Rudolf Výborný

О некоторых основных свойствах решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 537–551

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100328

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

РУДОЛЬФ ВЫБОРНЫ (Rudolf Výborný), Прага

(Поступило в редакцию 2/IV 1958 г.)

В работе исследуется однозначность третьей краевой задачи для параболического уравнения и непрерывная зависимость решений от коэффициентов уравнения, от начальных и краевых условий.

1. Введение

Решая краевые задачи для дифференциального уравнения в частных производных, занимаемся всегда т. наз. корректностью задачи. Последняя заключается в выполнении трех условий:

1. существование решения, 2. его однозначность, 3. непрерывная зависимость решения от дополнительных условий.

Существование решения и его однозначность исследуются со времен Даламбера; на принципиальное значение непрерывной зависимости решения от краевых условий обратил внимание Адамар, и построенный им пример, доказывающий некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа, можно найти во всех основных учебниках математической физики. Решение краевой задачи, которое могло бы иметь какое-нибудь значение в физике, технике и т. под., должно еще

4. непрерывно зависеть от области определения,

5. непрерывно зависеть от коэффициентов уравнения.

При этом, понятно, необходимо в каждой задаче уточнить понятия непрерывной зависимости, о которой идет речь в 3, 4, 5. В настоящей работе будем подробнее заниматься пунктами 2, 3, 5 для основной краевой задачи для общего дифференциального линейного уравнения в частных производных параболического типа. Заметим, что существование решения краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных иногда вытекает из его однозначности, как, например, в случае задачи

Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. (Путем сведения краевой задачи к интегральному уравнения.)

Важную роль в доказательствах однозначности краевых задач для эллиптического и параболического типа играет т. наз. теорема максимума и обостренная теорема максимума. Первое простое доказательство этой теоремы для эллиптического случая дал Э. Хопф [1], обостренную теорему максимума перенес на случай уравнения теплопроводности М. Пиконе [2], а на случай общего параболического уравнения — Л. Ниренберг [3]. Теоремой Ниренберга в дальнейшем несколько раз воспользуемся. В отделе 2 доказана основная лемма, которую можно было бы применить в доказательстве теоремы Ниренберга. Отделы 3 и 4 содержат главные результаты работы — доказательство однозначности решения третьей краевой задачи для общего параболического уравнения и доказательство непрерывной зависимости от коэффициентов уравнения и от краевых и начальных условий. Для эллиптического уравнения результаты, аналогичные выведенным в отделах 4 и 5, хорошо известны по работе Э. Хопфа [4] и О. А. Олейника [5]. См. также [6] и [7].

2. Обозначения и основная лемма

На протяжении всей работы G будет означать область $(n + m)$-мерного пространства E_{n+m}; точка $P \in E_{n+m}$ имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)$; короче будем писать

$$P \mathrel{\overset{\cdot}{=}} (x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m),$$

$$P_1 = (x^1 t^1) = (x_1^1, \ldots, x_n^1, t_1^1, \ldots, t_m^1), \text{ и } (P) = u(x, t) = u(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m),$$

$$|P|^2 = |x|^2 + |t|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + t_1^2 + \ldots + t_m^2,$$

$$|P - P_1|^2 = |x - x^1|^2 + |t - t^1|^2 = (x_1 - x_1^1)^2 + \ldots + (x_n - x_n^1)^2 + \\ + (t_1 - t_1^1)^2 + \ldots + (t_m - t_m^1)^2 .$$

Пусть в G определены ограниченные действительные функции $a_{ij}(x, t)$, $a_i(x, t)$, $b_{rs}(x, t)$ и $b_r(x, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$; $j = 1, \ldots, n$; $r = 1, \ldots, m$; $S = 1, \ldots, m)$ такие, что квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, \lambda_i \lambda_j$ является равномерно положительно определенной, а квадратичная форма $\sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}(x, t)\, \mu_r \mu_s$ является положительно полуопределенной в области G, т. е. существует положительная постоянная m_1 так, что для всех действительных λ и μ и для всех $(x, t) \in G$ справедливы неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, \lambda_i \lambda_j \geqq m_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 , \tag{1}$$

$$\sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}(x, t)\, \mu_r \mu_s \geqq 0 . \tag{2}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_1(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t_r \partial t_s} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} + $$
$$+ \sum_{r=1}^{m} b_r(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t_r} + c(x, t)$$

и его частный вид ($m = 1$, $t = t_1$)

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c(x, t) + u(x, t) .$$

Если только не будет оговорено иначе, будем во всей работе предполагать, что в области G функция $c(x, t)$ ограничена и выполняется неравенство $c(x, t) \leqq 0$. Все утверждения, доказанные для оператора $L(u)$, можно непосредственно перенести на более общий оператор

$$L_2(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} + $$
$$+ b(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c(x, t)\, u(x, t) ,$$

если $b(x, t) \leqq k < 0$, где k — какая-то постоянная.

Лемма. *Пусть R — действительное число, $R > 0$. Пусть $K = \underset{P}{\mathscr{E}}[|P| < R]$, $K \subset G$, $P_1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1, t_1^1, \ldots, t_m^1)$, $|P_1| = R, |x^1| \neq 0$. Пусть $u(x, t)$ — функция, непрерывная в $\overline{K}$,[1] $u(P_1) \leqq 0$, $u(P) > u(P_1)$ для $P \in \overline{K}$, $P \neq P_1$.*

Пусть $f(x, t)$ — функция, определенная в K такая, что $f(x, t) \leqq 0$. Далее, пусть

$$L_1(u) = f(x, t) \quad \text{на } K .^{2)} \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{P \to P_1} \frac{u(P) - u(P_1)}{|P - P_1|} > 0 , \tag{4}$$

если P стремится к точке P_1 по полупрямой l, выходящей из точки P_1 и образующей с внутренней нормально $\dot{K}$[3]) в точке P_1 острый угол.

---

[1]) Символом $\overline{K}$ обозначено замыкание множества K.

[2]) Под решением уравнения (3) подразумевается функция, обладающая непрерывными частными производными 2-го порядка. Для оператора $L_1 = L$ достаточно предполагать, что существуют непрерывные производные первого порядка и непрерывные вторые производные по переменным x_i ($i = 1, \ldots, n$).

[3]) Символом $\dot{K}$ обозначена граница множества K.

Замечание. Значение утверждения, понятно, заключается в том, что в соотношении (4) имеет место строгое неравенство.

Доказательство. Обозначим $C_1 = \sup_{P \in K} \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{r,s=1}^{m} |b_{rs}| + \sum_{i=1}^{n} |a_i| + \right.$ $\left. + \sum_{r=1}^{m} |b_r| + |c| \right)$ и построим сферу K_1 с центром в точке P_1 радиуса $\frac{|x^1|}{2}$. Легко видно, что для $P \in K_1$

$$|x| \geqq R - \frac{|x^1|}{2}\,. \tag{5}$$

Теперь выберем число $\alpha \geqq 1$ так, чтобы было

$$\alpha > \frac{4C_1(1+R)}{m_1(2R-|x^1|)^2} \tag{6}$$

и определим функцию

$$h(P) = e^{-\alpha|P|^2} - e^{-\alpha R^2}\,.$$

Простым вычислением получим

$$\mathrm{e}^{\alpha|P|^2} L_1(h) = 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P) x_i x_j + \sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}(P)\, t_r t_s - 2\alpha\Big[\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(P) + a_i(P)\, x_i) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m} (b_{rr}(P) + b_r(P)\, t_r)\Big] + c(P)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(R^2-|P|^2)})$$

и, следовательно, согласно (1), (2)

$$\mathrm{e}^{\alpha|P|^2} L_1(h) \geqq 4\alpha^2 m_1 |x|^2 - 2\alpha C_1(1+R) + c(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(R^2-|P|^2)})\,. \tag{7}$$

Для $P \in K \cap K_1$ будет $R^2 - |P|^2 \geqq 0$, так что $1 > 1 - e^{-\alpha(R^2-|P|^2)} \geqq 0$ и, следовательно, $c(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(R^2-|P|^2)}) > -2C_1\alpha(1+R)$. Отсюда и из (5), (6), (7) следует

$$L_1(h) > 0 \quad \text{для} \quad P \in K \cap K_1\,.$$

Для функции $h(P)$ еще справедливы соотношения

$$h(P) > 0 \text{ для } P \in K\,, \qquad h(P) = 0 \text{ для } P \in \dot{K}\,, \qquad h(P) < 0 \text{ для } P \operatorname{non} \in \overline{K}\,.$$

По теореме Вейерштрасса непрерывная функция u достигает своего минимума на множестве $\overline{K} \cap \dot{K}_1$, причем этот минимум больше $u(P_1)$. Поэтому существует число η так, что

$$u(P) > u(P_1) + \eta \quad \text{для} \quad P \in \overline{K} \cap \dot{K}_1\,. \tag{8}$$

Положим $C_2 = \sup h(P)$. Выберем положительное число $\varepsilon < \frac{\eta}{C_2}$ и определим функцию

$$v(P) = u(P) - \varepsilon h(P)\,. \tag{9}$$

Очевидно, что в $\overline{K} \cap \overline{K}_1$ будет $L_1(v) < 0$, и поэтому функция v не может достигать наименьшего отрицательного значения внутри $\overline{K} \cap \overline{K}_1$. Но на границе этого множества

$$v(P) = u(P) > u(P_1)\,, \quad P \neq P_1\,, \quad P \in \dot{K}$$

и

$$v(P) \geqq u(P_1) + \eta - \varepsilon C_2 > u(P_1)\,, \quad P \in \dot{K}_1\,.$$

В итоге получаем $u(P_1) \leqq u(P) - \varepsilon h(P)$. Но из этого неравенства уже легко получаем неравенство (4). Прежде всего

$$\frac{u(P) - u(P_1)}{|P - P_1|} \geqq \varepsilon\, \frac{h(P) - h(P_1)}{|P - P_1|} \tag{10}$$

и

$$\left[\frac{\partial h(P)}{\partial l}\right]_{P=P_1} = \frac{2\alpha}{R} \cos(ln)\, e^{-\alpha|P_1|^2}\,,$$

где n — внутренняя нормаль. Из (10) для $P \to P_1$ получим

$$\lim_{P \to P_1} \frac{u(P) - u(P_1)}{|P - P_1|} \geqq \frac{2\varepsilon\alpha}{R} \cos(ln)\, e^{-\alpha|P_1|^2} > 0\,,$$

что требовалось доказать.

3. Однозначность краевых задач

До конца настоящей работы будем предполагать, что основная область G ограничена,[4]) что она лежит в слое $0 \leqq t < T$ и что к каждой точке $P \in \dot{G}$, $P = (x_1, \ldots, x_n, t)$, $0 < t < T$ найдется сфера K_P так, что

1. $K_P \subset G$.
2. $\overline{K}_P \cap \dot{G} = \{P\}$.
3. Если P' — центр сферы K_P, то $|x - x'| \neq 0$.
4. Если $P_1 \in K_P$, $t_1 < t$, то $D(P_1) = \underset{Q}{\mathscr{E}}[Q \in D(P),\ t \leqq t_1]$.

При этом символ $D(P_1)$ означает множество тех $P \in G$, которые можно соединить с точкой P_1 кривой лежащей целиком (возможно за исключением точки P_1) в области G и вдоль которой координата t не убывает.

Для приложений особый интерес представляет тот случай, когда область G является цилиндром, образующие которого параллельны оси t и его основание лежит в гиперплоскости $t = 0$. Пусть, например, $G = g \times \langle 0, T)$,[5])

---

[4]) Итак, областью будем разуметь ограниченную область.

[5]) Символом $\times$ обозначено декартово произведение.

где g — n-мерная ограниченная область. Тогда G обладает, очевидно, требуемыми свойствами, если $\bar{g}$ — замкнутая область, принадлежащая классу A^2.[6])

Из леммы отдела 2 легко вытекает

Теорема 1. *Пусть u — решение уравнения*

$$L(u) = f, \tag{11}$$

имеющее непрерывные производные первого порядка по всем переменным и непрерывные производные второго порядка по переменным x_i. Пусть функция u непрерывна на $\bar{G}$. Пусть $P_0 \in \dot{G}$, $T > t_0 > 0$, $u(P_0) \leqq 0$, $u(P_0) \leqq u(P)$, $f(P) \leqq 0$ в G. Если u не постоянно в $D(P_0)$, то

$$\lim_{P \to P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{|P - P_0|} > 0,$$

если $P \to P_0$ по полупрямой l.[7])

Доказательство. Пусть τ — верхния грань тех $t < t_0$, для которых существует точка $P = (x_1, \ldots, x_n, t)$, $P \in K_{P_0}$ так, что $u(P) = u(P_0)$. Пусть $\tau = t_0$; пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по одной теореме Ниренберга (см. [3]) и по четвертому предположению об области G будет $u(P) = u(P_0)$ для $P \in D(P_0)$, $t \leqq t_0 - \varepsilon$, следовательно, $u(P) = u(P_0)$ в $D(P_0)$. Предположение $\tau = t_0$ ведет к противоречию, значит, $\tau < t_0$. Обозначим через $K \subset K_{P_0}$ сферу радиуса $R = \dfrac{t_0 - \tau}{5}$, касающуюся сферы K_{P_0} в точке P_0. Если переместим начало в центр и применим основную лемму из отд. 2, получим сразу же утверждение теоремы. Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть u — решение уравнения*

$$L(u) = 0, \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям гладкости, сформулированным в теореме 1. Пусть, далее, $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial l} = 0$. Если функция u достигает в точке P_0 наибольшего неотрицательного или наименьшего неположительного значения, то $u \equiv u(P_0)$,

Простым следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть u — решение уравнения* (12), *удовлетворяющее условиям гладкости, сформулированным в теореме* 1. *Пусть $c(x, t) \equiv 0$ в G, $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial l} = 0$. Если функция u достигает в точке P_0 своего наибольшего или наименьшего значения, то $u \equiv u(P_0)$ в $D(P_0)$.*

---

[6]) Определение см. [6], стр. 10.

[7]) l имеет то же значение, как и в отделе 2.

Доказательство. К функции $v(P) = u(P) - u(P_0)$ применим теорему 2. Теорема 3 представляет собой обобщение некоторых теорем, доказанных для уравнения теплопроводности Г. Адлером и Г. Фрейдом. См. [8], [9], [10], [11].

Теперь займемся однозначностью третьей краевой задачи. Через Z обозначим часть $\dot{G}$, на которой $t = 0$, и через S — ту часть $\dot{G}$, где $0 < t < T$. Об области G будем еще предполагать следующее[8]) пусть для каждой точки $P \in G$ $\overline{D}(P) \cap Z \neq 0$. Если G — цилиндр, описанный выше, то G, очевидно, выполняет это условие. Пусть $a(P)$, $b(P)$, $\varphi(P)$ — функции, определенные на S, $a(P) \geqq 0$, $b(P) \leqq 0$, $a^2(P) + b^2(P) > 0$.[9]) Пусть $\psi(P)$ — функция, определенная на Z. В дальнейшем будем всюду считать $Z \neq \emptyset$. Решением третьей краевой задачи для уравнения (11) назовем функцию u, которая имеет все непрерывные частные производные первого порядка и непрерывные производные второго порядка по переменным x_i $(i = 1, \ldots, n)$ в области G, которая непрерывна на $G \cup Z \cup S$, на G удовлетворяет краевому условию

$$A(u) = a(P)\,\frac{\partial u(P)}{\partial l} + b(P)\,u(P) = \varphi(P)\ ^{10)} \tag{13}$$

и на Z — начальному условию

$$u(P) = \psi(P)\,. \tag{14}$$

Теорема 4. *Пусть u_1 и u_2 — два решения третьей краевой задачи для уравнения* (11), *удовлетворяющее тем же краевым и начальным условиям. Тогда $u_1 = u_2$ в G.*

Доказательство. Положим $v = u_1 - u_2$. Для функции v будет

$$A(v) = 0 \quad \text{на } S\,, \tag{15}$$

$$v(P) = 0 \quad \text{на } Z\,, \tag{16}$$

$$L(v) = 0 \quad \text{в } G\,.$$

Пусть для какого-нибудь $P_1 \in G$ будет $v(P_1) < 0$; тогда функция v достигает в некоторой точке P_0 отрицательного минимума на $\overline{D}(P_1)$. Точка P_0 не может лежать в $G \cup Z$, потому что это предположение ведет к противоречию с (16). Следовательно, $P_0 \in S$. По теореме 1 имеет место неравенство $\dfrac{\partial v(P_0)}{\partial l} > 0$, следовательно, в точке P_0

$$A(v) = a\,\frac{\partial v}{\partial l} + bv > 0\,.$$

[8]) И это условие останется в силе до конца настоящей работы.

[9]) Эти условия также останутся в силе во всей работе.

[10]) Т. е. в каждой точке S существует $\dfrac{\partial u(P)}{\partial l}$, но мы не требуем непрерывную продолжимость первых частных производных на S.

Но это противоречит уравнению (15). Итак, $v(P) \geqq 0$ в G. Таким же образом докажем, что $-v(P) \geqq 0$. Значит, $u_1(P) = u_2(P)$ в G, и т. д.

Значение теоремы 4 заключается в том, что ее можно применить и в случае $b(P) = 0$ на части S. Если $b(P) < 0$, то теорему об однозначности третьей краевой задачи можно доказать при более слабых предположениях о границе G. Теорему 1 можно применить и к доказательству однозначности краевых задач для нелинейных уравнений. Так, например, справедлива

Теорема 5. *Пусть F — функция от переменных $x_1, \ldots, x_n, t, p, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{nn}$, определенная для $(x_1, \ldots, x_n, t) \in G$ и для всех p, p_i, p_{ij}; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$, имеющая в этой области непрерывные производные первого порядка, причем*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \lambda_i \lambda_j \geqq m_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \quad \frac{\partial F}{\partial p} \leqq 0 .$$

Пусть u_1 и u_2 — два решения уравнения

$$u_t = F(x_1, \ldots, x_n, t, u, u_{x_1}, \ldots, ux_n, u_{xx_1}, \ldots, u_{x_i x_j}, \ldots, u_{x_1} u_{x_n}) ,$$

имеющие непрерывные производные первого порядка и непрерывные производные второго порядка по переменным x_i в области G. Пусть функции u_1 и u_2 непрерывны на $G \cup Z \cup S$, пусть они на S удовлетворяют краевому условию (13) *и на Z — начальному условию* (14). *Тогда $u_1(P) = u_2(P)$ для $P \in G$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму:

Лемма. *Существуют непрерывные функции A_{ij}, A_i, C, от переменных $x_i, t, p, p_i, p_{ij}, g, g_i, g_{ij}$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$) так, что*

$$F(x, t, p, p_i, p_{ij}) - F(x, t, g, g_i, g_{ij}) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(p_{ij} - g_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} A_i(p_i - g_{ij}) + C(p - g) \text{ [11]}$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqq m_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \quad C \leqq 0 .$$

Доказательство см., например, в [12], [13].

Доказательство теоремы 5. Функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$v_t = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i v_{x_i} + Cv$$

и условиям (15), (16). Коэффициенты A_{ij}, A_i и C зависят, правда, от функций u_1 и u_2, но к функции v можно применить теорему 4 и заключить, что $v(P) \equiv 0$ в G.

[11]) Пишем коротко $F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ вместо $F(x_1, \ldots, x_n, t, p, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{nn})$ и опускаем аргументы функций A_{ij}, A_i, C.

4. Непрерывная зависимость от краевых условий и коэффициентов уравнения

Данный отдел начнем с теоремы, которая гарантирует непрерывную зависимость решения от правой части и даже, в определенном смысле, эту зависимость подробнее объясняет.

Теорема 6. *Пусть u — решение третьей краевой задачи для уравнения (11), удовлетворяющее краевому условию $A(u) = 0$ и начальному условию $u = 0$. Пусть $M = \sup_{P \in G \cup Z \cup S} |f(P)|$, $\underline{c} = \inf_{P \in G \cup Z \cup S} |c(P)| > 0$.*

Тогда

$$|u(P)| \leqq \frac{M}{\underline{c}} \text{ в } G.$$

Доказательство. Определим функцию w_1 уравнением $w_1(P) = \frac{M}{\underline{c}} - u(P)$.

Для функции w_1 будет

$$L(w_1) = \frac{M}{\underline{c}} c(P) - f(P) \leqq - M - f(P) \leqq 0$$

в G. На Z имеем

$$w_1(P) \geqq 0 \tag{17}$$

и для $P \in S$

$$A(w_1) = \frac{Mb(P)}{\underline{c}} \leqq 0 \tag{18}$$

по предположению о функции b. Пусть в некоторой точке $P_1 \in G$ $w_1(P_1) < 0$. Тогда функция w достигает отрицательного минимума на $\overline{D}(P_1)$ в некоторой точке P_0. Точка P_0 не может находиться на Z, потому что это противоречило бы (17). Также точка P_0 не может лежать в $D(P_1)$, потому что в таком случае функция w равнялась бы по известной теореме Ниренберга (см. [3]) отрицательной константе, а это также невозможно ввиду того, что w_1 непрерывна на $G \cup Z \cup S$ и что имеет место соотношение (17). Следовательно, $P_0 \in S$. В точке P_0 имеет место неравенство $\frac{\partial w_1}{\partial l} > 0$ и, следовательно,

$$A(w_1) = a \frac{\partial w_1}{\partial l} + bw > 0 ,$$

что противоречит отношению (18). Итак, $w(P_1) \geqq 0$ для $P \in G$, или же $u(P) \leqq \frac{M}{\underline{c}}$. Рассуждая аналогично, мы могли бы для функции $w_2(P) = \frac{M}{\underline{c}} + u(P)$ доказать неравенство $w_2(P) \geqq 0$ для $P \in G$ и таким образом закончить доказательство теоремы 6.

Договоримся еще на следующем: символы M и $\underline{c}$ будут иметь в дальнейшем то же значение, как в теореме 6, символами же M_1, M_2, $\underline{b}$ обозначим величины $\sup_{P \in S} |\varphi(P)| = M_1$, $\sup_{P \in Z} |\psi(P)| = M_2$, $\underline{b} = \inf_{P \in S} |b(P)|$, $d = \inf_{P \in S} (|a(P)| + |b(P)|)$.

Теорема 7. *Пусть u — решение третьей краевой задачи для уравнения (12), выполняющее краевое условие (13) и начальное условие (14). Пусть $\underline{b} > 0$. Тогда*

$$|u| \leqq M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}}\,.$$

Доказательство подобно доказательству теоремы 6. Обозначим $\mu = M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}}$ и рассмотрим функцию $w_2 = \mu - u$. Для нее будет

$$L(w_2) = \mu c \leqq 0 \text{ в } G\,, \quad w_2(P) = M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}} + \psi(P) \geqq 0 \text{ на } Z\,,$$

$$A(w_2) = b\left(M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}}\right) - \varphi \leqq 0\,.$$

Отсюда таким же приемом, как в доказательстве теоремы 6, получим, что $w_2(P) \geqq 0$ в G, следовательно, $u \leqq \mu$. Аналогично докажем, что $-\mu \leqq u$.

Теорема 8. *Пусть O — кольцо функций, определенных на G. Пусть в O содержатся все функции вида $e^{\alpha(x_1+\ldots+x_n)}$, где α — постоянная. Пусть коэффициенты a_{ij}, a_i, c уравнения (11) принадлежат O. Пусть функции a, b ограничены на S. Пусть для любой функции $F \in O$ существует решение третьей краевой задачи для уравнения $L(u) = F$, удовлетворяющее условиям (13) и (14). Пусть, далее, $f \in O$, $\underline{b} \neq 0$. Тогда существует постоянная C (зависящая от коэффициентов операторов A, L) такая, что решение третьей краевой задачи для уравнения $L(u) = f$, удовлетворяющее условиям (13), (14), выполняет неравенство*

$$|u(P)| \leqq M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}} + CM\,,$$

для $P \in G$.

Замечание. Постоянная C не зависит ни от функции φ, ни от функции ψ. Из доказательства станет ясной зависимость от коэффициентов L и A.

Замечание. Применяя теорему 8 в конкретных случаях, можем в качестве кольца O взять класс достаточно гладких функций.

Замечание. Теорема 8 останется в силе, если несколько изменим предположение о кольце O. Можно предполагать, что O содержит все функции вида $e^{\alpha x_i}$, или $e^{\alpha t}$, или $e^{\Sigma x_i \alpha_i}$, или все достаточно гладкие функции и т. под.

Доказательство. Пусть u_1 — решение третьей краевой задачи $L(u_1) = f$, $A(u_1) = 0$ на S, $u_1 = 0$ на Z, и пусть u_2 — решение третьей краевой задачи $L(u_2) = 0$, $A(u_2) = \varphi$ на S и $u_2 = \psi$ на Z. По теореме 7 $|u_2| < M_2 + \frac{M_1}{\underline{b}}$. Найдем оценку для u_1. Выберем функцию $W = e^{\alpha(x_1+\ldots+x_n)}$ так, чтобы было $\inf\limits_{P\in G} L(W) > 0$. Этого можно добиться, например, так, что положим

$$\alpha > \sup \frac{\sum|a_{ij}| + \sqrt{(\sum|a_{ij}|)^2 + 4|c|\sum a_{ij}}}{\sum a_{ij}}$$

Через u_W обозначим решение третьей краевой задачи $L(u_W) = L(W)$, $A(u_W) = 0$ на S, $u_W = 0$ на Z. Докажем, что имеет место неравенство

$$|u_1| \leqq \frac{M|u_W|}{\inf L(W)}.$$

Обозначим $\mu = \frac{M}{\inf L(W)}$ и рассмотрим функцию $w = \mu u_W + u_1$. Нетрудно обнаружить, что $L(w) \geqq 0$ в G, $A(w) = 0$ на S и $w(P) = 0$ для $P \in Z$. Отсюда (подобно тому, как в доказательстве теоремы 6) следует, что $w(P) \leqq 0$ в G, и, следовательно, $u_1(P) \leqq \mu|u_W|$. Аналогично докажем, что $u_1(P) \geqq -\mu|u_W|$.

Оценку функции $|u_W|$ можем найти следующим образом: обозначим $\bar{w} = u_W - W$. Очевидно, что $L(\bar{w}) = 0$, $A(\bar{w}) = -A(W)$. По теореме 7

$$|\bar{w}| \leqq \frac{\sup\left|a\frac{\partial W}{\partial l} + bW\right|}{\underline{b}} + \sup_{P\in G} W$$

и, следовательно,

$$|u_W| \leqq 2\sup W + \frac{\sup\left|a\frac{\partial W}{\partial l} + bW\right|}{\underline{b}}.$$

Теорема 9. *Пусть функции a, b принадлежат классу $C^{(k)}$ $(k \geqq 1)$ на S. Пусть $\underline{d} > 0$, $\underline{c} > 0$. Пусть для любых функций $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ класса $C^{(k)}$ на S или же на Z, существует решение U третьей краевой задачи для уравнения* (12), *удовлетворяющее условиям* (13) *и* (14). *Пусть существует функция V класса $C^{(k+1)}$ в $\bar{G}$ так, что $\bar{\bar{V}} = \sup V < 0$ в G, $\tilde{V} = \inf\frac{\partial V}{\partial l} > 0$ на S. Тогда существуют постоянные K_1 и K_2 не зависящие от коэффициентов оператора L и от функций a, b такие, что для $P \in G$*

$$|u(P)| \leqq \frac{M}{\underline{c}} + M_2 + \frac{M_1}{d}\left[K_1 + \frac{K_2}{\underline{c}}R\right],$$

где
$$R = \sup_{P \in G} \left(\sum a_{ij}(P) + \sum |a_i(P)| + |c(P)| + 1\right)$$
и u есть решение уравнения (11), *удовлетворяющее условиям* (13) *и* (14).

Замечание. Функция V будет несомненно существовать, если граница области G будет достаточно гладкой и направление l не будет слишком отклоняться от направления нормали.

Доказательство. Через u_1 обозначим решение задачи $L(u_1) = 0$ в G, $A(u_1) = \varphi$ на S, $u_1(P) = 0$ для $P \in Z$, через u_2 — решение задачи $L(u_2) = 0$ в G, $A(u_2) = 0$ на S, $u_2(P) = \psi(P)$ для $P \in Z$, и положим $u_3 = u - u_1 - u_2$. Очевидно, $L(u_3) = f$ в G, $A(u_3) = 0$ на S, $u_3(P) = 0$ для $P \in Z$. По теореме 6
$$|u_3| < \frac{M}{\underline{c}}\,; \tag{19}$$
также нетрудно проверить, что
$$|u_2| < M_2\,. \tag{20}$$
Для функции $u_2 + M_2$ справедливы соотношения
$$L(u_2 + M_2) = cM_2 \leqq 0 \text{ в } G\,, \quad A(u_2) = M_2 b \leqq 0 \text{ на } S\,,$$
$$u_2(P) \geqq 0 \text{ для } P \in Z\,.$$
Функция $u_2 + M_2$ не может достичь отрицательного минимума; значит, $u_2 \geqq - M_2$. Аналогично докажем, что $u_2 \leqq M_2$. Остается найти оценку u_1.

Обозначим $a(P)\dfrac{\partial V(P)}{\partial l} + b(P)\,V(P) = \Phi(P)$ для $P \in S$. Построим решение $\omega(P)$ третьей краевой задачи для уравнения (12), удовлетворяющее краевому условию $A(\omega) = \Phi$ на S и начальному условию $\omega(P) = V(P)$ для $P \in Z$. Положим $K_3^{-1} = \operatorname{Min}(\tilde{V}, |\bar{V}|)$ и докажем неравенство
$$|u_1(P)| \leqq \frac{M_1 K_3 |\omega(P)|}{d}\,. \tag{21}$$
Положим $\omega_1(P) = \dfrac{K_3 M_1 \omega(P)}{d} - u_1$. Очевидно, что $L(\omega_1) = 0$ в G,
$$A(\omega_1) = \frac{K_3 M_1}{d}\left(a\frac{\partial V}{\partial l} + bV\right) - \varphi \geqq 0 \text{ на } S$$
$$\omega_1(P) = \frac{K_3 M_1 V(P)}{d} \leqq 0 \text{ для } P \in Z\,.$$
Функция ω_1 не может достичь положительного максимума, следовательно, $\omega_1 \leqq 0$, или же
$$u_1(P) \geqq \frac{K_3 M_1}{d}\,\omega(P) \geqq -\frac{K_3 M_1}{d}\,|\omega(P)|\,, \quad P \in G\,.$$
Аналогично докажем, что $u_1(P) \leqq \dfrac{K_3 M_1}{d}\,|\omega(P)|$.

Для завершения доказательства остается найти оценку функции $|\omega(P)|$. Функция $\omega - V$ выполняет уравнение $L(\omega - V) = -L(V)$ в G, удовлетворяет краевому условию $A(\omega - V) = 0$ на S и начальному условию $\omega(P) - V(P) = 0$ на Z. Итак, по теореме 6 будет

$$|\omega(P) - V(P)| \leqq \frac{\sup L(V)}{\underline{c}} . \tag{22}$$

Согласно предположению о функции V существует постоянная K_4 такая, что для $P \in \bar{G}$

$$\left|\frac{\partial^2 V(P)}{\partial x_i \partial x_j}\right| < K_4 , \quad \left|\frac{\partial V(P)}{\partial x_i}\right| < K_4 , \quad |V(P)| < K_4 , \quad \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| < K_4 .$$

Из (22) получаем

$$|\omega(P)| \leqq |\bar{V}| + \frac{K_4}{\underline{c}} \sup \left(\sum|a_{ik}(P)| + \sum|a_i(P)| + 1 + |c(P)|\right) . \tag{23}$$

Из (19), (20), (21) и (23) следует

$$|u(P)| \leqq \frac{M}{\underline{c}} + M_2 + \frac{M_1 K_3}{d} \left[|\bar{V}| + \frac{K_4}{\underline{c}} R\right] .$$

Но это в сущности ничто иное, как утверждение доказываемой теоремы.

В дальнейшем кроме операторов L и A будем еще заниматься операторами L' и A'. Символы с черточками будут означать величины, аналогичные тем, которые обозначены символами без черточек. Так, например, символом $c'(P)$ будет обозначена функция, определенная и ограниченная на G, $c'(P) \leqq 0$. Аналогично $d' = \inf\limits_{P \in S} (|a'(P)| + |b'(P)|)$ и т. д.

Теорема 10. *Пусть выполнены все условия теоремы* 9. *Пусть u' — решение уравнения*

$$L'(u') = f' , \tag{24}$$

удовлетворяющее краевому условию $A'(u') = \varphi'$ на S и начальному условию $u' = \psi'$ на Z. Пусть $\underline{c}' > 0$, $d' > 0$ и пусть функция u' имеет непрерывные вторые производные на $\bar{G}$. Тогда к любому $\varepsilon > 0$ найдется всегда $\delta > 0$ так, что, как только

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & \sum|a_{ij}(P) - a'_{ij}(P)| + \sum|a_i(P) - a'_i(P)| + |c(P) - c'(P)| < \delta \text{ в } G,\\
2. & |\varphi'(P) - \varphi(P)| < \delta \text{ на } S,\\
3. & |a(P) - a'(P) < \delta, \ |b(P)| - b'(P)| < \delta \text{ на } S,\\
4. & |\psi'(P) - \psi(P)| < \delta \text{ на } Z,\\
5. & |f'(P) - f(P)| < \delta \text{ в } G,
\end{array}\right\} \tag{25}$$

то решение u уравнения (11), *удовлетворяющее условиям* (13) *и* (14), *выполняет неравенство $|u(P) - u'(P)| < \varepsilon$ в G.*

Замечание. Число δ зависит не только от ε но и от коэффициентов уравнения (24) и от функции u'.

Доказательство. Пусть

$$\sum \left| \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i \, \partial x_j} \right| + \sum \left| \frac{\partial u'}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u'}{\partial t} \right| + |u'| < C \text{ в } G$$

и $\left| \frac{\partial u'}{\partial l} \right| + |u'| < C$ на S. В области G

$$L(u - u') = f - f' + \sum_{i,j=1}^{n} (a'_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} (a'_i - a_i) \frac{\partial u'}{\partial x_i} + \frac{\partial u'}{\partial t} + \\ + (c' - c) \, u' \, .$$

Функция $u - u'$ удовлетворяет краевому условию

$$A(u - u') = \varphi - \varphi' + (a' - a) \frac{\partial u'}{\partial l} + (b' - b) \, u'$$

и начальному условию $u - u' = \psi - \psi'$. Если справедливо соотношение (25) и если δ является настолько малым, что $\underline{c}' - \delta > 0$, $d' - \delta > 0$, то согласно теореме 9

$$|u' - u| \leqq \frac{\delta + C\delta}{\underline{c}} + \delta + \frac{\delta + C\delta}{d} \left[K_1 + \frac{K_2}{\underline{c}} R \right] \leqq \\ \leqq \frac{\delta + C\delta}{\underline{c}' - \delta} + \delta + \frac{\delta + C\delta}{d' - \delta} \left[K_1 + \frac{K_2}{\underline{c}' - \delta} (R' + \delta) \right] .$$

Но из этого неравенства легко вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hopf E.*: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen. Sitz. Preus. Akad. Wissenschaft. *19* (1927), 147—153.

[2] *Picone M.*: Sul problema della propagazione del calore. Math. Annalen *101* (1929), 701—712.

[3] *Nirenberg L.*: A Strong Maximum Principle for Parabolic Equations. Comm. on Pure and Appl. Math. *6* (1953), 167—177.

[4] *Hopf E.*: A Remark on linear elliptic differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. *3* (1952), 791—793.

[5] *Олейник О. А.*: О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Мат. сборник *30 (72)* (1952), 695—712.

[6] *C. Miranda*: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[7] *Krzyzanski M* : Rownania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Warszawa 1957.

[8] *Adler Gy., Freud G.*: A hövezetés differenciálegyenletének maximum elvéröl I, MTA Matem. kutató intézetének közleményei *1* (1956), 157—165.

[9] *Adler Gy.*: A hövezetés differenciálegyenletének maximum-elveröl II, MTA Matem. kutató intézetének közleményei *1* (1956), 429—435.
[10] *Freud G.*: A hövezetés differenciálegyenletének maximum-elvéröl III, MTA Matem. kutató intézetének közleményei *1* (1956), 437—445.
[11] *Adler Gy.*: Recherches sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur. Revue de mathématiques pures et appliquées *1* (1956), 195—201.
[12] *Hadamard J.*: Leçons sur la propagation des ondes. Paris 1903.
[13] *Петровский И. Г.*: Лекции по теории обыкновенных дифф. уравнений. Москва 1949.

Zusammenfassung

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN VON RANDWERTAUFGABEN EINER PARABOLISCHEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

(Eingelangt am 2. April 1958)

In dieser Arbeit ist die Eindeutigkeit der dritten Randwertaufgabe für eine parabolische Differentialgleichung bewiesen und die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Koeffizienten der Differentialgleichung und von den Rand- und Anfangsbedingungen untersucht.

Das grundlegende Lemma von § 2 sichert die Gültigkeit der Ungleichung (4) für die Funktion u, falls:

a) die Funktion u der Gleichung (3) genügt, b) $f(x, t) \leqq 0$, c) $P \to P_1$ auf einem Strahl, der einen spitzen Winkel mit der Normale bildet, d) $u(P) \geqq \geqq u(P_1)$, $u(P_1) < 0$, e) die Grenze genügend glatt ist und die tangentiele Hyperebene in P_1 nicht senkrecht zur t Achse (zum Unterraum $t_1 \dots t_m$) steht.

Dieses Lemma hat zur Folge, dass die Lösung der Gleichung (11) weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum im Randpunkte P_0 erreichen kann, falls $\frac{\partial u(P_0)}{\partial n}$ gilt. Dies ist eine Verallgemeinerung der Resultate von G. ADLER und G. FREUD [8]—[11].

Die Sätze 4, 6—9 sichern die Eindeutigkeit der Lösung, welche die Anfangsbedingung (14) und Randbedingung (13) erfüllt, ausserdem auch die stetige Abhängigkeit von den Koeffizienten der Gleichung und von den Koeffizienten a, b in der Bedingung (13) und von den Rand- und Anfangsbedingungen. Der Wortlaut der Sätze ist analog dem Wortlaut der Sätze für den elliptischen Fall, der von O. A. OLEJNÍK untersucht wurde.

Der Satz 5 beschäftigt sich mit der Eindeutigkeit der dritten Randwertaufgabe für eine nichtlineare Gleichung.