Ivo Vrkoč

Интегральная устойчивость

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 1, 71–129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100342

ИНТЕГРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

ИВО ВРКОЧ (Ivo Vrkoč), Прага

(Поступило в редакцию 10/IV 1958 г.)

В настоящей статье вводятся новые понятия устойчивости, интегральная и асимптотическая интегральная устойчивость. Эти новые виды устойчивости характеризуются здесь при помощи функций Ляпунова и сравниваются с некоторыми, уже известными, видами устойчивости.

Настоящая работа посвящается интегральной и асимптотической интегральной устойчивости. Понятия интегральной и асимптотической интегральной устойчивости возникли путем обобщения устойчивости при постоянно действующих возмущениях и сильной устойчивости, см. определения 4 и 3.

Сильная устойчивость была уже охарактеризована в работе Я. Курцвейля [1], однако, по сравнению с устойчивостью при постоянно действующих возмущениях она имеет то преимущество, что ее можно охарактеризовать функцией Ляпунова простых свойств. Перейдем к понятию интегральной устойчивости. Пусть движение какой-либо механической системы описывается системой n дифференциальных уравнений, которую мы запишем в векторном виде

$$x = [x_1, \ldots, x_n]\,, \quad X = [X_1, \ldots, X_n]\,, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x)\,, \tag{1}$$

где $X(t, x)$ — векторная функция, определенная в полупространстве $t \geqq 0$, в котором она удовлетворяет условию $X(t, 0) \equiv 0$ и условиям Каратеодори

1. $X(t, x)$ — измеримая функция t для фиксированного x.

2. $X(t, x)$ — непрерывная функция x для фиксированного t.

3. Для каждой области $\|x\| \leqq a$, $0 \leqq t \leqq b$ существует интегрируемая по Лебегу функция $m(t)$ такая, что в этой области имеет место $\|X(t, x)\| \leqq \leqq m(t)$.

Под решением здесь подразумевается решение интегрального уравнения

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))\, \mathrm{d}\tau .$$

Норму вектора x мы определим так: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; вариацию векторной функции $x(t)$ определим соотношением $\operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} x(t) = \sup \sum_{i=1}^{m} \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\|$ для всех подразделений $a \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leqq b$.

Предположим, что без возмущающих влияний внешней среды (т. е. без влияний, которые в дифференциальном уравнении (1) не отмечены) движение системы описывается решением $x \equiv 0$ уравнения (1). Возмущающее воздействие внешних сил можно выразить векторной функцией $\eta(t, x)$, которую мы и присоединим к правой части уравнения (1). Итак, в действительности система описывается векторным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x) + \eta(t, x) , \tag{2}$$

где $\eta(t, x)$ также удовлетворяет условиям Каратеодори. ,,Величину'' влияния возмущающих внешних сил мы будем измерять при помощи интеграла $\int_0^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq \delta} \|\eta(t, x)\|\, \mathrm{d}t$. Мы будем считать систему интегрально устойчивой (точное определение будет дано позднее), если при малых значениях $\int_0^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq \delta} \|\eta(t, x)\|\, \mathrm{d}t$ решение $x(t)$, $x(0) = 0$ уравнения (2) будет мало отличаться от $x \equiv 0$ для всех $t \geqq 0$.

В отличие от устойчивости при постоянно действующих возмущениях, где $\|\eta(t, x)\|$ мало для всех $t \geqq 0$, здесь может наступить случай, когда $\|\eta(t, x)\|$ принимает на малом интервале большие значения. Отсюда видно, что систему, на которую внешняя среда может воздействовать в течение краткого времени большой силой, удобнее всего исследовать с точки зрения интегральной устойчивости.

Приведем теперь точные определения.

Определение 1 (интегральной устойчивости). Нулевое решение $x \equiv 0$ уравнения (1) является *интегрально устойчивым*, если для произвольного $\delta > 0$ существует $B(\delta) > 0$ так, что $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ и что удовлетворяет следующему требованию:

Пусть относительно функции $\eta(t, x)$ справедливо $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\|\, \mathrm{d}t < \delta$; тогда каждое решение $x(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию

$\|x(t_0)\| < \delta$ можно продолжить для всех $t \geqq t_0$ и $\|x(t)\| < B(\delta)$ для $t \geqq t_0$ (t_0 может иметь различные значения для различных $x(t)$).

Определение 2 (асимптотической интегральной устойчивости). Нулевое решение $x \equiv 0$ уравнения (1) является *асимптотически интегрально устойчивым*, если оно интегрально устойчиво и если для любых чисел $\delta > 0$, $\eta > 0$ существуют числа $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$ так, что для всех решений уравнения (2), для которых

$$\|x(t_0)\| < \delta\,, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \,\mathrm{d}t < \gamma(\delta, \eta)$$

имеет место неравенство $\|x(t)\| < \eta$ для $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$. Число $B(\delta)$ выбрано согласно определению интегральной устойчивости.

Если предположить, что правая часть векторного дифференциального уравнения непрерывна, то получим более сильные результаты. Так как мы будем этот случай рассматривать особо, запишем такое уравнение в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Y(t, x)\,, \quad Y(t, 0) \equiv 0\,, \tag{3}$$

где $Y(t, x)$ — непрерывная векторная функция.

Теперь мы приведем основные виды устойчивости, которые в дальнейшем будем сравнивать.

Определение 3. Нулевое решение $x \equiv 0$ системы (3) мы назовем *сильно устойчивым*, если для произвольных чисел $\delta > 0$, $\eta > 0$ существуют числа $B(\delta) > 0$, $T(\delta, \eta) > 0$ так, что $B(\delta) \to 0$ монотонно с $\delta \to 0$, и справедливо утверждение, что каждое решение $x(t)$ системы (3), для которого $\|x(t_0)\| < \delta$, можно продолжить для всех $t \geqq t_0$ и имеет место $\|x(t)\| < B(\delta)$ для $t \geqq t_0$ и $\|x(t)\| < \eta$ для $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$.

Определение 4. Нулевое решение $x \equiv 0$ системы (3) мы назовем *устойчивым* при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ так, что для всех решений векторного уравнения $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Y(t, x) + R(t, x)$, для которых $\|x(t_0)\| < \eta_1$, имеет место $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$ в том случае, когда $\|R(t, x)\| < \eta_2$, как только $\|x\| < \varepsilon$.

Определение 5. Нулевое решение $x \equiv 0$ уравнения (1) мы назовем *вариационно устойчивым*, если для любого $\delta > 0$ существует $B(\delta) > 0$ так, что $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ и что для любой векторной функции $y(t)$ с конечным изменением, определенной на интервале $0 \leqq t \leqq T < \infty$, справедливо утверждение: если $y(0) = 0$, $\operatorname*{var}\limits_{\langle 0, T\rangle} (y(t) - \int\limits_0^t X(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau) < \delta$, то $\|y(t)\| < B(\delta)$ для $0 \leqq t \leqq T$.

Прежде чем приступить к формулировке результатов этой работы, приведем еще одно определение.

Определение 6. Непрерывную функцию $V(t, x)$, определенную во всем полупространстве $t \geqq 0$, мы назовем *положительно* (*отрицательно*) *определенной в целом*, если существует функция $U(x)$, определенная и непрерывная для всех x, причем $V(t, 0) \equiv U(0) = 0$, $V(t, x) \geqq U(x) > 0$ для $x \neq 0$ и $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} U(x) = \infty$, соотв. $V(t, 0) \equiv U(0) = 0$, $V(t, x) \leqq -U(x) < 0$ для $x \neq 0$.

На первом месте приведем теорему, в которой интегральная устойчивость характеризуется при помощи функций Ляпунова.

Теорема 1. *Решение $x \equiv 0$ уравнения* (1) *является интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная на всем полупространстве $t \geqq 0$ и обладающая следующими свойствами*:

1. $V(t, x)$ — *функция, положительно определенная в целом*,
2. $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, *где K — положительная постоянная*,
3. $V(t, x(t))$ — *невозрастающая функция t, если $x(t)$ есть решение уравнения* (1).

Следующая теорема характеризует асимптотическую интергальную устойчивость.

Теорема 2. *Решение $x \equiv 0$ уравнения* (1) *является асимптотически интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная во всем полупространстве $t \geqq 0$ так, что*

1. $V(t, x)$ — *функция, положительно определенная в целом*,
2. $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, *где K — положительная постоянная*,
3. $\limsup\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq -U_2(x(t))$,

если $x(t)$ есть решение уравнения (1) *и если предположить, что функция $U_2(x)$ непрерывна и определена для всех x, $U_2(0) = 0$, $U_2(x) > 0$ для $x \neq 0$.*

Для уравнений с непрерывными правыми частями справедливы, конечно, теоремы 1, 2, однако, предполагая интегральную устойчивость и асимптотическую интегральную устойчивость, можно доказать больше.

Теорема 3. *Если для дифференциального уравнения* (3) *существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t \geqq 0$, где она удовлетворяет условиям* 1, 2, 3 *из теоремы* 1, *то решение $x \equiv 0$ является интегрально устойчивым.*

Наоборот, если решение $x \equiv 0$ уравнения (3) *интегрально устойчиво, то существует функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t > 0$, где* *она обладает частными производными всех порядков по $t, x_1, \ldots, x_n$ и удовлетворяет условиям 1, 2, 3 из теоремы 1.*

Теорема 4. *Если для дифференциального уравнения (3) существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t \geqq 0$, где она удовлетворяет условиям 1, 2, 3 из теоремы 2, то решение $x \equiv 0$ является асимптотически интегрально устойчивым.*

Наоборот, если решение $x \equiv 0$ уравнения (3) асимптотически интегрально устойчиво, то существует функция $V(t, x)$, определенная во всем полупространстве $t > 0$, где она обладает частными производными всех порядков по $t, x_1, \ldots, x_n$ и удовлетворяет условиям 1, 2, 3 из теоремы 2.

Сравнивая теоремы 1 и 3 можно поставить вопрос, нельзяли и для уравнения (1) построить функцию $V(t, x)$ так, чтобы она обладала частными производными всех порядков. Мы покажем, что при одних условиях Каратеодори построить локально липшицовскую функцию $V(t, x)$ нельзя. В примере 1 мы рассмотрим дифференциальное уравнение с интегрально устойчивым нулевым решением $x \equiv 0$, для которого не существует локально липшицовской функции $V(t, x)$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1.

В следующей части мы без труда покажем, что если для уравнения (3) существует непрерывная функция $V(t, x)$, обладающая в полупространстве $t \geqq 0$ непрерывными частными производными по $t, x_1, \ldots, x_n$ хотя бы первого порядка и удовлетворяющая всем трем условиям из теоремы 2, то $x \equiv 0$ будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Таким образом мы получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Если решение $x \equiv 0$ уравнения (3) является асимптотически интегрально устойчивым, то оно будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях.*

Итак, асимптотическая интегральная устойчивость учитывает не только влияния, действующие краткое время с большой интенсивностью, как было уже сказано выше, но и действующие (бесконечно) долгое время возмущения слабой интенсивности. Однако, устойчивость при постоянно действующих возмущениях не является эквивалентной асимптотической интегральной устойчивости. Действительно, мы приведем пример дифференциального уравнения, для которого $x \equiv 0$ будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, но не будет интегрально устойчивым.

Связь между асимптотической интегральной устойчивостью и сильной устойчивостью можно выяснить сравнением определений. Ясно, что решение сильно устойчиво, если оно асимптотически интегрально устойчиво. И в этом случае мы приведем систему дифференциальных уравнений, для которых $x \equiv 0$ будет сильно устойчивым, не являясь одновременно интегрально устойчивым.

Далее докажем еще следующую эквивалентность:

Теорема 6. *Решение уравнения* (1) *будет интегрально устойчивым тогда и только тогда, если оно вариационно устойчиво.*

В дальнейшей части будет доказана вспомогательная теорема 1, благодаря которой можно будет легко доказать, что интегральная устойчивость следует из вариационной устойчивости. Дело в том, что согласно этой вспомогательной теореме можно в определении 1 ограничиться функциями $\eta(t)$, не зависящими от x. Тогда определение интегральной устойчивости можно сформулировать так:

Решение $x \equiv 0$ уравнения (1) будет интегрально устойчивым, если к любому $\delta > 0$ можно подобрать $B(\delta) > 0$ так, что $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ и что выполняется условие $\|x(t)\| < B(\delta)$ для $t \geqq t_0$, если $x(t)$ есть абсолютно непрерывная векторная функция (т. е. если ее составляющие суть абсолютно непрерывные функции) такая, что

$$\|x(t_0)\| < \delta\,, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \left\| \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau < \delta\,.$$

Сравнение с определением 5 (вариационной устойчивости) показывает, что из вариационной устойчивости вытекает интегральная устойчивость. Доказательство обратного утверждения более сложно и будет проведено в дальнейшей части. Вариационная устойчивость была впервые определена Окамура и названа им сильной устойчивостью. Его работа автору недоступна, но сводка ее результатов содержится в работе Т. Иошизавы [2]. Название сильной устойчивости не могло быть использовано автором, так как он им пользуется в другом смысле (см. определение 3). В автономном случае ее Окамура охарактеризовал при помощи функции Ляпунова $V(x)$.

В автономном случае можно охарактеризовать интегральную и асимптотическую интегральную устойчивость следующим образом.

Теорема 7. *Решение $x \equiv 0$ векторного уравнения*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x)\,, \quad X(0) = 0 \tag{4}$$

будет интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует функция $V(x)$, определенная и непрерывная для всех x и такая, что удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(x)$ — *функция положительно определенная в целом, т. е.* $V(x) > 0$ *для всех* $x \neq 0$, $V(0) = 0$ *и* $\lim\limits_{||x|| \to \infty} V(x) = \infty$

2. $|V(x) - V(y)| \leqq K||x - y||$, *где* K — *положительная постоянная*,

3. $V(x(t))$ — *невозрастающая функция* t, *если* $x(t)$ *является решением уравнения* (4).

Теорема 8. *Решение векторного уравнения* (4) *будет асимптотически интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует непрерывная функция* $V(x)$, *определенная для всех* x *и такая, что удовлетворяет условиям* 1 *и* 2 *из теоремы* 7 *и условию*

3′. *Имеет место неравенство* $\limsup\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{V(x(t + \Delta t)) - V(x(t))}{\Delta t} \leqq - U(x(t))$ *для всех решений* $x(\tau)$, $x(t) = x$ *уравнения* (4), *для которых* $x \neq 0$, и $U(x)$ *определена и непрерывна для всех* x, $U(x) > 0$, *для* $x \neq 0$.

Если векторная функция в правой части векторного уравнения (1) определена не для всех x, а только в некоторой области $t \geqq 0$, $||x|| \leqq a$, где $a > 0$, то нужно ограничиться локальным определением интегральной и асимптотической интегральной устойчивости. Это значит, что в определениях 1 и 5 (интегральной и вариационной устойчивостей) $B(\delta)$ существует лишь для чисел δ, меньших, чем некоторая положительная постоянная b, $b \leqq a$. В определениях 2 и 3 (асимптотической интегральной и сильной устойчивостей) числа $T(\delta, \eta)$, $\gamma(\delta, \eta)$ существуют только для δ, η, меньших, чем некоторая постоянная $c > 0$, $c \leqq a$. Не представляет труда перевести этот случай на рассматриваемый здесь случай интегральной и асимптотической интегральной устойчивости в целом. Итак, можно построить функции $V(t, x)$, которые будут определены в некоторой области $t \geqq 0$, $||x|| \leqq h < a$ и которые позволят охарактеризовать интегральную и асимптотическую интегральную устойчивость в локальном смысле.

В работе [1] Я. Курцвейль охарактеризовал сильную устойчивость в автономном случае так:

Решение $x \equiv 0$ уравнения (4) будет сильно устойчивым тогда и только тогда, если существует функция $V(x)$, определенная для всех x, причем она обладает частными производными всех порядков и удовлетворяет условиям:

1. $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ для $x \neq 0$, $\lim\limits_{||x|| \to \infty} V(x) = \infty$.

2. $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} X_i(x) = \limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V(x(t + \Delta t)) - V(x(t))}{\Delta t} \leqq - W(x),$$

где $W(x)$ — непрерывная функция, определенная для всех x, $W(0) = 0$, $W(x) > 0$ для $x \neq 0$, и где $x(\tau)$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $x(t) = x$.

Если ограничиться некоторой областью $\|x\| \leqq a$, то функция $V(x)$ обладает в этой области ограниченными частными производными и является в этой области липшицовской. Отсюда следует (см. доказательство теоремы 12), что $x \equiv 0$ является в локальном смысле асимптотически интегрально устойчивым. Если, наоборот, решение $x \equiv 0$ уравнения (4) в локальном смысле асимптотически интегрально устойчиво, то из сравнения определений следует, что оно (также в локальном смысле) и сильно устойчиво. Итак, в автономном случае асимптотическая интегральная устойчивость локально эквивалентна сильной устойчивости. На вопрос, эквивалентнали асимптотическая интегральная устойчивость по определению 2 (в целом) сильной устойчивости по определению 3 (в целом) в автономном случае, нам дает отрицательный ответ пример 3.

В заключение этой части приведем схематическое изображение соотношений между отдельными видами устойчивости, которые здесь исследуются.

$$\begin{tikzcd}
& \text{Асимптотическая интегральная устойчивость} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\text{Сильная устойчивость} \arrow[r, shift left, "\times" marking] \arrow[rrr, bend right, "\times" marking] & \text{Интегральная устойчивость} \arrow[l, shift left, "\times" marking] \arrow[r, shift left] & \text{Вариационная устойчивость} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "\times" marking] & \text{Устойчивость при постоянно действующих возмущениях} \arrow[l, shift left, "\times" marking] \arrow[lll, bend left=40, "\times" marking]
\end{tikzcd}$$

Стрелка означает импликацию. Перечеркнутая стрелка значит, что импликация в направлении стрелки не имеет места.

Эта схема остается в силе и в автономном случае за исключением соотношения

Сильная устойчивость $\not\longrightarrow$ Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Дифференциальное уравнение, правая часть которого равна тождественно нулю, обладает интегрально устойчивым решением — в то же время это решение не является ни сильно устойчивым, ни устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Если какое-либо нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, из этого еще не следует, что все остальные решения сходятся к нулю, и, следовательно, это нулевое решение не обязательно будет сильно устойчивым. Наоборот, то обстоятельство, что нулевое решение, являющееся сильно устойчивым, не обязательно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, следует из примера 2. Интересно, что при исследовании устойчивости в первом приближении встречаются функции $V(t, x)$, обладающие следующими свойствами: $V(t, x)$ есть непрерывная функция своих аргументов в области

$$\|x\| < A,\ t \geqq 0,\ c_1\|x\| \leqq V(t, x) \leqq c_2\|x\| ,$$

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq L\|x - y\| ,\quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x) \leqq - \|x\| .$$

Тогда, по теореме 2, решение $x \equiv 0$ будет асимптотически интегрально устойчивым, однако, эти требования являются более сильными, чем требования теоремы 2.

Точно так же добавочные члены $\eta(t, x)$ в неукороченной системе рассматриваются в аналогичном виде $\|\eta(t, x)\| \leqq \|x\|\, h(t)$, где $h(t)$ — интегрируемая функция, $\int\limits_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}t < \infty$. В отличие от асимптотической интегральной устойчивости здесь $\eta(t, 0) \equiv 0$.

Исследованием устойчивости в первом приближении, когда добавочные члены имеют этот вид, занимаются Р. Беллман [4], Г. А. Антошевич [5] и В. Е. Гермаидзе [6], который рассматривает добавочные члены более общего вида. В статье [7] рассматривается устойчивость, аналогичная интегральной устойчивости, но не эквивалентная ей; кроме того она исследуется там при иных предположениях относительно дифференциальных уравнений.

I

Вместо теорем 1 и 2 мы докажем эквивалентные теоремы 1′ и 2′. Для доказательства эквивалентности нам нужно будет сначала доказать некоторые вспомогательные теоремы и доказательство эквивалентности будет проведено позднее. В статье мы кроме того ссылаемся на леммы, сосредоточенные и доказанные в конце статьи. Прежде чем формулировать теоремы 1′ и 2′, дадим еще одно определение.

Определение 7. Функцию $V(t, x)$, определенную в полупространстве $t \geqq 0$ мы назовем абсолютно непрерывной, если к любым числам $S > 0$. $T > 0$ можно подобрать неотрицательные интегрируемые функции

$$\varphi(\eta),\ \text{определенную для}\ 0 \leqq \eta \leqq S ,$$
$$\psi(\eta),\ \text{определенную для}\ 0 \leqq \eta \leqq T$$

так, что справедливо утверждение: если точки $[t, x]$, $[\tau, y]$ удовлетворяют соотношениям

$$0 \leqq t \leqq T, \quad 0 \leqq \tau \leqq T, \quad \|x\| \leqq S, \quad \|y\| \leqq S$$

то

$$|V(t, x) - V(\tau, y)| \leqq \left|\int_t^T \psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right| + \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_i}^{y_i} \varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right|.$$

Теореме 1 об интегральной устойчивости эквивалентна

Теорема 1′. *Решение $x \equiv 0$ уравнения (1) будет интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует абсолютно непрерывная функция $V(t, x)$, определенная во всем полупространстве $t \geqq 0$ и обладающая там следующими свойствами:*

1. *$V(t, x)$ — положительно определена в целом,*
2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, где K — положительная постоянная,*
3. *$V(t, x(t))$ — невозрастающая функция t, если $x(t)$ является решением уравнения (1).*

Для асимптотической интегральной устойчивости справедлива аналогичная теорема:

Теорема 2′. *Решение $x \equiv 0$ уравнения (1) будет асимптотически интегрально устойчивым тогда и только тогда, если существует абсолютно непрерывная функция $V(t, x)$, определенная во всем полупространстве так, что*

1. *$V(t, x)$ положительно определенна в целом,*
2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, где K — положительная постоянная,*
3. $\limsup\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq - U_2(x(t))$,

если $x(t)$ является решением уравнения (1) и если функция $U_2(x)$ непрерывна и определена для всех x, $U_2(0) = 0$, $U_2(x) > 0$ для $x \neq 0$.

Доказательство эквивалентности теорем 1 и 1′, соотв. теорем 2 и 2′ будет проведено позднее.

Теперь мы упомянем о главном *результате теории Каратеодори.*

Теорема. *Если векторная функция $X(t, x)$ в правой части векторного дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условиям Каратеодори, то для каждой точки $[\tau, \xi]$ существует решение $x(t)$ векторного уравнения (1), удовлетворяющее тождеству $x(\tau) \equiv \xi$ и определенное на интервале $|t - \tau| \leqq \beta$ $(\beta > 0)$.*

Если теперь решение $x \equiv 0$ векторного уравнения (1) интегрально устойчиво, то ясно, что каждое решение уравнения (1) можно продолжить для всех $t \geqq \tau$. Решения векторных уравнений (1), (2) абсолютно непрерывны. Покажем прежде всего, что возмущающие члены $\eta(t, x)$ можно выбирать независимо от x. Во-вторых, покажем, что можно рассматривать только те решения векторного уравнения (2), которые обладают непрерывными производными.

Вспомогательная теорема 1. *Решение $x \equiv 0$ векторного уравнения* (1) *будет интегрально устойчивым тогда и только тогда, если к любому числу $\delta > 0$ можно подобрать число $B(\delta) > 0$ так, что $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ и что для всех решений векторного уравнения*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x) + \varphi(t) \tag{5}$$

имеет место $\|x(t)\| < B(\delta)$ для $t \geqq t_0$, если

$$\|x(t_0)\| < \delta\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t < \delta\,.$$

Вспомогательная теорема 2. *Решение $x \equiv 0$ векторного уравнения* (1) *будет асимптотически интегрально устойчивым тогда и только тогда, если оно интегрально устойчиво и к любым числам $\delta > 0$, $\eta > 0$ можно подобрать числа $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$ так, что для всех решений векторного уравнения* (5) *имеет место $\|x(t)\| < \eta$ для $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$, если $\|x(t_0)\| < \delta$, $\int_{t_0}^{\infty} \|\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t < \gamma(\delta, \eta)$.*

Покажем, что решение $x \equiv 0$ векторного уравнения (1) интегрально устойчиво, если справедливо утверждение вспомогательной теоремы 1. К произвольному числу $\delta > 0$ подберем число $B(\delta) > 0$ согласно вспомогательной теореме 1.

Допустим, что для $\eta(t, x)$ имеет место $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \, \mathrm{d}t < \delta$ и $\|x(t_0)\| < \delta$. Если бы было $\|x(t)\| < B(\delta)$ для $t \in \langle t_0, t^*)$ и $\|x(t^*)\| = B(\delta)$, то, положив $\varphi(t) = \eta(t, x(t))$ для $t \in \langle t_0, t^* \rangle$, получим

$$\int_{t_0}^{t^*} \|\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t^*} \|\eta(t, x(t))\| \, \mathrm{d}t \leqq \int_{t_0}^{t^*} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \, \mathrm{d}t < \delta\,.$$

Решение $x(t)$ уравнения (5) можно продолжить решением векторного уравнения (1) для всех $t \geqq t^*$. (Решение $x \equiv 0$ устойчиво.) Итак, $\varphi(t) = 0$ для $t > t^*$. Отсюда следует

$$\|x(t_0)\| < \delta\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t < \delta\,, \quad \|x(t^*)\| = B(\delta)\,,$$

что, однако, невозможно. Подобным же образом можно доказать и вспомогательную теорему 2.

Теперь докажем, что возмущения $\varphi(t)$ можно подобрать так, что данные решения уравнения (5) обладают непрерывными производными.

Вспомогательная теорема 3. *Пусть $x(t)$ — абсолютно непрерывная векторная функция (т. е. ее составляющие абсолютно непрерывны), определенная на интервале $\langle t_0, t_1\rangle$, для которой*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau < \delta\ ;$$

тогда существует векторная функция $y(t)$, составляющие которой обладают непрерывными производными, определенная на интервале $\langle t_0, t_1\rangle$ и выполняющая условия

$$\|x(t) - y(t)\| < \delta\ , \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau < 2\delta\ .$$

Доказательство. К последовательности чисел $\eta_n > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ можно согласно лемме 1 (приведенной в конце статьи) подобрать последовательность векторных функций $y_n(\tau)$ так, что

$$\|x(t) - y_n(t)\| \leqq \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau < \eta_n < \frac{1}{2}\,\delta\ .$$

Так как $X(t, x)$ — непрерывная функция x при фиксированном t, имеет место $\|X(t, x(t)) - X(t, y_n(t))\| \to 0$, если $\|x(t) - y_n(t)\| \to 0$. По теореме Лебега имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \|X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, y_n(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \to 0\ .$$

Итак, можно подобрать векторную функцию $y(t)$ так, чтобы

$$\int_{t_0}^{t_1} \|X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau < \frac{\delta}{2}\ .$$

Тогда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t_1} \|X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \leqq 2\delta\ ,$$

и вспомогательная теорема 3 доказана.

При помощи вспомогательной теоремы 3 нетрудно доказать следующие две теоремы, которые мы однако приведем без доказательства.

Теорема 9. *Решение $x \equiv 0$ векторного уравнения (1) будет интегрально устойчивым тогда и только тогда, если к любому числу $\delta > 0$ можно подобрать число $B(\delta) > 0$ так, что $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ и что имеет место утверждение:*

Если $y(t)$ — векторная функция для $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ (интервал $\langle t_0, t_1 \rangle$ может быть для различных функций различным), составляющие которой обладают непрерывными производными и если

$$\|y(t_0)\| < \delta\,, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0}^{\infty} \|\varphi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau < \delta\,,$$

то $\|y(t)\| < B(\delta)$ для $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Векторную функцию $y(t)$ можно также считать решением уравнения (5), где

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \text{ для } t \in \langle t_0, t_1 \rangle, \; \varphi(t) = 0 \text{ для } t > t_1\,.$$

Теорема 10. *Решение $x \equiv 0$ векторного уравнения (1) будет асимптотически интегрально устойчивым тогда и только тогда, если оно интегрально устойчиво по теореме 9 и если к любым числам $\delta > 0$, $\eta > 0$ можно подобрать числа $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$ так, что справедливо утверждение:*

Если $y(t)$ — векторная функция, определенная на интервале $\langle t_0, t_1 \rangle$, где ее составляющие обладают непрерывными производными, и если имеет место

$$\|y(t_0)\| < \delta\,, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0}^{\infty} \|\varphi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau < \gamma(\delta, \eta)\,,$$

то $\|y(t)\| < \eta$ для $t \in \langle t_0 + T(\delta, \eta), t_1 \rangle$.

Этим самым мы привели определения интегральной и асимптотической интегральной устойчивости к такому виду, что можно перейти к доказательствам устойчивости в случае, когда существуют функции $V(t, x)$ и обладают свойствами, требуемыми в теоремах 1′ или 2′. Докажем прежде всего

Вспомогательную теорему 4. *Если для векторного уравнения (1) существует абсолютно непрерывная функция $V(t, x)$ или, соответственно, если для векторного уравнения (3) существует непрерывная функция $V(t, x)$ такая, что*

1. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, где K — положительная постоянная,*
2. $\limsup\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq \Phi(x(t))\,,$

где $x(t)$ есть решение уравнения (1) *и $\Phi(x)$ — непрерывная функция, определенная для всех x, то*

$$V(t_1, y(t_1)) \leqq V(t_0, y(t_0)) + K \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(y(t))\, \mathrm{d}t \quad (**)$$

для любой векторной функции $y(t) \equiv [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$, определенной на интервале $\langle t_0, t_1 \rangle$, составляющие которой обладают в каждой точке этого интервала непрерывными производными.

Доказательство. Пусть τ — произвольное число из интервала $\langle t_0, t_1 \rangle$. Через точку $[\tau, y(\tau)]$ проходит хоть одно решение $x(t)$ уравнения (1). Следовательно, $x(\tau) \equiv y(\tau)$. Для $\Delta t > 0$ ввиду условия 1 будет

$$|V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau + \Delta t, x(\tau + \Delta t))| \leqq K \|y(\tau + \Delta t) - x(\tau + \Delta t)\| =$$

$$= K \left\| y(\tau + \Delta t) - y(\tau) - \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} X(\xi, x(\xi))\, \mathrm{d}\xi \right\| \leqq$$

$$\leqq K \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau + \Delta} X(\xi, x(\xi))\, \mathrm{d}\xi \right\| \Delta t + \varphi(\Delta t)\, \Delta t\,,$$

где $\varphi(\Delta t) \to 0$, если $\Delta t \to 0$.

В силу условия 2 получим

$$|V(\tau + \Delta t, x(\tau + \Delta t)) - V(\tau, x(\tau))| \leqq \Phi(x(\tau))\, \Delta t + \psi(\Delta t)\, \Delta t\,,$$

где $\psi(\Delta t) \to 0$, если $\Delta t \to 0$.

Из этих двух неравенств следует

$$V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau, y(\tau)) \leqq K \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} X(\xi, x(\xi))\, \mathrm{d}\xi \right\| \Delta t +$$

$$+ \Phi(x(\tau))\, \Delta t + (\varphi(\Delta t) + \psi(\Delta t))\, \Delta t\,.$$

Поскольку речь идет об уравнении (3), для любого $\tau \in \langle t_0, T \rangle$ имеет место

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} X(\xi, x(\xi))\, \mathrm{d}\xi = X(\tau, y(\tau))$$

и, следовательно,

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau, y(\tau))}{\Delta t} \leqq K \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| + \Phi(y(\tau))\,. \quad (*)$$

Так как функция $V(t, y(t))$ непрерывна, следует отсюда

$$V(T, y(T)) - V(t_0, y(t_0)) \leqq K \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

Этим доказана вспомогательная теорема 4 для уравнения (3).

Что касается уравнения (1), то согласно лемме 3 имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} X(\xi, x(\xi))\, \mathrm{d}\xi = X(\tau, y(\tau))$$

для почти всех $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Неравенство (*) имеет, следовательно, место для почти всех $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$.

Однако, функцию $V(t, x)$ мы в этом случае рассматриваем, как абсолютно непрерывную (см. определение 7). Так как $y(t)$ абсолютно непрерывна, то ввиду условия 1 и $V(t, y(t))$ будет абсолютно непрерывной. Итак, доказываемое неравенство (**) справедливо и в этом случае. Теперь уже нетрудно доказать

Теорему 11. *Если для векторного уравнения* (1), *соотв.* (3), *существует функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая требованиям теоремы* 1′, *соотв. теоремы* 3, *то* $x \equiv 0$ *является интегрально устойчивым.*

Доказательство. Ввиду условия 3 теоремы 1′ можно положить $\Phi(x) \equiv 0$. По вспомогательной теореме 4 имеем

$$V(t_1, y(t_1)) \leqq V(t_0, y(t_0)) + K \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq K\left(\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t\right), \tag{6}$$

если $y(t)$ обладает в каждой точке интервала $\langle t_0, t_1 \rangle$ производной. Ввиду того, что $V(t, x)$ — положительно определенная в целом, будет $V(t, x) \geqq U(x) > 0$ для $x \neq 0$, где $U(x)$ непрерывна и $U(x) \to \infty$, если $\|x\| \to \infty$.

К произвольному $\delta > 0$ подберем $B(\delta) > 0$ так, чтобы $\inf\limits_{\|x\| = B(\delta)} U(x) > 2K\delta$. Число $B(\delta)$ можно отыскать всегда ввиду того, что $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} U(x) = \infty$. Так как $U(x)$ непрерывна, $U(0) = 0$, можно подобрать $B(\delta)$ так, что $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$.

Предположим теперь, что для некоторой векторной функции $y(t)$ имеет место

$$\|y(t_0)\| < \delta\,, \qquad \int\limits_{t_0}^{\infty} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t < \delta\,.$$

Тогда из неравенства (6) следует $V(t_1, y(t_1)) < 2K\delta$ для любого $t_1 \geqq t_0$. Очевидно невозможно, чтобы $\|y(t_1)\| = B(\delta)$, ибо тогда было бы

$$V(t_1, y(t_1)) \geqq U(y(t_1)) > 2K\delta\,.$$

Отсюда следует, что $\|y(t_1)\| < B(\delta)$ для $t_1 \geqq t_0$, и решение $x \equiv 0$ системы (1) интегрально устойчиво ввиду теоремы 9.

Теорема 12. *Если для векторного уравнения* (1), *соотв.* (3) *существует функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая требованиям теоремы* 2', *соотв. теоремы* 4, *то* $x \equiv 0$ *асимптотически интегрально устойчиво.*

Доказательство. Решение $x \equiv 0$ уравнения (1) является согласно предыдущей теореме интегрально устойчивым. Остается доказать, что существуют числа $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$. Во вспомогательной теореме 4 напишем теперь $-\ U_2(x)$ вместо $\Phi(x)$ (см. условие 3 теоремы 2'). Теперь к $\eta > 0$ подберем $\gamma^* > 0$ так, чтобы для

$$\|y(t_2)\| < \gamma^*\,, \qquad \int\limits_{t_2}^{t_3} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t < \gamma^*$$

было $\|y(t)\| < \eta$ при $t_2 \leqq t \leqq t_3$.

Положим

$$\gamma = \min\,(\delta, \gamma^*)\,, \quad l = \sup_{\gamma^* \leqq \|x\| \leqq B(\delta)} (-\ U_2(x))\,, \quad T(\delta, \eta) = \frac{K(\delta + \gamma)}{-\ l}\,.$$

Допустим теперь, что существует абсолютно непрерывная векторная функция $y(t)$, составляющие которой обладают производными в каждой точке интервала $\langle t_0, t_1 \rangle$, $t_0 + T(\delta, \eta) < t_1$ такая, что

$$\|y(t)\| < \delta\,, \qquad \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t < \gamma\,,$$

$\|y(t)\| \geqq \gamma$ для $t \in \langle t_0, t_0 + T(\delta, \eta) \rangle$. Тогда было бы

$$V(t_1, y(t_1)) \leqq V(t_0, y(t_0)) + K \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t - \int\limits_{t_0}^{t_1} U_2(y(t))\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq K\delta + K\gamma + lT(\delta, \eta) \leqq 0\,.$$

Однако это противоречит положительной определенности функции $V(t, x)$. Итак, существует хотя бы одно $\bar{\tau} \in \langle t_0, t_0 + T(\delta, \eta) \rangle$ такое, что $\|y(\bar{\tau})\| < \gamma \leqq \gamma^*$, а так как

$$\int_{\bar{\tau}}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t \leqq \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, y(t)) \right\| \mathrm{d}t < \gamma \leqq \gamma^* ,$$

будет $\|y(t)\| < \eta$ для $t \in \langle \bar{\tau}, t_1 \rangle$, а, значит, и для $t \in \langle t_0 + T(\delta, \eta), t_1 \rangle$. В силу теоремы 10 этим самым уже доказана теорема 12.

Обратимся теперь ко второй части теорем 1′, 2′, 3 и 4. Покажем, что в случае, когда $x \equiv 0$ интегрально устойчиво, соотв. асимптотически интегрально устойчиво, для этой системы существуют функции $V(t, x)$, удовлетворяющие требованиям теорем 1′, 2′, 3, соотв. 4.

Построение функции $V(t, x)$ мы произведем для случая интегральной устойчивости и для случая асимптотической интегральной устойчивости одновременно. Аналогично и существование функции $V(x)$, не зависящей от t и выполняющей условия теоремы 7 и 8 в автономном случае, будет следовать из этого построения. Предварительно введем, однако, следующее определение.

Определение. Функцию $V(t, x)$ мы назовем *локально липшицовской*, если к любой точке $[t_0, x_0]$ можно подобрать постоянные $\delta > 0$, $K > 0$ так, что

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leqq K(|t_2 - t_1| + \|x_2 - x_1\|)$$

для точек $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$, $|t_0 - t_1| < \delta$, $|t_0 - t_2| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$, $\|x_1 - x_0\| < < \delta$.

Обозначение. Мы скажем, что векторная функция $y(t)$ принадлежит C' и запишем $\{y(t)\} \in C'$, если она определена и абсолютно непрерывна на интервале $\langle t_0, \infty)$ (t_0 может быть различным для различных функций).

Теорема 13. *Если решение $x \equiv 0$ уравнения* (1) *интегрально устойчиво, то существует абсолютно непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t > 0$ и обладающая следующими свойствами:*

1. *$V(t, x)$ — функция положительно определенная в целом.*

2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, где K — положительная постоянная.*

3. *$V(t, x(t))$ — невозрастающая функция t, если $x(t)$ есть решение уравнения* (1).

4. *Если $x \equiv 0$ асимптотически интегрально устойчиво, то имеет место*

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq - W(x(t)) ,$$

где $x(t)$ есть решение уравнения (1), *а $W(x)$ — непрерывная функция, определенная для всех x, причем $W(x) > 0$ для $x \neq 0$.*

5. *Если правой частью уравнения* (1) *является непрерывная векторная функция $X(t, x)$, то $V(t, x)$ — локально липшицовская функция.*

6. *Если данное векторное уравнение автономно, то функция $V(x)$ не зависит от t.*

Доказательство. Прежде всего построим некоторые вспомогательные функции $U(\eta)$, $W(\eta)$. Функция $U(\eta)$ удовлетворяет для $\eta > 0$ условиям $U(\eta) > 0$, $\lim\limits_{\eta\to 0} U(\eta) = 0$, $\lim\limits_{\eta\to\infty} U(\eta) = \infty$, $U(0) = 0$. $U(\eta)$ — неубывающая функция η с непрерывной производной $\dfrac{\mathrm{d}U(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \leqq \dfrac{1}{2}$, и для любого α справедливо утверждение: Если векторная функция $y(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$\{y(\tau)\} \in C', \quad y(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \alpha,$$

то

$$U(\|y(\eta)\|) \leqq \frac{\alpha}{4} \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta < \infty. \tag{7}$$

Функция $W(\eta)$ удовлетворяет условиям $W(0) = 0$, $W(\eta) > 0$ для $\eta > 0$, $W(\eta)$ — непрерывная функция η. Далее для любого α справедливо утверждение: Если векторная функция удовлетворяет условиям $\{y(\tau)\} \in C'$, $y(0) = 0$,

$$\int\limits_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \alpha,$$

то

$$\int\limits_0^\infty W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq \frac{\alpha}{4}. \tag{8}$$

Построение функции $U(\eta)$ (на основании интегральной устойчивости). Так как $x \equiv 0$ — интегрально устойчиво, для любого $\delta > 0$ существует $B(\delta) > 0$ так, что $\|y(t)\| < B(\delta)$ для $t \geqq 0$, если

$$\{y(\tau)\} \in C', y(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau < \delta.$$

Функция $B(\delta)$ — неубывающая функция δ, $\lim\limits_{\delta\to 0} B(\delta) = 0$, $\lim\limits_{\delta\to\infty} B(\delta) = \infty$, так как $B(\delta) \geqq \delta$. В качестве $B(\delta)$ можно выбрать и возрастающую функцию. Обратную к $B(\delta)$ функцию мы обозначим через $A(\delta)$. Так как $B(\delta)$ не обязательно непрерывна, $A(\delta)$ определена на подмножестве N интервала $\langle 0, \infty)$ так, что $0, \infty$ — предельные точки этого множества. Для $\eta \in N$ положим $U_1(\eta) = \frac{1}{4}A(\eta)$. При этом $U_1(\eta)$ — монотонная функция, т. е. для $\eta_1 \in N$, $\eta_2 \in N$, $\eta_1 < \eta_2$ будет $U_1(\eta_1) \leqq U_1(\eta_2)$. Как видно, теперь мы уже можем построить непрерывную функцию $U(\eta) \leqq U_1(\eta)$, для которой выполняются все требуемые условия.

Построение функции $W(\eta)$ произведем на основании асимптотической интегральной устойчивости. В качестве $B(\delta)$ возьмем непрерывную и возрастающую функцию. Покажем прежде всего, что для любых $l_2 > l_1 > 0$, $\alpha > 0$ справедливо утверждение: Если обозначить через $M(l_1, l_2, \alpha, y(\tau))$ множество всех тех t, для которых $\|y(t)\| \in \langle l_1, l_2 \rangle$, где $y(\tau)$ — векторная функция

$$\{y(\tau)\} \in C', \quad y(0) = 0, \quad \int_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \alpha,$$

то для лебеговской меры этого множества имеет место неравенство

$$\mu[M(l_1, l_2, \alpha, y(\tau))] \leqq \alpha\varphi(l_1, l_2).$$

Итак, время, в течение которого какая-либо векторная функция $y(\tau)$, для которой выполняются указанные выше условия, останется между цилиндрами радиусов l_1, l_2, в общем пропорционально α.

Судя по выбору $B(l_2)$, $A(l_1)$ видно, что имеет место $B(l_2) \geqq l_2$, $A(l_1) \leqq l_1$. Из асимптотической интегральной устойчивости следует: Для $B(l_2)$, $A(l_1)$ существуют числа $T(B(l_2), A(l_1))$, $\gamma(B(l_2), A(l_1))$ так, что для

$$\|y(t_0)\| \leqq B(l_2), \quad \int_{t_0}^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \gamma(B(l_2), A(l_1))$$

будет $\|y(t)\| < A(l_1)$ для $t \geqq t_0 + T(B(l_2), A(l_1))$. Ввиду непрерывности $y(\tau)$ для каждого $t > 0$ такого, что $l_1 < \|y(t)\| < l_2$, существует максимальный интервал $\langle t_0, t_1 \rangle$ так, что в этом интервале

$$A(l_1) \leqq \|y(t)\| \leqq B(l_2).$$

Если этот интервал длинее, чем $T(B(l_2), A(l_1))$, то мы его разобьем на интервалы

$$\langle t_0 + kT(B(l_2), A(l_1)), \quad t_0 + (k + 1)\, T(B(l_2), A(l_1))\rangle.$$

Последний интервал такого рода может быть короче, чем $T(B(l_2), A(l_1))$ и мы будем его рассматривать лишь в том случае, если в нем хотя бы для одного значения τ имеет место $l_1 < \|y(\tau)\| < l_2$. Таким образом мы покрыли множество M интервалами, длины которых равны или меньше $T(B(l_2), A(l_1))$. Покажем, что интервалов, длины которых равны как раз $T(B(l_2), A(l_1))$, имеется не больше, чем $\dfrac{\alpha}{\gamma(B(l_2), A(l_1))}$. Действительно, ввиду выбора $T(B(l_2), A(l_1))$, $\gamma(B(l_2), A(l_1))$ на каждом из таких интервалов $\langle t^*, t^* + T\,(B(l_2), A(l_1))\rangle$ должно иметь место неравенство

$$\int_{t^*}^{t^* + T(B(l_2), A(l_1))} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau > \gamma(B(l_2), A(l_1)).$$

Теперь рассмотрим интервалы более короткие, чем $T(B(l_2), A(l_1))$: Пусть t_1^*, t_2^* — концевые точки этого интервала. Если имеет место $\|y(t_2^*)\| = B(l_2)$, то интервалов такого рода не может быть больше, чем $\frac{\alpha}{l_2}$, ибо ввиду интегральной устойчивости, модифицированной в теореме 9, на каждом таком интервале будет

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \geqq l_2 \,.$$

Если $\|y(t_2^*)\| = A(l_1)$, то этих интервалов не может быть больше, чем интервалов $\langle \bar{t}_1, \bar{t}_2 \rangle$, $\|y(\bar{t}_1)\| = A(l_1)$, $\|y(\bar{t}_2)\| > l_1$ ($y(\tau)$ непрерывна и $y(0) = 0$). Но так как интервалов $\langle \bar{t}_1, \bar{t}_2 \rangle$ не может быть больше, чем $\frac{\alpha}{A(l_1)}$, в общем будет

$$\mu[M(l_1, l_2, \alpha, y(\tau))] \leqq \left(\frac{\alpha}{\gamma(B(l_2), A(l_1))} + \frac{\alpha}{l_2} + \frac{\alpha}{A(l_1)} \right) T(B(l_2), A(l_1)) \,,$$

$$\mu[M(l_1, l_2, \alpha, y(\tau))] \leqq \alpha\varphi(l_1, l_2) \,.$$

Возьмем теперь монотонную последовательность $\ldots l_{-n} < \ldots < l_{-1} < < l_0 < l_1 < \ldots < l_n < \ldots$ положительных чисел, $\lim\limits_{n \to -\infty} l_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} l_n = \infty$. Далее возьмем положительные числа q_n так, чтобы $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q_n < 1$. $W(\eta)$ определим как непрерывную функцию, $W(0) = 0$, $W(\eta) > 0$ для $\eta > 0$, притом так, чтобы $W(\eta) < c_n = \frac{q_n}{4\varphi(l_n, l_{n+2})}$ для $l_n \leqq \eta \leqq l_{n+2}$. Для $\{y(\tau)\} \in C'$, $y(0) = 0$, $\int\limits_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \alpha$ будет, конечно,

$$\int_0^\infty W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mu[M(l_n, l_{n+2}, \alpha, y(\tau))] \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \alpha\varphi(l_n, l_{n+2}) \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n < \frac{\alpha}{4} \,.$$

Докажем еще следующие неравенства:

а) $$U(\|y(\xi)\|) - \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq \frac{1}{2} \|x\|,$$

где $\{y(t)\} \in C'$, $y(t) = x$, $\xi \geqq t$;

б) *Если*

$$U(\|y(\xi)\|) - \int\limits_t^\xi \left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\xi W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \geqq \frac{1}{2}\,U(\|x\|)\,,$$

где $y(\tau)$ — *векторная функция* $\{y(\tau)\} \in C'$, *проходящая через точку* $[t, x]$, *т. е.* $y(t) \equiv x$, *то*

$$\int\limits_t^\xi \left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau \leqq \|x\| - U(\|x\|)$$

и, значит, $\|y(\tau)\| \leqq B(\|x\|)$ *для* $t \leqq \tau \leqq \xi$ (*из интегральной устойчивости*).

в) *Для любого* $S > 0$ *и для интервала* $\langle t_1, t_2\rangle$ *справедливо утверждение*: *Если точка* $[t, x]$ *лежит в области* $\|x\| < S$, $t \in (t_1, t_2)$ *и* $y(\tau)$ — *векторная функция, проходящая через точку* $[t, x]$, $\{y(\tau)\} \in C'$ *и такая, что*

$$U(\|y(\xi)\|) - \int\limits_t^\xi \left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\xi W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \geqq U(\|x\|)$$

для некоторого $\xi < t_2 + 1$, *то*

$$\|y(\xi) - x\| \leqq 2 \int\limits_t^\xi m(\tau)\,\mathrm{d}\tau + 2M(\xi - t)\,,$$

где $m(\tau)$ *есть функция, данная условиями Каратеодори в области* $\|z\| \leqq \leqq B(S)$, $0 \leqq \tau \leqq t_2 + 1$, *а* $M = \sup\limits_{\eta \leqq B(S)} W(\eta)$.

Доказательство а) и б). Для произвольной векторной функции $z(\tau)$, $z(0) = 0$, $\{z(\tau)\} \in C'$ согласно (7) и (8) будет

$$U(\|z(\xi)\|) - \int\limits_0^\infty \left\|\frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, z(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau + \int\limits_0^\infty W(z(\tau))\,\mathrm{d}\tau \leqq$$
$$\leqq -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left\|\frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, z(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau\,.$$

В качестве $z(\tau)$ возьмем следующую векторную функцию: $z(\tau) = 0$ для $\tau \in \langle 0, t - \Delta t\rangle$, где $\Delta t > 0$, $z(\tau) = x\,\dfrac{\tau - (t - \Delta t)}{\Delta t}$ для $\tau \in \langle t - \Delta t, t\rangle$, $z(\tau) = y(\tau)$ для $\tau \in \langle t, \xi\rangle$, $z(\tau) = x(\tau)$ для $\tau \geqq \xi$, где $x(\tau)$ есть решение (1), проходящее через точку $[\xi, y(\xi)]$. Итак, имеет место

$$U(\|y(\xi)\|) - \int\limits_{t-\Delta t}^t \left\|x\,\frac{1}{\Delta t} - X\left(\tau, x\,\frac{\tau - (t - \Delta t)}{\Delta t}\right)\right\| \mathrm{d}\tau -$$

$$-\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau+\int_{t-\Delta t}^{t}W(z(\tau))\,\mathrm{d}\tau+\int_t^{\xi}W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\leqq$$

$$\leqq-\frac{1}{2}\int_{t-\Delta t}^{t}\left\|x\frac{1}{\Delta t}-X\left(\tau,x\frac{\tau-(t-\Delta t)}{\Delta t}\right)\right\|\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau-$$

$$-\int_{\xi}^{\infty}W(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

То есть

$$U(\|y(\xi)\|)-\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau+\int_t^{\xi}W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\int_{t-\Delta t}^{t}\left\|x\frac{1}{\Delta t}-X\left(\tau,x\frac{\tau-(t-\Delta t)}{\Delta t}\right)\right\|\mathrm{d}t-\int_{t-\Delta t}^{t}W(z(\tau))\,\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau-\int_{\xi}^{\infty}W(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\leqq\frac{1}{2}\|x\|+\frac{1}{2}\int_{t-\Delta t}^{t}m(\tau)\,\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau-\int_{\xi}^{\infty}W(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

И, следовательно, если стремить $\Delta t\to 0$, получим

$$U(\|y(\xi)\|)-\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau+\int_t^{\xi}W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\|x\|-\frac{1}{2}\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau-\int_{\xi}^{\infty}W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,,\tag{9}$$

где $m(t)$ — интегрируемая функция (см. условия Каратеодори). Из этого неравенства уже следует а). По условиям неравенства б) и согласно (9) имеет место

$$\frac{1}{2}U(\|x\|)\leqq U(\|y(\xi)\|)-\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau+\int_t^{\xi}W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\|x\|-\frac{1}{2}\int_t^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-X(\tau,y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau-\int_{\xi}^{\infty}W(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Следовательно,

$$\int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \|x\| - U(\|x\|) .$$

Доказательство в). Имеем

$$\|y(\xi)\| - \|x\| \leqq \|y(\xi) - x\| \leqq \operatorname*{var}_{t \leqq \tau \leqq \xi} y(\tau) = \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau .$$

И, следовательно,

$$U(\|y(\xi)\|) \leqq U\left(\|x\| + \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau\right) \leqq U(\|x\|) + \frac{1}{2} \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau .$$

Возьмем точку $[t, x]$, $\|x\| < S$, $t \in (t_1, t_2)$. Предположим, что $\xi < t_2 + 1$; тогда согласно предыдущему будет

$$U(\|y(\xi)\|) - \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq U(\|x\|) + \frac{1}{2} \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau - \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq U(\|x\|) - \frac{1}{2} \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi \|X(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq U(\|x\|) - \frac{1}{2} \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi m(\tau)\, \mathrm{d}\tau + M(\xi - t) , \qquad (10)$$

где $\|X(\tau, y)\| \leqq m(\tau)$ для $\|y\| \leqq B(S)$, $0 \leqq \tau \leqq t_2 + 1$ и $M = \sup\limits_{\eta \leqq B(S)} W(\eta)$.

Действительно, согласно б) будет $\|y(\tau)\| \leqq B(\|x\|) < B(S)$ для $t \leqq \tau \leqq \xi$. По условиям неравенства в) и согласно (10) имеем

$$U(\|x\|) \leqq U(\|x\|) - \frac{1}{2} \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi m(\tau)\, \mathrm{d}\tau + M(\xi - t) .$$

Отсюда

$$\|y(\xi) - x\| \leqq \operatorname*{var}_{t \leqq \tau \leqq \xi} y(\tau) = \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau \leqq 2 \int_t^\xi m(\tau)\, \mathrm{d}\tau + 2M(\xi - t) .$$

Функцию $V(t, x)$ мы определим соотношением

$$V(t, x) = \sup \left\{ \sup_{\xi \geqq t} \left[U(\|y(\xi)\|) - \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] \right\}$$

для всех $\{y(\tau)\} \in C'$, $y(t) = x$. Докажем, что эта функция $V(t, x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 13 для случая, когда решение $x \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически интегрально устойчиво. Однако, если в определении $V(t, x)$ вместо функции $W(\eta)$ использовать функцию, тождественно равную нулю, то $V(t, x)$ будет удовлетворять требованиям теоремы 13 для случая, когда $x \equiv 0$ интегрально устойчиво.

Доказательство существования функции $V(t, x)$. Из неравенства а) следует, что для любого $\{y(\tau)\} \in C'$, $y(t) = x$, $\xi \geqq t$, выражение

$$U(\|y(\xi)\|) - \int_t^\xi \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^\xi W(y(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

будет ограничено сверху; итак, существует верхняя грань и $V(t, x) \leqq \frac{1}{2}\|x\|$.

Теперь мы постепенно докажем, что $V(t, x)$ обладает свойствами 1—6, сформулированными в теореме 13.

1. $V(t, x)$ — положительно определенная в целом функция: $V(t, x) \geqq U(x)$ и $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} U(\|x\|) = \infty$. В определении $V(t, x)$ достаточно положить $y(\tau) = x(\tau)$, где $x(\tau)$ есть решение, проходящее через точку $[t, x]$ и $\xi = t$.

2. $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$. Пусть $\varepsilon_n > 0$ есть последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. К $\varepsilon_n > 0$ можно подобрать $x_n(\tau)$ и ξ_n так, что

$$V(t, x) - \left[U(\|x_n(\xi_n)\|) - \int_t^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_t^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] < \varepsilon_n\,.$$

Предположим, что $\xi_n > t$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Построим $y_n(\tau)$: $y_n(\tau) = x_n(\tau) + (y - x)\,.$ $\cdot\, \dfrac{\tau - (t + \Delta t_n)}{-\Delta t_n}$ для $\tau \in \langle t, t + \Delta t_n \rangle$, $\Delta t_n \to 0$, $y_n(\tau) = x_n(\tau)$ для $\tau \geqq t + \Delta t_n$, где $\Delta t_n > 0$, $t + \Delta t_n < \xi_n$. Имеем

$$V(t, x) - V(t, y) \leqq \varepsilon_n + \left[U(\|x_n(\xi_n)\|) - \int_t^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] - \left[U(\|y_n(\xi_n)\|) - \int_t^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$+\int_t^{\xi_n} W(y_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big] \leqq \varepsilon_n + \int_t^{t+\Delta t_n} \Big[\Big\|\frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y_n(\tau))\Big\| - \Big\|\frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} -$$

$$- X(\tau, x_n(\tau))\Big\|\Big]\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+\Delta t_n} \Big|W(y_n(\tau)) - W(x_n(\tau))\Big|\,\mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon_n +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t_n} \Big\|\frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\Big\|\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+\Delta t_n} \|X(\tau, x_n(\tau)) - X(\tau, y_n(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t_n} |W(y_n(\tau)) - W(x_n(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon_n + \|y - x\| + 2\int_t^{t+\Delta t_n} m(t)\,\mathrm{d}t + 2M\,\Delta t_n\,,$$

где $m(t)$ — см. условия Каратеодори, $M = \sup\limits_{\eta \leqq B(\|x\|)+\|y-x\|} W(\eta)$. Действительно, если ε_n так мало, что $0 < \varepsilon_n < V(t, x) - \frac{1}{2}U(\|x\|)$, то выполняется условие неравенства б) и отсюда следует $\|x_n(\tau)\| \leqq B(\|x\|)$ для $t \leqq \tau \leqq \xi_n$ и для $y_n(\tau)$ имеет место $\|y_n(\tau) - x_n(\tau)\| \leqq \|y - x\|$, следовательно, $\|y_n(\tau)\| \leqq B(\|x\|) + \|y - x\|$ для $t \leqq \tau \leqq \xi_n$. Так как далее ε_n и Δt_n сходятся к нулю, то

$$V(t, x) - V(t, y) \leqq \|x - y\|\,.$$

Предположим, что $\xi_n = t$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, $V(t, x) = U(\|x\|)$, а так как $V(t, y) \geqq U(\|y\|)$ (см. 1), то

$$V(t, x) - V(t, y) \leqq U(\|x\|) - U(\|y\|) \leqq \tfrac{1}{2}\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqq \tfrac{1}{2}\|x - y\| \leqq \|x - y\|$$

так как $\dfrac{\mathrm{d}U(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \leqq \dfrac{1}{2}$. Меняя местами x и y, получим

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq \|x - y\|\,.$$

3 и 4. Имеем

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq - W(x(t))\,.$$

Пусть $x(\tau)$ есть решение, проходящее через точку $[t, x]$. Рассмотрим точку $[t + h, x(t + h)]$, где $h > 0$. К произвольному $\varepsilon > 0$ подберем $y(\tau)$ и ξ так, что $y(t + h) = x(t + h)$, $\xi \geqq t + h$,

$$V(t + h, x(t + h)) - \Big[U(\|y(\xi)\|) - \int_{t+h}^{\xi} \Big\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\Big\|\mathrm{d}\tau + \int_{t+h}^{\xi} W(y(\tau))\mathrm{d}\tau\Big] < \varepsilon.$$

Положим $z(\tau) \equiv x(\tau)$ для $\tau \in \langle t, t + h\rangle$, $z(\tau) \equiv y(\tau)$ для $\tau \geqq t + h$. Имеем

$$V(t, x) \geqq U(\|z(\xi)\|) - \int_t^{\xi} \Big\|\frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, z(\tau))\Big\|\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{\xi} W(z(\tau))\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= U(\|y(\xi)\|) - \int_{t+h}^{\xi} \Big\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\Big\|\,\mathrm{d}\tau + \int_{t+h}^{\xi} W(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+h} W(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Отсюда

$$V(t+h, x(t+h)) - V(t, x) \leqq \varepsilon - \int_t^{t+h} W(x(\tau))\, d\tau\,.$$

Ввиду того, что функция $W(\eta)$ непрерывна, несомненно

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x)}{h} \leqq -W(x)\,.$$

5. Докажем, что функция $V(t, x)$ абсолютно непрерывна. В случае, когда $X(t, x)$ непрерывна, покажем, что $V(t, x)$ является локально липшицовской функцией. Возьмем произвольную точку $[t_0, x_0]$ и число $\delta > 0$. Точки $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$ возьмем так, чтобы $|t_1 - t_0| < \delta$, $|t_2 - t_0| < \delta$, $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$. Докажем, что

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leqq \|x_1 - x_2\| + \left|\int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\, d\tau\right| + 2M_1|t_2 - t_1|\,,$$

где $\overline{m}(\tau)$ — неотрицательная интегрируемая функция, определенная условиями Каратеодори $\|X(t, x)\| \leqq \overline{m}(t)$ для $\|x\| \leqq 3B(\|x_0\| + \delta)$, $0 \leqq t \leqq t_0 + \delta + 1$,

$$M_1 = \sup_{\eta \leqq 3B(\|x_0\|+\delta)} W(\eta)\,.$$

Если функция $X(t, x)$ непрерывна, то в качестве $\overline{m}(t)$ можно, конечно, взять также непрерывную функцию, и тогда уже ясно, что $V(t, x)$ будет локально липшицовской функцией.

К произвольному $\varepsilon > 0$ подберем $y(\tau)$ и ξ так, чтобы

$$V(t_2, x_2) - \left[U(\|y(\xi)\|) - \int_{t_2}^{\xi} \left\|\frac{dy(\tau)}{d\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\| d\tau + \int_{t_2}^{\xi} W(y(\tau))\, d\tau\right] < \varepsilon\,.$$

Положим

$$z(\tau) = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\,, \quad t_1 \leqq \tau \leqq t_2\,; \quad z(\tau) = y(\tau)\,, \quad \tau \geqq t_2\,.$$

Имеем

$$V(t_1, x_1) \geqq U(\|z(\xi)\|) - \int_{t_1}^{\xi} \left\|\frac{dz(\tau)}{d\tau} - X(\tau, z(\tau))\right\| d\tau + \int_{t_1}^{\xi} W(z(\tau))\, d\tau\,.$$

Следовательно,

$$V(t_2, x_2) - V(t_1, x_1) < \varepsilon + \left[U(\|y(\xi)\|) - \int_{t_2}^{\xi} \left\|\frac{dy(\tau)}{d\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_2}^{\xi} W(y(\tau))\, d\tau\right] - \left[U(\|z(\xi)\|) - \int_{t_1}^{\xi} \left\|\frac{dz(\tau)}{d\tau} - X(\tau, z(\tau))\right\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\xi} W(z(\tau))\, d\tau\right] \leqq \varepsilon + \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{dz(\tau)}{d\tau} - X(\tau, z(\tau))\right\| d\tau + \int_{t_1}^{t_2} W(z(\tau))\, d\tau =$$

$$= \varepsilon + \int_{t_1}^{t_2} \left\| (x_2 - x_1) \frac{1}{t_2 - t_1} - X\left(\tau, x_1 + (x_2 - x_1) \frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\right) \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} W\left(x_1 + (x_2 - x_1) \frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}\right) \mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon + \|x_2 - x_1\| + \int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + M_1(t_2 - t_1)\,,$$

где $\|X(t, x)\| \leqq \overline{m}(t)$ для $0 \leqq t \leqq t_0 + \delta + 1$, $\|x\| \leqq 3B(\|x_0\| + \delta)$, $M_1 = \sup\limits_{\eta \leqq 3B(\|x_0\| + \delta)} W(\eta)$. Так как ε как угодно мало, будет

$$V(t_2, x_2) - V(t_1, x_1) \leqq \|x_2 - x_1\| + \int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + M_1(t_2 - t_1)\,.$$

Дадим теперь оценку выражения $V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)$. В случае, если $V(t_1, x_1) = U(\|x_1\|)$, будет

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq U(\|x_1\|) - U(\|x_2\|) \leqq \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\,.$$

Итак, предположим, что $V(t_1, x_1) > U(\|x_1\|)$. Тогда к последовательности $\varepsilon_n > 0$, сходящейся к нулю, можно подобрать $x_n(\tau)$ и ξ_n так, что

$$V(t_1, x_1) - \left[U(\|x_n(\xi_n)\|) - \int_{t_1}^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] < \varepsilon_n\,.$$

α) Предположим, что $\xi_n \leqq t_2$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $V(t_2, x_2) \geqq U(\|x_2\|)$, имеет место

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \varepsilon_n + \left[U(\|x_n(\xi_n)\|) - \int_{t_1}^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau - U(\|x_2\|) \right] \leqq \varepsilon_n + \frac{1}{2} \|x_n(\xi_n) - x_2\| + \int_{t_1}^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \varepsilon_n + \frac{1}{2} \|x_n(\xi_n) - x_2\| + M_1(t_2 - t_1)\,.$$

Если $\varepsilon_n < V(t_1, x_1) - U(\|x_1\|)$, выполняется условие неравенства б) и

$$\|x_n(\tau)\| < B(\|x_1\|) \leqq B(\|x_0\| + \delta) \quad \text{для } t_1 \leqq \tau \leqq \xi_n\,.$$

Далее, ввиду неравенства в) будет

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \varepsilon_n + \tfrac{1}{2}\|x_n(t_1) - x_n(\xi_n)\| + \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\| +$$
$$+ M_1(t_2 - t_1) \leqq \varepsilon_n + \int_t^{\xi_n} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + 2M_1(t_2 - t_1)\,.$$

Так как ε_n стремится к нулю и $\xi_n \leqq t_2$, будет

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \int_t^{t_2} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + 2M_1(t_2 - t_1)\,.$$

β) Если $\xi_n > t_2$ ($n = 1, 2, \ldots$), то можно положить

$$y_n(\tau) = x_n(\tau) + (x_2 - x_n(t_2)) \frac{\tau - (t_2 + \Delta t_n)}{- \Delta t_n} \text{ для } \tau \in \langle t_2, t_2 + \Delta t_n \rangle \,,$$

$y_n(\tau) = x_n(\tau)$ для $\tau \geqq t_2 + \Delta t_n$, где $0 < \Delta t_n < 1$, $t_2 + \Delta t_n < \xi_n$. Имеет место

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \varepsilon_n + \left[U(\|x_n(\xi_n)\|) - \int_{t_1}^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\xi_n} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] - \left[U(\|y_n(\xi_n)\|) - \int_{t_2}^{\xi_n} \left\| \frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_2}^{\xi_n} W(y_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right] \leqq \varepsilon_n - \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \left| \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, x_n(\tau)) \right\| - \left\| \frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y_n(\tau)) \right\| \right| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \left| W(x_n(\tau)) - W(y_n(\tau)) \right| \mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon_n -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|X(\tau, x_n(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \|X(\tau, x_n(\tau)) - X(\tau, y_n(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_2} W(x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} |W(x_n(\tau)) - W(y_n(\tau))|\, \mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon_n - \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \|x_2 - x_n(t_2)\| + 2 \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + 2M_1\, \Delta t_n + M_1(t_2 - t_1) \,.$$

Дадим еще оценку:

$$\|x_2 - x_n(t_2)\| - \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\mathrm{d}x_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \|x_2 - x_1\| + \|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| - \operatorname*{var}_{t_1 \leqq \tau \leqq t_2} x_n(\tau) \leqq \|x_2 - x_1\| \,,$$

значит, в общем

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \varepsilon_n + \|x_2 - x_1\| + \int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ 2 \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_n} \overline{m}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + 2M_1\, \Delta t_n + M_1(t_2 - t_1) \,.$$

Так как $\varepsilon_n \to 0$, $\Delta t_n \to 0$, будет

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq \|x_2 - x_1\| + \left|\int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| + M_1(t_2 - t_1)\,.$$

Теперь уже видно, что

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leqq \|x_2 - x_1\| + \left|\int_{t_1}^{t_2} \overline{m}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| + 2M_1|t_2 - t_1|\,.$$

6. Пусть данное векторное уравнение автономно (4). Возьмем две точки $[t_1, x]$, $[t_2, x]$, $t_1 \leqq t_2$. К произвольной векторной функции $\{y_1(t)\} \in C'$, $y_1(t_1) = x$ можно подобрать векторную функцию $y_2(t) = y_1[t - (t_2 - t_1)]$, определенную на интервале $\langle t_2, \infty)$ и удовлетворяющую условиям

$$\{y_2(t)\} \in C'\,, \quad y_2(t_2) \equiv y_1(t_1) \equiv x\,;$$

наоборот, к произвольной векторной функции $y_2(t)$ построим $y_1(t) = y_2[t + (t_2 - t_1)]$ для $t \geqq t_1$. Отсюда

$$V(t_1, x) = \sup\left\{\sup_{\xi \geqq t_1}\left[U(\|y_1(\xi)\|) - \int_{t_1}^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y_1(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(y_1(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{t_1}^{\xi} W(y_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\right\} = \sup\left\{\sup_{\xi \geqq t_2}\left[U(\|y_2(\xi)\|) - \int_{t_2}^{\xi}\left\|\frac{\mathrm{d}y_2(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(y_2(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{t_2}^{\xi} W(y_2(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\right\} = V(t_2, x)\,.$$

Из этого соотношения видно, что функция $V(t, x)$ не зависит от t.

Этим самым доказаны и теоремы 1′ и 2′, так что остается доказать эквивалентность этих теорем с теоремами 1 и 2 соответственно.

Если решение $x \equiv 0$ уравнения (1) интегрально устойчиво или асимптотически интегрально устойчиво, то согласно теоремам 1′ и 2′ существуют абсолютно непрерывные функции $V(t, x)$, удовлетворяющие требованиям теорем 1′ и 2′, а следовательно, и всем требованиям теорем 1 и 2.

Доказательство утверждения, что решение $x \equiv 0$ уравнения (1) интегрально или асимптотически интегрально устойчиво в том случае, когда существуют функции $V(t, x)$, удовлетворяющие требованиям теорем 1 и 2, является более затруднительным. В этом случае необходимо воспользоваться леммой 5.

Согласно лемме 5 справедливо равенство

$$\lim_{\nu(D)\to 0}\sup \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(\tau, t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| = \int_{t_0}^{T}\left\|\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\right\|\mathrm{d}\tau\,,$$

если $y(\tau)$ — векторная функция, определенная на интервале $\langle t_0, T\rangle$ и обладающая там непрерывными производными своих составляющих. Притом $x(\tau, t_i)$ будет решением уравнения (1), проходящим через точку $[t_i, y(t_i)]$, т. е. $x(t_i, t_i) = y(t_i)$. Притом D обозначает разбиение интервала $\langle t_0, T\rangle$ и $\nu(D) = \max\limits_{i=1\ldots n-1} (t_{i+1} - t_i)$, где t_i — точки разбиения D.

Итак, в определения интегральной и асимптотической интегральной устойчивости (см. теоремы 9 и 10) можно заменить выражение

$$\int\limits_{t_0}^{T} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau$$

выражением

$$\limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\|$$

и пользоваться таким образом видоизмененным определением. При таком положении вещей можно доказать вспомогательную теорему, подобную вспомогательной теореме 4.

Вспомогательная теорема 4′. *Если для векторного уравнения* (1) *существует непрерывная функция* $V(t, x)$ *такая, что*

1. $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, *где* K — *положительная постоянная.*
2. $\limsup\limits_{\Delta t\to 0+} \dfrac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq \Phi(x(t))$,

где $x(t)$ *есть решение уравнения* (1), *а* $\Phi(x)$ — *непрерывная функция, определенная для всех* x, *то*

$$V(T, y(T)) \leqq V(t_0, y(t_0)) +$$
$$+ K \limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(\tau, t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| + \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(y(t))\, \mathrm{d}t$$

для любой векторной функции $y(t) \equiv [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$, *определенной на интервале* $\langle t_0, T\rangle$, *составляющие которой обладают в каждой точке этого интервала непрерывными производными.*

Доказательство. Пусть τ — какое-либо число из интервала $\langle t_0, T\rangle$. Через точку $[\tau, y(\tau)]$ проходит хоть одно решение уравнения (1), которое мы обозначим через $x(t, \tau)$. Следовательно, $x(\tau, \tau) = y(\tau)$. Для $\Delta t > 0$ будет ввиду условия 1:

$$|V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau + \Delta t, x(\tau + \Delta t))| \leqq K\|y(\tau + \Delta t) - x(\tau + \Delta t, \tau)\| .$$

Ввиду условия 2 имеет место

$$V(\tau + \Delta t, x(\tau + \Delta t, \tau)) - V(\tau, x(\tau, \tau)) \leqq \int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta t} \Phi(x(t, \tau))\, \mathrm{d}t .$$

Из этих двух неравенств вытекает

$$V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau, y(\tau)) \leqq K\|y(\tau + \Delta t) - x(\tau + \Delta t, \tau)\| + \\ + \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \Phi(x(t, \tau))\, \mathrm{d}t \,.$$

Ввиду произвольности выбора решения $\bar{x}(t, \tau)$ обязательно будет

$$V(\tau + \Delta t, y(\tau + \Delta t)) - V(\tau, y(\tau)) \leqq K \inf_{x(t,\tau)} \|y(\tau + \Delta t) - x(\tau + \Delta t, \tau)\| + \\ + \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \Phi(x(t, \tau))\, \mathrm{d}t \,.$$

Пусть D — какое-либо разбиение интервала $\langle t_0, T\rangle$ с определенным $\nu(D)$. В целях упрощения формул введем векторную функцию $\omega_D(t) = x(t, t_i)$ для $t_i \leqq t < t_{i+1}$ и $\omega_D(T) = y(T)$.

Для произвольного разбиения имеет, следовательно, место

$$V(T, y(T)) - V(t_0, y(t_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} V(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - V(t_i, y(t_i)) \leqq \\ \leqq K \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(t,t_i)} \|y(t_{i+1}) - x(t_{i+1}, t_i)\| + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(x(t, t_i))\, \mathrm{d}t = \\ = K \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(t,t_i)} \|y(t_{i+1}) - x(t_{i+1}, t_i)\| + \int_{t_0}^{T} \Phi(\omega_D(t))\, \mathrm{d}t \,.$$

Ввиду произвольности разбиения D будет во всяком случае

$$V(T, y(T)) \leqq V(t_0, y(t_0)) + \\ + K \limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(t,t_i)} \|y(t_{i+1}) - x(t_{i+1}, t_i)\| + \int_{t_0}^{T} \Phi(\omega_D(t))\, \mathrm{d}t \,.$$

Остается еще определить третий член в правой части предыдущего неравенства. Нетрудно показать, что $\omega_D(t)$ равномерно сходится к $y(t)$ на интервале $\langle t_0, T\rangle$, если $\nu(D) \to 0$. Произведем оценку

$$\|\omega_D(t) - y(t)\| = \|x(t, t_i) - y(t)\| \leqq \|y(t) - y(t_i)\| + \\ + \|x(t, t_i) - x(t_i, t_i)\| \leqq M\nu(D) + \int_{t_i}^{t_i+\nu(D)} m(t)\, \mathrm{d}t$$

для $t \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle$, где $M = \sup\limits_{\langle t_0, T\rangle} \left\|\dfrac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right\|$. Так как $\int_{t_0}^{\tau} m(t)\, \mathrm{d}t$ — абсолютно непрерывная функция, можно подобрать $\varepsilon(\nu(D))$ так, что будет

$$\|\omega_D(t) - y(t)\| \leqq M\nu(D) + \varepsilon(\nu(D))$$

и притом $\varepsilon(\nu(D)) \to 0$ для $\nu(D) \to 0$. Следовательно и $\Phi(\omega_D(t))$ сходится равномерно к $\Phi(y(t))$, если $\nu(D) \to 0$, так как функция $\Phi(x)$ непрерывна. Согласно теореме Лебега имеет место

$$\int_{t_0}^{T} \Phi(\omega_D(t))\, \mathrm{d}t \to \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{для } \nu(D) \to 0 \,.$$

Итак,

$$V(T, y(T)) \leqq V(t_0, y(t_0)) +$$
$$+ K \limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(t,t_i)} \|y(t_{i+1}) - x(t_{i+1}, t_i)\| + \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Если в теоремах 11 и 12 заменить выражение $\int\limits_{t_0}^{T} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau$ выражением

$$\limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(t,t_i)} \|y(t_{i+1}) - x(t_{i+1}, t_i)\|\,,$$

то из леммы 5 следует, что решение $x \equiv 0$ уравнения (1) интегрально устойчиво, соотв. асимптотически интегрально устойчиво в том случае, если для уравнения (1) существует непрерывная функция $V(t, x)$, выполняющая требования теоремы 1, соотв. 2.

Докажем теперь теоремы 3 и 4. С этой целью используем теорему о приближении и теорему о сглаживании. В несколько иной форме эти теоремы доказываются в работе [1]. На основании приведенного там хода мыслей нетрудно, однако, обнаружить, что теоремы справедливы и в этой дополненной форме.

Теорема о приближении. *Пусть функция $V(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

Функция $V(t, x)$ определена и непрерывна в полупространстве $t \geqq 0$.

Функция $V(t, x)$ является локально липшицовской для точек $x \neq 0$, $t > 0$.

$V(t, 0) \equiv 0$ *для* $t \geqq 0$, $V(t, x) > 0$ *для* $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

Функция $V(t, x)$ является липшицовской по отношению к $x_1, \ldots, x_n$, т. е. $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K\|x - y\|$, *где K — постоянная.*

Существует функция $U(t, x)$, определенная и непрерывная в полупространстве $t > 0$ такая, что $U(t, 0) \equiv 0$ для $t > 0$, $U(t, x) > 0$ для $x \neq 0$, $t > 0$, причем, далее,

$$\limsup_{\Delta t\to 0+} \frac{V(t + \Delta t, u(t + \Delta t)) - V(t, u(t))}{\Delta t} \leqq -U(t, x)\,,$$

где $u(\tau)$ есть решение уравнения (3), *удовлетворяющее условию $u(t) = x$, $x \neq 0$, $t > 0$.*

Тогда существует функция $\tilde{V}(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

Функция $\tilde{V}(t, x)$ определена и непрерывна в полупространстве $t \geqq 0$.

Функция $\tilde{V}(t, x)$ *обладает непрерывными частными производными всех порядков по переменным* $t, x_1, \ldots, x_n$ *в области* $x \neq 0$, $t > 0$. *Имеем*

$$|\tilde{V}(t, x) - V(t, x)| \leqq \frac{t}{1 + 2t} V(t, x) , \qquad \left|\frac{\partial \tilde{V}(t, x)}{\partial x_i}\right| \leqq L \tag{11}$$

для $x \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *где* L — *положительная постоянная. Имеет место*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \tilde{V}(\tau, u(\tau))|_{\tau=t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{V}(t, x)}{\partial x_i} Y_i(t, x) < -\frac{1}{2} U(t, x) , \tag{12}$$

где $u(\tau)$ — *решение уравнения* (3), *выполняющее условие* $u(t) = x$.

Теорема о сглаживании. *Пусть функция* $V(t, x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

Функция $V(t, x)$ *определена и непрерывна в полупространстве* $t \geqq 0$.

Функция $V(t, x)$ *обладает частными производными всех порядков по переменным* $t, x_1, \ldots, x_n$ *для* $x \neq 0$, $t \geqq 0$. *Имеет место* $V(t, 0) = 0$ *для* $t \geqq 0$, $V(t, x) > 0$ *для* $x \neq 0$, $t \geqq 0$. *Имеет место* $\left|\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i}\right| \leqq K$ *в области* $x \neq 0$, $t > 0$, *где* K — *положительная постоянная.*

Тогда существует функция $\nu(\eta)$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

Функция $\nu(\eta)$ *определена для всех* η *и обладает производными всех порядков. Имеет место* $\nu(\eta) = 0$ *для* $\eta \leqq 0$, $\nu(\eta) > 0$ для $\eta > 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \nu(\eta)$ — *возрастающая функция для* $\eta \geqq 0$, $\nu(\eta) \to \infty$ *для* $\eta \to \infty$.

Функция $\nu(V(t, x))$ *обладает частными производными всех порядков по переменным* $t, x_1, \ldots, x_n$ *в полупространстве* $t > 0$.

Функция $\nu(V(t, x))$ *является липшицовской функцией по отношению к переменным* $x_1, \ldots, x_n$, *т. е.*

$$|\nu(V(t, x)) - \nu(V(t, y))| \leqq K\|x - y\| ,$$

где K — *постоянная.*

В случае интегральной устойчивости применим теорему о приближении к функции $V^*(t, x) = V(t, x) \frac{2 + t}{1 + t}$ ($V(t, x)$ из теоремы 13). В качестве функции $U(t, x)$ можно взять $\frac{1}{(1 + t)^2} V(t, x)$. Мы получим функцию, обладающую частными производными всех порядков в области $t > 0$, $x \neq 0$, положительно определенную в целом ввиду (11) и невозрастающую вдоль интегральных кривых ввиду (12). Если к этой функции применить теорему о сглаживании, получим функцию, обладающую частными производными всех порядков во всем полупространстве $t \geqq 0$, положительно определенную в целом в силу того, что $v(\eta)$ — возрастающая функция, невозрастающую вдоль интегральных кривых в силу того, что $\frac{\mathrm{d}v(\eta)}{\mathrm{d}\eta}$ положительна, и липшицевскую относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Это значит, что эта функция выполняет все требования теоремы 3.

В случае асимптотической интегральной устойчивости теорему о приближении можно применить непосредственно к функции $V(t, x)$ из теоремы 13. В качестве $U(t, x)$ можно здесь взять функцию $W(x)$. Если применить кроме того теорему о сглаживании, то получим функцию, выполняющую все требования теоремы 4.

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и вариационная устойчивость

В этой части мы докажем теоремы 5 и 6. Теорема 5 следует из следующего известного достаточного условия:

Теорема 14. *Если для векторного уравнения* (3) *существует функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t \geqq 0$, имеющая там непрерывные частные производные $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ и удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *$V(t, x)$ — положительно определенная функция, т. е. $V(t, x) \geqq U_1(x)$, где $U_1(x)$ — непрерывная функция такая, что $U_1(x) > 0$ для $x \neq 0$, $V(t, 0) \equiv \equiv 0$.*

2. $\left|\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i}\right| < L$ *для $i = 1, 2, \ldots, n$ в полупространстве $t \geqq 0$.*

3. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} X_i(t, x)$ *— отрицательно определенная функция, т. е. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqq - U_2(x)$, где $U_2(x)$ — непрерывная функция, $U_2(x) > 0$ для $x \neq 0$, $U_2(0) = 0$, то решение $x \equiv 0$ векторного уравнения* (3) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. К произвольному $\varepsilon > 0$ подберем $\eta_1 > 0$ так, чтобы $\eta_1 < \varepsilon$, $\eta_1 < \frac{1}{L} \inf_{||x||=\varepsilon} U_1(x)$. Далее подберем $\eta_2 > 0$ так, чтобы $\eta_2 < \frac{1}{nL} \cdot$ $\cdot \inf_{\eta_1 \leqq ||x|| \leqq \varepsilon} U_2(x)$. Предположим, что существует решение $z(t)$ векторного уравнения.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x) + R(t, x) ,$$

где $||R(t, x)|| < \eta_2$ (если $||x|| < \varepsilon$), такое, что $||z(t_0)|| < \eta_1$ и $||z(T)|| = \varepsilon$, где

$T > t_0$, $\|z(t)\| < \varepsilon$ для $t \in \langle t_0, T)$. Возьмем $T_1 \in (t_0, T)$ так, чтобы было $\|z(T_1)\| = \eta_1$, $\eta_1 < \|z(t)\| < \varepsilon$ для $t \in (T_1, T)$. В интервале (T_1, T) имеет место

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t, z(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, z(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_1}(t, z(t))\, X_i(t, z(t)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, z(t))\, R_i(t, z(t)) \leqq -U_2(z(t)) + nL\eta_2 \leqq 0\,.$$

Отсюда следует, что функция $V(t, z(t))$ будет в интервале (T_1, T) невозрастающей. Итак,

$$V(T, z(T)) \leqq V(T_1, z(T_1)) \leqq L\|z(T_1)\| = L\eta_1 < \inf_{\|x\|=\varepsilon} U_1(x)\,.$$

С другой стороны, имеем

$$V(T, z(T)) \geqq U_1(z(T)) \geqq \inf_{\|x\|=\varepsilon} U_1(x)\,.$$

Это несоответствие показывает, что для решения $z(t)$ должно иметь место $\|z(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$.

Теорема 5 является следствием теоремы 4 и только что доказанной теоремы 14.

Остается доказать эквивалентность между интегральной устойчивостью и вариационной устойчивостью. Докажем прежде весго следующую теорему.

Вспомогательная теорема 5. *Пусть $y(t)$ — векторная функция с ограниченным изменением на интервале $\langle t_0, T\rangle$ и пусть*

$$\operatorname*{var}_{\langle t_0, T\rangle} \Big(y(t) - \int_{t_0}^{T} X(\tau, y(\tau))\mathrm{d}\tau\Big) < \delta\,,$$

где $X(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда существует абсолютно непрерывная векторная функция $z(t)$, для которой

$$z(t_0) = y(t_0),\ z(T) = y(T)\,,\ \|z(t) - y(t)\| < 3\delta \quad \text{для} \quad t_0 \leqq t \leqq T$$

и

$$\operatorname*{var}_{\langle t_0, T\rangle} \Big(z(t) - \int_{t_0}^{T} X(\tau, z(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big) < 5\delta$$

Доказательство. Отдельные составляющие векторной функции $y(t)$ обладают ограниченным изменением и, следовательно, обладают конечной производной вплоть до множества значений t меры нуль. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество N, $\mu(N) < \varepsilon$, которое это множество покрывает. Множество N распадается на счетное количество непересекающихся интервалов I_k. Поскольку существуют интервалы, содержащие t_0 или T, ограничимся их частями, входящими в (t_0, T). Построим векторную функцию $z(t)$ так, чтобы $z(t) = y(t)$ для $t \in \langle t_0, T\rangle - N$, причем $z(t)$ является линейной в интервалах I_k. Очевидно, будет $z(t_0) = y(t_0)$, $z(T) = y(T)$.

Докажем, что $z_i(t)$ обладают в каждой точке производной справа (слева).

а) Если t входит в какой-либо открытый интервал I_k (на которые распалось N), то утверждение верно, ибо в таком интервале $z_i(t)$ является линейной. Утверждение верно и в том случае, когда t является левой концевой точкой I_k.

б) Если t не является предельной точкой N, то для малых значений $\tau - t \geqq 0$ будет $z_i(\tau) \equiv y_i(\tau)$ и утверждение также верно.

в) Пусть t — предельная точка N такая, что она является предельной точкой множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{n_k}$, лежащей вправо от t. Ввиду того, что $t \operatorname{non} \in N$, векторная функция $y(t)$ обладает в этой точке производной справа и $z(t) = y(t)$. Множество значений $t + \Delta t$, где $\Delta t > 0$ пробегает малые значения (t — фиксировано), разобьем на две части α) $t + \Delta t \operatorname{non} \in N$, β) $t + \Delta t \in N$. В случае α) имеем $\dfrac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t} = \dfrac{y_i(t + \Delta t) - y_i(t)}{\Delta t}$ и, следовательно, существует предел этих выражений для $\Delta t \to 0$, $t + \Delta t \operatorname{non} \in N$, равный производной $y_i(t)$ в этой точке:

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0+ \\ t + \Delta t \operatorname{non} \in N}} \frac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

В случае β) точка $t + \Delta t$ всегда входит в какой-либо интервал I_{n_k}, концы которого обозначим через $t^1_{n_k}$, $t^2_{n_k}$, и

$$\min\left(\frac{z_i(t^1_{n_k}) - z_i(t)}{t^1_{n_k} - t}, \; \frac{z_i(t^2_{n_k}) - z_i(t)}{t^2_{n_k} - t}\right) \leqq \frac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t} \leqq$$
$$\leqq \max\left(\frac{z_i(t^1_{n_k}) - z_i(t)}{t^1_{n_k} - t}, \; \frac{z_i(t^2_{n_k}) - z_i(t)}{t^2_{n_k} - t}\right)$$

и, следовательно,

$$\min\left(\frac{y_i(t^1_{n_k}) - y_i(t)}{t^1_{n_k} - t}, \; \frac{y_i(t^2_{n_k}) - y_i(t)}{t^2_{n_k} - t}\right) \leqq \frac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t} \leqq$$
$$\leqq \max\left(\frac{y_i(t^1_{n_k}) - y_i(t)}{t^1_{n_k} - t}, \; \frac{y_i(t^2_{n_k}) - y_i(t)}{t^2_{n_k} - t}\right).$$

Ввиду того, что пределы выражений $\dfrac{y_i(t^s_{n_k}) - y_i(t)}{t^s_{n_k} - t,}$, $s = 1, 2$, существуют для $t^s_{n_k} - t \to 0$ и что они равны $\dfrac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}$, будет и в этом случае

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0+ \\ t + \Delta t \in N}} \frac{z_i(t + \Delta t) - z_i(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Этим и доказывается утверждение.

Так как векторное уравнение (1) удовлетворяет условиям Каратеодори, то существует суммируемая по Лебегу функция $m(t)$ так, что $\|X(t, x)\| \leqq m(t)$ для $t \in \langle t_0, T \rangle$, $\|x\| \leqq \sup\limits_{t_0 \leqq t \leqq T} \|y(t)\|$. Обозначим еще $\eta_k = \operatorname*{var}\limits_{I_k} [y(t) - \int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, y(\tau))\, d\tau]$; итак, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k < \delta$. Сделаем оценку

$$\operatorname*{var}_{I_k} (y(t) - z(t)) \leqq \operatorname*{var}_{I_k} y(t) + \operatorname*{var}_{I_k} z(t) \leqq 2\eta_k + 2\int_{I_k} m(t)\, dt\,.$$

Дело в том, что векторная функция $z(t)$ линейна в I_k, т. е.

$$\operatorname*{var}_{I_k} z(t) = \|z(t_k^2) - z(t_k^1)\| = \|y(t_k^1) - y(t_k^2)\| \leqq \operatorname*{var}_{I_k} y(t) \leqq \eta_k + \int_{I_k} m(t)\, dt$$

($t_{n_k}^1$, $t_{n_k}^2$ — концевые точки интервала I_k).

Имеем (см. определение у леммы 4)

$$\operatorname*{var}_{\langle t_0 T \rangle} (z(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, z(\tau))\, d\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (z(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, z(\tau))\, d\tau) +$$

$$+ s\{z(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, z(\tau))\, d\tau\} =$$

(по лемме 4)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} (z(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, z(\tau))\, d\tau) + s\{y(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, y(\tau))\, d\tau\} <$$

$$< \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} (z(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, z(\tau))\, d\tau) < \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} (y(t) - z(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} (y(t) - \int_{t_0}^{t} X(\tau, y(\tau))\, d\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} (\int_{t_0}^{t} [X(\tau, y(\tau)) - X(\tau, z(\tau))]\, d\tau) <$$

$$< \delta + 2\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k + 2\int_{N} m(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k + 2\int_{N} m(t)\, dt < 4\delta + 4\int_{N} m(t)\, dt < 5\delta\,,$$

если еще выбрать $\varepsilon > 0$ так малым, чтобы было $\int\limits_{N} m(t)\, dt < \frac{\delta}{4}$. Для точек $t \in I_k$ имеет место

$$\|y(t) - z(t)\| \leqq \operatorname*{var}_{I_k} (y(t) - z(t)) \leqq 2\eta_k + 2\int_{I_k} m(t)\, dt < 2\delta +$$

$$+ \int_{N} m(t)\, dt < 3\delta\,.$$

Для $t \operatorname{non} \in N$ $y(t) = z(t)$. Согласно лемме 2 функция $z(t)$ абсолютно непрерывна. Этим и доказывается вспомогательная теорема 5.

В введении мы уже упоминали, что решение $x \equiv 0$ уравнения (1) будет интегрально устойчиво, если оно вариационно устойчиво. Рассмотрим это более подробно.

К произвольному числу $\delta > 0$ подберем $B(\delta) > 0$ согласно вариационной устойчивости. Покажем, что $B(2\delta)$ удовлетворяет условию из определения интегральной устойчивости (сформулированному в теореме 9). Итак, пусть векторная функция $y(t)$, составляющие которой обладают непрерывными производными, выполняет требование

$$\|y(t_0)\| < \delta\,, \quad \int_{t_0}^{T} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau < \delta\,.$$

Введем векторную функцию $z(\tau) = y(\tau)$ для $t_0 \leqq \tau \leqq T$, причем $z(\tau) \equiv 0$ для $0 \leqq \tau \leqq t_1$, где $0 < t_1 < t_0$; $z(\tau)$ линейна в интервале $\langle t_1, t_0 \rangle$. Так как

$$\int_{t_1}^{t_0} \left\| \frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, z(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \to \|y(t_0)\|\,,$$

если $t_1 \to t_0$, то можно подобрать t_1 так, чтобы

$$\operatorname*{var}_{\langle t_1, t_0 \rangle} [z(\tau) - \int_0^\tau X(t, z(t))\,\mathrm{d}t] < \delta\,.$$

Функция $z(t)$ выполняет условие $z(0) = 0$ и

$$\operatorname*{var}_{\langle 0, T \rangle} [z(\tau) - \int_0^\tau X(t, z(t))\,\mathrm{d}t] = \operatorname*{var}_{\langle t_1, t_0 \rangle} [z(\tau) - \int_0^\tau X(t, z(t))\,\mathrm{d}t] +$$

$$+ \operatorname*{var}_{\langle t_0, T \rangle} [y(\tau) - \int_0^\tau X(t, z(t))\,\mathrm{d}t] < 2\delta\,.$$

Согласно вариационной устойчивости будет $\|z(\tau)\| < B(2\delta)$ для $\tau \geqq 0$.

Наоборот, если решение $x \equiv 0$ не является вариационно устойчивым, то существует такая система векторных функций $y^{(k)}(\tau)$, что

$$y^{(k)}(0) = 0\,, \quad \operatorname*{var}_{\langle 0, T_k \rangle} [y^{(k)}(\tau) - \int_0^\tau X(t, y^{(k)}(t))\,\mathrm{d}t] < \bar{\delta}\,, \quad \lim_{k \to \infty} \|y^{(k)}(T_k)\| = \infty,$$

где $\bar{\delta} > 0$ — некоторое фиксированное число, или существует такая система векторных функций $y^{(k)}(\tau)$, что

$$y^{(k)}(0) = 0\,, \quad \lim_{k \to \infty} \operatorname*{var}_{\langle 0, T_k \rangle} [y^{(k)}(\tau) - \int_0^\tau X(t, y^{(k)}(t))\,\mathrm{d}t] = 0\,, \quad \|y^{(k)}(T_k)\| \geqq \varepsilon > 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число (см. доказательство теоремы 9).

Согласно вспомогательной теореме 6 эти векторные функции можно аппроксимировать абсолютно непрерывными векторными функциями и, следовательно, решение $x \equiv 0$ не является интегрально устойчивым. Таким образом мы доказали эквивалентность интегральной и вариационной устойчивости.

II. Примеры

В этой части мы приведем четыре примера, о которых упоминалось в введении.

Первый пример показывает, что интегральную устойчивость нельзя охарактеризовать при помощи функций $V(t, x)$, которые удовлетворяли бы условиям теоремы 1 и одновременно имели бы непрерывные производные по всем переменным, если правые части этого векторного уравнения выполняют лишь условия Каратеодори.

Второй пример показывает, что сильная устойчивость и асимптотическая интегральная устойчивость не эквивалентны. Здесь построен даже такой пример, в котором сильно устойчивое нулевое решение не является ни интегрально устойчивым, ни устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

В введении было сказано, что в автономном случае асимптотическая интегральная устойчивость эквивалентна сильной устойчивости в локальном смысле. Третий пример показывает, что асимптотическая интегральная устойчивость и сильная устойчивость в целом (т. е. по определениям 2 и 3) не являются эквивалентными даже в автономном случае.

Четвертый пример показывает, что устойчивость при постоянно действующих возмущениях и асимптотическая интегральная устойчивость не эквивалентны. Подобно тому, как и во втором примере, здесь построен пример, в котором нулевое решение, будучи устойчивым при постоянно действующих возмущениях, не является интегрально устойчивым.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}} \cdot \frac{1}{(|t-1|+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{для} \quad t \neq 1,\ f(1) = 0\,.$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xf(t)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Покажем, что решение $x \equiv 0$ интегрально устойчиво.

Действительно, функция $V(t, x) = xe^{-2\sqrt{\frac{t-1}{t}}}$ для $t \geqq 1$, $V(t, x) = xe^{2\sqrt{\frac{-t+1}{-t+2}}}$ для $t \leqq 1$, очевидно, удовлетворяет условиями 1 и 2 теоремы 1 и является абсолютно непрерывной. Решения указанного уравнения имеют вид $x(t) = x_0 e^{2\sqrt{\frac{t-1}{t}}}$ для $t \geqq 1$, $x(t) = x_0 e^{-2\sqrt{\frac{-t+1}{-t+2}}}$ для $t \leqq 1$. Исследуя ход изменения функции $V(t, x)$ вдоль решения, получим

$$V(t, x(t)) = x(t)\, e^{-2\sqrt{\frac{t-1}{t}}} = x_0 \quad \text{для } t \geqq 1\,,$$

$$V(t, x(t)) = x(t)\, e^{2\sqrt{\frac{-t+1}{-t+2}}} = x_0 \quad \text{для } t \leqq 1\,,$$

и, следовательно, $V(t, x)$ постоянна вдоль любого решения и этим самым выполняет условие 3 теоремы 1.

Покажем теперь, что для этого уравнения не может существовать функция $\overline{V}(t, x)$, которая бы удовлетворяла условиям теоремы 1 и притом выполняла бы условие Липшица. Допустим противное. Пусть для точки $[1, x_0]$ существуют постоянные $\delta > 0$ и $L > 0$ такие, что для любых двух точек $[t, x]$, $[T, y]$ в окрестности точки $[1, x_0]$, т. е.

$$|t - 1| < \delta\,, \quad |T - 1| < \delta\,, \quad |x - x_0| < \delta\,, \quad |y - x_0| < \delta\,;$$

имеет место

$$|\overline{V}(t, x) - \overline{V}(T, y)| \leqq L[|t - T| + |x - y|]\,.$$

Через точку $[1, x_0]$ проведем решение $x(t)$. По свойству 3 функция $\overline{V}(t, x(t))$ — невозрастающая, т. е.

$$\overline{V}(t, x(t)) - \overline{V}(1, x(1)) \leqq 0 \quad \text{для } t \geqq 1\,.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{\overline{V}(t, x(t)) - \overline{V}(1, x(t))}{t - 1} + \frac{\overline{V}(1, x(t)) - \overline{V}(1, x(1))}{x(t) - x_0} \cdot \frac{x(t) - x_0}{t - 1} \leqq 0 \text{ для } t > 1\,,$$

$$\frac{\overline{V}(1, x(t)) - \overline{V}(1, x(1))}{x(t) - x_0} \cdot \frac{x(t) - x_0}{t - 1} \leqq - \frac{\overline{V}(t, x(t)) - \overline{V}(1, x(t))}{t - 1} \leqq L\,,$$

если ограничиться столь малыми $t - 1$, чтобы было $|t - 1| < \delta$, $|x(t) - x_0| < \delta$. Ввиду того, что $\lim\limits_{t \to 1+} \dfrac{x(t) - x_0}{t - 1} = +\infty$, будет

$$\limsup_{t \to 1+} \frac{\overline{V}(1, x(t)) - \overline{V}(1, x(1))}{x(t) - x(1)} \leqq 0\,.$$

Вместо t введем новую переменную $h = x(t) - x(1)$; для $t > 1$ будет $h > 0$, для $t \to 1+$ будет $h \to 0+$. При новых обозначениях предыдущее неравенство примет вид

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{\overline{V}(1, x(1) + h) - \overline{V}(1, x(1))}{h} \leqq 0\,.$$

Итак, функция $\overline{V}(1, x)$ — невозрастающая функция x ($x(1) = x_0$ произвольно). Отсюда $V(1, x) \leqq V(1, 0) \leqq 0$ для $x \geqq 0$. Но это неравенство противоречит условию 1 теоремы 1.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, y)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(t, x, y)\,,$$

где правые части будут определены в полупространстве $t \geqq 1$ следующим образом:

$X(t, x, y) = y$, как для $y \leqq 0$, так и для $y > 0$, $|x| > \alpha y$, где $0 < \alpha < \frac{1}{4}(1 - e^{-2})$;

$$X(t, x, y) = e^{-2t}y + \frac{1 - e^{-2t}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{|xy|} \text{ для } y > 0, \ |x| \leqq \alpha y;$$

$$Y(t, x, y) = y - x \text{ для } y > 0;$$

$$Y(t, x, y) = -\lambda y - x \text{ для } y \leqq 0, \text{ где } \lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{63}.$$

Функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ очевидно, непрерывны и локально выполняют условие Липшица в области $x \neq 0$. Докажем, что решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ сильно устойчиво.

Обозначим область $y > 0$, $-\alpha y < x < 0$ через G_1. Покажем прежде всего, что ни одно решение не останется в области G_1 дольше, чем единицу времени.

Пусть точка $[t_0, x_0, y_0]$ выполняет условие $x_0 = -\alpha y_0$, $y_0 > 0$, $t_0 \geqq 1$, т. е. лежит на границе области G_1. Проходящую через эту точку интегральную кривую мы обозначим через $x(t)$, $y(t)$. Имеем

$$0 < \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - x \leqq 2y\,.$$

Следовательно, $y(t)$ — возрастающая функция. Далее,

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \geqq \sqrt{\frac{y_0}{\alpha}}\,(1 - e^{-2t})\sqrt{|x|} \geqq \sqrt{\frac{y_0}{\alpha}}\,(1 - e^{-2})\sqrt{|x|}\,.$$

Отсюда следует $\sqrt{-x} \leqq \sqrt{-x_0} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_0}{\alpha}}\,(1 - e^{-2})(t - t_0)$. Итак, для $t \geqq t_0 + 1$ будет

$$\sqrt{-x} \leqq \sqrt{-x_0} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_0}{\alpha}}\,(1 - e^{-2}) = \sqrt{\alpha y_0} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_0}{\alpha}}\,(1 - e^{-2}) =$$
$$= \sqrt{\alpha y_0}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{-2}}{\alpha}\right) < 0\,.$$

Отсюда следует, что $x(t)$ должно было в интервале $(t_0, t_0 + 1\rangle$ покинуть область G_1. Так как в этой области имеет место $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqq 2y$, имеем $y(t) \leqq y_0 e^{2(t - t_0)}$. Вторая составляющая $y(t)$ рассматриваемой интегральной кривой не может таким образом превзойти величину $y_0 e^2$.

Область $y > 0$, $0 \leqq x < \alpha y$ мы обозначим через G_2 и область $y > 0$, $0 \leqq x \leqq y$ — через G_2^*. Ясно, что $G_2 \subset G_2^*$.

Аналогично предыдущему докажем теперь, что интегральная кривая $x(t)$, $y(t)$, проходящая через точку $[t_1, 0, y_1]$, пройдет через область G_2 самое большее за единицу времени и что $y(t)$ притом не возрастет более, чем до $y_1 e$. Допустим противное, т. е. что $x(t)$, $y(t)$ останется для $t_1 \leqq t \leqq t_1 + 1$ в области G_2, а, значит, и в области G_2^*. Согласно определению $Y(t, x, y)$ имеем

$$0 \leqq \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - x \leqq y\,;$$

отсюда следует $y_1 \leqq y(t) \leqq y_1 e^{t-t_1}$. Для $x(t)$ будет

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \geqq \frac{1-e^{-2t}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{y_1}\sqrt{x} \geqq \frac{1-e^{-2}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{x}\,.$$

Так как притом $\left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} > 0$, из этого неравенства следует $\sqrt{x(t)} - \sqrt{x(t_1)} \geqq \frac{1}{2}(1-e^{-2})\sqrt{\frac{y_1}{\alpha}}(t-t_1)$ для $t \geqq t_1$. В силу равенства $x(t_1) = 0$ для $t = t_1 + 1$ имеет место неравенство

$$\sqrt{x(t_1+1)} \geqq \frac{1}{2}(1-e^{-2})\sqrt{\frac{y_1}{\alpha}}\,.$$

Для $y(t)$ имеем $y(t_1+1) \leqq y_1 e$. Однако, отсюда следует, что $x(t_1+1)$, $y(t_1+1)$ уже не может находиться в области G_2, так как

$$x(t_1+1) \geqq \frac{1}{4}(1-e^{-2})^2\frac{y_1}{\alpha} \geqq \alpha y_1 e \geqq \alpha y(t_1+1)\,.$$

Одновременно этим доказано, что $y(t)$ не превысит ey_1. Итак, любое решение пройдет через область $G_1 \cup G_2$ за время, более короткое, чем две единицы, а координата y не превысит величину $y_0 e^3$, где y_0 — значение $y(t)$ при вступлении решения в область G_1.

Введем полярные координаты $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$. Значения $y(t)$, $x(t)$, $r(t)$, t при вхождении в область G_1 мы обозначим через x_0, y_0, r_0, t_0, при выходе из области G_2 мы их обозначим через x_v, y_v, r_v, t_v. r_0 и r_v связаны соотношением $r_v \leqq r_0 e^3$. Область $y \geqq 0$, $x \leqq -\alpha y$ обозначим через G_3, а область $y \geqq 0$, $x \geqq \alpha y$ обозначим через G_4. В этих областях имеет место

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}} = \frac{1}{r^2}(yX - xY) = \frac{1}{r^2}(y^2 - xy + x^2) = 1 - \frac{xy}{x^2+y^2} \geqq \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{y^2}{r} \leqq r.$$

Итак, любое решение пройдет через области соответственно G_3 и G_4 за время, меньшее чем π, а $r(t)$ притом не превысит $r_0 e^{\pi}$.

Теперь уже можно утверждать, что через область $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ любое решение пройдет за время, меньшее чем $2\pi + 2$, и что $r(t)$ не превысит $r_0 e^{2\pi+3}$.

Рассмотрим область G_5: $-\pi \leqq \varphi \leqq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi$. В этой области $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y - x$, где $\lambda = \frac{1}{4}\sqrt{63}$. Решения этой системы имеют вид

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}\cos(t-t_0)\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}\sin(t-t_0)\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}\,,$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}C_1\lambda + C_2\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}\right)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}\cos(t-t_0)\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}} -$$

$$-\left(\frac{1}{2}C_2\lambda + C_1\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}\right)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}\sin(t-t_0)\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}\,.$$

Любое решение пройдет через область G_5 в точности за время $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}$ и

$$r\left(t_0 + \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}\right) = e^{-\frac{\lambda}{2}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}}\,r(t_0)\,.$$

Так как для каждой точки $[x, y]$, не совпадающей с началом координат, имеет место

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{yX - xY}{x^2+y^2} > 0 \quad \text{и} \quad -Kr \leqq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \leqq Kr\,,$$

где K — некоторая постоянная, все решения монотонно вращаются вокруг оси t (за исключением тривиального решения $x \equiv y \equiv 0$). Время одного оборота не превышает $2\pi + 2 + \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}$. При прохождении областей G_3, G_1, G_2, G_4 величина $r(t)$ может возрасти самое большее до значения $r_0e^{2\pi+3}$. При прохождении через область G_5 величина $r(t)$ должна понизиться с этого значения до

$$r_0e^{2\pi+3-\frac{\lambda}{2}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}}\,.$$

Ввиду выбора числа λ имеем $2\pi + 3 - \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}} < -\pi$. Итак, после одного целого оборота $r(t)$ понизится самое меньшее до $r_0e^{-\pi}$. Из этого уже следует сильная устойчивость решения $x \equiv 0$, $y \equiv 0$. Действительно, можно положить $B(\delta) = \delta e^{2\pi+3}$ и к любым числам $\delta > 0$, $\eta > 0$ подобрать

$$T(\delta, \eta) = n\left(2\pi + 2 + \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}}}\right),$$

где n так велико, чтобы было $e^{-n\pi} < \dfrac{\eta}{\delta}$.

Покажем теперь, что $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ не является интегрально устойчивым. Рассмотрим функции $\bar{x}(t) \equiv 0$, $\bar{y}(t) = y_0 e^t$, $y_0 > 0$. Имеем

$$\int_1^\infty \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\bar{x}(t)}{\mathrm{d}t} - X(t, \bar{x}(t)\, \bar{y}(t))\right|^2 + \left|\frac{\mathrm{d}\bar{y}(t)}{\mathrm{d}t} - Y(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))\right|^2}\, \mathrm{d}t = y_0 e^{-1}.$$

Функция $\bar{y}(t)$ может, однако, принимать с течением сколь угодно большие значения. Но это противоречит определению интегральной устойчивости.

Покажем, что $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ не является устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Возьмем фиксированное $\varepsilon = 1$. К любым числам $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ можно подобрать возмущения

$$R_1(t, x, y) = -y_0 e^{-t}, \quad R_2(t, x, y) \equiv 0,$$

где y_0 удовлетворяет неравенству $0 < y_0 < \min(\eta_1, \eta_2)$, и $\bar{x}(t) \equiv 0$, $\bar{y}(t) = y_0 e^t$ — решение системы уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, y) + R_1(t, x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(t, x, y) + R_2(t, x, y).$$

Так как $R_1(t, x, y)$, $R_2(t, x, y)$ удовлетворяют неравенствам $|R_1(t, x, y)| < \eta_2$, $|R_2(t, x, y)| < \eta_2$ для $t \geqq 1$ и $|\bar{x}(1)| < \eta_1$, $|\bar{y}(1)| < \eta_1$, $\lim\limits_{t\to\infty} |\bar{y}(t)| = \infty$, решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ не может быть устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

Пример 3. По аналогии с примером 2 рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = X_1(x_1, x_2), \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = X_2(x_1, x_2),$$

где функции X_1, X_2 определены так:

$X_1(x_1, x_2) = x_2$, как для $x_2 \leqq 0$, так и для $x_2 > 0$, $|x_1| \geqq \alpha(x_2) =$

$= \min\limits_{x_2 \leqq \varphi \leqq e x_2} \dfrac{\varphi}{1 + \varphi^2}$,

$X_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{1 + x_2^2} + \dfrac{x_2^3}{\alpha(x_2)(1 + x_2^2)} |x_1|$ для $x_2 > 0$, $|x_1| < \alpha(x_2)$,

$X_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ для $x_2 > 0$,

$X_2(x_1, x_2) = -\lambda x_2 - x_1$ для $x_2 \leqq 0$, $\lambda = \dfrac{1}{4}\sqrt{63}$.

Относительно решения $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$ докажем, что оно сильно устойчиво подобно тому, как и в примере 2. Покажем, что $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$ не является интегрально устойчивым. Введем в рассмотрение функции $\bar{x}_1(t) \equiv 0$, $\bar{x}_2(t) = x_0 e^t$, $x_0 > 0$. Имеем

$$\int_0^\infty \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\bar{x}_1(t)}{\mathrm{d}t} - X_1(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))\right|^2 + \left|\frac{\mathrm{d}\bar{x}_2(t)}{\mathrm{d}t} - X_2(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))\right|^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0.$$

Итак, к любому $\delta \geqq \frac{\pi}{2}$ можно отыскать векторную функцию $\bar{x}(t)$: $\bar{x}_1(t) \equiv 0$, $\bar{x}_2(t) = x_0 e^t$, удовлетворяющую соотношениям

$$\|\bar{x}(0)\| < \delta\,, \quad \int\limits_0^\infty \left\| \frac{\mathrm{d}\bar{x}(t)}{\mathrm{d}t} - X(\bar{x}(t)) \right\| \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0 < \delta\,,$$

при этом $\|\bar{x}(t)\|$ принимает с течением t сколь угодно большие значения. Отсюда следует, что решение $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$ не является интегрально устойчивым в целом.

Пример 4. Теперь мы будем рассматривать систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, y)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(t, x, y)\,,$$

где функции $X(t, x, y)$ и $Y(t, x, y)$ построим следующим образом:

Прежде всего возьмем положительные числа δ_n^m для $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ так, чтобы сходились ряды

$$l_s = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^{n-s} + \delta_n^{n-s-1})\,, \quad \delta_n^m < 2^{m-3}$$

и чтобы $\lim\limits_{s\to\infty} l_s' = 0$. Далее построим кривые

$$x_n^m(t) = [2^{m-1} + \delta_n^m + (2^{m-1} - \delta_{n+1}^m - \delta_n^m)(t-n)] \cos 2\pi t$$
$$y_n^m(t) = [2^{m-1} + \delta_n^m + (2^{m-1} - \delta_{n+1}^m - \delta_n^m)(t-n)] \sin 2\pi t, \text{ для } n \leqq t \leqq n+1\,.$$

Нам понадобятся еще следующие множества:

S_n^m есть множество таких точек $[\tau, \xi, \eta]$, которые выполняют неравенства

$$\sqrt{(t-\tau)^2 + (\xi - x_n^m(t))^2 + (\eta - y_n^m(t))^2} < \frac{1}{2} \min(\delta_{n+1}^m, \delta_n^m)$$

хотя бы для одного t из интервала $\langle n, n+1\rangle$. В точках полупространства $t \geqq 0$, не входящих ни в одно из множеств S_n^m, определим

$$X(t, x, y) = -x\,, \quad Y(t, x, y) = -y\,.$$

На кривых $x_n^m(t)$, $y_n^m(t)$ определим $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ так, чтобы эти кривые были решениями этой системы. На остальные точки полупространства $t \geqq 0$ мы функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ непрерывно расширим. Если положить

$$r_n^m(t)^2 = x_n^m(t)^2 + y_n^m(t)^2\,,$$

то получим

$$2^{m-1} < 2^{m-1} + \delta_n^m \leqq r_n^m(t) \leqq 2^m - \delta_{n+1}^m < 2^m \text{ для } n \leqq t \leqq n+1\,.$$

Итак, $x_n^{n-s}(t)$, $y_n^{n-s}(t)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют каждый раз по одному завитку развертывающейся разрывной спирали, который остается вместе со своей окрестностью S_n^{n-s} между соосными цилиндрами радиусов 2^{n-s}, 2^{n-s-1}.

Теперь мы докажем, что решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. К любому $\varepsilon > 0$ подберем $\eta_1 = 2^m$ $\eta_2 = 2^{m-3}$, если $2^m < \varepsilon \leqq 2^{m+1}$. По определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях нам нужно исследовать решения системы дифференциальных уравнений с возмущениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, y) + R_1(t, x, y)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(t, x, y) + R_2(t, x, y)\,, \tag{11}$$

где $|R_1(t, x, y)| < \eta_2$, $|R_2(t, x, y)| < \eta_2$, если $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$.

Пусть точка $[\tau, \xi, \eta]$, $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \varepsilon$ не является точкой ни одного множества S_n^m. Положим $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\xi(\tau) = \xi$, $\eta(\tau) = \eta$, $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ есть решение уравнений (11). Имеем

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + 2\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -2(\xi^2 + \eta^2) + 2(\xi R_1(\tau, \xi, \eta) + \eta R_2(\tau, \xi, \eta))\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -r + \frac{\xi R_1(\tau, \xi, \eta) + \eta R_2(\tau, \xi, \eta)}{r}\,.$$

Так как мы предполагаем, что

$$|R_1(\tau, \xi, \eta)| < \eta_2 = 2^{m-3}\,, \quad |R_2(\tau, \xi, \eta)| < \eta_2 = 2^{m-3}\,,$$

имеет место $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \leqq -r + 2^{m-2}$. Если $r(t) \geqq 2^{m-1}$ и точки $[t, \xi(t), \eta(t)]$ не входят ни в одно S_n^m, то $r(t)$ не возрастает. Так как на поверхности $r = 2^m$ не имеется точек множества S_n^m, решения системы дифференциальных уравнений не могут пересекать эту поверхность извнутри и, следовательно, всегда будет $r(t) < 2^m < \varepsilon$. Это значит, что решение $x \equiv y \equiv 0$ является устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

Согласно теореме 6 мы знаем, что интегральная устойчивость эквивалентна вариационной устойчивости. Итак, покажем, что $x \equiv y \equiv 0$ не будет вариационно устойчивым. Рассмотрим кривые

$$u_1^s(t) = x_l^{l-s}(t) \quad \text{для} \quad l < t \leqq l + 1,\ l \leqq s\,,$$
$$u_2^s(t) = y_l^{l-s}(t)\,, \quad u_i^s(0) = 0\,, \quad i = 1, 2.$$

Видно, что $u_1^s(t)$, $u_2^s(t)$ имеют всегда ограниченное изменение (на конечном интервале) и что

$$\underset{\langle 0,s\rangle}{\operatorname{var}}\left(u^s(t) - \int_0^t X(\tau, u^s(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right) = \sum_{i=0}^{s-1} \|u^s(n+0) - u^s(n)\| =$$
$$= \sum_{n=1}^{s-1} \sqrt{(x_n^{n-s}(n) - x_{n-1}^{n-1-s}(n))^2 + (y_n^{n-s}(n) - y_n^{n-1-s}(n))^2} =$$
$$= \sum_{n=1}^{s-1} (\delta_n^{n-s} + \delta_n^{n-s-1}) + 2^{-s-1} + \delta_0^{-s-1} \leqq$$
$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^{n-s} + \delta_n^{n-s-1}) + 2^{-s-1} = l_s + 2^{-s-1}, \text{ где } x_{-1}^{-1-s}(0) = y_{-1}^{-1-s}(0) = 0.$$

Так как $\lim\limits_{s\to\infty} l_s = 0$, $\|u^s(s)\| = \frac{1}{2} - \delta_s^{-1} > \frac{1}{4}$, система векторных функций $u^s(t)$ показывает, что решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ не является интегрально устойчивым.

III

В этой части мы докажем леммы, на которые мы ссылались в предыдущих частях.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — абсолютно непрерывная векторная функция в интервале $\langle a, b \rangle$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ в $\langle a, b \rangle$ существует векторная функция $g(x)$, составляющие которой обладают непрерывными производными, причем*

$$\int\limits_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right\| \mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Доказательство. Теорема будет, очевидно, доказана, если покажем, что для отдельных составляющих функций $f_i(x)$, $g_i(x)$

$$\int\limits_a^b \left| \frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}g_i(x)}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

По предположению $f(x)$ — абсолютно непрерывная функция, определенная на интервале $\langle a, b \rangle$. К $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ так, чтобы для всякого множества M, $\mu(M) < \delta$ имело место

$$\int\limits_M \left| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Так как $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ измерима и почти всюду конечна, можно найти столь большое число $N > 0$, чтобы для множества S точек x, $\left| \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right| > N$ было $\mu(S) < \delta$. Итак,

$$\int\limits_S \left| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Положим $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ для $x \in \langle a, b \rangle - S$, $\varphi(x) = 0$ для $x \in S$. Так как функция $\varphi(x)$ измерима, по теореме Лузина существует открытое множество H так, что $\varphi(x)$ непрерывна на $\langle a, b \rangle - H$, причем $\mu(H) < \dfrac{\varepsilon}{4N}$. Можно всегда найти непрерывную функцию $u(x)$, определенную на всем интервале $\langle a, b\rangle$ так, что $u(x) = \varphi(x)$ для $x \in \langle a, b\rangle - H$ и $|u(x)| \leqq N$. Имеет место

$$\int_a^b \left|\frac{df(x)}{dx} - u(x)\right| dx \leqq \int_a^b \left|\frac{df(x)}{dx} - \varphi(x)\right| dx + \int_a^b |\varphi(x) - u(x)|\, dx \leqq$$

$$\leqq \int_S \left|\frac{df(x)}{dx}\right| dx + \int_H |\varphi(x)|\, dx + \int_H |u(x)|\, dx \leqq \frac{\varepsilon}{2} + 2N\mu(H) \leqq \varepsilon\,.$$

Искомая функция имеет вид $g(x) = f(a) + \int_a^x u(\tau)\, d\tau$.

Лемма 2. *Если функция f имеет в $\langle a, c\rangle$ ограниченное изменение, непрерывна и обладает в каждой точке конечной производной справа (слева), то она абсолютно непрерывна.*

При доказательстве этой леммы мы будем ссылаться на следующие утверждения:

α) Непрерывная функция, имеющая в каждой точке неотрицательное нижнее производное число справа, является неубывающей.

β) Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, имеющая почти всюду неотрицательное нижнее производное число справа, причем ни в одной точке нижнее производное число справа не равно $-\infty$; тогда $\varphi(x)$ — неубывающая функция.

Доказательство. Пусть E — множество точек, в которых нижнее производное число справа отрицательно. Так как лебегова мера этого множества равна нулю, существует возрастающая непрерывная функция $\sigma(x)$ такая, что в точках множества E имеет место $\dfrac{d\sigma(x)}{dx} = \infty$ (см. И. П. Натансон, теорема 6, § 2, гл. VIII).

Положим $\Phi(x) = \varphi(x) + \varepsilon\sigma(x)$, где $\varepsilon > 0$. $\Phi(x)$ имеет во всех точках неотрицательные верхние и нижние производные числа справа. В точках $x \in E$ нижнее производное число справа функции $\varphi(x)$ конечно, но $\dfrac{d\sigma(x)}{dx} = +\infty$. Для $x \operatorname{non} \in E$ будет нижнее производное число справа функции $\varphi(x)$ неотрицательным, а $\sigma(x)$ будет возрастающей функцией. Итак, согласно α) функция $\Phi(x)$ не убывает. Имеем

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(b) - \varphi(a) + \varepsilon(\sigma(b) - \sigma(a)) \geqq 0 \text{ для } a \leqq b \leqq c\,.$$

Ввиду произвольности ε имеет место $\varphi(b) \geqq \varphi(a)$ для $a \leqq b \leqq c$.

Доказательство леммы. Так как $f(x)$ — функция с ограниченным изменением, она обладает почти всюду интегрируемой производной. Для любого натуральнохо числа n определим

$$\varphi_n(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ для точек, где } \frac{df(x)}{dx} \text{ существует и } \frac{df(x)}{dx} \leqq n\,;$$

$$\varphi_n(x) = n \qquad \text{для точек, где } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \text{ существует и } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} > n\,;$$

$$\varphi_n(x) = 0 \qquad \text{для точек, где } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \text{ не существует.}$$

Почти всюду имеет место $|\varphi_n(x)| \leqq \left|\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|$ и, следовательно, $\varphi_n(x)$ — интегрируемая функция. Положим

$$R_n(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Покажем, что $R_n(x)$ не убывает. Для $h > 0$ имеем

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \geqq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n\,,$$

так как $\varphi_n(x) \leqq n$. Итак, нижнее производное число справа функции $R_n(x)$ нигде не равно $-\infty$.

Почти всюду $\dfrac{\mathrm{d}R_n(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - \varphi_n(x) \geqq 0$. Отсюда следует $R_n(b) \geqq R_n(a)$ согласно β), для $a \leqq b \leqq c$ то есть,

$$f(b) - f(a) \geqq \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{для} \quad a \leqq b \leqq c\,.$$

Существует множество N, $\mu(N) = 0$ так, что на $\langle a, b\rangle - N$ имеет место неравенство $|\varphi_n(x)| \leqq \left|\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{\langle a,b\rangle - N} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle a,b\rangle - N} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Отсюда следует $f(b) - f(a) \geqq \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ для $a \leqq b \leqq c$. Применяя те же рассуждения к $-f(x)$, получим

$$f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \quad \text{для} \quad a \leqq b \leqq c\,.$$

Это значит, что $f(x)$ абсолютно непрерывна в интервале $\langle a, c\rangle$.

Лемма 3. *Пусть $y(t)$ — векторная функция, обладающая непрерывной производной в интервале $\langle t_0, T\rangle$. Покажем, что множество значений $t \in \langle t_0, T\rangle$, для которых*

$$\lim_{\Delta t\to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} X(\tau, x(\tau, t))\,\mathrm{d}\tau \neq X(t, y(t))$$

или предел не существует хотя бы для одного решения $x(\tau, t)$ *уравнения* (1), *проходящего через точку* $[t, y(t)]$, *есть множество меры нуль.*

Доказательство проведем от противного. Допустим, что это множество, которое обозначим через M, обладает положительной внешней мерой $\mu_e(M) > 0$. Тогда хотя бы для одной составляющей несомненно, что множество M_1 тех t, для которых

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} X_i(\tau, x(\tau, t))\, \mathrm{d}\tau \neq X_i(t, y(t)) ,$$

или не существует, обладает положительной внешней мерой.

Введем новую переменную $\xi = x - y(T)$ для $t > T$, $\xi = x - y(t)$ для $\in \langle t_0, T\rangle$, $\xi = x - y(t_0)$ для $t < t_0$, а также новую функцию

$$\tilde{X}(t, \xi) = X_i(t, x) - X_i(t, y(T)) \quad \text{для } t > T ,$$
$$\tilde{X}(t, \xi) = X_i(t, x) - X_i(t, y(t)) \quad \text{для } t \in \langle t_0, T\rangle ,$$
$$\tilde{X}(t, \xi) = X_i(t, x) - X_i(t, y(t_0)) \quad \text{для } t < t_0 .$$

Векторную функцию $x(\tau, t)$ в новых переменных обозначим через $\xi(\tau, t)$; имеем $\xi(\tau, t) = x(\tau, t) - y(\tau)$ для $\tau \in \langle t_0, T\rangle$. Множество тех t, для которых

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} X_i(\tau, y(\tau))\, \mathrm{d}\tau \neq X_i(t, y(t))$$

или не существует, обозначим через N. В силу условий Каратеодори будет $\mu(N) = 0$. Для $t \in M_1 - N$, очевидно,

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \tilde{X}(\tau, \xi(\tau, t))\, \mathrm{d}\tau \neq 0$$

или не существует.

Далее рассмотрим случай, когда множество M_2 тех t, для которых

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \tilde{X}(\tau, \xi(\tau, t))\, \mathrm{d}\tau > 0 ,$$

имеет положительную внешнюю меру.

Если наступит случай, когда $\mu_e(M_2) = 0$, но множество t, для которых

$$\liminf_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \tilde{X}(\tau, \xi(\tau, t))\, \mathrm{d}\tau < 0 ,$$

имеет положительную внешнюю меру, то в последующем изложении мы возьмем вместо $\tilde{X}(t, \xi)$ функцию $-\tilde{X}(t, \xi)$. Функция $\tilde{X}(t, \xi)$ наверное выполняет условия Каратеодори, причем $\tilde{X}(t, 0) \equiv 0$ для $t \in \langle t_0, T\rangle$.

Определим теперь функцию $Y(t, \lambda)$ для $t \in \langle t_0, T\rangle$, $\lambda \geqq 0$, $Y(t, \lambda) = \sup\limits_{\|\xi\| \leqq \lambda} \tilde{X}(t,\xi)$. Функция $Y(t, \lambda)$ выполняет условия Каратеодори и представляет собой неубывающую функцию λ при фиксированном t; кроме того $Y(t, 0) \equiv 0$. Если положить $\lambda(\tau, t) = \|\xi(\tau, t)\|$, то

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} Y(\tau, \lambda(\tau, t)) \, \mathrm{d}\tau \geqq \limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \tilde{X}(\tau, \xi(\tau, t)) \, \mathrm{d}\tau > 0$$

для $t \in M_2$, $\mu_e(M_2) > 0$. Очевидно, можно подобрать столь малое число $a > 0$, что множество M_3 значений t, для которых

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} Y(\tau, \lambda(\tau, t)) \, \mathrm{d}\tau \geqq a > 0 \,,$$

имеет положительную внешнюю меру $\mu_e(M_3) > 0$.

Покажем теперь, что „большинство" функций $\lambda(\tau, t)$ не может для $\tau = t$ „слишком возрастать". Имеем

$$\|x(t+h, t) - y(t+h)\| \leqq \|x(t+h, t) - x(t, t)\| + \|y(t+h) - y(t)\| \leqq$$

$$\leqq \int_t^{t+h} \|X(\tau, x(\tau, t))\| \, \mathrm{d}\tau + \int_t^{t+h} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau \leqq \int_t^{t+h} m(\tau) \, \mathrm{d}\tau + Kh \,,$$

где $x(\tau, t)$ есть решение уравнения (1) с начальным условием $x(t, t) = y(t)$ и $\left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \leqq K$ для $\tau \in (t_0, T)$. Следовательно,

$$\frac{\lambda(t+h, t)}{h} = \frac{\|\xi(t+h, t)\|}{h} \leqq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(\tau) \, \mathrm{d}\tau + K \,.$$

Очевидно, существует столь большое число L, что множество N_1 тех t, для которых

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(\tau) \, \mathrm{d}\tau \geqq L$$

имеет меру $\mu(N_1) < \frac{1}{2}\mu_e(M_3)$.

Определим $\bar{\lambda}(\tau, t) = (K + L)(\tau - t)$ для $\tau \geqq t$. Для $t \in M_3 - N_1$ будет $\bar{\lambda}(\tau, t) \geqq \lambda(\tau, t)$ для достаточно малых $\tau - t \geqq 0$ и, следовательно,

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} Y(\tau, \bar{\lambda}(\tau, t)) \, \mathrm{d}\tau \geqq \limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} Y(\tau, \lambda(\tau, t)) \, \mathrm{d}\tau \geqq a > 0$$

для $t \in M_3 - N_1$. Так как $\mu_e(M_3 - N_1) > 0$, покажем, что

$$\int_{t_0}^{T} Y(\tau, s)\, d\tau \geqq \frac{a}{2}\, \mu_e(M_3 - N_1) > 0\,.$$

Для любого $s > 0$ образуем покрытие Витали K_s (замкнутыми отрезками) множества $M_3 - N_1$. Для фиксированного $t \in M_3 - N_1$ существует последовательность $\Delta t_i > 0$, $\Delta t_i \to 0$ такая, что

$$\frac{1}{\Delta t_i} \int_{t}^{t+\Delta t_i} Y(\tau, \bar{\lambda}(\tau, t))\, d\tau \geqq \frac{a}{2} > 0\,.$$

Если, кроме того, Δt_i выполняет условие $\Delta t_i(K + L) < s$, то отрезок $\langle t, t + \Delta t_i \rangle$ мы поместим в K_s. Итак, можно подобрать счетную систему дизъюнктных интервалов $\langle t_n, t_n + \Delta t_n \rangle$ так, чтобы она покрывала множество $M_3 - N_1$ с точностью до множества меры нуль. Из построения покрытия следует, что всегда будет $t_n \in M_3 - N_1$. Так как $Y(t, \lambda)$ — неубывающая функция λ, имеет место

$$\int_{t}^{T} Y(\tau, s)\, d\tau \geqq \sum_{n} \int_{t_n}^{t_n+\Delta t_n} Y(\tau, \bar{\lambda}(\tau, t_n))\, d\tau \geqq \sum_{n} \frac{a}{2}\, \Delta t_n \geqq \frac{a}{2}\, \mu_e(M_3 - N_1)\,.$$

С другой стороны, $Y(t, \lambda)$ выполняет условия Каратеодори, причем $Y(t, 0) \equiv 0$; отсюда следует

$$\lim_{s \to 0+} \int_{t_0}^{T} Y(\tau, s)\, d\tau = 0\,.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mu_e(M) = 0$, и лемма 3 доказана.

Пусть на интервале $\langle a, b \rangle$ задана счетная система дизъюнктных открытых интервалов I_k и предположим, что $f(t)$ непрерывна в $\langle a, b \rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ и обладает ограниченным изменением на $\langle a, b \rangle$. Тогда получим

$$\operatorname*{var}_{\langle a,b \rangle} f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{var}_{I_k} f(t) + \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname*{var}_{J_k^{(n)}} f(t) \tag{13}$$

($f(t)$ непрерывна в концевых точках интервалов I_k!), где $J_k^{(n)}$ — дополнительные замкнутые интервалы к конечному числу интервалов $I_1, \ldots, I_n$.

Определение. Пусть $f(t)$ — векторная функция с конечным изменением на $\langle a, b \rangle$ и пусть дана счетная система дизъюнктных интервалов на $\langle a, b \rangle$. Выражение $s\{f(t)\}$ определим при помощи соотношения

$$s\{f(t)\} = \operatorname*{var}_{\langle a,b \rangle} f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{var}_{I_k} f(t)\,.$$

Лемма 4. *Пусть $f(t)$, $g(t)$ — векторные функции с ограниченними изменениями на $\langle a, b\rangle$. Пусть дана счетная система дизъюнктных открытых интервалов I_k. Если $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны в точках множества $\langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ и $f(t) = g(t)$ для $t \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, то $s\{f(t)\} = s\{g(t)\}$.*

Доказательство. Покажем, что утверждение теоремы эквивалентно утверждению:

1. Если $h(t)$ — векторная функция с ограниченным изменением и непрерывная в точках множества $\langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ и если $h(t) \equiv 0$ в точках $t \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, то $s\{h(t)\} = 0$.

Согласно (13) можно, очевидно, написать

$$s\{\varphi(t)\} = \lim_{n\to\infty} [\operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} \varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{var}_{I_K} \varphi(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname*{var}_{J_k^{(n)}} \varphi(t) .$$

Для функций, имеющих указанные выше свойства, отсюда следует

$$s\{\varphi(t) + \psi(t)\} \leqq s\{\varphi(t)\} + s\{\psi(t)\} .$$

Если теперь положить $f(t) = g(t) + h_1(t)$, $g(t) = f(t) + h_2(t)$, то согласно утверждению 1 получим

$$s\{f(t)\} \leqq s\{g(t)\} + s\{h_1(t)\} = s\{g(t)\} ,$$
$$s\{g(t)\} \leqq s\{f(t)\} + s\{h_2(t)\} = s\{f(t)\} .$$

Наоборот, если справедлива лемма, то положив $g(t) = 0$ для $t \in \langle a, b\rangle$, мы получим $s\{f(t)\} = 0$, откуда уже вытекает эквивалентность наших двух утверждений.

Итак, пусть $h(t)$ удовлетворяет условиям утверждения 1. К любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать разбиение $a \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} \leqq b$ такое, что

$$\sum_{i=0}^{n} \|h(t_{i+1}) - h(t_i)\| > \operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} h(t) - \varepsilon . \tag{10}$$

Точки t_i могут оказаться в интервалах I_k, которые мы обозначим через $I_{k_1} \ldots I_{k_{n+1}}$ и которых может быть самое большее $n + 1$. Произведем теперь следующие изменения:

α) Если $t_i \in I_{k_l}$, $t_{i+1} \in I_{k_{l+1}}$, то мы произведем уплотнение таким образом, что присоединим концевую точку интервала I_{k_l} и начальную точку интервала $I_{k_{l+1}}$. Сумма в предыдущем неравенстве (10) может от этого лишь увеличиться.

β) Если $t_i \in I_{k_l}$, $t_{i+1} \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, то $h(t_{i+1}) = 0$.

Вместо точки t_{i+1} возьмем концевую точку τ_{k_l} интервала I_{k_l}, в которой также $h(\tau_{k_l}) = 0$. Сумма в (10) от этой замены не может уменьшиться.

Аналогичные рассуждения можно использовать, если

$$t_i \in \langle a, b\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ t_{i+1} \in I_{k_{l+1}} .$$

γ) Если точка t_i не входит ни в какой интервал $\bar{I}_k$*) и, следовательно, $h(t_i) = 0$, то точку t_i можно отбросить, не уменьшая суммы в (10).

Это новое разбиение обозначим через $a \leqq t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_l \leqq b$, $l \leqq \leqq 3(n+1)$. Очевидно, имеем

$$\sum_{i=0}^{l-1} \|h(t'_{i+1}) - h(t'_i)\| > \operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} h(t) - \varepsilon .$$

Точки t'_k теперь, однако, входят в замкнутые интервалы $\bar{I}_{k_1}, \ldots, \bar{I}_{k_{n+1}}$ и можно их разбить на группы. В одну группу мы поместим все те точки, которые входят в один и тот же интервал $\bar{I}_{k_m}$. В одной такой группе имеет место

$$\sum_i \|h(t'_{i+1}) - h(t'_i)\| \leqq \operatorname*{var}_{\bar{I}_{k_m}} h(t) = \operatorname*{var}_{I_{k_m}} h(t) .$$

Имеем

$$\sum_{m=1}^{n+1} \operatorname*{var}_{I_{k_m}} h(t) \geqq \sum_{i=1}^{l-1} \|h(t'_{i+1}) - h(t'_i)\| > \operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} h(t) - \varepsilon$$

и, следовательно,

$$s\{h(t)\} \leqq \operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} h(t) - \sum_{m=1}^{n+1} \operatorname*{var}_{I_{k_m}} h(t) < \varepsilon .$$

Так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, справедливо равенство $s\{h(t)\} = 0$.

Лемма 5. *Пусть векторная функция $y(\tau)$ определена в интервале $\langle t_0, T\rangle$, где ее составляющие обладают непрерывными производными. Функция $X(t, x)$ определена в полупространстве $t \geqq 0$, где она удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда*

$$\limsup_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \inf_{x(\tau,t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| = \int_{t_0}^{T} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau ,$$

где $x(\tau, t_i)$ есть решение уравнения (1) удовлетворяющее соотношениям $x(t_i, t_i) = y(t_i)$; притом D есть разбиение интервала $\langle t_0, T\rangle$: $t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \ldots \leqq t_n = T$, $\nu(D) = \max\limits_{i=0,1,\ldots n-1} (t_{i+1} - t_i)$.

*) $\bar{I}_k$ есть замыкание интервала.

Доказательство. Известно, что из всех решений $x(\tau, t_i)$ можно выбрать решение $x^*(\tau, t_i)$ так, что $\inf\limits_{x(\tau, t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| = \|x^*(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\|$. Итак, для любого разбиения D имеет место

$$\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(\tau,t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|x^*(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| + \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| =$$

$$= \eta + \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| ,$$

где

$$\eta = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| - \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| .$$

Покажем, что $\eta \to 0$, если $\nu(D) \to 0$:

$$|\eta| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau \right\| \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - X(\tau, y(\tau))] \, \mathrm{d}\tau \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(\tau, x^*(\tau, t_i)) - X(\tau, y(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \|X(\tau, \omega_D(\tau)) - X(\tau, y(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau .$$

Векторная функция $\omega_D(\tau)$ определяется так же, как и в доказательстве вспомогательной теоремы 4':

$$\omega_D(\tau) = x^*(\tau, t_i) \quad \text{для} \quad \tau \in \langle t_i, t_{i+1}) , \quad \omega_D(T) = y(T) .$$

Там было также доказано, что $\omega_D(\tau)$ сходится равномерно к $y(\tau)$, если $\nu(D) \to 0$.

По теореме Лебега имеем

$$\int_{t_0}^{T} \|X(\tau, \omega_D(\tau)) - X(\tau, y(\tau))\| \,\mathrm{d}\tau \to 0 \,,$$

если $\nu(D) \to 0$.

Так как $\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau))\right] \mathrm{d}\tau$ является непрерывной векторной функцией, то

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right] \mathrm{d}\tau \right\| = \operatorname*{var}_{\langle t_0, T\rangle} \left(\int_{t_0}^{t} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right] \mathrm{d}\tau \right).$$

Итак, в общем мы получаем

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x(\tau, t_i)} \|x(t_{i+1}, t_i) - y(t_{i+1})\| =$$

$$= \operatorname*{var}_{\langle t_0, T\rangle} \left(\int_{t_0}^{t} \left[X(\tau, y(\tau)) - \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right] \mathrm{d}\tau \right) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - X(\tau, y(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Курцвейль Я.*: Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. мат. журнал *6* (*81*) 1956, 455—484.

[2] *Yoshizawa T.*: On the stability of solutions of a system of differential equation. Memoirs of the College of science Univ. of Kyoto *XXIX*, No 1, 1955, 27—33.

[3] *Whitney H.*: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed set. Transaction of the American Mathematical Society V *36* (1934), 63—89.

[4] *Беллман Р.*: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. И. Л., 1954.

[5] *Antosiewitcz H. A.*: Stable systems of differential equations with integrable perturbations terms. J. London. Math. 1956, Soc., *31*, No 122, 208—212.

[6] *Гермаидзе В. Е.*: Об асимптотической устойчивости по первому приближению. ПММ, Т. *XXI*, в. *1* (1957), 133—135.

[7] *Гермаидзе В. Е.*, *Красовский Н. Н.*: Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, Т. *XXI*, в. *6* (1957), 769—774.

Summary

INTEGRAL STABILITY

IVO VRKOČ, Praha

(Received April 10, 1958)

In the article new notions of integral stability resp. asymptotic integral stability are introduced.

Let be given a system of n differential equations

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

$$x \equiv [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad X(t, x) \equiv [X_1(t, x), X_2(t, x), \ldots, X_n(t, x)],$$

$X(t, x)$ fulfilling Carathéodory's conditions of existence.

Definition. The trivial solution $x \equiv 0$ of the equation (1) is integrally stable, if to every $\delta > 0$ there exists $B(\delta) > 0$ such that:

i) $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$.

ii) If the function $\eta(t, x)$ fulfils the condition

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \, dt < \delta$$

then every solution $x(t)$ of equation

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \eta(t, x) \tag{2}$$

for which $\|x(t_0)\| < \delta$, may be extended for $t \geqq t_0$ and $\|x(t)\| < B(\delta)$ for $t \geqq t_0$ (t_0 may be different for different $x(t)$).

Definition. The trivial solution $x \equiv 0$ of the equation (1) is asymptotically integrally stable, if it is integrally stable and if to any pair of numbers $\eta > 0$, $\delta > 0$ there exist numbers $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$ with the following properties:

if $x(t)$ is a solution of (2) such that

$$\|x(t_0)\| < \delta, \quad \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \, dt < \gamma(\delta, \eta)$$

then $\|x(t)\| < \eta$ for every $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$.

If the right hand side of the differential equation is continuous we obtain stronger results. In this case we shall write

$$\frac{dx}{dt} = Y(t, x), \quad Y(t, 0) \equiv 0, \tag{3}$$

where $Y(t, x)$ is a continuous vector function.

The sense of these definitions is as follows: The effect of the disturbing external forces will be measured by means of the integral

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{||x|| \leq B(\delta)} ||\eta(t, x)|| \, \mathrm{d}t \, .$$

If the system is stable under permanent disturbances, $||\eta(t, x)||$ has to be small for every $t \geqq t_0$. On the other hand in the case of integral stability $||\eta(t, x)||$ may reach large values within a short interval. Hence it appears that a system which is under application of short-lasting forces of large value, may be examined from the point of view of integral stability. The following theorem concerning the relation between the asymptotical integral stability and the stability under permanent disturbances is proved: If the solution $x \equiv 0$ of the equation (3) is asymptotically integrally stable, then it is also stable under permanent disturbances. It is an advantage of the asymptotical integral stability in comparison with the stability under permanent disturbances that we can characterize the asymptotical integral stability by means of Liapunov's functions.

Theorem 1. *The solution $x \equiv 0$ of the equation* (1) *is integrally stable if and only if there exists a continuous function $V(t, x)$ defined in the whole semi-space $t \geqq 0$ with the following properties:*

1. *$V(t, x)$ is definite positive in the whole semi-space i. e. $V(t, x) \geqq U(x)$, $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ for $x \neq 0$, $U(x) \to \infty$ for $||x|| \to \infty$, $U(x)$ is continuous.*
2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K||x - y||$ where K is a positive constant.*
3. *$V(t, x(t))$ is non-increasing function of t, if $x(t)$ is a solution of* (1).

Theorem 2. *The solution $x \equiv 0$ of* (1) *is asymptotically integrally stable if and only if there exists a continuous function $V(t, x)$ defined in the whole semi-space $t \geqq 0$ with the following properties:*

1. *$V(t, x)$ is definite positive in the whole semi-space.*
2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K||x - y||$, where K is a positive constant.*
3. $\limsup\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - V(t, x(t))}{\Delta t} \leqq - U_2(x(t))$, *if $x(t)$ is a solution of* (1) *and the function $U_2(x)$ is continuous and defined for every x, $U_2(0) = 0$, $U_2(x) > 0$ for $x \neq 0$.*

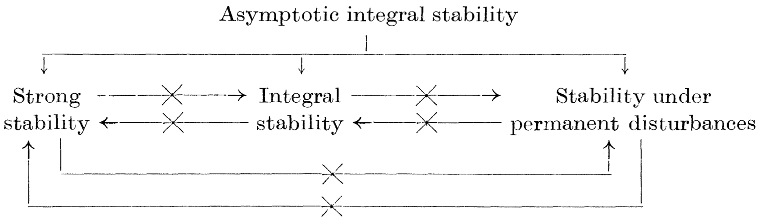
For equations with continuous right hand sides the theorems 1, 2 are correct, but we can prove more in the case of integral stability and asymptotic integral stability.

Theorem 3. *If for differential equation* (3) *there exists a continuous function $V(t, x)$ defined in the semi-space $t \geqq 0$, where it satisfies the conditions* 1, 2, 3 *of the theorem 1, then the solution $x \equiv 0$ of the equation* (3) *is integrally stable.*

Conversely, if the solution $x \equiv 0$ *of* (3) *is integrally stable then there exists a function* $V(t, x)$ *defined in the semi-space* $t > 0$ *where is has partial derivatives of all orders with respect to* $t, x_1, \ldots, x_n$ *and fulfils the conditions* 1, 2, 3 *of the theorem 1.*

For asymptotic integral stability an analogous theorem holds where the conditions 1, 2, 3 of the theorem 1 are replaced by the conditions 1, 2, 3 of the theorem 2.

The question arises whether it is possible to construct a function $V(t, x)$ such that it should have partial derivatives of all orders. It is proved that it is not possible to construct such a function $V(t, x)$ if Carathéodory's conditions only are fulfilled. In the case the right hand side of (1) does not explicitely depend on t, theorems analogous to the previous ones are proved with the change that the functions V do not depend on t. In the conclusion the relations between the mentioned types of stability are shown



The direction of the arrow means implication. The scratched arrow means that the implication in the direction of the arrow is not correct. With the exception of the relation

Strong stability $\not\longrightarrow$ Stability under permanent disturbances

this scheme hold even in the case that the right hand side of (1) does not explicitely depend on t.