Vlastimil Dlab

Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 161–171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100347`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *9* (*84*) ПРАГА 18. VI. 1959 г., No 2

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага

(Поступило в редакцию 6/III 1958 г.)

Одна и та же Абелева группа может обладать системами образующих различных типов; цель настоящей статьи — исследование всех возможных комбинаций введенных типов систем образующих, которые могут для данной группы наступить.

1. Введение

В работе [2] введено понятие неприводимой, приводимой, сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой систем образующих Абелевой группы; там также показано (на примере группы $G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$), что одна и та же группа[1]) может обладать всеми шестью логически возможными типами систем образующих, а именно:

(I) *неприводимой системой образующих,*

(II) *приводимой системой образующих, которая не является ни сильно приводимой, ни наследственно приводимой,*

(III) *сильно приводимой системой образующих, которая не является наследственно приводимой и поэтому тем более не является наследственно сильно приводимой,*

(IV) *наследственно приводимой системой образующих, которая не является сильно приводимой,*

(V) *наследственно приводимой системой образующих, которая является одновременно сильно приводимой, но не является наследственно сильно приводимой и*

(VI) *наследственно сильно приводимой системой образующих.*

[1]) Группой всегда разумеется Абелева группа.

Целью настоящей работы является исследование всех возможностей комбинаций типов систем образующих (I)—(VI), которые могут для данной группы наступить. Проблема решена полностью.

Употребляемые обозначения и понятия введены в работе [2].

2. Теоремы

Сначала докажем следующие теоремы, которые облегчат нам решение поставленной проблемы.

Теорема 1. *Пусть G — достижимая группа, которая обладает наследственно сильно приводимой системой образующих. Тогда G обладает тоже наследственно приводимой системой образующих, которая не является сильно приводимой.*

Доказательство. Согласно предположению теоремы существуют собственная подгруппа $H \subset G$ и элемент $g_0 \in G$ так, что $\{H, g_0\} = G$.

Пусть $\mathfrak{G} = (g_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — наследственно сильно приводимая система образующих группы G. Очевидно, что каждый элемент $g_\delta \in \mathfrak{G}$ мы можем выразить в виде

$$g_\delta = h_\delta + l_\delta \,.\, g_0\,, \quad h_\delta \in H \quad \text{для} \quad \delta \in \Delta\,.^{2)} \tag{1}$$

Множество всех (разных) элементов h_δ обозначим через $\mathfrak{H} : \mathfrak{H} = (h_{\delta_\iota})_{\iota \in I}$.[3]) Далее обозначим через $\mathfrak{G}'$ подмножество $(g_{\delta_\iota})_{\iota \in I}$ соответствующих элементов системы $\mathfrak{G}$; итак, для каждого индекса $\iota \in I$ справедливо отношение

$$g_{\delta_\iota} = h_{\delta_\iota} + l_{\delta_\iota} \,.\, g_0\,. \tag{2}$$

Теперь мы докажем, что множество $\mathfrak{H}_1 = (\mathfrak{H}, g_0)$ есть наследственно приводимая система образующих группы G, которая не является сильно приводимой. Прежде всего, согласно (1) ясно, что

$$\{\mathfrak{H}_1\} = G \quad \text{и} \quad \{\mathfrak{H}_1 \setminus (g_0)\} = \{\mathfrak{H}\} \neq G\,. \tag{3}$$

Вследствие (3) остается доказать только наследственную приводимость системы $\mathfrak{H}_1$; доказательство проведем от противного:

Пусть $\mathfrak{H}_1' \subseteq \mathfrak{H}_1$ — неприводимая система образующих группы G; ясно, что согласно (3) должно быть $g_0 \in \mathfrak{H}_1'$. Пусть $h' \in \mathfrak{H}_1' \setminus (g_0)$ и пусть, далее, $\mathfrak{G}_1'$ обозначает подмножество системы $\mathfrak{G}'$, соответствующее, ввиду (2), мно-

---

[2]) Ясно, что в (1) можно достичь однозначности, если требовать от l_δ выполнения неравенства $0 \leqq l_\delta < k$, где k — или наименьшее натуральное число со свойством $k \,.\, g_0 \in H$, если такое число существует, или $k = \infty$ в обратном случае (т.е., если $O(g_0) = \infty$ и $H \cap \{g_0\} = 0$).

[3]) Очевидно, что для $\delta' \neq \delta''$ может быть $h^{\delta'} = h_{\delta''}$.

жеству $\mathfrak{H}_1' \setminus (g_0)$; притом пусть элементу h' соответствует элемент $g' \in \mathfrak{G}_1'$. Итак, каждый элемент $g \in G$ можно выразить в виде

$$g = f_1(\mathfrak{H}_1' \setminus (g_0)) + r \cdot g_0 = f_2(\mathfrak{G}_1') + s \cdot g_0 ;$$

далее, конечно, справедливо соотношение

$$g_0 = f_3(g_{\delta_1}, g_{\delta_2}, \ldots, g_{\delta_n}) , \quad g_{\delta_i} \in \mathfrak{G} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Следовательно, множество $(\mathfrak{G}_1', g_{\delta_1}, g_{\delta_2}, \ldots, g_{\delta_n}) \subseteq \mathfrak{G}$ является системой образующих группы G и как подсистема наследственно сильно приводимой системы образующих $\mathfrak{G}$ само наследственно сильно приводимо. Это значит, что также $\mathfrak{G}_1'$ является наследственно сильно приводимой системой образующих группы G, и поэтому

$$g' = f_4(\mathfrak{G}_1' \setminus (g')) = f_5(\mathfrak{H}_1' \setminus (h')) + u \cdot g_0 ;$$

вследствие этого получаем

$$h' = f_5(\mathfrak{H}_1' \setminus (h')) + v \cdot g_0 ,$$

что противоречит неприводимости системы $\mathfrak{H}_1'$. Итак, система $\mathfrak{H}_1$ обладает требуемыми свойствами, и тем теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть группа G обладает наследственно приводимой системой образующих, которая является одновременно сильно приводимой, но не является наследственно сильно приводимой. Тогда G обладает наследственно приводимой системой образующих, которая не будет сильно приводимой.*

Доказательство. Утверждение этой теоремы вытекает непосредственно из определения наследственно приводимой, сильно приводимой и наследственно сильно приводимой систем образующих.

Прежде чем высказать обратную теорему, докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — неприводимая система образующих группы G. Пусть, далее, $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ — конечное подмножество такое, что справедливо: Существует элемент $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ такой, что*

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}_0\} \text{ и } \bar{g} \text{ non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}_0'\} \quad \textit{для каждого } \mathfrak{G}_0' \subsetneqq \mathfrak{G}_0 . \tag{4}$$

Тогда существует неприводимая система образующих $\bar{\mathfrak{G}}$ группы G со свойствами

$$\bar{\mathfrak{G}} \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0) , \quad \mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{G}_0 , \quad \bar{g} \text{ non} \in \bar{\mathfrak{G}} . \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\{\mathfrak{G}\} = G$, то существует конечное подмножество

$$\tilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{G} \tag{6}$$

такое, что для каждого элемента $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ имеет место соотношение $g_0 = f_0(\tilde{\mathfrak{G}})$; пусть N — число элементов множества $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ систему образующих $\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{G}\setminus(\bar{g}), \mathfrak{G}_0)$; очевидно, что

$$\mathfrak{G}_1 \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)\,, \quad \mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_0\,, \quad \bar{g} \text{ non} \in \mathfrak{G}_1\,.$$

Если система $\mathfrak{G}_1$ не является неприводимой, то существует элемент $g_1 \in \mathfrak{G}_1$ такой, что $g_1 \in \{\mathfrak{G}_1\setminus(g_1)\}$; ввиду (4) необходимо будет g_1 non $\in \mathfrak{G}_0$. Притом для системы образующих $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1\setminus(g_1)$ будет

$$\mathfrak{G}_2 \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)\,, \quad \mathfrak{G}_2 \supseteq \mathfrak{G}_0\,, \quad \bar{g} \text{ non} \in \mathfrak{G}_2\,.$$

Если система $\mathfrak{G}_2$ опять приводима, продолжаем одинаковым образом конструкцию системы: $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{G}_2\setminus(g_2)$ и т. д. Если для определенного $n \leqq N$ получим таким способом неприводимую систему $\mathfrak{G}_n$, то $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}_n$ выполняет условия (5) и утверждение леммы доказано.

В противном случае необходимо существует в системе $\mathfrak{G}_N$ элемент g_N такой, что $g_N \in \{\mathfrak{G}_N\setminus(g_N)\}$. Так как $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}_N$ и $\{\mathfrak{G}_N\setminus(g_N)\} = G$, получаем, ввиду (4), g_N non $\mathfrak{G}_0$. Но в множестве $\mathfrak{G}' = (\bar{g}, g_1, \ldots, g_N)$ должен существовать элемент $\tilde{g}$ такой, что

$$\tilde{g} \in \mathfrak{G}'\setminus\tilde{\mathfrak{G}}\,. \tag{7}$$

Для этого элемента $\tilde{g}$ справедливо $\tilde{g} \in \{\mathfrak{G}\setminus(\tilde{g}), \mathfrak{G}_0\}$, т. е., согласно (6) и (7),

$$\tilde{g} = f_1(\mathfrak{G}\setminus(\tilde{g})) + f_2(\mathfrak{G}_0) = f_1(\mathfrak{G}\setminus(\tilde{g})) + f_3(\tilde{\mathfrak{G}}) = f_4(\mathfrak{G}\setminus(\tilde{g}))\,;$$

мы получаем, следовательно, что система $\mathfrak{G}$ — вопреки предположению — приводима, и тем доказательство леммы закончено.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — наследственно приводимая система образующих группы G и пусть $\mathfrak{G}_0 \subseteq G\setminus\mathfrak{G}$ — конечное подмножество. Тогда также $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ наследственно приводимая система образующих группы G.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму 2 для случая, когда $\mathfrak{G}_0$ содержит только один элемент g_0.

Доказательство проведем опять от противного; пусть, наоборот, $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \subseteq (\mathfrak{G}, g_0)$ — неприводимая система образующих группы G. Тогда необходимо $g_0 \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, т. е. $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} = (\overline{\overline{\mathfrak{G}}}', g_0)$, $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}' \subseteq \mathfrak{G}$. Так как $\{\mathfrak{G}\} = G$, то существуют элементы $g_i \in \mathfrak{G}\setminus\overline{\overline{\mathfrak{G}}}'$, $i = 1, 2, \ldots, n$ такие, что

$$g_0 \in \{\overline{\overline{\mathfrak{G}}}', g_1, g_2, \ldots, g_n\} \text{ и } g_0 \text{ non} \in \{\overline{\overline{\mathfrak{G}}}', g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n\} \text{ для каждого } i,\quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Следовательно, выполнены предположения леммы 1 (где $\mathfrak{G}_0 = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ и $\mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$), и поэтому существует неприводимая подсистема

$$\overline{\mathfrak{G}} \subseteq (\overline{\overline{\mathfrak{G}}}, g_1, g_2, \ldots, g_n)\,, \quad \overline{\mathfrak{G}} \supseteq (g_1, g_2, \ldots, g_n)\,, \quad g_0 \text{ non} \in \overline{\mathfrak{G}}\,,$$

т. е.

$$\overline{\mathfrak{G}} \subseteq (\overline{\overline{\mathfrak{G}}}', g_1, g_2, \ldots, g_n) \subseteq \mathfrak{G}\,;$$

итак, мы получили противоречие с наследственной приводимостью системы, и лемма 2 доказана.

Замечание. Легко убедиться, между прочим, также в справедливости следующего утверждения: *Пусть $\mathfrak{G}_0$ — конечное подмножество элементов группы G; система образующих $\mathfrak{G}$ является наследственно сильно приводимой тогда и только тогда, если $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ является такой же.*

Теперь мы в состоянии высказать утверждение, обратное утверждению теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть группа G обладает наследственно приводимой ситемой образующих, которая не является сильно приводимой. Тогда G обладает наследственно приводимой системой образующих, которая является одновременно сильно приводимой, но не является наследственно сильно приводимой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$—система образующих предполагаемого типа. Обозначим через $\mathfrak{H}$ подмножество тех элементов $h \in \mathfrak{G}$, для которых справедливо $O(h) = 2$ и $h \operatorname{non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (h)\}$. Из этого сразу вытекает прямое разложение группы G:

$$G = \{\mathfrak{H}\} + \{\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}\}\,.^{4)} \tag{8}$$

Пусть $\mathfrak{G}' \subseteq \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}$ множество тех элементов $g \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}$, для которых справедливо соотношение

$$g \operatorname{non} \in \{(\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}) \setminus (g)\}\,;$$

очевидно, что для порядков этих элементов g справедливо $O(g) \neq 2$. Обозначим еще через $\mathfrak{G}''$ множество $-\mathfrak{G}'$.[5]

В дальнейшем будем различать два случая:

A) Или $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) \geqq 2$,[6] или $\mathfrak{H} = \emptyset$.

В этом случае обозначим через $\mathfrak{G}^0$ множество

$$\mathfrak{G}^0 = (\{\mathfrak{H}\}, \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}, \mathfrak{G}'')\,.$$

Очевидно, что $\{\mathfrak{G}^0\} = G$ и что система $\mathfrak{G}^0$ сильно приводима. Докажем еще, что она также наследственно приводима. Пусть, наоборот, существует неприводимая система образующих $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{G}^0$ группы G. Тогда, ввиду (8), множество

$$\overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{G}} \cap \{\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}\}$$

является необходимо неприводимой системой образующих групп $\{\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}\}$. Легко убедиться в том, что также каждое множество $\overline{\mathfrak{H}}^*$, полученное из $\overline{\mathfrak{H}}$ заменой некоторых элементов $h \in \overline{\mathfrak{H}}$ через $-h$, является неприводимой

[4] Если $\mathfrak{H} = (h_\delta)_{\delta \in \Delta}$, то даже $\{\mathfrak{H}\} = \sum\limits_{\delta \in \Delta} \{h_\delta\}$.

[5] Т. е. множество элементов вида $-g$, причем g пробегает множество $\mathfrak{G}'$.

[6] Символ $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ означает мощность множества $\mathfrak{M}$.

системой образующих группы $\{\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{H}\}$. Так как $\overline{\mathfrak{H}} \subseteq (\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'')$, ясно, что упомянутую замену можно провести так, чтобы $\overline{\mathfrak{H}}^* \subseteq \mathfrak{G}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда система образующих $(\mathfrak{H}, \overline{\mathfrak{H}}^*) \subseteq \mathfrak{G}$ группы G является неприводимой, что противоречит предположению; этим закончено доказательство случая А).

Б) $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) = 1$, т. е. $G = \{h\} + \{\mathfrak{G}\setminus(h)\}$.

Подобно тому, как в случае А), обозначим через $\mathfrak{G}^0$ множество

$$\mathfrak{G}^0 = (h, \mathfrak{G}\setminus(h), \mathfrak{G}'') .$$

Очевидно, что $\mathfrak{G}^0$ — наследственно приводимая система образующих группы G. Согласно лемме 2 также множество

$$\mathfrak{G}^{00} = (\mathfrak{G}^0, h + g) , \quad \text{где} \quad g \in \{\mathfrak{G}\setminus(h)\} ,$$

будет наследственно приводимой системой образующих группы G, которая, как легко видеть, сверх того еще сильно приводима.

Этим теорема 3 полностью доказана.

Из теорем 1, 2 и 3 и из результатов работы [2] непосредственно вытекают следующие следствия:

Следствие 1. *Группа обладает системой образующих типа* (IV) *тогда и только тогда, если она обладает системой образующих типа* (V).

Следствие 2. *Группа, обладающая системой образующих типа* (VI), *является или полной или тоже обладает системами образующих типов* (IV) *и* (V).

Следствие 3. *Группа, обладающая системами образующих типов* (I) *и* (VI), *обладает системами образующих всех типов* (I)—(VI).

3. Примечания

В работе [2] показано, что всякая система образующих группы $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$ наследственно приводима и что эта группа обладает также наследственно сильно приводимой системой образующих. Далее показано, что группа $G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$ обладает системами образующих всех типов (I)—(VI). Приведем еще три примера абелевых групп, первая из которых не обладает системами образующих типов (IV), (V) и (VI), вторая обладает системами образующих всех типов за исключением типа (VI) и третья обладает только системами образующих типов (IV) и (V).

Прежде всего докажем при помощи понятия D-зависимости[7]) следующую лемму:

[7]) Определение D-зависимости в абелевой группе и свойства этого понятия см. в [1].

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{G} = (g_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — *система образующих группы* G *такая, что для каждого* $\delta \in \Delta$ *справедливо* $O(g_\delta) = p_\delta$, *где* p_δ — *простое число. Тогда* $\mathfrak{G}$ *не является наследственно приводимой.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{G}$ — D-максимальное множество в G;[8]) обозначим через $\mathfrak{G}'$ максимальное D-независимое подмножество в $\mathfrak{G}$. Так как порядок элемента g_δ является простым числом, то утверждение, что g_δ D-зависит от $\mathfrak{G}'$, очевидно, эквивалентно утверждению, что $g_\delta \in \{\mathfrak{G}'\}$, и мы получаем $\mathfrak{G} \subseteq \{\mathfrak{G}'\}$, т. е.

$$G = \{\mathfrak{G}\} = \{\mathfrak{G}'\}\,.$$

Притом, конечно, $\mathfrak{G}'$ — неприводимая система образующих; итак, $\mathfrak{G}$ на самом деле не является наследственно приводимой.

Пусть $G_3 = \sum\limits_{\alpha \in A} G_\alpha(p)$, причем $G_\alpha(p) = \{g_\alpha\}$, $O(g_\alpha) = p$ для каждого $\alpha \in A$ (p — простое число). Пусть $\mathfrak{G}$ — система образующих группы G_3; очевидно, что система выполняет условия леммы 3, и поэтому $\mathfrak{G}$ не является наследственно приводимой. Итак, группа G_3 не обладает системами образующих типов (IV), (V) и (VI).

Пусть $G_4 = G(p^\infty) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(p)$, причем $G(p^\infty)$ — группа Прюфера типа p^∞, которая задана системой образующих и определяющих соотношений

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots, \quad O(h_1) = p\,, \quad p\,.\,h_{i+1} = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

и $G_i(p) = \{g_i\}$, $O(g_i) = p$ для $i = 1, 2, \ldots$ (p — простое число). Прежде всего докажем, что G_4 не обладает наследственно сильно приводимой системой образующих:

Пусть $\mathfrak{G} = (g_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — система образующих группы G_4; каждый элемент g_δ можно (однозначно) выразить в виде

$$g_\delta = g'_\delta + g''_\delta\,, \quad g'_\delta \in G(p^\infty)\,, \quad g''_\delta \in \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)\,.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}'$ счетное подмножество системы $\mathfrak{G}$ элементов $(g_{\delta_j})_{j=1,2,\ldots}$ таких, что

$$O(g_{\delta_j}) < O(g_{\delta_{j+1}}) \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Тогда мы получим $G(p^\infty) \subseteq \{\mathfrak{G}'\} \subseteq G_4$.

Если $\{\mathfrak{G}'\} = G_4$, то множество $(g''_{\delta_j})_{j=1,2,\ldots}$ является системой образующих группы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(p)$; из этой системы можно выбрать (бесконечную) неприводимую систему образующих $(g''_{\delta_{j_k}})_{k=1,2,\ldots}$ группы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(p)$ (см. пример

[8]) Т. е. всякий элемент из G D-зависит от $\mathfrak{G}$.

группы G_3). Множество $\mathfrak{G}'' = (g_{\delta_{j_k}})_{k=1,2,\ldots}$ является, следовательно, неприводимой системой образующих группы G_4.

Итак, пусть $\{\mathfrak{G}'\} = H \neq G_4$. Пусть $(g_\delta)_{\delta\in\Delta'}$ $(\Delta' \subset \Delta)$ — подмножество системы $\mathfrak{G}$ тех элементов, для которых справедливо

$$g''_\delta \operatorname{non} \in H' = H \cap \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p) .$$

Ввиду леммы 3, примененной к фактор-группе $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)/H'$, легко убедиться в том, что существует подмножество $(g''_\delta)_{\delta\in\Delta''}$, $\Delta'' \subseteq \Delta'$ такое, что

$$\{H', (g''_\delta)_{\delta\in\Delta''}\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$$

и

$$\{H', (g''_\delta)_{\delta\in\Delta'''}\} \neq \sum_{i=1}^{\infty} G_i\,(p) \text{ для всякого } \Delta''' \subsetneqq \Delta'' .$$

Из этого сразу вытекает, что множество $\mathfrak{G}''' = (\mathfrak{G}', (g_\delta)_{\delta\in\Delta''})$ является системой образующих группы G_4, которая не является сильно приводимой и, значит, тем более не наследственно сильно приводимой.

Наконец, рассмотрим следующие множества элементов группы G_4:

$$\mathfrak{G}_{41} = (h_i + g_i)_{i=1,2,\ldots}\,, \quad \mathfrak{G}_{42} = (g_1, \mathfrak{G}_{41})\,, \quad \mathfrak{G}_{43} = (G_4)\,,$$

$$\mathfrak{G}_{44} = ((h_i)_{i=1,2,\ldots}\,, \quad (g_i)_{i=1,2,\ldots}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}_{45} = ((h_i)_{i=1,2,\ldots}\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)) .$$

Легко видеть, что эти множества являются соответственно системами образующих группы G_4 типов (I), (II), (III), (IV) и (V).

Исследуем еще группу $G_5 = G(p^\infty) + G_1(p) + G_2(p)$; пусть (9) — система образующих и определяющих соотношений группы $G(p^\infty)$, g_1 и g_2 — образующие циклических групп $G_1(p)$ и, соответственно, $G_2(p)$. Подобным образом, как в случае группы G_1, мы легко установим, что G_5 не обладает неприводимой системой образующих (см. [2], подстрочное примечание[7]) на стр. 58). Сверх того мы теперь докажем, что G_5 не обладает ни наследственно сильно приводимой системой образующих.

Пусть $G = (g_\delta)_{\delta\in\Delta}$ — система образующих группы G_5; каждый элемент g_δ выразим в виде

$$g_\delta = g'_\delta + g''_\delta\,, \quad g'_\delta \in G(p^\infty)\,, \quad g''_\delta \in G_1(p) + G_2(p) .$$

Обозначим опять через $\mathfrak{G}'$ подмножество системы $\mathfrak{G}$ элементов $(g_{\delta_j})_{j=1,2,\ldots}$ таких, что справедливо (10); итак, мы получаем

$$G(p^\infty) \subseteq \{\mathfrak{G}'\} \subseteq G_5 .$$

Так как группа $G_1(p) + G_2(p)$ имеет только конечное число собственных подгрупп, то бесконечное число элементов $g''_{\delta j}$ принадлежит некоторой собственной подгруппе этой группы, т. е. существует подмножество $\mathfrak{G}'' \subseteq \mathfrak{G}$ такое, что

$$G(p^\infty) \subseteq \{\mathfrak{G}''\} + G_5 .$$

Если мы обозначим, далее, через G''' конечное подмножество системы $\mathfrak{G}$, для которого справедливо $g_1 \in \{\mathfrak{G}'''\}$ и $g_2 \in \{\mathfrak{G}'''\}$, то мы непосредственно видим, что множественное объединение $\mathfrak{G}''$ и $\mathfrak{G}'''$ есть система образующих группы G_5, которая является подмножеством $\mathfrak{G}$ и которая не наследственно сильно приводима. Следовательно, $\mathfrak{G}$ не является наследственно сильно приводимой.

Итак, G_5 обладает только системами образующих типов (IV) (напр., $\mathfrak{G}_{54} = ((h_i)_{i=1,2,\ldots}, g_1, g_2))$ и (V) (напр., $\mathfrak{G}_{55} = ((h_i)_{i=1,2,\ldots}, G_1(p) + G_2(p)))$.

Из полученных результатов уже легко заключим, что возможны следующие комбинации систем образующих: Группа G обладает системами образующих:

1. только типа (I) ($\Leftrightarrow G = 0$);[9]
2. типов (I) и (II) и никакими другими ($\Leftrightarrow G = \{g\}$, $O(g) \neq 2$);
3. типов (I), (II) и (III) и никакими другими (напр., группа G_3 или всякая ненулевая группа G с конечным числом образующих, $G \neq \{g\}$, $O(g) = 2$);
4. типов (I), (II), (III), (IV) и (V), но не обладает системой образующих типа (VI) (напр., группа G_4);
5. типов (I), (II), (III), (IV), (V) и (VI) (напр., группа G_2);
6. типов (IV) и (V) и никакими другими (напр., группа G_5);
7. типов (IV), (V) и (VI) и никакими другими (напр., группа G_1);
8. только типа (VI) ($\Leftrightarrow G$ — ненулевая полная группа).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *V. Dlab:* D-hodnost Abelovy grupy, Čas. pro pěst. mat., *82* (1957), 314—334.

[2] *В. Длаб:* Заметка к теории полных абелевых групп, Чех. мат. журнал *8* (*83*), 1958, 54—61.

[9]) Символ $\Leftrightarrow$ означает логическую эквивалентность.

Summary

SOME RELATION AMONG THE GENERATING SYSTEMS OF ABELIAN GROUPS

VLASTIMIL DLAB, Praha

(Received March 6, 1958)

In the paper [2] the concept of the irreducible, reducible, strongly reducible, hereditarily reducible and hereditarily strongly reducible generating system of an abelian group is introduced. On the example of the group

$$G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$$

there is also shown that the same group can have all logical possible types of introduced generating systems:

(I) *an irreducible generating system*;

(II) *a reducible generating system which is neither strongly reducible nor hereditarily reducible*;

(III) *a strongly reducible generating system which is not hereditarily reducible and therefore all the more not hereditarily strongly reducible*;

(IV) *a hereditarily reducible generating system which is not strongly reducible;*

(V) *a hereditarily reducible generating system which is simultaneously strongly reducible and which is not hereditarily strongly reducible*;

(VI) *a hereditarily strongly reducible generating system.*

The subject of the present paper is the investigation of all possibilities of combinations of the introduced generating systems that can take placed for the given group.[1]) The following theorems are proved for this purpose:

Theorem 1. *The attainable group*[2]) *having a hereditarily strongly reducible generating system possesses also a hereditarily generating system which is not strongly reducible.*

Theorem 2. *If a group G possesses a hereditarily reducible generating system which is simultaneously strongly reducible and which is not hereditarily strongly reducible then G also has a hereditarily reducible generating system which is not strongly reducible.*

Theorem 3. *If a group G possesses a hereditarily reducible generating system which is not strongly reducible then G possesses also a hereditarily reducible*

[1]) By a group always an abelian group is meant.
[2]) For the terminology we refer to [2].

generating system which is simultaneously strongly reducible but not hereditarily strongly reducible.

In contradistinction to the theorems 1 and 2 the proof of the theorem 3 is rather complicated and is based on the following

Lemma 2. *Let* $\mathfrak{G}$ *be a hereditarily reducible generating system of a group* G *and* $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$[3]) *a finite subset. Then the generating system* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ *of the group* G *is also hereditarily reducible.*

From the obtained results we can easily deduce the following possibilities of combinations of generating systems: The group possesses generating systems

1. only of the type (I) ($\Leftrightarrow G = 0$);[4])

2. of the types (I) and (II) and no another ($\Leftrightarrow G = \{g\}$, $O(g) = 2$);

3. of the types (I), (II) and (III) and no another (e. g. the group $G_3 = \sum_{\alpha \in A} G_\alpha(p)$ or every nonzero group G with a finite generating system, $G \neq \{g\}$, $O(g) = 2$);

4. of the types (I), (II), (III), (IV) and (V), but not of the type (VI) (e. g. the group $G_4 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$);

5. of the types (I), (II), (III), (IV), (V) and (VI) (e. g. the group G_2);

6. of the types (IV) and (V) and no another (e. g. the group $G_5 = G(p^\infty) + G_1(p) + G_2(p)$);

7. of the types (IV), (V) and (VI) and no another (e. g. the group $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$);

8. only of the type (VI) ($\Leftrightarrow G$ is the nonzero divisible group).

[3]) $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ denotes the difference of the sets $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$.

[4]) The symbol $\Leftrightarrow$ denotes the logical equivalence.