Czechoslovak Mathematical Journal

Froim Marcus

Sur un problème de E. Čech

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 1, 154–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100344

SUR UN PROBLÈME DE E. ČECH

F. MARCUS, IAȘI

(Reçu le 9 juin 1958)

On donne sans démonstration quelques résultats concernant un problème de E. Čech, à savoir le problème de déterminer toutes les surfaces qui possèdent plus d'une famille de ∞^1 pangéodésiques planes.

1

Dans cette Note, je donne sans démonstration[1]) quelques résultats que j'ai obtenus récement en étudiant le problème de déterminer toutes les surfaces sur lesquelles il existe plus d'une famille de ∞^1 courbes en même temps pangéodésiques et planes et qui a été posé pour la première fois par E. ČECH, dans une Note de l'Ac. dei Lincei en 1924 [1]. Cette question est aussi mentionnée dans le deuxième tome, page 540, de la *Géométrie projective différentielle* de G. FUBINI-E. ČECH [2].

Dans [1], E. Čech a déterminé synthétiquement les surfaces sur lesquelles il existe une seule famille de ∞^1 courbes à la fois pangéodésiques et planes. E. Čech montre aussi que sur la surface $xyz = 1$ il existe six systèmes de pangéodésiques planes qui sont les lignes de Darboux et Segre.

D'après l'équation de Čech des lignes pangéodésiques d'une surface [2] il résulte que si une courbe pangéodésique est plane, elle est aussi conique. Par conséquent elle est aussi une ligne projective de B. SEGRE [3]. Donc le problème de Čech se réduit à cet autre:

Déterminer toutes les surfaces sur lesquelles il existe plus d'une famille de ∞^1 courbes en même temps pangéodésiques et projectives.

Si l'on normalise les coordonnées d'un point générique d'une surface, alors les équations des lignes pangéodésiques et projectives sont respectivement

$$\left.\begin{aligned} 2(\gamma_u u'^2 - \beta_v u'^4) + \gamma_v u' - \beta_u u'^5 &= 2u''(\gamma + \beta u'^3)\,, \\ u'u''' - \tfrac{3}{2}u''^2 &= \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\beta^2 u'^6 + Mu'^2 - Lu'^4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1]) Les démonstration seront données dans un travail qui paraîtra dans „Studii si Cercetari stientifice Acad. Rep. Pop. Rom. Filiala Iași".

où u, v, sont les paramètres asymptotiques, β, γ, L, M étant les expressions bien connues de la géométrie projective differentielle des surfaces, et $u = u(v)$ l'équation d'une courbe qui satisfait le problème de Čech.

Les équations (1) peuvent être mises sous la forme [4]

$$\left.\begin{aligned} &2(\beta\varrho)_v - 2\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u + (\beta\varrho^2)_u - \left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v = 0\,, \\ &-L\varrho + \frac{M}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\{u\}_v + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\varrho^3} - \beta^2\varrho^3\right) = 0\,, \quad \varrho = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où $\{u\}_v$ est le Schwarzien de la fonction $u = u(v)$.

En cherchant une solution commune du système (1) on trouve le

Théorème. *Sur une surface qui n'est pas une surface de coïncidence, il peut exister tout au plus quinze familles de ∞^1 pangéodésiques et planes.*

La résolution du problème de Čech n'est pas facile. En notant avec $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \varrho(u, v)$ l'équation différentielle des courbes qui sont pangéodésiques planes, nous avons resolu le problème de Čech dans le cas $\varrho = \varrho(u)$ ou $\varrho = \varrho(v)$ en complétant avec quelques résultats ceux de E. Čech de [1] et [2], sur les pangéodésiques planes des surfaces de coïncidence.

En observant que les équations (1) sont intrinsèques, on peut, par un choix convenable des paramètres asymptotiques, simplifier en ce cas le problème de Čech, en cherchant les surfaces telles que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \varrho \tag{3}$$

avec ϱ constant.

Dans ce cas les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \gamma_v + 2\varrho\gamma_u - 2\varrho^3\beta_v - \varrho^4\beta_u = 0\,, \\ \gamma^2 + 2\varrho^2 M - 2\varrho^4 L - \varrho^6\beta^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

et nous avons le

Théorème. *Si une surface qui n'est pas de coïncidence admet quatre familles de ∞^1 pangéodésiques planes distinctes données par $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \varrho_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$,[2] alors les courbes de deux familles au moins doivent former un réseau conjugué.*

En conséquence de [4] les surfaces sont des surfaces de Cartan-Terracini. Les seules surfaces qui possèdent deux familles de ∞^1 courbes qui satisfont au problème de Čech formant des réseaux conjugués sont déterminées par

$$\left.\begin{aligned} \beta = \varphi(\tau_1) + \psi(\tau_2)\,; \quad \gamma = \varphi(\tau_1) - \psi(\tau_2)\,, \quad \tau_1 = u + v, \tau_2 = u - v\,, \\ L = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 - \varphi\psi + c\,, \\ M = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 + \varphi\psi + c\,, \quad c = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

[2]) $LM \neq 0$.

et qui ont été déterminées en coordonnées conjuguées sous forme finie par B. Segre [5] en étudiant un problème d'un toute autre point de vue. On peut demontrer de même le

Théorème. *Cette classe de surfaces ne possède pas d'autres courbes satisfaisant au problème de Čech avec* $\dfrac{du}{dv} = \text{const} \neq \pm 1$.

Nous pouvons nous demander quel est le nombre maximum de réseaux conjugués avec des courbes pangéodésiques planes que peut posséder une surface? Compte tenu de (1) il en résulte le

Théorème. *Une surface peut avoir tout au plus six réseaux conjugués les lignes desquelles sont pangéodésiques planes, et la surface doit appartenir à la classe* (I).

De même nous avons le résultat suivant: Les surfaces de la classe (I) avec

$$\beta = \gamma = \varphi(\tau_1)\,; \quad L = M = -\tfrac{3}{2}\varphi^2(\tau_1) + c \ (\varphi \text{ fonction arbitraire}),\ \tau_1 = u + v \quad (4)$$

où

$$\beta = \gamma = \psi(\tau_2)\,; \quad L = M = -\tfrac{3}{2}\psi^2(\tau_2) + c\,, \quad \tau_2 = u - v \qquad (5)$$

sont les seules surfaces satisfaisant au problème de Čech, qui possèdent au moins un réseau conjugué formé par un système de courbes de Segre et le système de courbes correspondantes de Darboux.

Existe-il des surfaces avec trois familles de ∞^1 courbes satisfaisant au problème de Čech sans que les courbes de ces familles soient deux-à-deux conjuguées?

On peut démontrer qu'il n'existe pas de telles surfaces. De même on peut démontrer qu'il n'existe pas de surfaces avec deux familles de courbes qui satisfont au problème de Čech, sans qu'elles ne soient pas conjuguées. Enfin on démontre que les surfaces qui possèdent une seule famille de pangéodésiques planes surfaces qui ont été déterminées synthétiquement par E. Čech, dépendent de six fonctions d'un argument.

2. Surfaces de Coïncidence

Dans ce cas nous avons les résultats suivants:

Seules les surfaces de coïncidence qui sont minima projectives [6], c'est-à-dire les surfaces avec $\beta = \gamma = 1$; $p_{11} = h$; $p_{22} = k$, h, k constantes, possèdent six familles de pangéodésiques planes. Les six familles sont données par

$$\varrho^6 - 2h\varrho^4 + 2k\varrho^2 - 1 = 0\,. \qquad (6)$$

Les surfaces de coïncidence avec

$$\beta = \gamma = 1\,; \quad p_{11} = cu + h\,; \quad p_{22} = cv + k\,;$$
$$L = -2(cu + h)\,; \quad M = -2(cv + k)$$

avec $c \neq 0$, ne possèdent aucune famille de courbes satisfaisant au problème de Čech, avec $\frac{du}{dv} = \varrho = \text{const}$.

De même avec (2) on peut démontrer que sur la surface $xyz = 1$, sur les surfaces où $p_{11} = h$; $p_{22} = k$ et sur les surfaces de coïncidence avec $c \neq 0$, il n'existe pas d'autre familles de ∞^1 pangéodésiques planes, même si l'on suppose $\varrho = \varrho(u, v)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *E. Čech*: Sur les géodésiques projectives. Rendiconti dell'Acc. de Lincei Vol. *XXXIII*, 1924, 15—16.

[2] *G. Fubini-E. Čech*: Geometria proiettiva differenziale. N. Zanichelli, Bologna, 1926.

[3] *B. Segre*: I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio etc. 2 Note. Rendiconti dell'Acc. dei Lincei Vol. *XXI*, 656—660; 692—697.

[4] *F. Marcus*: Une nouvelle caractérisation des réseaux et surfaces de Cartan. Czechoslovak Mathematical Journal *7* (*82*), 1957, 308—313.

[5] *B. Segre*: Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili etc. Memorie Della Acc. D'Italia, *V*, II, 1931.

[6] *F. Marcus*: Asupra suprafetelor de coincidenta. Comunicarile Acad. Rep. Pop. Romîne, *V*, 1955, 307—310.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ЭД. ЧЕХА

Ф. МАРКУС (F. Markus), Яссы

(Поступило в редакцию 9/VI 1958 г.)

В этой работе автор приводит некоторые результаты, полученные им при решении задачи, состоящей в нахождении всех поверхностей, на которых существует больше чем один слой плоских пангеодезических. Эта проблема была впервые выдвинута Ед. Чехом в работе [1] в 1924 г., упоминается о ней также во второй части (стр. 540) сочинения G. Fubini — E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale.*

Задача решена в случае, когда дифференциальное уравнение кривых, являющихся одновременно пангеодезическими и плоскими на поверхности, которая не является поверхностью коинциденции, имеет вид $du/dv = \varrho$ с $\varrho = \varrho(u)$ или $\varrho = \varrho(v)$, где u, v — асимптотические параметры.

В случае поверхностей коинциденции проблема Чеха решена полностью.