a theory of $\mathfrak{m}$-compact and $\mathfrak{m}$-Lindelöf spaces, see [11].

The section 1 contains definitions and theorems which are used in the sequal. We use the notation and terminology of J. KELLEY [7]. Let P be a topological space. $M \supset P$ is a regular closed subset of P if $M = \overline{\operatorname{int} M}$. P is *weakly regular* (resp. *weakly completely regular*) if each non-void open $U \subset P$ contains a non-void regular closed set (resp. N-set). The word function means real-valued function. Let f be a function on P. Denote

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| ; \quad x \in P\} .$$

Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions on P. If $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ for each $x \in P$ and $f_n \geqq f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then we write $f_n \downarrow 0$. The set of all upper (resp. lower) semi-continuous functions on a space P is denoted by $\mathsf{C}_+(P)$ (resp. $\mathsf{C}_-(P)$). A function f on a space P is *partially upper* (resp. *lower*) *continuous*, if for each real number c

$$\{x; f(x) < c\} \subset \overline{\operatorname{int} \{x; f(x) < c\}} \qquad (\text{resp. } \{x; f(x) > c\} \subset \overline{\operatorname{int} \{x; f(x) > c\}}) .$$

The set of all partially upper (resp. lower) continuous functions is denoted by $\mathsf{P}_+(P)$ (resp. $\mathsf{P}_-(P)$). We write merely $\mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$ (resp. $\mathsf{C}_-\mathsf{P}_+(P)$) for $\mathsf{C}_+(P) \cap \cap \mathsf{P}_-(P)$ ($\mathsf{C}_-(P) \cap \mathsf{P}_+(P)$ resp.). The characteristic function of a regular closed set belongs to $\mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$.

A subspace M of a space P is normally (or fully normally) imbedded in P, if each bounded continuous function (or pseudometric, respectively) on M can be continuously extended to P.

Let P be a space and let C be the set of all bounded continuous functions on P. We define a relation of equivalence $x \sim y$ on P in the following way: $x \sim y$ if and only if $f(x) = f(y)$ for each $f \in \mathsf{C}$. For $x \in P$ let x^* denote the set $\{y; x \sim y\}$. For $M \subset P$ let M^* denote the set $\{x^*; x \in M\}$. If $f \in \mathsf{C}$, then f^* is a function on P^* defined by $f^*(x^*) = f(x)$. The set of all such f^* is denoted by C^*. On the set P^* we define a closure operator thus: $x^* \in \overline{M^*}$ if (and only if) $f^*(x^*) \in \overline{f^*(M^*)}$ for each $f^* \in \mathsf{C}^*$. The set P^* with this topology is denoted by cr P and is called the CR-reduction of P. The natural map $\varphi(x) = x^*$ of P onto cr P is continuous and $X \subset \operatorname{cr} P$ is an N-set if and only if $\varphi^{-1}(X)$ is an N-set in P.

In the section 2 we study spaces in the columns $(\infty, \mathfrak{m})$ of our tables.

$\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf spaces (2.4)

A pseudometric φ in a space P is said to be $\mathfrak{m}$-totally bounded ($\mathfrak{m}$ an infinite cardinal number), if for each real number $\varepsilon > 0$ there is a $M \subset P$ of potency $< \mathfrak{m}$ such that $\varphi(x, M) < \varepsilon$ for each $x \in P$. An $\aleph_0$-totally bounded pseudometric is usually called totally bounded.

Theorem (2.4.1, 2.4.5) *The following conditions on a space P are equivalent*: (1) P is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space. (2) Every open normal cover of potency m contains a cover of potency $< m$. (3) Every pseudometric in P is $\mathfrak{m}$-totally bounded. (4) There is an $\mathfrak{m}' > \mathfrak{m}$ such that every $\mathfrak{m}'$-totally bounded pseudometric in P is $\mathfrak{m}$-totally bounded. (5) Every locally-finite disjoint family of non-void N-sets has potency $< \mathfrak{m}$. (6) Every locally-finite family of non-void N-sets has potency $< \mathfrak{m}$. (7) Every fully normal imbedded closed discrete subset M of P has potency $< \mathfrak{m}$. (8) Every metric (fully normal resp.) space which is a continuous image of P is a $\mathfrak{m}$-Lindelöf space. (9) cr P is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf-space.

A continuous image of a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space. If P is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space and if $N \neq \emptyset$ is a N-set in P, then $\overline{N}$ is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space (2.4.7). An almost $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space (2.4.9).

Theorem (2.4.6). *Let P be completely regular. If the potency of $\beta P - P$ (βP denotes the Čech-Stone compactification of P) is $< 2^{2^{\mathfrak{m}}}$, then P is a $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space.*

$\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf spaces (2.5)

Theorem (2.5.3). *The following properties of a space P are equivalent*: (1) P is a $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf space. (2) Every locally-finite open cover has potency $< \mathfrak{m}$. (3) Every locally-finite irreducible[1]) open cover has potency $< \mathfrak{m}$. (4) Every locally-finite system of non-void open sets has potency $< \mathfrak{m}$. (5) Every disjoint locally-finite family of non-void open sets has potency $< \mathfrak{m}$.

Let N be a dense subset of a space P. If each subset of N of potency $\geqq \mathfrak{m}$ has an accumulation point in P, then is a $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf space. A $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf space is $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf. A weakly completely regular $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space is $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf (2.5.7). Every non-void regular closed subset of a $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf space is $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf (2.5.6).

Example (2.5.8). There exists a $\aleph_0$-quasi-Lindelöf ($=$ quasi-compact) space P which is not $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf. P contains a non-void closed set which is not $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf.

Theorem (2.5.9). *A weakly regular space P is $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf if and only if each regular closed subset is $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf.*

---

[1]) A cover is irreducible if it contains no proper subcover.

Theorem (2.5.4, 2.5.5). *Let P be a $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf space and* $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. *Then*

(6) *every open cover $\{U\}$ with property: "For each $x \in P$ there is a neighbourhood V of x such that the set $\{U;\ U \in \{U\},\ V \cap U \neq \emptyset\}$ is of potency $< \mathfrak{n}$" contains an almost-cover of potency $< \mathfrak{m}$.*

If $\mathfrak{m}$ is a regular cardinal number, then (6) holds for $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ also. If a weakly regular space P has the property (6) for $\mathfrak{n} = 2$, then P is $\mathfrak{m}$-strongly-pseudo-Lindelöf.

F-hereditary $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf spaces (2.6)

A space P is said to be a F-hereditary $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space if each closed subset of P is $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf.

Theorem (2.6.2). *The following conditions on a space P are equivalent:* (1) P is a F-hereditary $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space. (2) Every subset of P of potency $\mathfrak{m}$ has an accumulation point in P. (3) Every locally-finite system of non-void subsets of P has potency $< \mathfrak{m}$. (4) Each irreducible open cover of P has potency $< \mathfrak{m}$.

Theorem (2.6.3). *Let P be a F-hereditary $\mathfrak{m}$-pseudo-Lindelöf space and* $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. *Then holds:* (5) *Let $\{U\}$ be an open cover of P such that for each $x \in P$ the potency of $\{U;\ x \in U \in \{U\}\}$ is less than $\mathfrak{n}$. Then $\{U\}$ contains a cover of potency $< \mathfrak{m}$.*

If P is a regular cardinal number, then (5) *holds for $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ also.*

Example (2.6.4). There exists a completely regular $\aleph_0$-pseudo-Lindelöf (= pseudocompact) space containing normally imbedded discrete closed subset of potency $\mathfrak{m}$.

In the section 3 we study the spaces in the columns ($\mathfrak{m}$, f) of our tables.

$\mathfrak{m}$-compact spaces (3.1)

These spaces are investigated extensively in [11]. We limit ourselves to one characterisation which will be used in a paper on topological product.

Theorem (3.1.1). *A space P is $\mathfrak{m}$-compact if and only if the following condition is satisfied:*

Let $\{f\}$ be a set of upper semi-continuous functions in P such that

(i) *for each $f_1, f_2 \in \{f\}$ there exists a $f \in \{f\}$ such that* $f \leq \min(f_1, f_2)$.

(ii) $\inf\{f(x)\} = 0$ *for each $x \in P$.*

If the potency of $\{f\}$ is $\leq \mathfrak{m}$, then there exists a sequence $\{f_n\}$ ($f_n \in \{f\}$) which uniformly converges to 0 (i. e., $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$).

Theorem (3.1.2). *The following properties of a space P are equivalent:* (1) P is countably compact (i. e. $\aleph_0$-compact). (2) P is F-hereditary $\aleph_0$-pseudo-

Lindelöf. (3) Every upper semi-continuous function on P is bounded from above. (4) Every function which is upper semi-continuous and bounded from above attains its maximum in P. (5) If $f_n \downarrow 0$, $f_n \in \mathsf{C}_+(P)$, then $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$.

Theorem (3.1.3). *If P is a countably compact space, then*

(6) *Every point-finite open covering of P contains a finite cover.*

(7) *If $\{U\}$ is an open cover and $\{\overline{U}\}$ is a point-finite family, then $\{U\}$ contains a finite cover.*

If P is regular space, then each of the conditions (6) *and* (7) *implies that P is countably compact.*

Examples (3.1.4, 3.1.5). There exist a Hausdorff space satisfying (7) which contains a discrete closed set of potency $2^{2^{\aleph_0}}$. Let M be a discrete space of potency $\mathfrak{m}$. There exist countably compact spaces P and Q such that $P \cup Q \subset \beta M$ and $P \cap Q = M$.

Almost $\mathfrak{m}$-compact and strongly-pseudocompact spaces (3.2).

A point x of a space P is said to be a Hausdorff (regular, completely regular) point of P, if $\bigcap \{\overline{U}\} = (x)$ (resp. $\{\overline{U}\}$ is a local base at x, resp., the family $\{N\} \subset \{U\}$ of all N-sets of $\{U\}$ is a local base at x), where $\{U\}$ is the family of all neighbourhoods of a point x. A space P is said to be $\mathfrak{m}$-H-closed ($\mathfrak{m}$-R-closed, $\mathfrak{m}$-CR-closed, respectively) if for every space $R \supset P$ with $\overline{P} = R$, no point of $R - P$ is a Hausdorff (or regular, or completely regular, respectively) point of R of character $\leq \mathfrak{m}$.

Theorem (3.2.1). *The following properties of a space P are equivalent*: (1) P is an almost $\mathfrak{m}$-compact space. (2) P is a $\mathfrak{m}$-H-closed space. (3) The condition of 3.1.1 with $\{f\} \subset \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$ instead of $\{f\} \subset \mathsf{C}_+(P)$.

A regular closed subset of an almost $\mathfrak{m}$-compact space is almost $\mathfrak{m}$-compact. If a space P is $\mathfrak{m}$-strongly-pseudocompact for some infinite cardinal number $\mathfrak{m}$, then it is strongly pseudocompact (3.2.3).

Theorem (3.2.4). *The following properties of a space P are equivalent*: (1) P is strongly pseudocompact. (2) P is almost $\aleph_0$-compact. (3), (4), (5) Conditions (3), (4) and (5) of 3.1.2 with $f, f_n \in \mathsf{C}_+\mathsf{P}_-(P)$ instead of $f, f_n \in \mathsf{C}_+(P)$.

$\mathfrak{m}$-quasicompact spaces (3.3).

Theorem (3.3.2). *The following properties of a space P are equivalent*: (1) P is $\mathfrak{m}$-quasicompact. (2) If $\{Z\}$ is a family of Z-sets,[2]) $\{Z\}$ has the finite intersection property and the potency of $\{Z\}$ is $\leq m$, then $\bigcap \{Z\} \neq \emptyset$. (3) P is $\mathfrak{m}$-CR-closed. (4) The condition of 3.1.1, with $\{f\}$ a family of continuous functions instead of $\{f\} \subset \mathsf{C}_+(P)$. (5) cr P is $\mathfrak{m}$-quasicompact.

A space P is quasicompact if and only if the space cr P is compact. An almost $\mathfrak{m}$-quasicompact space is $\mathfrak{m}$-quasicompact. The closure of a N-set of a $\mathfrak{m}$-quasicompact space is $\mathfrak{m}$-quasicompact. There exists an almost compact space P containing a Z-set which is not quasicompact.

Theorem (3.3.10). *The following conditions on a space are equivalent*: (1) P is pseudocompact ($= \aleph_0$-pseudo-Lindelöf). (2) P is $\aleph_0$-quasicompact. (3), (4), (5) Conditions (3), (4) and (5) of 3.1.2, with f, f_n continuous instead of upper semi-continuous. (6) Every normal space which is a continuous image of P is countably compact. (7) Let C be the linear space of all bounded continuous functions on P. Let A be the set of all linear functions J on C satisfying

$$f \in C\,, \quad f \geqq 0 \Rightarrow J(f) \geqq 0\,, \qquad f_n \in C\,, \quad \lim \|f_n\| = 0 \Rightarrow \lim J(f_n) = 0\,.$$

Let B be the set of all linear functions on C satisfying

$$f_n \in C\,, \quad f_n \downarrow 0 \Rightarrow \lim J(f_n) = 0\,.$$

Then $A \subset B$.

Theorem (3.3.11). *If $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, then there exists a pseudocompact completely regular space of potency $2^{\aleph_0}$ which contains no infinite countably compact space. There exists a completely regular pseudocompact space P containing a Z-set Z which is not pseudocompact.*

Theorem (3.3.13). *The following two conditions on a compact Hausdorff space K are equivalent*: (1) if $P \subset K$, $\beta P = K$, then P is pseudocompact. (2) if $x \in K$ has uncountable character, then for every continuous function f on K there is a neighbourhood U of the point x such that f/U is constant.

Countably R-closed and almost strongly-pseudocompact spaces (3.4).

Theorem (3.4.2). *The following conditions on a space P are equivalent*: (1) P is countably R-closed (i. e. $\aleph_0$-R-closed). (2) If U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ are open in P, $U_n \neq P$ and $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, then $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \neq P$. (3) If U_n are open in P and $\emptyset \neq \overline{U}_n \subsetneqq U_{n+1}$, then $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ is not closed in P. (4) Every star-finite cover contains a finite cover. (5) Every star-finite cover is finite.

A space P is countably R-closed if and only if every star-finite cover of P contains a finite almost-covering. An almost strongly-pseudocompact space is countably R-closed. If P is a countably R-closed space and if $M \subset P$ is open and closed, then M is countably R-closed. A weakly regular countably R-closed space is strongly-pseudocompact. Countably R-closed space is pseudocompact.

Example (3.4.9). There exists an almost strongly-pseudocompact space P which is not strongly-pseudocompact. There exists an open non-void $U \subset P$ such that $\overline{U}$ is not countably R-closed.

Problem. Is there a countably R-closed space which is not almost strongly-pseudocompact?

---

[2]) Z is a Z-set if $P - Z$ is a N-set.