Alois Švec

Congruences de droites dans E_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 552–562

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100329

CONGRUENCES DE DROITES DANS E_n

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 20 février 1958)

Dans le présent Mémoire on élargit certaines notions et propriétés des congruences de droites dans l'espace euclidien à trois dimensions au cas des congruences de droites dans l'espace à n dimensions. Cette généralisation se fait au moyen d'une certaine congruence de droites à connexion euclidienne qui est associée d'une manière unique à la congruence étudiée L et dont les propriétés (propriétés intrinsèques de la congruence considérée) sont des propriétés de la congruence L.

Introduction

En étudiant une variété V_m de l'espace euclidien à n dimensions j'appelle *propriétés intrinsèques* de V_m les propriétés de l'espace de Riemann engendré par cette variété. Si je considère au lieu d'une variété générale V_m une variété V_3 formée par les droites d'une congruence de droites qu'il est possible de décomposer en deux systèmes de surfaces développables alors l'espace de Riemann correspondant est bien spécial et il est avantageux de l'étudier par des méthodes différentes de celles utilisées pour l'étude d'un espace général. Je l'appelle *congruence de droites à connexion euclidienne*; on pourrait l'appeler aussi sans inconvénient *congruence de Riemann,* car cet espace est, dans un certain sens, sans torsion.

Pour fixer les idées j'appelle L la congruence considérée et $\mathbf{L}$ la congruence à connexion correspondante. Les propriétés de la congruence $\mathbf{L}$ sont bien entendu des propriétés de L également, mais ce qui est important c'est que les propriétés de $\mathbf{L}$ généralisent les propriétés de congruence de droites de l'espace euclidien à trois dimensions. Les surfaces focales de la congruence $\mathbf{L}$ sont les *variétés de König* $\mathscr{E}_{2(3)}$; c'est à leur théorie qu'est dédiée la partie première du présent travail. L'étude de la correspondance qui existe entre les surfaces focales de la congruence $\mathbf{L}$ conduit à la possibilité de définir les congruences W, B, Γ, pseudosphériques etc. même pour les congruences L dans E_n.

La théorie développée représente une généralisation des résultats cités dans le livre de M. S. P. Finikov *Théorie des congruences* (en russe, Moscou 1956).

Je n'ai pas changé sensiblement les notations employées par M. Finikov, parce que les calculs coïncident formellement dans une mesure assez large. Pour des raisons de volume je me suis borné principalement à éclaircir la marche des idées en laissant au lecteur le soin d'établir quelle est la part des calculs de M. Finikov qui reste valable même pour la théorie plus générale dans E_n. J'ai unifiée les théorèmes d'existence des types particuliers de congruences.

Je considére comme but principal de ce Mémoire de montrer que certaines parties de la théorie des congruences de droites dans E_n peuvent être développées sur la base de considérations géométriques ou algébriques qui ne sont pas plus compliquées que dans le cas de E_3. Je couligne ensuite aussi la possibilité d'exploiter la notion de congruence de droites à connecxion euclidienne qui, à mon avis du moins, n'a pas encore été étudiée. Les propriétés projectives ont été étudiées dans mon ouvrage antérieur *Congruences de droites à connexion projective* (publié en tchèque), voir aussi mon Mémoire *Sulla teoria delle congruenze di rette*, Boll. Un. Mat. Ital. *(3)* *12*, 446—457 (1957).

I. Variété de König à connexion euclidienne $\mathscr{E}_{2(3)}$

1. Je définis une *variété de König à connexion euclidienne* (que j'appelle surface pour être plus bref) de la façon suivante: A chaque point (u, v) d'un domaine Ω de l'espace affine à deux dimensions (ou d'un ensemble qui lui est homéomorphe) j'associe l'espace local centro-euclidien à trois dimensions $E_3(u, v)$ au centre $M(u, v)$; si ensuite $\gamma \subset \Omega$ est un arc joignant deux points (u_1, v_1) et (u_2, v_2) on a une congruence $S = S(u_1, v_1; u_2, v_2; \gamma)$ qui existe entre les espaces locaux $E_3(u_1, v_1)$ et $E_3(u_2, v_2)$. La connexion citée est donnée de façon analytique: on choisit dans chaque espace local une base locale orthonormale $\{M; I_1, I_2, I_3\}$ et l'on se donne ensuite un système d'équations formelles

$$\begin{gathered} \mathrm{d}M = \omega^i I_i\,, \quad \mathrm{d}I_i = \omega_i^j I_j\,, \quad (i, j = 1, 2, 3)\,, \\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0\,, \quad \omega^i = \xi_1^i\,\mathrm{d}u + \xi_2^i\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_i^j = \xi_{i1}^j\,\mathrm{d}u + \xi_{i2}^j\,\mathrm{d}v \end{gathered} \tag{1}$$

où ω^i, ω_i^j sont des formes de Pfaff arbitraires vérifiant pour des raisons évidentes la condition que la matrice $\|\xi_1^i, \xi_2^i\|$ est de rang 2. La détermination des S existant entre les espaces locaux et le développement des courbes dans les espaces locaux s'obtiennent maintenant exactement de la même manière comme dans le cas d'un espace à connexion euclidienne.

Les tangentes des développements de toutes les courbes passant par le point M_0 dans l'espace local $E_3(M_0)$ sont situées dans ce qu'on appelle *plan tangent* de la surface π considérée; dans ce qui suit, je choisis toujours les repères de telle manière que I_1 et I_2 soient situés dans le plan tangent et que la droite

$M + tI_3$, $t \in (-\infty, +\infty)$, soit la *normale* de la surface. Les équations fondamentales seront alors

$$\begin{aligned} dM &= \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 , \\ dI_1 &= \qquad\quad \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3 , \\ dI_2 &= -\omega_1^2 I_1 \qquad\quad + \omega_2^3 I_3 , \\ dI_3 &= -\omega_1^3 I_1 - \omega_2^3 I_2 \end{aligned} \tag{2}$$

et comme $[\omega^1 \omega^2] \neq 0$ je peux poser

$$\omega_i^j = c_{i\alpha}^j \omega^\alpha \quad (i, j = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2) . \tag{3}$$

Je dirai que la surface π est *orientée intérieurement* (*extérieurement*) si tout plan tangent (toute normale) est orienté.

Les changements admissibles des bases locales sont

$$\begin{gathered} M = \bar{M} , \quad I_1 = \cos \alpha \bar{I}_1 + \sin \alpha \bar{I}_2 , \quad I_2 = \varepsilon_1 \sin \alpha \bar{I}_1 - \varepsilon_1 \cos \alpha \bar{I}_2 , \\ I_3 = \varepsilon_2 \bar{I}_3 , \quad (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1) \end{gathered} \tag{4}$$

où $\varepsilon_1 = 1$ ($\varepsilon_2 = -1$) signifie un changement d'orientation intérieure (extérieure). Supposons que, compte tenu des bases locales nouvelles, on a pour la surface considérée les équations

$$d\bar{M} = \bar{\omega}^\alpha \bar{I}_\alpha , \quad d\bar{I}_i = \bar{\omega}_i^j \bar{I}_j \quad (\bar{\omega}_i^j + \bar{\omega}_j^i = 0), \tag{5}$$

par substitution dans (2) et par comparaison on trouve alors que

$$\begin{gathered} \bar{\omega}^1 = \cos \alpha \omega^1 + \varepsilon_1 \sin \alpha \omega^2 , \quad \bar{\omega}^2 = \sin \alpha \omega^1 - \varepsilon_1 \cos \alpha \omega^2 , \\ \bar{\omega}_3^1 = \varepsilon_2 \cos \alpha \omega_3^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \alpha \omega_3^2 , \quad \bar{\omega}_3^2 = \varepsilon_2 \sin \alpha \omega_3^1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha \omega_3^2 , \\ \bar{\omega}_2^1 = -\varepsilon_1 \omega_2^1 + d\alpha . \end{gathered} \tag{6}$$

Les premières trois *formes fondamentales* de la surface sont

$$\varphi_1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 , \tag{7}$$

$$\varphi_2 = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 , \tag{8}$$

$$\varphi_3 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2 , \tag{9}$$

pour la transformation (4) on trouve au moyen de (5) que

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 , \quad \bar{\varphi}_2 = \varepsilon_2 \varphi_2 , \quad \bar{\varphi}_3 = \varphi_3 . \tag{10}$$

La première des formes est la *forme métrique* de la surface, la signification géométrique de la seconde et de la troisième forme coïncide avec celle qui sera expliquée dans le travail *Remarque sur le tenseur de torsion d'un espace à connexion euclidienne* (en tchèque avec résumé en française, Časopis pro pěstování matematiky *4*(*84*), 1959, No 1.

2. Je vais trouver les *courbes principales* de la surface π. La *courbure normale* d'une courbe de la surface (orientée extérieurement) est

$$k_n = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \tag{11}$$

les courbes principales sont celles pour lesquelles k_n a une valeur extrême. En posant $\Phi = k_n\varphi_1 + \varphi_2$ je trouve

$$\Phi = (k_n + c^3_{11})(\omega^1)^2 + (c^3_{12} + c^3_{21})\,\omega^1\omega^2 + (k_n + c^3_{22})(\omega^2)^2$$

et de $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\omega^1} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\omega^2} = 0$ il vient enfin l'équation des courbes principales

$$(c^3_{12} + c^3_{21})\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (c^3_{22} - c^3_{11})\,\omega^1\omega^2 = 0\,. \tag{12}$$

Dans la suite j'écarte de mes considérations les *sphères*, c'est-à-dire les surfaces dont toute courbe est principale et qui sont caractérisées par les rélations

$$c^3_{12} + c^3_{21} = c^3_{22} - c^3_{11} = 0\,. \tag{13}$$

Sur les autre surfaces, *les courbes principales forment un réseau orthogonal*, si je choisis I_1 et I_2 pour leurs vecteurs tangents, j'ai $c^3_{12} + c^3_{21} = 0$ et je peux poser

$$c^3_{12} = c\,, \quad c^3_{21} = -c\,. \tag{14}$$

Les équations de transformation (6) deviennent alors

$$\bar\omega^1 = \omega^1\,, \quad \bar\omega^2 = -\varepsilon_1\omega^2\,, \quad \bar\omega^1_3 = \varepsilon_2\omega^1_3\,, \quad \bar\omega^2_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\omega^2_3\,, \quad \bar\omega^1_2 = -\varepsilon_1\omega^1_2\,, \tag{15}$$

les repères d'une surface orientée intérieurement et extérieurement sont déjà complétement spécialisés. Les courbures principales des courbes $\omega^2 = 0$, ou $\omega^1 = 0$ sont

$$k_1 = -c^3_{11}\,, \quad \text{ou} \quad k_2 = -c^3_{22} \quad \text{resp.} \tag{16}$$

de sorte que je peux écrire

$$\omega^3_1 = -k_1\omega^1 + c\omega^2\,, \quad \omega^3_2 = -c\omega^1 - k_2\omega^2\,. \tag{17}$$

Il résulte des équations (15) que

$$\bar k_1 = \varepsilon_2 k_1\,, \quad \bar c = -\varepsilon_1\varepsilon_2 c\,, \quad \bar k_2 = \varepsilon_2 k_2\,. \tag{18}$$

Je peux définir la *courbure d'Euler* et la *courbure moyenne*

$$K = k_1k_2\,, \quad H = k_1 + k_2\,, \tag{19}$$

on a

$$\bar K = K\,, \quad \bar H = \varepsilon_2 H\,. \tag{20}$$

Les formes fondamentales sont

$$\begin{gathered}\varphi_1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\,, \quad \varphi_2 = -k_1(\omega^1)^2 - k_2(\omega^2)^2\,,\\ \varphi_3 = (k_1^2 + c^2)(\omega^1)^2 - 2c(k_1 - k_2)\,\omega^1\omega^2 + (k_2^2 + c^2)(\omega^2)^2\,.\end{gathered} \tag{21}$$

Si j'introduis une autre forme

$$\varphi = (k_1 - k_2)\,\omega^1\omega^2\,, \quad \bar{\varphi} = -\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varphi\,, \tag{22}$$

les formes fondamentales seront liées par la relation

$$(K - c^2)\,\varphi_1 + H\varphi_2 + \varphi_3 + 2c\varphi = 0\,. \tag{23}$$

3. Sur une surface orientée intérieurement et extérieurement l'expression c est un invariant, dans le cas où π est une surface de l'espace euclidien (ou de l'espace de Riemann) on trouve facilement, à partir des conditions d'intégrabilité, que $c = 0$ et (23) devient alors la relation bien connue qui lie les formes fondamentales de la surface.

Il est aisé de trouver les foyers de la congruence des normales. Pour le foyer $F = M + \varrho I_3$ on doit avoir $\mathrm{d}F = 0 \pmod{I_3}$, soit

$$\omega^1 + \varrho k_1\omega^1 - \varrho c\omega^2 = \varrho c\omega^1 + \omega^2 + \varrho k_2\omega^2 = 0\,. \tag{24}$$

En éliminant $\omega^1 : \omega^2$ j'obtiens pour la distance des foyers de M l'équation

$$(K + c^2)\,\varrho^2 + H\varrho + 1 = 0 \tag{25}$$

et en éliminant ϱ de l'équation (24) j'obtiens l'équation du réseau de courbes (que j'appelle *torsales*) qui sont découpées sur la surface par les surfaces développables de la congruence des normales

$$c(\omega^1)^2 + (k_2 - k_1)\,\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0\,. \tag{26}$$

Ce n'est donc que sur une surface à torsion nulle que les surfaces développables de la congruence des normales découpent les courbes principales, la mesure de la „différence" qu'il y a entre les courbes torsales et les courbes principales détermine alors la signification de la torsion c.

II. Congruences de droites dans E_n

4. Soit donnée dans l'espace euclidien à n dimensions une congruence de droites L avec deux surfaces focales. Je vais étudier d'abord les possibilités de spécialiser les repères qui y correspondent. Supposons que la congruence soit formée par les droites

$$A + tI_1\,; \quad A = A(u, v)\,, \quad I_1 = I_1(u, v)\,, \quad t \in (-\infty, +\infty)\,; \tag{27}$$

ses équations fondamentales sont donc nécessairement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 + \omega^3 I_3\,,\\ \mathrm{d}I_1 &= \qquad\quad \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3\,,\\ \mathrm{d}I_i &= \omega_i^k I_k \quad (i = 2, \ldots, n)\,,\\ \omega_i^k &+ \omega_k^i = 0\,, \quad [\omega_1^2\omega_1^3] \neq 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Dans les notations habituelles on a $e^2 = e^3 = 0$ de sorte qu'il est possible de prendre pour base d'étude de la théorie de la congruence L dans E_n les équations

$$\omega^2 = a\omega_1^2 + b\omega_1^3\,, \quad \omega^3 = b'\omega_1^2 + c\omega_1^3\,, \tag{29}$$

$$\omega^\alpha = \omega_1^\alpha = 0 \quad (\alpha = 4, \ldots, n)\,. \tag{30}$$

Par différentiation extérieure de (29) j'obtiens

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2(\mathrm{d}a - \overline{b + b'}\omega_2^3 - \omega^1)] + [\omega_1^3(\mathrm{d}b + \overline{a - c}\omega_2^3)] = 0\,, \\ &[\omega_1^2(\mathrm{d}b' + \overline{a - c}\omega_2^3)] + [\omega_1^3(\mathrm{d}c + \overline{b + b'}\omega_2^3 - \omega^1)] = 0\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Le lemme de Cartan nous donne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a - (b + b')\,\omega_2^3 - \omega^1 &= \mu_1\omega_1^2 + \mu_2\omega_1^3\,, \\ \mathrm{d}b + (a - c)\,\omega_2^3 &= \mu_2\omega_1^2 + \mu_3\omega_1^3\,, \\ \mathrm{d}b' + (a - c)\,\omega_2^3 &= \mu_4\omega_1^2 + \mu_5\omega_1^3\,, \\ \mathrm{d}c + (b + b')\,\omega_2^3 - \omega^1 &= \mu_5\omega_1^2 + \mu_6\omega_1^3\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Il est aisé de voir qu'il est possible de choisir les repères de telle façon que pour les nouvelles fonctions ϱ, φ on a

$$a = c = 0\,, \quad b = \varrho \operatorname{cotg} \varphi\,, \quad b' = \varrho \operatorname{tg} \varphi\,. \tag{33}$$

La différentiation extérieure des équations

$$\omega^2 = \varrho \operatorname{cotg} \varphi\omega_1^3\,, \quad \omega^3 = \varrho \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2 \tag{34}$$

donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &\equiv -\left[\omega_1^2\left(\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\omega_2^3 + \omega^1\right)\right] + \left[\omega_1^3\left(\operatorname{cotg}\varphi\,\mathrm{d}\varrho - \frac{\varrho}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\right] = 0\,, \\ \mathfrak{K}_2 &\equiv \left[\omega_1^2\left(\operatorname{tg}\varphi\,\mathrm{d}\varrho + \frac{\varrho}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\right] + \left[\omega_1^3\left(\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\omega_2^3 - \omega^1\right)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Le système (35) est équivalent au système (dans le cas de $\sin 2\varphi \neq 0$)

$$\sin\varphi\,\mathfrak{K}_1 - \cos\varphi\,\mathfrak{K}_2 = 0\,, \quad \sin\varphi\,\mathfrak{K}_1 + \cos\varphi\,\mathfrak{K}_2 = 0\,, \tag{36}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}[\tau_1(\mathrm{d}\varphi + \omega_2^3)] + [\tau_2(\omega^1 + \mathrm{d}\varrho)] = 0\,, \\ &[\tau_1(\omega^1 - \mathrm{d}\varrho)] + \frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}[\tau_2(\omega_2^3 - \mathrm{d}\varphi)] = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

où

$$\tau_1 = \sin\varphi\omega_1^2 + \cos\varphi\omega_1^3\,, \quad \tau_2 = \sin\varphi\omega_1^2 - \cos\varphi\omega_1^3\,. \tag{38}$$

Le lemme de Cartan donne

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}(\omega_2^3 + \mathrm{d}\varphi) = M\tau_1 + N\tau_2\,. \\ &\omega^1 + \mathrm{d}\varrho = N\tau_1 + P\tau_2\,, \quad \omega^1 - \mathrm{d}\varrho = P'\tau_1 + N'\tau_2\,, \\ &\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}(\omega_2^3 - \mathrm{d}\varphi) = N'\tau_1 + M'\tau_2\,, \end{aligned} \tag{39}$$

Il découle des équations précédentes que les formes ω^1, ω_2^3, $d\varphi$, $d\varrho$, $[d\omega_1^2]$, $[d\omega_1^3]$ sont des combinaisons linéaires de ω_1^2, ω_1^3, $[\omega_1^2\omega_1^3]$, soit de τ_1, τ_2, $[\tau_1\tau_2]$. La différentiation extérieure de (35) nous donne alors

$$\begin{aligned}
&[dM\tau_1] + [dN\tau_2] + 2p_1[\tau_1\tau_2] = 0\,,\\
&[dN\tau_1] + [dP\tau_2] + 2p_2[\tau_1\tau_2] = 0\,,\\
&[dP'\tau_1] + [dN'\tau_2] + 2p_3[\tau_1\tau_2] = 0\,,\\
&[dN'\tau_1] + [dM'\tau_2] + 2p_4[\tau_1\tau_2] = 0\,,
\end{aligned}\tag{40}$$

les p_i ne présentant pour moi aucun intérêt. Du lemme de Cartan résulte

$$\begin{aligned}
dM &= \xi_1\tau_1 + (\xi_2 + p_1)\,\tau_2\,, \quad dN = (\xi_2 - p_1)\,\tau_1 + (\xi_3 + p_2)\,\tau_2\,,\\
dP &= (\xi_3 - p_2)\,\tau_1 + \xi_4\tau_2\,, \quad dP' = \xi_5\tau_1 + (\xi_6 + p_3)\,\tau_2\,,\\
dN' &= (\xi_6 - p_3)\,\tau_1 + (\xi_7 + p_4)\,\tau_2\,, \quad dM' = (\xi_7 - p_4)\,\tau_1 + \xi_8\tau_2\,.
\end{aligned}\tag{41}$$

La différentiation extérieure de (36) conduit à

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\varphi\,[\omega_1^3\omega_2^\alpha] + \operatorname{tg}\varphi\,[\omega_1^2\omega_3^\alpha] = 0\,,\\
[\omega_1^2\omega_2^\alpha] + [\omega_1^3\omega_3^\alpha] = 0\,,
\end{aligned}\right. \quad (\alpha = 4, \ldots, n)\tag{42}$$

il s'ensuit alors du lemme de Cartan que

$$\omega_2^\alpha = \psi_0^\alpha \operatorname{tg}\varphi\omega_1^2 + \psi_1^\alpha\omega_1^3\,, \quad \omega_3^\alpha = \psi_1^\alpha\omega_1^2 + \psi_0^\alpha \operatorname{cotg}\varphi\omega_1^3\,.\tag{43}$$

Dans le cas de $\sin 2\varphi \neq 0$ la congruence L est donnée par le système fermé $\mathrm{I} = (34) + (30) + (37) + (42)$, ou bien par le système fermé partiellement prolongé $\mathrm{II} = (34) + (30) + (39) + (40) + (42)$.

5. Je vais établir les théorèmes principaux d'existence. Il faut d'abord trouver *le degré de généralité des congruences pour lesquelles les fonctions* ϱ *et* φ *sont données d'avance*: $\varrho = \varrho(u, v)$, $\varphi = \varphi(u, v)$. En différentiant extérieurement j'obtiens les équations complètement intégrables

$$d\varrho = \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau\,, \quad d\varphi = \alpha_3\tau_1 + \alpha_4\tau_2\,,\tag{44}$$

les équations (37) et (39) sont remplacées par les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,[\tau_1\omega_2^3] + [\tau_2\omega^1] + 2q_1[\tau_1\tau_2] = 0\,,\\
&[\tau_1\omega^1] + \frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,[\tau_2\omega_2^3] + 2q_2[\tau_1\tau_2] = 0\,,
\end{aligned}\tag{37'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\omega_2^3 &= (\xi_1 + q_2)\,\tau_1 + (\xi_2 - q_1)\,\tau_2\,,\\
\omega^1 &= (\xi_2 + q_1)\,\tau_1 + (\xi_1 - q_2)\,\tau_2\,,
\end{aligned}\tag{39'}$$

où q_i ne m'intéressent pas. La congruence étudiée est donc donnée par le système $\mathrm{I}' = (34) + (30) + (37') + (42)$, le déterminant de sa matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes $\frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\omega_2^3, \omega^1, \omega_2^4, \omega_3^4, \ldots$ $\ldots, \omega_2^n, \omega_3^n$ est

$$(\tau_1^2 - \tau_2^2)(\omega^2\omega_1^3 - \omega_1^2\omega^3)^{n-3} = -4\varrho^{n-3}\sin^{2-n}\varphi\cos^{2-n}\varphi\omega_1^2\omega_1^3\tau_1^{n-3}\tau_2^{n-3}$$

et donc $\neq 0$, compte tenu de la supposition constante $\sin 2\varphi \neq 0$. On a alors $p = 2$, $q = 2n - 4$, $s_1 = 2n - 4$, $s_2 = 0$, $N = 2n - 4$ de sorte que *les congruences en question dépendent de $2n - 4$ fonctions d'une variable.*

Je cherche ensuite *le degré de généralité des congruences pour lesquelles sont données deux relations*

$$f_r = f_r(M, N, P, M', N', P') = 0 \quad (r = 1, 2)\,. \tag{45}$$

On a alors

$$\mathrm{d}f_r \equiv \alpha_{r1}\,\mathrm{d}M + \alpha_{r2}\,\mathrm{d}N + \alpha_{r3}\,\mathrm{d}P + \alpha_{r4}\,\mathrm{d}P' + \alpha_{r5}\,\mathrm{d}N' + \alpha_{r6}\,\mathrm{d}M' \doteq 0 \tag{46}$$

Les congruences étudiées sont données par le système II + (46), en substituant (41) dans (46) j'obtiens quatre relations existant entre ξ_i. Il est facile de trouver que le déterminant de la matrice polaire est $\Delta\,.\,(\omega^2\omega_1^3 - \omega^3\omega_1^2)$ où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \tau_1 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}. \tag{47}$$

On a ensuite $p = 2$, $q = 2n - 2$, $s_1 = 2n - 2$, $s_2 = 0$, $N = 2n - 2$: *Les congruences dont les fonctions M, N, P, M', N', P' sont liées par deux relations* (45) *et pour lesquelles on a $\Delta \neq 0$ dépendent de $2n - 2$ fonctions d'une variable.*

Il est facile de trouver que *les congruences vérifiant une seule relation $f_1 = 0$ dépendent d'une fonction de deux variables* si la matrice que l'on forme de Δ en en écartant la seconde ligne est de rang 5.

6. Je passe enfin aux considérations géométriques. J'appelle *congruence de droites à connexion euclidienne* la formation que voici: A chaque point (u, v) d'un domaine bidimensional de paramètres soit associé un espace euclidien local $E_3(u, v)$ et une de ses droites $p(u, v)$; à chaque arc γ joignant les points (u_1, v_1) et (u_2, v_2) soit associée une congruence existant entre les espaces locaux $E_3(u_1, v_1)$ et $E_3(u_2, v_2)$. J'ai étudié déjà les propriétés projectives de cette congruence dans mes travaux cités dans introduction. Les propriétés euclidiennes de cette congruence n'ont pas encore été étudiées, elle méritent néanmoins une attention particulière. Dans les considérations qui vont suivre je ne m'occuperai cependant que des propriétés projectives et de propriétés métriques des surfaces focales, ce sont les variétés de König $\mathscr{E}_{2(3)}$ dont la théorie a été développée ci-dessus.

A chaque congruence de droites L dans E_n il est possible d'associer une congruence à connexion euclidienne $\mathbf{L}$ de la façon suivante: Les espaces locaux et les droites de la congruence L seront les espaces tangents et les droites de la congruence $\mathbf{L}$, les correspondances existant entre les espaces locaux infiniment voisins sont alors données par la projection dans le $(n - 3)$-sens perpendiculaire à l'espace tangent considéré; en exprimant tout cela on peut d'ailleurs se passer facilement de l'emploi des notions infinitésimales pareillement comme en exprimant la formation de l'espace de Riemann (ou bien espace à connexion affine) à partir d'une variété V_{n-1} dans E_n.

Les équations fondamentales de la congruence $\mathbf{L}$ sont

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 + \omega^3 I_3 , \\ \mathrm{d}I_1 &= \qquad\qquad \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3 , \\ \mathrm{d}I_2 &= -\omega_1^2 I_1 \qquad\qquad + \omega_2^3 I_3 , \\ \mathrm{d}I_3 &= -\omega_1^3 I_1 - \omega_2^3 I_2 , \end{aligned} \tag{48}$$

où ω^2, ω^3 et les autres expressions ω_2^3, $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\varphi$ ont la forme décrite ci-dessus.

On peut définir la notion de centre d'une droite de la congruence $\mathbf{L}$ (donc aussi de L dans E_n) aussi bien comme pour les congruences dans E_3, mais je ne vais pas m'intéresser à ces notions ainsi qu'aux notions de surfaces principales, de points frontières et qui s'y rattachent. Je signale en passant que la spécialisation des repères employée plus haut est choisie de telle sorte que A soit le centre et que $\omega_1^2\omega_1^3 = 0$ soient les surfaces principales.

Je vais trouver les foyers de la congruence $\mathbf{L}$ qui coïncident, bien entendu, avec ceux de la congruence L. Si $F = A + tI_1$ est un foyer, on doit avoir

$$\mathrm{d}F = \omega^1 I_1 + \varrho \operatorname{cotg} \varphi\omega_1^3 I_2 + \varrho \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2 I_3 + \mathrm{d}t I_1 + t\,\omega_1^2 I_2 + t\omega_1^3 I_3 \equiv 0 , \quad (\mathrm{mod}\ I_1) ,$$

donc

$$\varrho \operatorname{cotg} \varphi\omega_1^3 + t\omega_1^2 = 0 , \quad \varrho \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2 + t\omega_1^3 = 0 .$$

Il s'ensuit de ces équations que

$$F_1 = A + \varrho I_1 , \quad F_2 = A - \varrho I_1 \tag{49}$$

sont les foyers et

$$\omega_1^3 + \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2 = 0 , \quad \omega_1^3 - \operatorname{tg} \varphi\omega_1^2 = 0 \tag{50}$$

sont les surfaces développables correspondantes. Le cas de $\varrho \sin 2\varphi \neq 0$ que j'ai éliminé précédemment signifie donc que j'élimine les congruences paraboliques. Le passage d'un foyer à l'autre signifie donc analytiquement le passage de ϱ et φ à $-\varrho$ et $-\varphi$. L'ensemble des points (49_1) sera considéré dans ce qui suit comme une $\mathscr{E}_{2(3)}$ qui est une *surface focale* de la congruence $\mathbf{L}$; je la désigne par $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ayant une signification analogue.

La surface focale $\mathbf{F}_1$ est donnée par les équations

$$\begin{aligned} dF_1 &= \Omega_1 J_1 + \Omega_2 J_2 , \\ dJ_1 &= \Omega_1^2 J_2 + \Omega_1^3 J_3 , \\ dJ_2 &= -\Omega_1^2 J_1 + \Omega_2^3 J_3 , \\ dI_3 &= -\Omega_1^3 J_1 - \Omega_2^3 J_2 , \end{aligned} \tag{51}$$

où

$$F_1 = M + \varrho I_1 , \quad J_1 = I_1 , \quad J_2 = \cos\varphi I_2 + \sin\varphi I_3 , \\ J_3 = -\cos\varphi I_3 + \sin\varphi I_2 , \tag{52}$$

$$\Omega_1 = \omega^1 + d\varrho , \quad \Omega_2 = \frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\tau_1 , \quad \Omega_1^3 = \tau_2 , \quad \Omega_2^3 = -d\varphi - \omega_2^3 . \tag{53}$$

Pour la surface focale $\mathbf{F}_2$ on a alors

$$\begin{aligned} dF_2 &= \Psi_1 K_1 + \Psi_2 K_2 , \\ dK_1 &= \Psi_1^2 K_2 + \Psi_1^3 K_3 , \\ dK_2 &= -\Psi_1^2 K_1 + \Psi_2^3 K_3 , \\ dK_3 &= -\Psi_1^3 K_1 - \Psi_2^3 K_2 , \end{aligned} \tag{54}$$

où

$$F_2 = M - \varrho I_1, \; K_1 = I_1, \; K_2 = \cos\varphi I_2 - \sin\varphi I_3, \\ K_3 = -\cos\varphi I_3 - \sin\varphi I_2 , \tag{55}$$

$$\Psi_1 = \omega^1 - d\varrho , \quad \Psi_2 = \frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\tau_2 , \quad \Psi_1^3 = -\tau_1 , \quad \Psi_2^3 = d\varphi - \omega_2^3 . \tag{56}$$

Je vais montrer que *la surface focale* $\mathbf{F}_1$ (et donc aussi $\mathbf{F}_2$) *est sans torsion.* A partir des équations (6) il est facile de vérifier la relation

$$[\overline{\omega}^1\overline{\omega}_3^1] + [\overline{\omega}^2\overline{\omega}_3^2] = \varepsilon_2([\omega^1\omega_3^1] + [\omega^2\omega_3^2]) , \tag{57}$$

pour les repères satisfaisant à (17) on a

$$[\omega^1\omega_3^1] + [\omega^2\omega_3^2] = 2\varepsilon_2 c[\omega^1\omega^2] . \tag{58}$$

Si l'on a donc $[\omega^1\omega_3^1] + [\omega^2\omega_3^2] = 0$, la base étant choisie arbitrairement, la surface est sans torsion. Il résulte alors des équations (37_1) et (53) que l'on a $[\Omega_1\Omega_3^1] + [\Omega_2\Omega_3^2] = 0$, donc $\mathbf{F}_1$ est sans torsion. D'une manière analogue, on trouve en vertu de (37_2) que $\mathbf{F}_2$ est aussi sans torsion.

7. En s'appuyant sur la théorie précédente et surtout grâce au fait que les surfaces focales de la congruence $\mathbf{L}$ sont les variétés $\mathscr{E}_{2(3)}$, il est possible de définir les types particuliers des congruences L dans E_n. C'est ainsi que je dirai p. ex. que la congruence L dans E_n est une congruence W si $\mathbf{L}$ en est une, c'est-à-dire si les courbes asymptotiques sur les surfaces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ se correspondent mutuellement. On peut considérer de même les congruences *pseudosphériques* pour lesquelles $\varrho = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$, et qui dépendent, en vertu de ce qui précède, de $2n - 4$ fonctions d'une variable. Le lecteur trouvera lui-même la façon de procéder pour définir les congruences B, Γ etc. dans E_n. Ces congruences sont caractérisées par le fait qu'elles sont données par deux relations existant entre $M, \ldots, P'$; le théorème d'existence correspondant a été cité plus haut. Je ne veux pas entrer dans les détails, le lecteur trouvera également lui-même quelles sont les propriétés de la congruence L et de la congruence correspondante $\mathbf{L}$; en les considérant ici je ne ferais que répéter d'une manière formelle les résultats de M. Finikov.

Резюме

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ В E_n

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 20/II 1958 г.)

Прямолинейной конгруэнцией с евклидовой связностью мы назовем такой объект, где каждой точке (u, v) двумерной области параметров поставлено в соответствие локальное евклидово пространство $E_3(u, v)$ и в нем прямая $p(u, v)$, а каждой дуге γ, соединяющей точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) поставлена в соответствие тождественность между локальными пространствами $E_3(u_1, v_1)$ и $E_3(u_2, v_2)$. Каждой прямолинейной конгруэнции L в евклидовом n-мерном пространстве E_n можно поставить в соответствие конгруэнцию с евклидовой связностью $\mathbf{L}$ следующим образом: Локальные пространства и прямые конгруэнции $\mathbf{L}$ являются касательными пространствами и прямыми конгруэнции L; далее, тождественности между бесконечно близкими локальными пространствами даны проектированием в $(n - 3)$-направлении, перпендикулярном к рассматриваемому касательному пространству. Фокальные поверхности конгруэнции $\mathbf{L}$ являются многообразиями Кенига с евклидовой связностью, которым посвящается первая часть работы; их теория является непосредственным обобщением теории поверхностей в E_3. Изучение соответствия между фокальными поверхностями конгруэнции $\mathbf{L}$ позволяет дать определение конгруэнций W, B, Γ, псевдосферических и т. д. и для конгруэнций L в E_n.

Указанная теория является непосредственным обобщением результатов, приведенных в книге Финикова Теория конгруэнций; в настоящей работе автор поставил себе главной целью показать, что обширные части теории прямолинейных конгруэнций в E_n могут быть разработаны при помощи геометрических и аналитических рассуждений, не более сложных, чем для случая $n = 3$.