Czechoslovak Mathematical Journal

Ivo Babuška; Rudolf Výborný

Die Existenz und Eindeutigkeit der Dirichletschen Aufgabe auf allgemeinen Gebieten

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 1, 130–153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100343

DIE EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT DER DIRICHLETSCHEN AUFGABE AUF ALLGEMEINEN GEBIETEN

IVO BABUŠKA und RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

(Eingegangen am 13. Dezember 1957)

In dieser Arbeit wird die Dirichletsche Aufgabe untersucht. Der Definitionsbereich muss nicht beschränkt sein. Die Frage der Eindeutigkeit für die Klasse der beschränkten Funktionen wird gelöst.

In dieser Arbeit wollen wir die Dirichletsche Aufgabe für die Laplacesche Gleichung auf einem Gebiet untersuchen, das nicht beschränkt sein muss. Mit dieser Problematik beschäftigte sich auch M. Brelot in einigen seiner zahlreichen Arbeiten über die Dirichletsche Aufgabe und die Theorie des Potentials. (Siehe z. Bsp. [1], [2], [3]). Eine elementare Behandlung dieses Problems findet man bei J. Mařík [4]. In unserer Arbeit beweisen wir den Existenzsatz für verallgemeinerte Lösungen und leiten die notwendige und hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit für die Klasse der beschränkten Funktionen ab. Schliesslich zeigen wir den Zusammenhang unseres Problems mit der Aufgabe, eine harmonische Funktion in einem beschränkten Gebiet G zu bestimmen, welche mit Ausnahme eines einzigen Randpunktes die vorgeschriebenen Werte annimmt und in der Umgebung des Ausnahmepunktes sich wie die elementare Lösung verhält. Dadurch beweisen wir gleichzeitig eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von S. Zaremba [6]. L. Amerio [14] und M. Krzyzański [15], [16] beschäftigten sich mit ähnlichen Problemen für die allgemeine elliptische Gleichung. Alle unsere Erwägungen führen wir im dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 aus, sie lassen sich aber leicht mit einigen kleineren Änderungen auf einen beliebigen Euklidischen Raum E_n, $n > 3$ übertragen. Die Schlüsse aus § 1 gelten auch für $n = 2$. In der ganzen Arbeit ist $x \in E_3$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ ist die Entfernung der Punkte x und y. Mit G bezeichnen wir eine offene nichtleere Untermenge von E_3, $\overline{A}$ ist die Abschliessung der Menge A und die Grenze dieser Menge bezeichnen wir mit $\dot{A}$.

Fassen wir nun einige Definitionen und Ergebnisse, die wir im weiteren benutzen werden, zusammen. (Siehe [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].) Eine in G harmonische und auf $\bar{G}$ stetige Funktion u nennen wir die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Menge G und für die auf $\dot{G}$ stetige Funktion f, falls $u(x) = f(x)$ auf $\dot{G}$ gilt. Wir nennen die Funktion φ (resp. ψ) subharmonisch (resp. superharmonisch) in G, wenn sie in G stetig ist und wenn zu jedem Punkt $x \in G$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass

$$\varphi(x) \leqq \frac{1}{4\pi\varrho^2} \int_K\!\!\int \varphi(y)\, d\sigma \quad \left(\text{resp. } \psi(x) \geqq \frac{1}{4\pi\varrho^2} \int_K\!\!\int \psi(y)\, d\sigma\right)$$

für jede Kugel K mit dem Mittelpunkt in x und dem Radius $\varrho < \delta$ ist. Wir sagen, der Punkt $y \in \dot{G}$ ist regulär, wenn eine subharmonische Funktion v und eine Umgebung U des Punktes y so existiert, dass v subharmonisch und negativ in $G \cap U$ und $\lim_{x \to y} v(x) = 0$ ist. Die Menge G nennen wir regulär, wenn sie offen ist und alle Punkte von $\dot{G}$ regulär sind. Für eine reguläre Menge G mit bechränkter Grenze existiert immer eine Lösung der Dirichletschen Aufgabe. Ist G beschränkt, so ist die Lösung eindeutig bestimmt, wenn G nicht beschränkt ist, so existiert gerade eine einzige Lösung, die $o(1)$ im Unendlichen ist. Wenn G auch nur einen einzigen irregulären Punkt hat, so braucht keine Lösung mehr existiren. Beispiele irregulärer Punkte haben S. Zaremba und H. Lebesgue angeführt. Für jede offene Menge G mit beschränkter Grenze und für jede auf $\dot{G}$ stetige Funktion lässt sich, wie N. Wiener [4] gezeigt hat, eine verallgemeinerte Lösung $W(f, G, x)$ der Dirichletschen Aufgabe finden. Wir erhalten sie folgendermassen:

Wir konstruieren eine Folge G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ regulärer Mengen derart, dass

$$G_n \subset G_{n+1} \subset G\,, \quad \bar{G}_n \subset G\,, \tag{1}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G \tag{2}$$

ist. Wenn nun G nicht beschränkt ist, so sollen ausserdem alle G_n das Äussere einer Kugel enthalten. Wir erweitern die stetige Funktion f auf den ganzen Raum und bezeichnen mit u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Menge G_n und die Funktion f. (Wenn G nicht beschränkt ist, so sei u_n im Unendlichen gleich $o(1)$.) Dann ist $\lim_{n\to\infty} u_n = W(f, G, x)$, wobei gilt, dass die Funktion W[1]) weder von der Folge G_n, noch von der Erweiterung der Funktion f abhängt. Ist die Dirichletsche Aufgabe lösbar, so ist $W(f, G, x)$ ihre Lösung. (Siehe [7], [8], [10].) $W(f)$ ist sogar die einzige stetige Erweiterung des Operators der Dirichletschen Aufgabe aus der Klasse der Funktionen f, für welche die klassische Lösung vorhanden ist. (Siehe [11], [12].)

[1]) Wenn kein Missverständnis entstehen kann, schreiben wir kurz auch $W(x)$, $W(G, x)$, W usw.

1. Die Existenz der Lösung

Definition 1. *Die Funktion u nennen wir verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Menge G und die auf $\dot{G}$ stetige Funktion f, wenn u in G harmonisch ist und für jeden regulären Punkt $y \in \dot{G}$*

$$\lim_{x \to y} u(x) = f(x) \tag{3}$$

gilt.

Satz 1. *Die Funktion f sei auf $\dot{G}$ stetig. Die Funktionen φ und ψ seien auf $\bar{G}$ stetig, $\varphi \leqq \psi$, φ (resp. ψ) sei subharmonisch (resp. superharmonisch) in G und auf $\dot{G}$ sei*

$$\varphi \leqq f \leqq \psi \,. \tag{4}$$

Dann existiert eine verallgemeinerte Lösung u, für welche

$$\varphi(x) \leqq u(x) \leqq \psi(x) \tag{5}$$

in G gilt.

Bevor wir den Beweis führen, beweisen wir das Lemma 1.

Lemma 1. *f sei stetig in G und in allen regulären Punkten von $\dot{G}$. Die Ungleichung* (4) *gelte für die Funktion f in G. Dann existiert eine Folge regulärer, beschränkter, offener Mengen G_n ($n = 1, 2, \ldots$) so, dass* (1) *und* (2) *gilt und dass*

$$\lim_{n \to \infty} W(f, G_n) = u \tag{6}$$

vorhanden ist. Die Funktion u ist in G harmonisch und für jeden regulären Randpunkt y gilt (3).

Beweis. Offensichtlich gibt es eine Folge von beschränkten Mengen G'_n mit folgenden Eigenschaften: die Mengen G'_n sind regulär und es ist $G'_n \subset G'_{n+1} \subset G$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G'_n = G$. Die Folge $W(f, G'_n)$ ist eine lokal gleichmässig beschränkte Folge harmonischer Funktionen und es gibt daher eine lokal gleichmässig konvergente Teilfolge $W(f, G'_{n_k})$; wir bezeichnen $G'_{n_k} = G_k$ und es sei $\lim_{n \to \infty} W(f, G_n) = u$. Es bleibt noch (3) zu beweisen. Sei $y \in \dot{G}$ ein regulärer Randpunkt. Zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (offene) Kugel K_ϱ mit dem Mittelpunkt y und dem Halbmesser ϱ derart, dass

$$f(x) > f(y) - \varepsilon \tag{7}$$

für $x \in K_\varrho \cap G$ gilt und dass eine subharmonische Funktion v in $K_\varrho \cap G$ vorhanden ist, die negativ in $K_\varrho \cap G$ ist und für die $\lim_{x \to y} v(x) = 0$ gilt. Wir setzen nun $M = \sup\limits_{y \in K_\varrho \cap G} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$. Zur Zahl ϱ existiert eine natürliche Zahl N_1 so, dass der Teil der Kugelgrenze K_ϱ, welcher innerhalb $G - G_{N_1}$ liegt und den wir mit E bezeichnen wollen, die Oberfläche kleiner als $\frac{4\pi\varrho^2\varepsilon}{M}$ hat. Dabei gilt $G_{N_1} \cap K_\varrho \neq \emptyset$. Bezeichnen wir mit $h(x)$ eine Funktion, die in K_ϱ harmonisch ist und die unterhalb stetig in $\overline{K}_\varrho$ ist, für die weiters $h(x) = 1$ für $x \in E$ und $h(x) = 0$ auf dem restlichen Teil der Grenze K_ϱ gilt. Die Funktion h kann man mittels der Poissonschen Integralformel definieren. Nach dem wohlbekannten Satz ist

$$0 \leqq h(y) \leqq \frac{\varepsilon}{M}\,. \tag{8}$$

Wir wählen eine positive Zahl k so, dass auf der Menge $\overline{G}_{N_1} \cap \overline{K}_\varrho$

$$u(x) - \varepsilon > kv(x) + f(y) \tag{9}$$

ist.

Offenbar existiert $N \geqq N_1$ derart, dass für $n > N$

$$W(f, G_n, x) \geqq kv(x) + f(y) \tag{10}$$

in $\overline{G}_{N_1} \cap \overline{K}_\varrho$ ist. Wir beweisen nun die Ungleichung

$$W(f, G_n, x) > f(y) - \varepsilon + kv(x) - 2Mh(x) \tag{11}$$

auf dem Rande der Menge $G_n \cap K_\varrho$ für $n > N$.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{a) } x \in \dot{G}_n\,, \quad \text{b) } x \in \overline{G}_{N_1}\,, \quad x \in \dot{K}_\varrho\,, \quad \text{c) } x \in E\,.$$

Im Falle a) folgt (11) aus (7) und daraus, dass $v(x) < 0$ und $h(x) \geqq 0$ ist.

Im Falle b) folgt (11) aus (10) und im Falle c) gilt folgendes: $h(x) = 1$, $f(y) < M$; folglich

$$f(y) - \varepsilon + kv(x) - 2Mh(x) < -M - \varepsilon + kv(x) \tag{12}$$

und da $-M \leqq \varphi(x) \leqq W(f, G_n, x)$ in $G \cap K_\varrho$ gilt, folgt (11) aus (12). Da auf der rechten Seite der Ungleichung (11) eine subharmonische, in $\overline{K}_\varrho \cap \overline{G}_n$ oberhalb stetige Funktion und auf der linken Seite eine harmonische Funktion steht, gilt die Ungleichung (11) in $K_\varrho \cap G_n$. Durch Übergang zum Grenzwert erhalten wir

$$\liminf_{x \to y} u(x) > f(y) - 3\varepsilon\,.$$

Analog

$$\limsup_{x \to y} u(x) < f(y) + 3\varepsilon\,.$$

Hiermit is die Gleichung (3) in allen regulären Punkten bewiesen.

Beweis von Satz 1. Setzen wir die Funktion f stetig auf G so fort, dass die Ungleichung (4) überall auf $\overline{G}$ gilt. Dann ist durch Anwendung von Lemma 1 der Satz bewiesen.

Satz 2. *Behalten wir die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus dem Satz 1 bei. Dann existiert unter allen verallgemeinerten Lösungen der Dirichletschen Aufgabe, für welche*

$$\varphi \leqq u \quad (resp.\ u \leqq \psi) \tag{13}$$

gilt, die kleinste (resp. grösste Lösung).

$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller verallgemeinerten Lösungen der Dirichletschen Aufgabe, für welche (13) gilt. Nach dem Satz 1 ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Sei $\underline{W}(f, G, \varphi, x) = \inf_{u \in \mathfrak{M}} u$.[2],[3]). Wir beweisen nun das Lemma 2.

Lemma 2. *In jedem regulären Punkt $y \in \dot{G}$ ist* $\lim_{x \to y} \underline{W}(x) = f(y)$.

Beweis. K_ϱ sei eine Kugel mit dem Mittelpunkt y und dem Radius ϱ; wir wählen ϱ_1 und ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$) so, dass $G \cap \dot{K}_{\varrho_2} \neq \emptyset$. Wir setzen die Funktion f stetig auf $\overline{K}_{\varrho_1}$ so fort, dass in $\overline{G} \cap \overline{K}_{\varrho_1}$ die Ungleichung $\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$ gilt, und definieren die Funktion f_1 folgendermassen:

$$f_1(x) = f(x) \text{ auf } K_{\varrho_1}\,, \quad f_1(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \dot{K}_{\varrho_2} \cap G\,.$$

Wir setzen nun die Funktion f_1 stetig auf K_{ϱ_2} so fort, dass $f_1(x) \leqq f(x)$ für $x \in \dot{G} \cap \overline{K}_{\varrho_2}$ ist. Wenn u eine beliebige verallgemeinerte Lösung ist, für die (13) gilt, so muss

$$W(f_1, G \cap K_{\varrho_2}, x) \leqq u(x)\,, \quad x \in G \cap K_{\varrho_2} \tag{14}$$

sein, denn diese Ungleichung gilt in allen regulären Randpunkten und nach einem bekannten Satz aus [8] auch in $G \cap K_{\varrho_2}$. Aus der Ungleichung (14) folgt

$$W(f_1, G \cap K_{\varrho_2}, x) \leqq \underline{W}(f, G, x)\,, \quad x \in G \cap K_{\varrho_2}\,. \tag{15}$$

Wählen wir eine beliebige verallgemeinerte Lösung u, für die (13) gilt. Sei $\varepsilon > 0$; dann existiert $\delta > 0$ derart, dass in $K_\delta \cap G$

$$f(y) - \varepsilon < W(f_1, G \cap K_{\varrho_2}, x) \tag{16}$$

gilt und gleichzeitig

$$u(x) < f(y) + \varepsilon \tag{17}$$

ist. Aus den Ungleichungen (15), (16) und (17) und der Definition der Funktion $\underline{W}$ folgt ihre Stetigkeit im Punkte y.

Lemma 3. *Die Funktion $\underline{W}(f, G)$ ist stetig auf der Menge G.*

Beweis. $\underline{W}$ ist die untere Grenze lokal gleichgradig stetiger Funktionen.

[2]) Es ist leicht zu sehen, wie $\overline{W}(f, G, \psi, x)$ definiert ist.

[3]) Kurz auch $\underline{W}$, $\underline{W}(x)$, $W(f, G)$ usw.

Lemma 4. *Die Funktion $\underline{W}(f,G)$ ist superharmonisch auf G.*

Beweis. K sei eine Kugel, $\overline{K} \subset G$; w sei eine harmonische Funktion auf K, stetig auf $\overline{K}$, für welche

$$\underline{W}(f, G, x) \geqq w(x) , \quad x \in \dot{K} , \tag{18}$$

gilt. Dann gilt für eine beliebige Lösung $u \in \mathfrak{M}$

$$u(x) \geqq w(x) \tag{19}$$

auf $\dot{K}$ und folglich auch auf $\overline{K}$. Aus (19) folgt (18) für $x \in \overline{K}$ und das Lemma ist bewiesen.

Beweis des Satzes 2. Die Funktion $\underline{W}$ ist auf G und in allen regulären Randpunkten stetig, es gilt $\varphi \leqq \underline{W} \leqq \psi$ in G; daher existiert eine Folge offener Mengen G_n $(n = 1, 2, \ldots)$, mit den in Lemma 1 definierten Eigenschaften. $\lim_{n\to\infty} W(\underline{W}, G_n, x) = u(x)$ ist eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe, für welche nach Lemma 4 $u(x) \leqq \underline{W}(x)$ gilt; nach der Definition der Funktion $\underline{W}$ gilt aber gleichzeitig $\underline{W}(x) \leqq u(x)$, folglich ist $\underline{W}(x) = u(x)$, d. h. $\underline{W}$ ist die verallgemeinerte Lösung.

2. Der Zusammenhang mit der Perronschen Methode

Vorerst beweisen wir den Satz über „die Erhaltung der Ungleichung“, welchen wir öfters benützen werden.

Satz 3. *f_1 und f_2 seien stetige Funktionen auf $\dot{G}$, für welche $\varphi(x) \leqq f_1(x) \leqq \leqq f_2(x) \leqq \psi(x)$ gilt, wo φ resp. ψ subharmonisch resp. superharmonisch in G, stetig in $\overline{G}$, und $\varphi \leqq \psi$ in $\overline{G}$ ist.*

Dann ist

$$\underline{W}(f_1, G, \varphi, x) \leqq \underline{W}(f_2, G, \varphi, x) \quad \textit{resp.} \quad \overline{W}(f_1, G, \psi, x) \leqq \overline{W}(f_2, G, \psi, x) \ \textit{in } G.$$

Beweis. Es genügt offenbar die erste der Ungleichungen zu beweisen. Man nehme an, dass es ein $z \in G$ so gibt, dass $\underline{W}(f_1, z) > \underline{W}(f_2, z)$ ist. Setzen wir die Funktion f_1 stetig auf $\overline{G}$ so fort, dass $\varphi \leqq f_1 \leqq \psi$ ist. Es sei $F = = \text{Min}\,(f_1, \underline{W}(f_2))$. Es sei G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge beschränkter, offener, regulärer Mengen nach Lemma 1, welches wir auf die Funktion F anwenden wollen. Wir bezeichnen $\lim_{n\to\infty} W(F, G_n, x) = u(x)$; dann gilt in G die Beziehung $\varphi(x) \leqq \leqq u(x) \leqq \underline{W}(f_2, x)$ und folglich auch $u(z) \leqq \underline{W}(f_2, z) < \underline{W}(f_1, z)$, was zu einem Widerspruch führt, denn $u(x)$ ist eine verallgemeinerte Lösung für die Funktion f_1.

Definition 2. *Die Funktion Φ nennen wir eine Oberfunktion (resp. Unterfunktion) (in Bezug auf die Funktion f und auf die Menge G), wenn sie super-*

harmonisch (resp. subharmonisch) in G ist und wenn $\liminf\limits_{x \to y} \Phi(x) \geqq f(y)$ $(\limsup\limits_{y \to x} \Phi(x) \leqq f(y))$ *für* $y \in \dot{G}$ *gilt.*

Satz 4. *Die Voraussetzungen aus Satz 1 seien erfüllt. Dann ist* $\underline{W}(f, G, \varphi, x)$ *die untere Grenze aller Oberfunktionen* $\Phi(x)$, *für welche*

$$\Phi(x) \geqq \varphi(x) \tag{21}$$

in G gilt.

Vorerst beweisen wir wiederum ein Lemma, welches den Kern des Beweises bildet.

Lemma 5. *Die Menge $F \subset E_3$ möge eine positive Entfernung von der Grenze der Menge G haben. $M \subset \dot{G}$ sei eine abgeschlossene Menge, deren jede begrenzte, abgeschlossene Teilmenge von der Kapazität Null ist.*[4],[5])

Dann existiert zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine nicht negative superharmonische Funktion $\Phi_1(x)$ so, dass

$$\Phi_1(x) < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in F \tag{22}$$

und

$$\Phi_1(x) > \psi(x) - \varphi(x) \quad \text{für} \quad x \in M \tag{23}$$

gilt.

Beweis. Wir bezeichnen $A_n = \mathrm{E}\,[x; n - 1 \leqq |x| \leqq n]$, $M_n = M \cap A_n$. Wählen wir nur die offenen beschränkten Mengen O_n, $M_n \subset O_n$, und setzen $k_i = \sup\limits_{x \in O_i} [\psi(x) - \varphi(x) + 1]$. Wir konstruieren weiter die Mengen O_n^1, welche

---

[4]) Wir nennen die folgendermassen definierte Funktion das Potential $v(M, x)$ einer beschränkten, abgeschlossenen Menge M: für $x \in M$ ist $v(M, x) = 1$, für $x \in E_3 - M$ ist $v(M, x) = W(1, E_3 - M, x)$.

Wenn K eine beliebige Kugel ist, welche die Menge M enthält, so definieren wir die Kapazität $c(M)$ der Menge M durch die Gleichung

$$c(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_K \frac{\partial v}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma\,.$$

Die Kapazität $c(M)$ ist offenbar eindeutig bestimmt (hängt nicht von der Wahl der Kuge K ab). Hinsichtlich grundlegender Ergebnisse über Kapazitäten siehe [8] und [10]. Insbesondere gilt:

1. Zwischen der Kapazität der Menge M und dem Potential $v(M, x)$ gilt die Beziehung

$$v(M, y) \inf_{x \in M} |x - y| \leqq c(M) \leqq v(M, y) \sup_{x \in M} |x - y|\,.$$

2. Sind M_1 und M_2 zwei beschränkte, geschlossene Menge, so gilt $c(M_1 \cup M_2) \leqq$ $\leqq c(M_1) + c(M_2)$.

3. Für die Funktion $v(M, x)$ gilt die Ungleichung, die wir zur Definition der superharmonischen Funktion verwenden; wenn die Menge $E_3 - M$ regulär ist, dann ist die Funktion v im ganzen Raum superharmonisch.

4. Ist $c(M) = 0$, $\varepsilon > 0$, dann existiert eine offene Menge $U \supset M$, $c(\overline{U}) < \varepsilon$.

Diese Beziehungen werden wir im Weiteren oft anwenden.

[5]) Eine solche Menge werden wir im Weiteren kurz als eine Menge von der Kapazität Null bezeichnen.

die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Kugeln sind und für welche $\bar{O}_n^1 \subset O_n, M_n \subset O_n^1, \varrho(O_n^1, F) > \frac{a}{2}$,[6]) $O_k^1 \cap A_j = \emptyset$ für $j \neq k-1, k, k+1$ gilt und deren Kapazität $c(\bar{O}_n^1)$ genügend klein ist, genauer gesagt

$$c(\bar{O}_n^1) < \frac{\varepsilon a}{2^{n+1}k_n} \tag{24}$$

ist. Wir definieren die Funktion $\Phi_1(x)$ folgendermassen:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i v_i(x) ,$$

wo $v_i(x) = v(\bar{O}_i^1, x)$ das Potential der Menge $\bar{O}_i^1$ ist. Die Funktion Φ_1 ist superharmonisch im ganzen Raum. Zu einem beliebig gewählten Punkt existiert eine Umgebung U und eine natürliche Zahl N so, dass $\varrho(U, O_n^1) \geqq 1$ für $n > N$ gilt. Nach der Bemerkung[6]) unter dem Strich und nach (24) gilt

$$v_n(y) < \frac{\varepsilon a}{2^{n+1}k_n} \quad \text{für} \quad y \in U .$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{1=N+1}^{\infty} k_i v_i(y)$ gleichmässig in V zu einer harmonischen Funktion $r_N(y)$. Es gilt aber

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{N} k_i v_i(x) + r_N(x) ;$$

$\Phi_1(x)$ ist superharmonisch als Summe einer superharmonischen und harmonischen Funktion. Sei $x \in F$, dann ist $v_i(x) < \frac{\varepsilon a}{2^{i+1}}$. Schätzen wir nun $\Phi_1(x)$ ab;

$$\Phi_1(x) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} k_i v_i(x) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon .$$

Hiermit ist die Ungleichung (22) bewiesen und die Ungleichung (23) folgt aus folgendem:

Ist $x \in M$; dann ist $x \in O_m^1$ für irgendein m und folglich

$$\Phi_1(x) = \sum k_i v_i(x) \geqq k_m v_m(x) = k_m > \psi(x) - \varphi(x) .$$

Hiermit ist das Lemma 5 bewiesen.

Lemma 6. *u sei eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion f. Sei $\varepsilon > 0$, $F \subset G$, F kompakt. Dann existiert eine Oberfunktion ψ_ε und eine Unterfunktion φ_ε, für welche*

$$\varphi_\varepsilon(x) \leqq u(x) \leqq \psi_\varepsilon(x) \quad \textit{für} \quad x \in G ,$$
$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < 2\varepsilon \quad \textit{für} \quad x \in F .$$

gilt.

[6]) $\varrho(A, B)$ ist die Entfernung der Mengen A und B.

Beweis. Sei M die Menge aller Punkte y aus $\dot{G}$, für welche mindestens eine der Relationen

$$\liminf_{x \to y} u(x) \leqq f(y) - \varepsilon\,, \quad \limsup_{x \to y} u(x) \geqq f(y) + \varepsilon$$

gilt. Die Menge M ist abgeschlossen und enthält nur irreguläre Randpunkte; nach Lemma von *O. D. Kellog*[7]) muss jede begrenzte abgeschlossene Untermenge von M der Kapazität Null sein. Nach Lemma 5 ist eine nicht negative superharmonische Funktion Φ_1 vorhanden, für welche die Ungleichungen (22) und (23) gelten. Wir setzen

$$\varphi_\varepsilon(x) = u(x) - \Phi_1(x) - \varepsilon\,, \quad \psi_\varepsilon(x) = u(x) + \Phi_1(x) + \varepsilon\,.$$

Die Funktionen φ_ε und ψ_ε haben alle verlangte Eigenschaften.

Beweis des Satzes 4.: $\Phi(x)$ sei eine beliebige Oberfunktion, für welche (21) gilt. Setzen wir die Funktion f stetig auf $\overline{G}$ so fort, dass $\varphi \leqq f \leqq \Phi$ ist. Nach Lemma 1 existiert eine verallgemeinerte Lösung u, für welche $u(x) \leqq \leqq \Phi(x)$ in G ist und so mehr

$$\underline{W}(f, G, \varphi, x) \leqq \Phi(x) \tag{25}$$

in G.

Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in G$. Nach Lemma 6 für $F = \{x_0\}$ und für $u = \underline{W}$ existiert eine Oberfunktion Φ, so, dass sie Ungleichung

$$\Phi(x_0) < \underline{W}(x_0) + 2\varepsilon \tag{26}$$

gilt. Die Ungleichungen (25) und (26) beweisen den Satz 4.

Satz 5. *Die Voraussetzungen des Satzes* 1 *seien erfüllt und die Menge M aller irregulären Punkte sei abgeschlossen. Wir bezeichnen mit dem Buchstaben $\mathfrak{M}$ die Menge aller in $\overline{G}$ stetigen Oberfunktionen, für die* (21) *gilt. Sei* $v(x) = \inf_{\Phi \in \mathfrak{M}} \Phi(x)$. *Dann ist* $v = \underline{W}(f, G, \varphi)$.

Beweis: Wenn wir den ersten Teil des Beweises von Satz 4 wiederholen, so folgt aus der Ungleichung (25) $v(x) \geqq \overline{W}(x)$ in G. Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in G$. $\Phi_1(x)$ sei die Funktion aus Lemma 5, wo wir $F = \{x_0\}$ setzen. Definieren wir nun $\Phi_2(x) = \underline{W}(x) + \Phi_1(x) + \varepsilon$ und $\Phi(x) = \mathrm{Min}\,[\Phi_2(x), \psi(x)]$.

Die Funktion Φ ist eine Oberfunktion, für die (26) gilt. Es bleibt nun noch die Stetigkeit der Funktion Φ auf $\overline{G}$ zu beweisen. Hierzu genügt es einen Punkt $x_1 \in M$ zu untersuchen. Es ist

$$\liminf_{x \to x_1} \Phi_2(x) \geqq \varphi(x_1) + \psi(x_1) - \varphi(x_1) + \varepsilon > \psi(x_1)\,.$$

[7]) Nach diesem Satz enthält jede Menge $F \subset \dot{G}$, für welche $c(F) > 0$ gilt, mindestens einen regulären Punkt. (Siehe z. B. [8].)

Darum ist $\Phi(x) = \psi(x)$ in der Umgebung des Punktes x_1 und folglich ist die Funktion Φ im Punkte x_1 stetig.

Satz 6.[8]) *Wir behalten die Bezeichnungen und Voraussetzungen des Satzes* 1 *bei. u sei eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe (für die Funktion f), für welche die Ungleichung* (5) *gilt. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung g der Funktion f (auf die Menge $\bar{G}$) für welche folgendes gilt:*

1. *Für jede Folge beschränkter offener regulärer Mengen $\{G_n\}$, für welche* (1) *und* (2) *gilt, existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} W(g, G_n) = u$.

2. *Die Konvergenz ist lokal gleichmässig.*

Beweis. Es sei $K_n = \mathrm{E}\left[x \in G,\ |x| \leqq n,\ \varrho(x, \dot{G}) \geqq \frac{1}{n}\right]$. Nach Lemma 6 gilt: Zu jedem natürlichen n existiert eine Oberfunktion ψ_n und eine Unterfunktion φ_n so, das s$\varphi_n(x) \leqq u(x) \leqq \psi_n(x)$ und $\psi_n(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n}$ ist, $x \in K_n$; $\varkappa_n$ sei eine stetige Funktion in E_3, für welche folgendes gilt: $\varkappa_n(x) = 1$ für $|x| \leqq n - 1$, $\varkappa_n(x) = 0$ für $|x| > n$, $0 \leqq \varkappa_n(x) \leqq 1$ für alle x $(n = 1, 2, \ldots)$. g_0 sei eine Erweiterung der Funktion f auf die Menge $\bar{G}$. Wir setzen $h_n = \operatorname{Max}(g_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $k_n = \operatorname{Min}(h_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ und $g_n = \varkappa_n g_{n-1} + (1 - \varkappa_n)\, k_n$. Es ist leicht zu sehen, dass jede der Funktionen h_n, k_n, g_n eine stetige Fortsetzung der Funktion f ist. Für $|x| \leqq n - 1$ ist $g_n = g_{n-1}$; deshalb ist die Funktion $g^* = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ auch eine stetige Fortsetzung der Funktion f. Es gilt

$$g^*(x) = g_m(x) \tag{27}$$

für $|x| \leqq m$. Offensichtlich ist

$$g_n(x) = k_n(x) \tag{28}$$

für $|x| \geqq n$. Es sei nun $|x| \geqq n$. Es gibt eine natürliche Zahl m so, dass $m - 1 \leqq |x| \leqq m$ ist; offensichtlich ist $m - 1 \geqq n$. Nach (28) erhalten wir $g_{m-1}(x) = k_{m-1}(x) \leqq \psi_n(x)$, weiter ist $k_m(x) \leqq \psi_n(x)$ und nach (27)

$$g^*(x) = g_m(x) \leqq \varkappa_m \psi_n(x) + (1 - \varkappa_m)\, \psi_n(x) \leqq \psi_n(x)\,.$$

Aus den Ungleichungen $k_m \geqq \varphi_n$, $k_{m-1} \geqq \varphi_n$ folgt auf ähnliche Weise, dass $g^*(x) \geqq \varphi_n(x)$ ist. Daraus folgt, dass

$$\varphi_n(x) \leqq g^*(x) \leqq \psi_n(x)$$

für $x \in G$, $|x| \geqq n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gilt. Wir setzen $g(x) = \operatorname{Max}(\varphi(x), r(x))$, wo $r(x) = \operatorname{Min}(g^*(x), \psi(x))$ ist. Die Funktion g ist eine stetige Fortsetzung der Funktion f; es ist leicht zu sehen, dass $\varphi_n(x) \leqq g(x) \leqq \psi_n(x)$ für $x \in G$, $|x| \geqq n$ gilt.

[8]) Eine gewisse Verbesserung des Satzes 6 verdanken wir Herrn J. Mařík.

Es sei $\{n_k\}$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen, für welche $\lim W(g, G_{n_k})$ vorhanden ist. Wir bezeichnen $w = \lim\limits_{k \to \infty} W(g, G_{n_k})$. Ähnlich wie im Lemma 1 beweist man, dass die Funktion w eine verallgemeinerte Lösung ist. Wir behaupten, dass $w = u$ ist. j sei eine natürliche Zahl. Es sei $f_j = \operatorname{Min}(g, \psi_j)$. Die Funktion f_j ist stetig auf $\overline{G}$ und für $|x| \geqq j$ ist $f_j = g$. Aus dieser Tatsache kann man folgern, dass

$$\lim_{k \to \infty} W(f_j, G_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} W(g, G_{n_k})$$

ist. Weil $W(G_{n_k}, f_j) \leqq \psi_j$ ist, gilt für jedes j $w \leqq \psi_j$ und also auch $w \leqq u$. Ähnlich beweist man $w \geqq u$. Man nehme an, dass es einen Punkt $z \in G$ gibt, für welchen die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} W(g, G_n, z) = u(z)$$

nicht gilt. Weil $\varphi \leqq W(g, G_n) \leqq \psi$ ist, existiert eine wachsende Folge natürlicher Zahlen p_k so, dass $\lim\limits_{k \to \infty} W(g, G_{n_k}, z)$ vorhanden ist, aber $\lim\limits_{k \to \infty} W(g, G_{p_k}, z) \neq$ $\neq u(z)$ ist. Es gibt eine Teilfolge $\{q_k\}$ der Folge $\{p_k\}$ so, dass die Gleichung $\lim\limits_{k \to \infty} W(g, G_{q_k}, x) = w_1(x)$ vorhanden ist; nach dem Bewiesenem ist $w_1(z) =$ $= u(z)$. Das ist aber in Widerspruch. Es gilt also $\lim W(g, G_n, x) = u(x)$ für $x \in G$. Nach dem bekannten Satz ist die Konvergenz lokal gleichmässig.

Satz 7. *Es sei $f, f_1, f_2, \ldots$ eine Folge stetiger Randfunktionen, für welche $f_n \to f$, $\varphi \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots \leqq \psi$ gilt.* (φ *und* ψ *sind dieselben Funktionen wie in Satz* 1). *Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{W}(f_n, G, \varphi) = \underline{W}(f, G, \varphi)$ in $\overline{G}$, wobei diese Konvergenz lokal gleichmässig ist.*

Beweis. Aus Satz 3 folgt $\underline{W}(f_n) \leqq \underline{W}(f_{n+1}) \leqq \underline{W}(f)$. Nach dem Harnackschen Satz konvergiert die Folge von Funktionen $W(f_n)$ in G lokal gleichmässig zur harmonischen Funktion w. Offenbar gilt

$$w(x) \leqq \underline{W}(f, G, x) \quad \text{in} \quad G\,. \tag{29}$$

Es sei $y \in \dot{G}$ ein regulärer Randpunkt und ε eine beliebige positive Zahl. Es existiert eine natürliche Zahl N derart, dass

$$W(f_N, y) = f_N(y) > f(y) - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Weiter existiert eine Umgebung U des Punktes y so, dass für $x \in U \cap G$

$$|\underline{W}(f_N, y) - W(f_N, x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

gilt. Aus (30) folgt für $n > N$ und $x \in U$

$$W(f_n, x) > f(y) - \varepsilon \quad \text{und} \quad w(x) \geqq f(y) - \varepsilon\,. \tag{30a}$$

Aus (29) und (30a) folgt die stetige Fortsetzbarkeit der Funktion w im Punkte y zum Werte $f(y)$. $w(x)$ ist eine verallgemeinerte Lösung, also ist $w(x) \geqq \underline{W}(f, x)$, was gemeinsam mit (29) den Beweis ergibt.

Gibt es zur Funktion $|f|$ eine nicht negative Oberfunktion, dann existiert $\underline{W}(f^+, G, 0)$[9]) und $\overline{W}(-f^-, G, 0)$. Die Funktion $\underline{W}(f^+, G, 0) + \overline{W}(-f^-, G, 0)$ ist eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Aufgabe für die Funktion f und die Menge G (wir werden sie im Folgenden mit $W(f, G, x)$, W, $W(f)$, ... bezeichnen).

Es gilt $W(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 W(f_1) + c_2 W(f_2)$, wenn die rechte Seite sinnvoll ist. Aus Satz 7 lässt sich die stetige Abhängigkeit der Funktion W von f ableiten, besser gesagt, lässt sich beweisen, dass $W(f_n)$ zu $W(f)$ konvergiert, wenn f_n zu f konvergiert und wenn alle Funktionen $|f_n|$ eine gemeinsame nicht negative stetige Oberfunktion haben. Ein elementarer Beweis lässt sich analog wie die Beweise für die Funktion $D(f, G, x)$ in [4] führen. Darum führen wir ihn hier nicht an.

3. Die Eindeutigkeit der Lösung der Dirichletschen Aufgabe in der Klasse beschränkter Funktionen

Mit dem Symbol G werden wir bis zum Schluss dieser Arbeit das Gebiet bezeichnen, d. i. wir machen eine weitere Voraussetzung, und zwar, dass G zusammenhängend ist. Das stellt jedoch keinen Mangel der Allgemeinheit vor, denn die Untersuchungen der Eindeutigkeit der Dirichletschen Aufgabe auf einer offenen Menge O lässt sich auf die Untersuchung der Eindeutigkeit der Dirichletschen Aufgabe auf den einzelnen Komponenten der Menge O überführen.

Definition 3. *Wir nennen das Gebiet G normal, wenn für jede beschränkte Funktion f auf $\dot{G}$ höchstens eine verallgemeinerte, beschränkte Lösung der Dirichletschen Aufgabe vorhanden ist.*

Es sei $\lambda > 1$. Wir bezeichnen $K_n = \mathrm{E}\,[x; |x| < \lambda^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $A_n = G \cup (E_3 - K_n)$. Die Funktionen $W(1, A_n)$[10]) bilden eine nichtfallende Folge beschränkter, harmonischer Funktionen. Den Grenzwert dieser Folge bezeichnen wir $W_1(G, x)$. In allen regulären Randpunkten ist $W_1(G, x) = 1$. Ob G normal ist, entscheidet die Funktion W_1, denn es gilt folgender

[9]) Darunter verstehen wir die Funktion $\underline{W}(f^+, G, \varphi)$ für $\varphi = 0$. Ähnlich $\overline{W}(-f^-, G, 0) = \overline{W}(-f^-, G, \psi)$ für $\psi = 0$.

[10]) Hierunter ist die Funktion $W(f, A_n)$ für $f(x) = 1$ zu verstehen. Für $|x| \to \infty$ ist $W(1, A_n) = o(1)$.

Satz 8. *Das Gebiet G ist dann und nur dann normal, wenn*

$$W_1(x) = 1 \tag{31}$$

für $x \in G$ gilt.

Beweis. Wenn $W_1(x_1) \neq 1$ für einen Punkt $x_1 \in G$ ist, so ist die Eindeutigkeit sichtlich nicht mehr am Platze. Es sei darum (31) erfüllt und f eine stetige beschränkte Funktion auf $\dot{G}$, u und v zwei verallgemeinerte Lösungen, in ihrem absoluten Betrag durch die Konstante C beschränkt. Es sei $x_0 \in G$. Wenn es uns nun gelingt die Gültigkeit der Ungleichung

$$u(x_0) - v(x_0) \leqq 4C(1 - W(1, A_n, x_0))$$

zu zeigen, so ist der Satz bewiesen. Durch Grenzübergang folgt aus dieser Ungleichung $u(x_0) \leqq v(x_0)$ und folglich auch (aus Symetriegründen) $v(x_0) \leqq \leqq u(x_0)$, d. h. $v(x_0) = u(x_0)$.

Es sei n fest gewählt. Dann existiert ein n_1 derart, dass $x_0 \in K_{n_1}$ und $W(1, A_n, x) < \frac{1}{2}$ für $x \in \bar{G} \cap (E_3 - K_{n_1})$ ist. Daraus folgt, dass in allen regulären Randpunkten der Menge $\bar{G} \cap K_{n_1}$

$$u(x) - v(x) \leqq 4C(1 - W(1, A_n, x)) \tag{32}$$

gilt. Da es sich um harmonische Funktionen handelt, gilt die Ungleichung (32) auch im Punkte x_0. W. z. b. w.

Bezeichnen wir nun $e_n = \mathrm{E}\,[x; x \in E_3 - G,\ \lambda^{n-1} \leqq |x| \leqq \lambda^n]$, sei weiter γ_n die Kapacität von e_n.

Satz 9. *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda^{-n}$ sei konvergent. Dann ist W_1 nicht identisch gleich* 1.

Anmerkung. Konvergiert (divergiert) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda^{-n}$ für ein gewisses $\lambda > 1$, dann konvergiert (divergiert) sie für alle $\lambda > 1$.

Beweis der Anmerkung. Sei $\lambda < \lambda'$ und γ'_n die Kapazität von $e'_n = \mathrm{E}\,[x; x \text{ non} \in G,\ \lambda'^{n-1} \leqq |x| \leqq \lambda'^n]$.

1. Ist die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{\gamma'^n}{\lambda'^n}$ konvergent, dann ist auch die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$ konvergent. Setzen wir $k = \left[n \frac{\log \lambda}{\log \lambda'}\right]$, $j = \left[(n+1)\frac{\log \lambda}{\log \lambda'}\right] - k + 1$, dann ist

$$\sum_{n > \frac{\log \lambda}{\log \lambda'}} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} \leqq \sum_{n > \frac{\log \lambda}{\log \lambda'}} \frac{\gamma'_k + \ldots + \gamma'_{k+j}}{\lambda^n}$$

Wir haben weiter $\lambda^n \geqq \lambda'^k$; also ist

$$\frac{\gamma'_k + \ldots + \gamma'_{k+j}}{\lambda^n} \leqq \frac{\gamma'_k + \ldots + \gamma'_{k+j}}{\lambda'^k} \leqq \lambda'^j \left(\frac{\gamma'_k}{\lambda'^k} + \ldots + \frac{\gamma'_{k=i}}{\lambda'^{k+j}}\right).$$

Da j von oben begrenzt ist, $j < N$, ist

$$\sum_{n > \frac{\log \lambda}{\log \lambda'}} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} \leqq \lambda'^N \sum_{n > \frac{\log \lambda}{\log \lambda'}} \left(\frac{\gamma'_k}{\lambda'^k} + \ldots + \frac{\gamma'_{k+j}}{\lambda'^{k+j}}\right) \leqq$$

$$\leqq \lambda'^N \left(\frac{\log \lambda'}{\log \lambda} + 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma'_k}{\lambda'^k} + \ldots + \frac{\gamma'_{k+j}}{\lambda'^{k+i}}\right) \leqq N\lambda'^N \left(\frac{\log \lambda'}{\log \lambda} + 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma'_k}{\lambda'^k} \, . \quad ^{11)}$$

2. Die Reihe $\sum \frac{\gamma'_n}{\lambda'^n}$ sei divergent. Die Reihen $\sum \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$ und $\sum \frac{\gamma^*_n}{\lambda^{sn}}$ (γ^* ist die Kapazität von $e^*_n = \mathrm{E}\,[x;\, x \text{ non} \in G,\, \lambda^{sn} \leqq |x| \leqq \lambda^{s(n+1)}]$) sind gleichzeitig konvergent oder divergent. Wählen wir nun λ so, dass $\lambda' < \lambda^s$ ist. Nach 1 muss nun auch die Reihe $\sum \frac{\gamma^*_n}{\lambda^{sn}}$ und folglich auch die Reihe $\sum \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$ divergent sein, w. z. b. w.

Lemma 7. *Sei N eine natürliche Zahl $G_1 = G \cup \overline{K}_N$. $W_1(G, x) = 1$ gilt dann und nur dann, wenn $W_1(G_1, x) = 1$ gilt.*

Beweis. 1. Sei $W_1(G_1, x) = 1$, bezeichnen wir $A^*_n = G_1 \cup (E_3 - \overline{K}_n)$. Da $A_n \subset A^*_n$ ist, gilt

$$W(1, A_n, x) \geqq W(1, A^*_n, x) \, ,$$

woraus sich durch den Übergang zum Grenzwert $W_1(G, x) \geqq 1$ ergibt; daher ist $W_1(G, x) = 1$.

2. Für $x \in G$ sei $W_1(G, x) = 1$. Sei $w(x) = W_1(G, x) - W_1(G_i, x)$. Da $0 \leqq w(x) \leqq W(1, A_n, x)$ ist, gilt $\lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0$, also ist $\lim_{|x|\to\infty} W_1(G, x) = 1$, woraus $W_1(G_1, x) = 1$ für alle $x \in G_1$ ist.

Beweis des Satzes 9. Sei N so gross, dass $\sum_N^\infty \gamma^n \lambda^{-n} < \frac{1}{2}$. Weiter sei $n > N$, dann ist

$$W(1, A^*_{n+1}, x) \leqq W(1, A^*_n, x) + v_n(x)$$

und

$$W(1, A^*_n, x) \leqq W(1, A^*_N, x) + \sum_N^n v_k(x) \, ,$$

wo $v_n(x)$ das Potential der Menge e_n ist. Da $A^*_N = E_3$ ist, gilt $W(1, A^*_N, x) = 0$ und $v_k(0) \leqq \frac{\gamma_k}{\lambda_k}$, woraus wir $W(1, A^*_n, 0) < \frac{1}{2}$ erhalten; also kann (31) nicht gelten.

Satz 10. *Die Reihe $\sum \gamma_n \lambda^{-n}$ sei divergent. Dann ist $W_1(G, x) = 1$ für $x \in G$.*

Beweis. Nach unserer Anmerkung und Lemma 7 können wir uns auf

[11]) Es ist nötig sich dessen bewusst zu sein, dass wir über n addieren und dass k von n abhängig ist.

den Fall $\lambda = 2$, $0 \in G$ beschränken. Setzen wir $M_n^p = \mathrm{E}[x;\, 2^{\frac{n-1}{p}} \leqq |x| \leqq 2^{\frac{n}{p}}]$, $e_n^p = (E_3 - G) \cap M_n^p$ und γ_n^p die Kapazität von e_n^p. Offenbar gilt

$$\gamma_n \leqq \gamma_{np+1}^p + \gamma_{np+2}^p + \dots + \gamma_{(n+1)p}^p$$

und $2^{-n-\frac{1}{p}} \geqq 2^{-\frac{m}{p}} \geqq 2^{-(n+1)}$ für $np + 1 \leqq m \leqq (n+1)\,p$. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \,.\, 2^{-\frac{n}{p}}$ divergent ist. Folglich divergiert wenigstens eine der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{np^2+i}{p}} \gamma_{np^2+i}^p$, $i = 1, \dots, p^2$. Möge es die Reihe für $i = i_0$ sein. Wählen wir ein beliebiges positives $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine natürliche Zahl N_ε so, dass

$$\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} 2^{-\frac{np^2+i_0}{p}} \gamma_{np^2+i_0}^p > \frac{1}{\varepsilon}$$

ist. Bezeichnen wir mit w_m^p das Potential der Menge e_m^p. Weiter wollen wir die Funktion w folgendermassen definieren:

$$w = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N_\varepsilon} w_{np^2+i_0}^p}{\sum\limits_{0}^{N_\varepsilon} 2^{-\frac{np^2+i_0}{p}} \gamma_{np^2+i_0}^p} .$$

Um die Funktion w abschätzen zu können, brauchen wir die Entfernung der Mengen $e_{np^2+i_0}^p$ und $e_{kp^2+i_0}^p$ abschätzen. Diese Abschätzung wollen wir nun ableiten: Für $n > k$ ist

$$\varrho(e_{np^2+i_0}^p, e_{kp^2+i_0}^p) \geqq 2^{\frac{np^2+i_0-1}{p}} - 2^{\frac{kp^2+i_0}{p}} \geqq 2^{\frac{np^2+i_0}{p}} [2^{-\frac{1}{p}} - 2^{-p}]$$

und für $n < k$ ist

$$\varrho(e_{np^2+i_0}, e_{kp^2+i_0}^p) \geqq 2^{\frac{kp^2+i_0-1}{p}} - 2^{\frac{np^2+i_0}{p}} \geqq 2^{\frac{np^2+i_0}{p}} [- 2^{-p} + 2^{-\frac{1}{p}}] .$$

Die Funktion w ist auf der Menge $B = E_3 - \bigcup\limits_{n=1}^{N_\varepsilon} e_{np^2+i_0}^p$ harmonisch. Darum wird die Funktion w auf B kleiner sein als ihre beliebige Abschätzung auf der Menge $\bigcup\limits_{n=1}^{N_\varepsilon} e_{np^2+i_0}^p$. Für $n \neq m$ ist auf $e_{np^2+i_0}^p$

$$w_{mp^2+i_0}^p \leqq \gamma_{np^2+i_0}^p \frac{2^{-\frac{mp^2+i_0}{p}}}{-2^{-p} + 2^{-\frac{1}{p}}} ,$$

sodass

$$w(x) \leqq \frac{1 + (-2^{-p} + 2^{-\frac{1}{p}})^{-1} \sum\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N_\varepsilon} \gamma_{mp^2+i_0}^p 2^{-\frac{mp^2+i_0}{p}}}{\sum\limits_{0}^{N_\varepsilon} 2^{-\frac{mp^2+i_0}{p}} \gamma_{mp^2+i_0}^p} \leqq 1 + \varepsilon + z_p ,$$

wo $z_p = \dfrac{1 + 2^{-p} - 2^{-\frac{1}{p}}}{2^{-\frac{1}{p}} - 2^{-p}}$ ist. Aus diesen Ungleichungen folgt für $n > N_\varepsilon$

$$W(1, A_n, x) \geqq \frac{w(x)}{1 + \varepsilon + z_p}$$

und daher

$$W_1(x) \geqq \frac{w(x)}{1 + \varepsilon + z_p}\,.$$

Weil aber

$$\sum_{m=0}^{N_\varepsilon} w^p_{mp^2+i_0}(0) \geqq \sum_{m=0}^{N_\varepsilon} \gamma^p_{mp^2+i_0} 2^{-\frac{np^2+i_0}{p}}$$

gilt, ist $w(0) \geqq 1$ und folglich auch $W_1(0) \geqq \dfrac{1}{1 + \varepsilon + z_p}$. Da ε beliebig ist und wir z_p nachträglich durch ein grosses p beliebig klein machen können, ist $W_1(0) = 1$. Daraus folgt $W_1(x) = 1$ in der Umgebung von Null, folglich überall auf G, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 8 bis 10 lassen sich einige Folgerungen ziehen. Wenn $G_1 \subset G_2$ ist und G_2 normal ist, so ist auch G_1 normal; wenn G_1 nicht normal ist, so ist G_2 auch nicht normal. Wenn Z eine isometrische Abbildung ist, ist die Menge $Z(G)$ dann und nur dann normal, wenn G normal ist, usw.

Satz 11.[12]) *f sei im Interval $\langle a, \infty)$ eine stetige positive nichtwachsende Funktion Es sei $a > 0$, $f(a) < 1$. Wir bezeichnen $L = \mathrm{E}\,[x, x_1 \geqq a,\ 0 \leqq x_2 \leqq f(x_1), x_3 = 0]$ $V = \mathrm{E}\,[x, x_1 \geqq a, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leqq f(x_1)]$. Falls*

$$I = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\,|\lg f(t)|}$$

divergiert, ist $E_3 - L$ normal. Wenn dieses Integral konvergiert, dann ist $E_3 - V$ nicht normal.

Lemma. *Sei $R_1 = \mathrm{E}\,[x; |x_1| \leqq \beta,\ |x_2| \leqq \alpha, x_3 = 0]$, $R_2 = \mathrm{E}\,[x, |x_1| \leqq \beta, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leqq \alpha]$. Für $c(R_1)$ und $c(R_2)$ gilt*

$$\frac{\beta}{1 + \lg 2 + \lg \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}} \leqq c(R_1) \leqq c(R_2) \leqq \frac{2\beta}{\lg \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\sqrt{2}}}\,.$$

Beweis. Man findet leicht (siehe [10], Seite 188—191), dass die Kapazität des Elipsoides (mit den Halbachsen α, β, γ)

$$c(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{2}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s + \alpha^2)(s + \beta^2)(s + \gamma^2)}}}$$

[12]) Auf diesen Satz hat uns J. Mařík aufmerksam gemacht.

ist. Daraus erhalten wir für die Kapazität der Elipse

$$c(\alpha, \beta, 0) = \frac{2}{\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(s+\alpha^2)(s+\beta^2)}}}.$$

Nach kurzem Rechnen findet man leicht

$$\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(s+\alpha^2)(s+\beta^2)}} \leqq \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\beta^2} \frac{ds}{\sqrt{s(s+\alpha^2)}} + \int\limits_{\beta^2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^3}},$$

$$\int\limits_0^{\beta^2} \frac{ds}{\sqrt{s(s+\alpha^2)}} \leqq \lg \frac{2\beta^2+\alpha^2+2\sqrt{\beta^4+\alpha^2\beta^2}}{\alpha^2} \leqq 2 \lg \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha}, \quad \int\limits_{\beta^2}^\infty \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{2}{\beta}.$$

Es ist also

$$c(R_1) \geqq c(\alpha, \beta, 0) \geqq \frac{\beta}{\lg \frac{\alpha+\beta}{\alpha} + 1 + \lg 2}.$$

Ähnlich beweist man die zweite Ungleichung.

Beweis des Satzes 11. Man sieht leicht, dass aus der Konvergenz (Divergenz) des Integrals I die Konvergenz (Divergenz) der Reihe $\sum \frac{1}{|\lg f(2^n)|}$ folgt.

Sei $I = \infty$. Wir setzen $e_n = \mathrm{E}\,[x, x \in L, \ 2^{n-1} \leqq |x| \leqq 2^n]$, $e_n^* = \mathrm{E}\,[x, 2^{n-1} \leqq x_1 \leqq 2^n - 1, \ 0 \leqq x_2 \leqq f(2^n), \ x_3 = 0]$, $\gamma_n = c(e_n)$, $\gamma_n^* = c(e_n^*)$. Weil e_n^* eine Teilmenge von e_n ist, gilt $\gamma_n^* \leqq \gamma_n$. Zur Abschätzung γ_n^* benützt man das bewiesene Lemma. So erhalten wir

$$\gamma_n^* \geqq \frac{2^{n-2}}{n+1+\lg 2 + |\lg f(2^n)|}.$$

Daraus folgt die Divergenz der Reihe $\sum \gamma_n 2^{-n}$.[13]) Nach Satz 10 ist $E_3 - L$ normal.

Sei $I < +\infty$. Wir bezeichnen $\tilde{e}_n = \mathrm{E}\,[x, 2^n - 1 \leqq x_1 \leqq 2^{n+1}, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leqq f(2^n - 1)]$, $e_n = \mathrm{E}\,[x; x \in V, \ 2^n \leqq |x| \leqq 2^{n+1}]$, $\gamma_n = c(e_n)$, $\tilde{\gamma}_n = c(\tilde{e}_n)$. Weil $e_n \subset \tilde{e}_n$ ist, gilt $\tilde{\gamma}_n \geqq \gamma_n$. Aus der Ungleichnug für die Kapazität des Zylinders erhalten wir nach kurzem Rechnen

$$\tilde{\gamma}_n \leqq \frac{2^{n+2}}{|\lg f(2^n)|}.$$

Die Reihe $\sum \gamma_n 2^{-n}$ ist also konvergent, nach Satz 10 ist $E_3 - V$ nicht normal.

[13]) Denn es gilt folgender Satz: Die Reihe $\sum \frac{1}{n+a_n}$ divergiert, falls $\sum \frac{1}{a_n} = \infty$, $0 \leqq a_n \leqq a_{n+1}$ ist.

4. Verallgemeinerung des Satzes von Zaremba

Wir machen nun eine weitere Voraussetzung über das Gebiet G, welche wir im Folgenden beibehalten werden. (Mit Ausnahme der Bemerkung auf Seite 151). Wir setzen voraus, dass die Menge $\dot{G}$ beschränkt ist.

Untersuchen wir nun folgende Aufgabe: Es sei die in allen Punkten mit eventueller Ausnahme des Randpunktes $z \in \dot{G}$, stetige Funktion f am Rande von G gegeben. In der Umgebung des Punktes z ist $f(x) = O\left(\frac{1}{|x - z|}\right)$. Es wird eine in G harmonische Funktion u gesucht, welche in jedem regulären Randpunkt $y \neq z$ bis zum Werte von $f(y)$ stetig fortsetzbar ist und für welche die Ungleichung $|u(x)| \leqq \frac{c}{|x - z|}$ in G gilt. Wenn G nicht bechränkt ist, soll ausserdem noch $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ gelten. Diese Aufgabe wollen wir als Aufgabe D bezeichnen. Mit Hilfe der Kelvinschen Transformation und der Ergebnisse aus 1 unserer Arbeit lässt sich leicht beweisen, dass die Aufgabe D eine Lösung hat. Wir gelangen zu interessanten Ergebnissen, wenn wir von der Kugelinversion und den Ergebnissen des dritten Abschnittes zur Untersuchung der Eindeutigkeit der Aufgabe ausgehen. Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz 12. *Die Aufgabe D ist dann und nur dann eindeutig lösbar, wenn z ein regulärer Randpunkt ist.*

Zuerst führen wir zwei Hilfsätze an.

Lemma 9. *Sei $\xi = K(x)$ eine Kugelinversion, welche den Punkt z ins Unendliche transformiert und die Kugel mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt im Punkte z beibehält. Sei $G^* = K(G)$. Dann ist die Aufgabe D für das Gebiet G dann und nur dann eindeutig lösbar, wenn G^* normal ist.*

Den Beweis kann der Leser leicht selbst angeben.

Lemma 10. *Sei $0 < a < b$, $z = 0$, $M \subset \mathrm{E}(x; a \leqq |x| \leqq b)$. K habe dieselbe Bedeutung wie in Lemma 9. Sei $m = K(M)$ und $c(m)$ (resp. $c(M)$) die Kapazität von m (resp. M). Dann ist*

$$\frac{1}{b^2}\, c(M) \leqq c(m) \leqq \frac{1}{a^2}\, c(M)\,. \tag{33}$$

Beweis. Bezeichnen wir mit $V(x)$ das Potential von M und L die Komponente der Menge $E_3 - M$, welche die Punkte x enthält, für die $|x| > b$ ist. Es sei weiter $Q_r = E[x; |x| \leqq r]$. Es ist bekannt, dass $c(M) = c(E_3 - L)$ ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: a) z non $\in L$, b) $z \in L$.

a) In diesem Fall ist $Q_a \subset E_3 - L \subset Q_b$, also ist

$$a \leqq c(M) \leqq b\,. \tag{34}$$

Aus dem gleichen Grunde ist

$$\frac{1}{b} \leqq c(m) \leqq \frac{1}{a} \,. \tag{35}$$

Aus den Ungleichungen (34) und (35) folgt die Ungleichung (33) sofort.

b) Wir setzen vorerst voraus, dass der Rand der Menge L durch die soweit glatte Fläche Σ gebildet wird, dass $\dfrac{\partial V}{\partial n_+}$ stetig auf Σ fortsetzbar ist. (Siehe [13] S. 208, Satz 1 u. 2.) n_+ (resp. n_-) ist die äussere (nach $E_3 - L$ hineinzu gerichtete) resp. innere Normale zu Σ. Mit n_+^* und n_-^* wollen wir die äussere und innere Normale zu $\Sigma^* = K(\Sigma)$ bezeichnen und mit ξ die Abbildung des Punktes x d. h. $\xi = K(x)$ usw. Wir definieren weiter folgende Funktionen

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|} V(K^{-1}(\xi)) \,, \tag{36}$$

$$\mu(\xi) = -\frac{1}{4\pi b}\left(\frac{\partial v}{\partial n_+^*} - \frac{\partial v}{\partial n_-^*}\right). \tag{37}$$

Wir sehen aus Folgendem gleich, dass die Funktion μ existiert und stetig auf Σ^* ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n_+^*} &= \lim_{\xi\to\eta} \frac{v(\xi) - v(\eta)}{|\xi - \eta|} = \lim_{x\to y} \frac{|x|\,V(x) - |y|\,V(y)}{\dfrac{1}{|x|\,|y|}\,|x - y|} = \\ &= |y|^2 \lim_{x\to y} \frac{|x|\,V(x) - |y|\,V(y)}{|x - y|} \,. \end{aligned} \tag{38}$$

In den Gleichungen (38) konvergiert der Punkt ξ zu dem Punkt auf der Normalen $n_\pm^*$, der Punkt x zu dem Punkt y auf der Kreislinie, welche der Normalen durch die Abbildung von K entspricht. Weil K konform ist, erhalten wir

$$\frac{\partial v}{\partial n_\pm^*} = |y|^2 \left[\frac{\partial}{\partial n_\pm} |x|\; V(x)\right]_{x=y} = |y|^2\, V(y) \cos\alpha + |y|^3 \frac{\partial V(y)}{\partial n_\pm} \,,$$

wo α der Winkel zwischen der Normalen und dem Radiusvektor des Punktes y ist. Da $V(x) = 1$ und $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n_-} = 0$ für $x \in \Sigma$ ist, gilt $-\,4\pi b\mu(\xi) = |x|^3 \dfrac{\partial V(x)}{\partial n_+}$. Nach (37) und einigen bekannten Sätzen aus der Potentialtheorie ist

$$\frac{1}{b}\, v(\xi) = \iint_{\Sigma^*} \frac{\mu(\eta)}{|\xi - \eta|}\, d\sigma^* \,,$$

folglich ist

$$\iint_{\Sigma^*} \frac{\mu(\eta)}{|\xi - \eta|}\, d\sigma^* \leqq 1$$

und weiter

$$c(m) \geqq \iint\limits_{\Sigma^*} \mu(\eta)\, d\sigma^* = -\frac{1}{4\pi b} \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{|x|} \frac{\partial V(x)}{\partial n_+}\, d\sigma\,.$$

Es ist aber $\dfrac{\partial V}{\partial n_+} \leqq 0$, also ist

$$-\frac{1}{4\pi b} \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{|x|} \frac{\partial V(x)}{\partial n_+}\, d\sigma \geqq -\frac{1}{4\pi b^2} \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial V(x)}{\partial n_+}\, d\sigma = \frac{1}{b^2}\, c(M)\,, \tag{39}$$

$$c(M) \geqq \frac{1}{b^2}\, c(M)\,.$$

Wenn wir uns vergegenwärtigen, dass $m \subset \mathrm{E}\left[\xi;\, \dfrac{1}{b} \leqq |\xi| \leqq \dfrac{1}{a}\right]$ ist und die Mengen m und M vertauschen, so erhalten wir

$$c(M) \leqq a^2 c(m)\,. \tag{40}$$

Aus den Ungleichungen (39) und (40) folgen die Ungleichungen (33). Wir müssen jedoch noch die Forderung der Glattheit des Randes vermeiden. Wählen wir daher eine Folge von Mengen M_n, $M_n \subset M_{n+1}$, $\bigcup M_n = E_3 - L$ mit genügend glatten Rändern. Dass eine Folge derart wirklich existiert, siehe der Leser in [10] S. 317—319 nach. Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt von einem bestimmten n angefangen $M_n \subset E[x;\, (a - \varepsilon) \leqq |x| \leqq b + \varepsilon]$, also auch

$$\frac{1}{(a + \varepsilon)^2}\, c(M_n) \leqq c(m_n) \leqq \frac{8}{(b + \varepsilon)^2}\, c(M_n)\,.$$

Hieraus erhalten wir durch Übergang zum Grenzwert

$$\frac{1}{(a + \varepsilon)^2}\, c(M) \leqq c(m) \leqq \frac{1}{(b + \varepsilon)^2}\, c(M)\,, \tag{41}$$

denn $c(M_n) \to c(M)$ und $c(m_n) \to c(m)$ wie aus dem Harnackschen Satz hervorgeht. (Siehe [10] S. 249 u. 263.) Aus der Ungleichung (41) folgt die Ungleichung (33) sofort, denn ε ist beliebig.

Beweis des Satzes 12. e_n und γ_n mögen denselben Sinn wie in Satz 9 haben; $e_n^* = K(e_n)$, $\gamma_n^* = c(e_n^*)$. Nach Lemma 10 ist $\dfrac{\gamma_u}{\lambda^{2(n-1)}} \leqq \gamma_n^* \leqq \dfrac{\gamma_u}{\lambda^{2n}}$, woraus folgt, dass die Reihen $\sum \gamma_n \lambda^{-n}$, $\sum \gamma_n^* \lambda^n$ gleichzeitig konvergent oder divergent sind. Der Satz 12 folgt nun direkt aus den Sätzen 8—10, Lemma 9 und dem bekannten Wienerschen Satz. (Siehe [10], S. 330.)

Aus Satz 12 folgt die Erweiterung des heute schon klassischen Satzes von Zaremba (siehe [5], [6]), welche wir in den Sätzen 14 und 15 angeben werden. Es ist wohl bekannt, dass die auf G harmonische, bis auf eine endliche Anzahl von Punkten x^i stetig auf $\dot{G}$ zu Null fortsetzbare Funktion u gleich Null ist, wenn in der Umgebung des Punktes x^i: $u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^i|}\right)$ gilt. An einfachen Beispielen lässt sich zeigen, dass der Eindeutigkeitssatz nicht erfüllt ist, wenn allgemein in der Umgebung der ausserordentlichen Punkte $u(x) = O\left(\frac{1}{|x - x^i|}\right)$ ist. In den folgenden Sätzen beweisen wir, dass wenn die Punkte x^i reguläre Randpunkte sind, der Eindeutigkeitssatz auch im Falle $u(x) = O\left(\frac{1}{|x - x^i|}\right)$ gilt.

Satz 13. *Sei u eine auf G harmonische Funktion, x^i eine endliche Anzahl regulärer Randpunkte von G $(i = 1, \ldots, r)$. Für jeden regulären Randpunkt $y \neq x^i$ sei $\lim\limits_{x \to y} u(x) \leqq 0$. Es sei eine Konstante C so vorhanden, dass $|u(x)| \leqq$ $\leqq C \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{|x - x^i|}$ in G gilt. Es sei noch $u(x) = o(1)$ für $|x| \to \infty$, falls G nicht beschränkt ist. Dann ist $u(x) \leqq 0$ in G.*

Beweis. Sei $K_{i,n} = \mathrm{E}\left[x;\, |x - x^i| \leqq \frac{1}{n}\right]$, $G_{i,n} = G \cup K_{i,n}$ und

$$U_{i,n}(x) = \frac{1}{|x - x^i|} - W\left(\frac{1}{|x - x^i|},\ G_{i,n},\ x\right) \quad \text{für} \quad x \in G_{i,n}\,.$$

Da die Funktion $\lim\limits_{n \to \infty} W\left(\frac{1}{|x - x^i|}, G_{i,n}, x\right)$ die Lösung der Aufgabe D für das Gebiet G und die Funktion $f(x) = \frac{1}{|x - x^i|}$ ist, gilt nach Satz 12 $\lim\limits_{n \to \infty} U_{i,n}(x) =$ $= 0$ für $x \in G$. Nach den Voraussetzungen existiert eine Konstante C derart, dass

$$u(x) < C \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{|x - x^i|}$$

ist.

Zu jedem n existiert N_n so, dass $U_{i,n}(x) \geqq \frac{1}{2|x - x^i|}$ auf $\dot{K}_{i,N_n}$ ist. Daraus folgt aber $u(x) < 4C \sum\limits_{i=1}^{r} U_{i,n}(x)$ auf dem Rand des Gebietes $G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{i,N_n}$, also nach dem Maximumprinzip auch innerhalb dieses Gebietes. Wir erhalten $u(x) \leqq 0$ für $n \to \infty$.

Satz 14. *Sei u eine harmonische Funktion auf G, x^i seien reguläre Randpunkte $(i = 1, \ldots, r)$, $\lim\limits_{x \to y} u(x) = 0$ für reguläre Punkte $y \neq x^i$. Es sei eine Konstante C so vorhanden, dass $|u(x)| \leqq C \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{|x - x^i|}$ in G gilt. Falls G nicht beschränkt ist, sei noch $u(x) = o(1)$ für $|x| \to \infty$. Dann ist $u(x) = 0$ in G.*

Der Beweis folgt sofort aus Satz 13.

Satz 15. *u sei eine harmonische Funktion auf G,* $x^i \in \dot{G}$, $i = 1, \ldots, r$, *eine endliche Anzahl regulärer Randpunkte. Sei* $y^j \in \dot{G}$, $j = 1, \ldots, s$, *sei* U_k, $k = 1, \ldots, s$ *eine solche Umgebung des* y^k, *dass* x^i non $\in U_k$, $i = 1, \ldots, r$, y^j non $\in U_k$, $j = 1, \ldots, s$, $j \neq k$. *ist. Die Funktion u sei in jedem regulären Punkt* $y \neq x^i$, $y \neq y^j$ *stetig zu Null fortsetzbar. Es sei eine Konstante C so vorhanden, dass* $|u(x)| \leqq \leqq C \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{|x - x^i|}$ *in* $G - \bigcup_{k=1}^{s} U_k$ *gilt. Weiter sei* $u(x) = o\left(\frac{1}{|x - y^j|)}\right)$. *Falls G nicht beschränkt ist, sei noch* $u(x) = o(1)$ *für* $|x| \to \infty$. *Dann ist* $u(x) = 0$ *auf G.*

Beweis. Sei $K^*_{i,n} = \mathrm{E}\left[(x;\ |x - y^i| \leqq \frac{1}{n}\right]$. Wir wählen ε beliebig und N_1 so gross, dass $K^*_{i,n} \cap K^*_{j,n} = \emptyset$ für $i \neq j$ und für $n > N_1$ gilt. Es existiert $N_2 > N$ so, dass $u(x) \leqq \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{|x - y^j|}$ auf $G - \bigcup_{i=1}^{s} K^*_{i,n}$ für $n > N_2$ ist. Wenn wir nun den Satz 13 auf die Funktion $u(x) - \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{|x - y^j|}$ und das Gebiet $G - \bigcup_{i=1}^{s} K^*_{i,n}$ anwenden, so erhalten wir

$$u(x) \leqq \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{|x - y^j|}, \quad x \in G,$$

folglich auch $u(x) \leqq 0$. Analog gilt $u(x) \geqq 0$. Womit der Satz bewiesen ist.

Anmerkung. Die Ergebnisse der Abschnitte 3 und 4 lassen sich natürlich kombinieren, sodass wir noch allgemeinere Eindeutigkeitssätze erhalten können.

In dieser Arbeit wurde nur der Fall des Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung studiert. Mit Rücksicht auf die Arbeiten [17] und [18] können wir erwarten, dass unsere Ergebnisse auch auf allgemeinere eliptische Gleichungen übertragen werden können. Mit dieser Aufgabe wollen wir uns in unserer nächsten Arbeit beschäftigen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *M. Brelot*: La théorie moderne du potentiel. Ann. de l'Inst. Four. *IV*, 1952, 113—140.

[2] *M. Brelot*: Familles de Perron et problème de Dirichlet. Acta Szeget IX, fasc. III, 1939, 133—153.

[3] *M. Brelot*: Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. Ann. Ecol Normale *61*, 1944, 301—332.

[4] *J. Mařík*: Dirichletova úloha. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 257—282.

[5] *И. Г. Петровский*: Лекции об уравнениях с частными производными. Москва 1953.

[6] *S. Zaremba*: Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet. Bulletin de l'Acad. des Sc. Cracovie 1909, 561—563.
[7] *N. Wiener*: Certain Notions in Potential Theory. Jour. of Math. and Physics *3* (1924), 24—51.
[8] *M. B. Келдыш*: О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук *8* (1941), 171—231.
[9] *Courant R.-Hilbert D.*: Methoden der mathematischen Physik I, II. Berlin 1931, 1937.
[10] *O. D. Kellog*: Foundations of Potential Theory. Berlin 1929.
[11] *M. B. Келдыш*: О задаче Дирихле. ДАН СССР *32* (1941), 308—309.
[12] *R. Výborný*: Dirichletova úloha. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 99—100.
[13] *Н. М. Гюнтер*: Теория потенциала и ее применение к основным задачам мат. физики. Москва 1953.
[14] *L. Amerio*: Teoremi di esistenza per le equazini lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini illimitati. Rend. Acc. d'Italia *4* (1943), 287—298.
[15] *M. Krzyzański*: Sur le problème de Dirichlet pour l'équation du type elliptique dans un domaine non borné. Rend. Acc. Lincei, *4* (1948), 408—416.
[16] *M. Krzyzański*: Sur les solutions de l'équation du type elliptique discontinues sur la frontière du domaine de leur existence. Studia Mathematica *11* (1950), 95—125.
[17] *G. Tautz*: Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem. Math. Zeitsch. *39* (1935), 532—559.
[18] *O. A. Олейник*: О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа. Мат. сб. *24* (1949), 3—14.

Резюме

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОДНОЗНАЧНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА ОБЛАСТЯХ ОБЩЕГО ВИДА

ИВО БАБУШКА, РУДОЛЬФ ВЫБОРНЫ (Ivo Babuška, Rudolf Výborný), Прага

(Поступило в редакцию 13/XII 1957 г.)

Работа посвящается задаче Дирихле на неограниченных областях общего вида. Для простоты все рассуждения проводятся для E_3, хотя с небольшими изменениями их можно применить и к E_n. Работа разделяется на четыре параграфа. В первом вводится понятие решения Винера для неограниченных областей, а во втором параграфе исследуется зависимость между решениями Винера и Перрона на неограниченных областях. В параграфе третьем решается вопрос о единственности задачи Дирихле на неограниченных областях в классе ограниченных функций. Главная часть этого параграфа состоит в утверждении, что необходимым и достаточным условием единственности на неограниченных областях в классе ограниченных функций является требование, чтобы точка ∞ перешла при сферической инверсии в регуляр-

ную точку границы. Далее здесь намечены некоторые следствия этого утверждения. Четвертый, заключительный, параграф показывает связь между задачей Дирихле на неограниченных областяг в классе ограниченных функций и задачей Дирихле на ограниченных областях, если в окрестности одной точки границы решение ведет себя, как т. наз. элементарное решение. Здесь также обобщается теорема Зарембы в том смысле, что в окрестности точки границы, являющейся регулярной точкой, можно допустить, не нарушая теоремы об однозначности, что искомое решение ведет себя как $O\left(\frac{1}{r}\right)$. В случае нерегулярной точки границы можно при сохранении справедливости теоремы об однозначности допустить возрастание не больше, чем $o\left(\frac{1}{r}\right)$.