Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Hájek

Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 610–618

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100333

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

ЯРОСЛАВ ГАЕК (Jaroslav Hájek), Прага

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

В статье доказано, что два нормальных распределения произвольного стохастического процесса или эквивалентны или взаимно сингулярны.

1. Введение и итоги

Два распределения вероятностей $P\{.\}$ и $Q\{.\}$, заданные на некотором борелевском поле $\mathscr{F}$, эквивалентны (символически $P \equiv Q$), если уравнения $P\{A\} = 0$ и $Q\{A\} = 0$ вытекают одно из другого для всех $A \in \mathscr{F}$. Наоборот, если можно найти такое явление A, что

$$P\{A\} = 0\,, \quad Q\{A\} = 1\,, \tag{1}$$

то мы скажем, что P и Q взаимно сингулярны (символически $P \perp Q$). Произвольно выбранные распределения P и Q не должны быть, конечно, ни эквивалентными, ни сингулярными, как, например, равномерные распределения на интервалах (0,1) и (0,2). Но все-таки, как доказано в § 3 настоящей работы, два любых нормальных распределения[1]) на борелевском поле, порожденном произвольным стохастическим процессом, не могут быть иными, как или эквивалентными, или взаимно сингулярными. Это значит, что нормальные распределения произвольного процесса можно разделить на классы таким образом, что каждых два распределения или эквивалентны или взаимно сингулярны, смотря по тому, принадлежат ли они одному и тому же классу или нет. Для проверки гипотез получаем отсюда следующий важный результат: Если дана система допустимых нормальных распределений рассматриваемого процесса такая, что в ней

---

[1]) Распределение стохастического процесса $\{x_t,\ t \in T\}$ является нормальным, если нормальны все конечно-мерные распределения векторов $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$.

не содержатся взаимно сингулярные распределения,[2]) то все эти распределения эквивалентны и, следовательно, могут быть заданы при помощи плотностей вероятности, причем доминантной мерой может служить любое из них.

В теореме 3 указан также признак, по которому можно установить, являются ли два нормальных распределения сингулярными или эквивалентными. Этот признак использован в § 4 при решении двух примеров.

2. Отношение и J-различие двух n-мерных нормальных плотностей

Рассмотрим следующие две специальные нормальные плотности:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{2}$$

$$q(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 - \lg\sigma_i^2\right]}. \tag{3}$$

Для

$$\lg\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 - x_i^2 - \lg\sigma_i^2\right]$$

найдем среднее значение и дисперсию по отношению к обеим плотностям p и q; упомянутые только что средние значения и дисперсии обозначим через M_p, M_q, D_p, D_q. Произведя простое вычисление, получим

$$M_p\left\{\lg\frac{p}{q}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1+\mu_i^2}{\sigma_i^2} - 1 - \lg\sigma_i^2\right], \tag{4}$$

$$M_q\left\{\lg\frac{p}{q}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \mu_i^2 - \sigma_i^2 - \lg\sigma_i^2\right], \tag{5}$$

$$D_p\left\{\lg\frac{p}{q}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\sigma_i^2} - 1\right)^2 + 2\frac{\mu_i^2}{\sigma_i^4}\right], \tag{6}$$

$$D_q\left\{\lg\frac{p}{q}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\sigma_i^2 - 1)^2 + 2\mu_i^2\sigma_i^2\right]. \tag{7}$$

Теперь определим J-различие J плотностей p и q, определенное соотношением (см. [3], или [4], или [5]):

$$J = M_p\left\{\lg\frac{p}{q}\right\} - M_q\left\{\lg\frac{p}{q}\right\}. \tag{8}$$

---

[2]) Взаимно сингулярные распределения можно безошибочно различить при помощи одной реализации процесса с вероятностью 1, так что в невырожденных статистических проблемах они рядом друг с другом не встречаются.

Для специальных плотностей (2) и (3) при помощи (4) и (5) получим

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(\sigma_i^2 - 1)^2}{\sigma_i^2} + \mu_i^2 \left(1 + \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \right]. \tag{9}$$

Лемма 2.1. *К любому $\varepsilon > 0$ можно найти число K_ε, обладающее следующим свойством: если n — произвольное натуральное число и $p(x_1, \ldots, x_n)$ и $q(x_1 \ldots, x_n)$ — произвольные (регулярные) n-мерные нормальные плотности, J-различие (8) которых удовлетворяет условию $J > K_\varepsilon$, то можно найти явление Λ такое, что*

$$\int_\Lambda p(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n < \varepsilon , \quad \int_\Lambda q(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n > 1 - \varepsilon . \tag{10}$$

Доказательство проведем сначала для плотностей (2) и (3). Введем следующие явления:

$$\mathrm{A} : \lg \frac{p}{q} < M_p \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\} - \frac{1}{2} J = M_q \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\} + \frac{1}{2} J , \tag{11}$$

$$\mathrm{B}_i : \ x_i^2 > \sigma_i , \quad i = 1, \ldots, n . \tag{12}$$

$$\mathrm{C}_i : \ (x_i - \mu_i)^2 < \sigma_i , \quad i = 1, \ldots, n . \tag{13}$$

(Два выражения правой части неравенства (11) получаются из (8)). По ниже следующим соображениям можно писать

$$P\{\mathrm{A}\} \leqq \frac{D_p \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\}}{(\frac{1}{2}J)^2} , \quad Q\{A\} \geqq 1 - \frac{D_q \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\}}{(\frac{1}{2}J)^2} , \tag{14}$$

$$P\{\mathrm{B}_i\} = 2 \left[1 - \Phi(\sqrt{\sigma_i}) \right] , \quad Q\{B_i\} \geqq 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right) \right] , \quad i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$P\{\mathrm{C}_i\} \leqq 1 - 2[1 - \Phi \sqrt{\sigma_i}] , \quad Q\{\mathrm{C}_i\} = 1 - 2 \left[1 - \Phi \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right] , \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

где $P\{.\}$ и $Q\{.\}$ означают вероятности, заданные плотностями p и q, и $\Phi(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$. Действительно, неравенства (14) вытекают из (11) и из неравенства Чебышева. Уравнение (15а) непосредственно вытекает из (12) и (2). При выводе неравенства (15б) надо воспользоваться очевидным неравенством $\int_{x^2 > a} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x \geqq \int_{x^2 > a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x$; оно также вытекает непосредственно из (12) и (3). Соотношения (16) получаются подобно тому, как (15).

Теперь зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое положительное λ_ε, чтобы было

$$2[1 - \Phi(\lambda_\varepsilon)] < \varepsilon , \quad 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \right) \right] > 1 - \varepsilon . \tag{17}$$

Если для некоторого $i = 1, \ldots, n$ имеет место неравенство $\sqrt{\sigma_i} > \lambda_\varepsilon$, или же $\frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} > \lambda_\varepsilon$, то из (15) и (16) следует, что соотношение (10) выполняется для $\Lambda = B_i$, или же $\Lambda = C_i$. Если наоборот справедливо

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon^4} \leqq \sigma_i^2 \leqq \lambda_\varepsilon^4 , \quad i = 1, \ldots, n , \tag{18}$$

то из (6), (7) и (9) можно легко получить неравенство

$$J \geqq \frac{1}{2\lambda_\varepsilon^4} \left[D_p \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\} + D_q \left\{ \lg \frac{p}{q} \right\} \right] ; \tag{19}$$

применяя его в (14), получим

$$P\{A\} \leqq \frac{8\lambda_\varepsilon^4}{J} , \quad Q\{A\} \geqq 1 - \frac{8\lambda_\varepsilon^4}{J} . \tag{20}$$

Это значит, что для $\Lambda = A$ выполняется соотношение (10), как только

$$J \geqq \frac{8\lambda_\varepsilon^4}{\varepsilon} . \tag{21}$$

Этим лемма доказана для плотностей вида (2) и (3). Но, как мы сейчас покажем, к этому виду можно подходящим преобразованием свести любую пару плотностей. Если плотности p и q определены регулярными матрицами коварианцией C и D и векторами средних значений c и d, то, очевидно,

$$p(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(x-c)' C^{-1}(x-c) + \lg|C|]} ,$$

$$q(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(x-d)' D^{-1}(x-d) + \lg|D|]} ,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, C^{-1} и D^{-1} — обратные матрицы, $|C|$ и $|D|$ — определители. Теперь возьмем матрицу V такую, что $V'V = C$ (преобразование Якоби) и ортогональную матрицу U такую, чтобы матрица $U'V'D^{-1}VU$ была диагональной. Векторы y и μ определим уравнениями

$$x - c = VUy , \quad d - c = VU\mu . \tag{22}$$

Тогда на основании указанных свойств матриц U и V видно, что

$$(x - c)' C^{-1}(x - c) = yU'V'C^{-1}VUy = y'y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 , \tag{23}$$

$$(x - d) D^{-1}(x - d) = (y - \mu)' U'V'D^{-1}VU(y - \mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} , \tag{24}$$

где σ_i^2 — диагональные элементы матрицы $U'V'D^{-1}VU$. Из (23) и (24) вытекает, что плотности p и q, как функции одно-однозначно отображающего вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$, имеют вид (2) и (3). Этим лемма полностью доказана.

Приведем еще без доказательства следующее утверждение:

Лемма 2.2. *Если распределение вектора* $(x_1, \ldots, x_n)$ *нормальное (регулярное или сингулярное), то уравнение*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + c_0 \tag{25}$$

где c_i — *произвольные постоянные, справедливо с вероятностью или* 0, *или* 1.

3. Теорема

Каждых два нормальных распределения $P\{.\}$ *и* $Q\{.\}$ *стохастического процесса* $\{x_t,\ t \in T\}$ *или эквивалентны, или взаимно сингулярны, смотря по тому, конечно ли или бесконечно их* J*-различие, определенное в* [3].

Доказательство. Из теоремы 2 работы [3] вытекает, что J-различие P и Q равно супремуму J-различий конечномерных распределений $P_{t_1}, \ldots, {}_{t_n}$ и $Q_{t_1}, \ldots, {}_{t_n}$ векторов $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$; символически

$$J_T = \sup_{t_1, \ldots, t_n \in T} J_{t_1, \ldots, t_n}\,. \tag{26}$$

Если $J_T < \infty$, то $P \equiv Q$, потому что по определению [3] конечное J-различие имеют только эквивалентные распределения. Если $J_T = \infty$, то, как видно из (26), можно выбрать $t_1, \ldots, t_n$ так, что $J_{t_1}, \ldots, {}_{t_n}$ больше любого наперед заданного числа. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает: Если все конечномерные распределения $P_{t_1, \ldots, t_n}$ и $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ регулярны, то к любому m можно найти явление A_m такое, что

$$P\{A_m\} < 2^{-m},\ Q\{A_m\} > 1 - 2^{-m}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{27}$$

Но это значит, что $P \perp Q$, потому что уравнения (1) выполнены для $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=k}^{\infty} A_m$.

Остается рассмотреть случай, когда конечномерные распределения сингулярны, точнее говоря сингулярны относительно n-мерной евклидовой меры. Допустим, что $P_{t_1, \ldots, t_n}$ сингулярно. Тогда некоторая x_{t_i}, допустим x_{t_n}, является линейной функцией остальных случайных величин, точнее говоря с $P_{t_1, \ldots, t_n}$-вероятностью равной 1

$$x_{tn} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{t_i} + c_0\,, \quad [P_{t_1, \ldots, tn}]\,. \tag{28}$$

Но, с другой стороны, в силу леммы 2.2. $Q_{t_1, \ldots, t_n}$-вероятность уравнения (28) равна или 0, или 1. Если она равна 0, то, очевидно, $P_{t_1, \ldots, t_n} \perp Q_{t_1, \ldots, t_n}$, и тем более $P \perp Q$: Если она равна 1, то $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-1}}\}$ является достаточной статистикой для пары $P_{t_1, \ldots, t_n}$, $Q_{t_1, \ldots, t_n}$, так что по теореме 4.1 и § 5 работы [2] будет $J_{t_1, \ldots, t_n} = J_{t_1, \ldots, t_{n-1}}$. Это значит, что могут представиться только два следующих случая:

а) для некоторых $t_1, \ldots, t_n$ $P_{t_1, \ldots, t_n} \perp Q_{t_1, \ldots, t_n}$,

б) для каждого $t_1, \ldots, t_n \in T$ или $J_{t_1, \ldots, t_n} = J_{t_1', \ldots, t'_p}$,

причем $P_{t_1', \ldots, t'_p}$ и $Q_{t_1', \ldots, t'_p}$ регулярны, или оба распределения $P_{t_1, \ldots, t_n}$ и $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ сосредоточены в одной точке, т. е.

$$P_{t_1, \ldots, t_n}\{x_{t_i} = \mu_{t_i},\ i = 1, \ldots, n\} = Q_{t_1, \ldots, t_n}\{x_{t_i} = \mu_{t_i},\ i = 1, \ldots, n\} = 1 .$$

(В последнем случае, конечно, $J_{t_1, \ldots, t_n} = 0$, так что такие $t_1, \ldots, t_n$ можно выпустить из виду, а все-таки останется $\sup J_{t_1, \ldots, t_n} = \infty$).

Если наступит случай а), то $P \perp Q$ очевидно. Если наступит б), то можно найти произвольно большое $J_{t_1, \ldots, t_n}$ и в том случае, если ограничиться только такими $t_1, \ldots, t_n$, для которых $P_{t_1, \ldots, t_n}$ и $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ регулярны, так что можно опять воспользоваться леммой 2.1, как в первой части доказательства. Этим теорема доказана.

4. Приложения

Признак эквивалентности двух нормальных распределений, приведенный в предыдущей теореме, можно непосредственно применить к решению некоторых задач.

Пример 1. Изменение масштаба. Пусть заданы два нормальных распределения $P\{.\}$ и $Q\{.\}$ процесса $\{x_t,\ t \in T\}$ со следующими ковариациями и средними значениями:

$$M_P\{x_t\} = \mu_t\,, \quad \mathrm{Cov}_P\{x_t, x_s\} = \sigma_{ts}\,,$$

$$M_Q\{x_t\} = \mu_t\,, \quad \mathrm{Cov}_Q\{x_t, x_s\} = \lambda\sigma_{ts}\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Возьмем $t_1, \ldots, t_n \in T$. Если ранг матрицы $\|\sigma_{t_i t_j}\|$ равен m, то можно найти достаточную статистику в виде m величин $y_1, \ldots, y_m$, имеющих независимое нормальное распределение с параметрами (0,1), или же $(0, \lambda)$, смотря по тому, имеет ли место P или Q. Отсюда и из (9) вытекает, что

$$J_{t_1, \ldots, t_n} = \frac{1}{2}\, m\, \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda}\,.$$

Итак, для $\lambda \neq 1$ справедливо утверждение: Распределения P и Q сингулярны или регулярны, смотря по тому, можно ли или нельзя к любому n найти $t_1, \ldots, t_n$ так, чтобы распределение $P_{t_1, \ldots, t_n}$ (или же матрица $\|\sigma_{t_i t_j}\|$) было регулярным. В частности, для процесса Винера отсюда легко видно, что при $\lambda \neq 1$ получим сингулярное распределение, как показано в [1].

Пример 2. (Петр Мандл) Движение процесса Гаусса-Маркова. Рассмотрим нормальные распределения $P\{.\}$ и $Q\{.\}$ процесса $\{x_t, 0 \leqq t \leqq T\}$, определенные следующими ковариациями и средними значениями:

$$M_P\{x_t\} = 0\,, \quad \mathrm{Cov}_P\{x_t, x_s\} = \sigma_t \sigma_s \frac{h_t}{h_s}\,, \quad t \leqq s\,,$$

$$M_Q\{x_t\} = \mu_t\,, \quad \mathrm{Cov}_Q\{x_t, x_s\} = \sigma_t \sigma_s \frac{h_t}{h_s}\,, \quad t \leqq s\,,$$

где $\sigma_t > 0$ для $t > 0$, $|h_t|$ возрастает, и $\mu_0 = 0$, если $\sigma_0 = 0$. Различие распределений $P_{t_1}, \ldots, {}_{t_n}$ и $Q_{t_1}, \ldots, {}_{t_n}$ найдем при помощи подстановки

$$y_i = \left(\frac{x_{t_i}}{\sigma_{t_i}} - \frac{h_{t_{i-1}}}{h_{t_i}} \cdot \frac{x_{t_{i-1}}}{\sigma_{t_{i-1}}}\right)\left[1 - \left(\frac{h_{t_{i-1}}}{h_{t_i}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где для $\sigma_0 = 0$ положим $\dfrac{x_0}{\sigma_0} = 0$; используя формулы (9) и (26), получим

$$J = \sup_{0 \leqq t_1, \ldots, t_n \leqq T} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(h_{t_i} \dfrac{\mu_{t_i}}{\sigma_{t_i}} - h_{t_{i-1}} \dfrac{\mu_{t_{i-1}}}{\sigma_{t_{i-1}}}\right)^2}{h_{t_i}^2 - h_{t_{i-1}}^2}\,,$$

где $t_0 = 0$. Если $J < \infty$, то J равно интегралу Хеллингера $\displaystyle\int_0^T \frac{\left(\mathrm{d}h_t \dfrac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}{\mathrm{d}h_t^2}$, существование которого является необходимым и достаточным условием для того, чтобы распределения $P\{.\}$ и $Q\{.\}$ были эквивалентными. В случае процесса Винера $h_t = \sigma_t = \sqrt{t}$ и, следовательно, интеграл имеет вид $\displaystyle\int_0^T \frac{(\mathrm{d}\mu_t)^2}{\mathrm{d}t}$. Отсюда можно также заключить, что измеримые движения процесса Винера представляют именно те функции μ_t, для которых существует $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\mathrm{d}\mu_t)^2}{\mathrm{d}t}$. Другое условие см. в [6].

В случае стационарного процесса Гаусса-Маркова $\sigma_t = \sigma$, $h_t = a^t$ и, следовательно, интеграл имеет вид $\sigma^{-2} \displaystyle\int_0^T \frac{(\mathrm{d}a^t \mu_t)^2}{\mathrm{d}a^{2t}}$.

Замечание. Если $0 < |\varrho(x_t, x_s)| < 1$ для $t \neq s$, то всегда можно ковариацийную функцию процесса Гаусса-Маркова написать в указанном виде, потому что случайные величины x_{t_1} и x_{t_3} для $t_1 < t_2 < t_3$ и при условии

$x_{t_2} = x$ линейно независимы, и, следовательно, для частного коэффициента корреляции должно быть

$$0 = \varrho_{13,2} = (\varrho_{13} - \varrho_{12}\varrho_{23})(1 - \varrho_{12}^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - \varrho_{23}^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $\varrho(x_{t_1}, x_{t_3}) = \varrho(x_{t_1}, x_{t_2})\ \varrho(x_{t_2}, x_{t_3})$. Следовательно, можем положить $h_t = \varrho(x_0, x_t)^{-1}$, причем $|h_t|$ возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Cameron R. H.* a. *Martin W. T.*: The behaviour of measure and measurability under change of scale in Wiener-space, Bull. Am. Math. Soc. *53* (1947), 130—137.

[2] *Černý J.*: O Hellingerově integrálu. (Об интеграле Хеллингера), Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 24—43.

[3] *Hájek J.*: A property of J-divergences of marginal probability distributions, Czechosl. Math. J. *8* (*83*), 1958, 460—463.

[4] *Jeffreys H.*: Theory of probability, Oxford 1948.

[5] *Kullback S.* and *Leibler R. A.*: On information and sufficiency, Ann. Math. Stat. *22* (1951), 79—86.

[6] *Maruyama G.*: Notes on Weiner integrals, Kodai Math. Seminar Reports No. 3, 1950.

Summary

ON A PROPERTY OF NORMAL DISTRIBUTIONS OF ANY STOCHASTIC PROCESS

JAROSLAV HÁJEK, Praha

(Received November 19, 1957)

Two arbitrary normal distributions $P\{.\}$ and $Q\{.\}$ of a stochastic process $\{x_t, t \in T\}$ are considered and it is proved that they are either singular, i. e. an event A_0 exists such that $P\{A_0\} = 0$ and $Q\{A_0\} = 1$, or equivalent, i. e. $[P\{A\} = 0] \Leftrightarrow [Q\{A\} = 0]$, $A \in \mathscr{F}$. A sufficient and necessary condition for equivalency is that

$$\sup_{t_1, \ldots, t_n \in T} J_{t_1, \ldots, t_n} < \infty ,$$

where $J_{t_1, \ldots, t_n}$ denotes the J-divergence of the corresponding n-dimensional P- and Q-distributions (see [3]).

The theorem is applied to two problems.

Example 1, the change of the scale parameter: If

$$E_P\{x_t\} = \mu_t, \quad \text{cov}_P\{x_t, x_s\} = \sigma_{ts},$$
$$E_Q\{x_t\} = \mu_t, \quad \text{cov}_Q\{x_t, x_s\} = \lambda\sigma_{ts}, \quad \lambda \neq 1,$$

then the P- and Q-distributions are singular if and only if for any natural n there exist $t_1, \ldots, t_n \in T$ such that the rank of $\|\sigma_{t_i t_j}\|_{i,j=1}^{n}$ equals n.

Example 2, translation of a Gauss-Markov process (PETR MANDL): Let $0 \leqq t \leqq T$ and

$$E_P\{x_t\} = 0\,, \quad \mathrm{cov}_P\,\{x_t, x_s\} = \sigma_t \sigma_s \frac{h_t}{h_s}\,, \quad t \leqq s\,,$$

$$E_Q\{x_t\} = \mu_t\,, \quad \mathrm{cov}_Q\,\{x_t, x_s\} = \sigma_t \sigma_s \frac{h_t}{h_s}\,, \quad t \leqq s,$$

where $\sigma_t > 0$ for $t > 0$, $|h_t|$ is increasing and $\mu_0 = 0$ when $\sigma_0 = 0$. Then the existence (finiteness) of the Hellinger's integral $\int\limits_0^T \frac{\left(\mathrm{d}h_t \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2}{\mathrm{d}h_t^2}$ is a sufficient and necessary condition for equivalency of the Q- and P-distributions.