Czechoslovak Mathematical Journal

E. D. Solomencev

О граничных значениях субгармонических функций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 520–536

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100327`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ, Москва

(Поступило в редакцию 17/II 1958 г.)

В настоящей статье изучается проблема существования граничных значений субгармонических функций класса A, определенных в произвольных областях евклидова пространства E^n ($n \geqq 2$) с достаточно гладкой границей.

1. Говорят, что субгармоническая в единичном круге функция $u(z)$, $z = re^{i\varphi}$, принадлежит классу A, если выполняется условие

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = A(u) < \infty\,. \tag{1}$$

Й. Э. Литтльвуд [7] показал, что функции этого класса имеют почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения. В 1934 г. И. И. Привалов опубликовал работу [1], в которой содержалось доказательство существования граничных значений по всем некасательным путям у функций класса A почти всюду на единичной окружности. Как указывается в работе [8], в 1942 г. Тамаркин обнаружил ошибку в доказательстве Привалова, а в 1943 г. Зигмунд построил соответствующий контрпример. Другие контрпримеры построены в работе Э. Б. Толстеда [8][1]); позднее Толстед указал достаточное условие существования граничных значений по всем некасательным путям [9].

Класс A в произвольной области евклидова пространства E^n ($n \geqq 2$) можно определить, например, как класс субгармонических функций $u(P)$, таких, что $u^+(P)$ имеет гармоническую мажоранту во всей рассматриваемой области. В настоящей заметке мы рассматриваем функции класса A в произвольной конечной области пространства E^n ($n \geqq 2$), гомеоморфной шару; при этом, однако, предполагается, что граница области достаточно гладкая. Используя метод, намеченный в работе И. И. Привалова и П. И. Кузнецова [2], мы показываем (§ 2), что субгармонические

[1]) Заметим, что второй пример из работы [8] (стр. 646) нуждается в исправлении, так как построенная там супергармоническая функция $w_2(P)$ (формула (4.7)) на самом деле не является супергармонической в точках окружностей C_{n_i}.

функции класса A имеют почти всюду граничные значения по нормалям. В § 3 даны достаточные условия существования граничных значений по всем некасательным путям в случае областей произвольного вида. Этим условиям удовлетворяют, в частности, субгармонические функции типа логарифма произведения Бляшке, у которых точки сосредоточения массы составляют счетное множество и приближаются к границе области „достаточно быстро". В § 1 доказываются необходимые в дальнейшем вспомогательные предложения, касающиеся функции Грина и гармонических функций класса A.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. И. Маркушевичу за внимание, проявленное к этой работе, и за бенные замечания, сделанные при ее обсуждении.

I. Вспомогательные предложения

2. В случае плоскости всегда будем предполагать, что граница Γ рассматриваемой конечной односвязной области D имеет непрерывно вращающуюся касательную и что угол касательной с осью абсцисс удовлетворяет условию

$$|\Theta(s_2) - \Theta(s_1)| \leqq b|s_2 - s_1|^{\beta}, \tag{2}$$

где s — длина дуги границы, $b > 0$ и $\beta > 0$. В случае $n \geqq 3$ будем предполагать, что рассматриваемая конечная гомеоморфная шару область D пространства E^n ограничена поверхностью Ляпунова Γ, причем каждой точки Γ можно коснуться как изнутри, так и извне D сферой фиксированного радиуса $\lambda > 0$.

Пусть P, Q — произвольные точки области D, достаточно близкие к границе Γ. Тогда основания нормалей P_1, Q_1, опущенных соответственно из P, Q, определяются однозначно. Расстояния точек P, Q до границы Γ будем всегда обозначать $s = \mathrm{d}(P;\ \Gamma)$ и $\sigma = \mathrm{d}(Q;\ \Gamma)$. Если Q_0 — некоторая фиксированная точка Γ, то расстояния точек P_1, Q_1 до точки Q_0 будем обозначать через $t = \overline{Q_0P_1}$ и $\tau = \overline{Q_0Q_1}$. Обозначим еще при достаточно малых $\sigma_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ через $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ область, состоящую из точек $P \in D$ и определяемую неравенствами $0 < s < \sigma_0$, $0 < t < \varepsilon$.

3. Начнем с установления в случае любого $n \geqq 2$ оценки функции Грина.

Лемма 1. *При $n = 2$ для функции Грина $g(P, Q)$ области D, граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, в достаточно малой подобласти $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ имеет место неравенство*

$$g(P, Q) \leqq \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{Bs\sigma}{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}\right), \tag{3}$$

где B — постоянная, зависящая только от области D.

Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на круг $|w| < 1$, $f(O) = O'$, $O \in D$. В силу условия (2) производная $f'(z)$ удовлетворяет неравенству (см., например, [3], стр. 468)

$$0 < m \leqq |f'(z)| \leqq M , \tag{4}$$

где m и M — постоянные, зависящие только от D и от выбора точки O, переходящей в начало O'. Пусть P', Q' — образы точек P, Q при отображении $w = f(z)$, и положим $s' = 1 - \overline{O'P'}$, $\sigma' = 1 - \overline{O'Q'}$. Выражая функцию Грина $g(P, Q)$ области D через координаты точек P' и Q' и производя элементарные оценки, получаем

$$g(P, Q) = \ln\left(\frac{\overline{O'P'} \,.\, \overline{OP'^*}}{\overline{P'Q'}}\right) \leqq \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4s'\sigma'}{\overline{P'Q'^2}}\right),$$

где P'^* — образ точки P' при инверсии относительно окружности $|w| = 1$. Далее,

$$\overline{PQ} = \left|\int_{P'}^{Q'} \varphi'(w)\,\mathrm{d}w\right| \leqq \frac{1}{m}\overline{P'Q'} ,$$

где $\varphi(w) = z$ — преобразование, обратное $w = f(z)$. Аналогично $s' \leqq M$ь и $\sigma' \leqq M\sigma$. Отсюда получаем

$$g(P, Q) \leqq \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4M^2 s\sigma}{m^2\overline{PQ}^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{Bs\sigma}{\overline{PQ}^2}\right), \tag{5}$$

где B — постоянная, зависящая только от D и от выбора точки O. Пусть Q_0 — фиксированная точка Γ. Очевидно, отношение $\dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}}$, где $P \in \Omega_{\varepsilon\sigma_0}$, $Q \in \Omega_{\varepsilon\sigma_0}$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\sigma_0 > 0$ будет ограничено сверху и снизу двумя положительными числами. Заметив это, из неравенства (5) непосредственно получаем неравенство (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При $n \geqq 3$ для функции Грина $g(P, Q)$ области D, граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, в достаточно малой подобласти $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ и в предположении, что s или σ, скажем s, меньше $\overline{PQ}/8$, имеет место неравенство*[2])

$$g(P, Q) \leqq \frac{Bs\sigma}{[(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2]^{n/2}} , \tag{6}$$

где B — постоянная, зависящая только от области D.

[2]) Оценка такого типа при $n = 3$ ранее была получена иным методом М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [4].

Пусть хотя бы одна из точек $P_0 \in D$, $Q_0 \in D$, скажем P_0, настолько близка к границе Γ, что $s = \mathrm{d}(P_0; \Gamma) < \overline{P_0Q_0}/8$, и пусть $\overline{P_0Q_0}/8 < \lambda$. Обозначим через P_1 ближайшую к P_0 точку Γ, и пусть Γ_1 — сфера радиуса $\overline{P_0Q_0}/8$, проходящая через P_1 и не заключающая внутри себя точек D; центр сферы Γ_1 обозначим через P_2, а ограничиваемый ею шар через D_1. Построим еще шар D_2 с центром P_2 и радиусом $\overline{P_0Q_0}/4$, концентричный D_1; границу шара D_2 обозначим через Γ_2. Очевидно, точка P_0 лежит внутри шара D_2 на продолжении радиуса P_2P_1 шара D_1, являющегося нормалью к Γ в точке P_1. Функция Грина $g(P, Q_0)$ области D с полюсом в точке Q_0 гармонична в области $(D_2 \setminus \bar{D}_1) \cap D$ и обращается в нуль на части границы $\Gamma \cap D_2$; максимум $g(P, Q_0)$ на части границы $\Gamma_2 \cap D$ обозначим через M. Построим функцию $H(P)$, гармоническую в кольце $D_2 \setminus \bar{D}_1$, равную M на сфере Γ_2 и 0 на сфере Γ_1. Ясно, что $g(P_0, Q_0) \leqq H(P_0)$. Выписав $H(P_0)$ в явном виде, получим

$$g(P_0, Q_0) \leqq H(P_0) = M \left\{ \frac{1}{[\overline{P_0Q_0}/8]^{n-2}} - \frac{1}{[\overline{P_0Q_0}/8 + s]^{n-2}} \right\} :$$

$$: \left\{ \frac{1}{[\overline{P_0Q_0}/8]^{n-2}} - \frac{1}{[\overline{P_0Q_0}/4]^{n-2}} \right\} \leqq \frac{2^{n+1} M s}{\overline{P_0Q_0}} .$$

Отметим теперь на границе Γ точку Q_1, для которой $\sigma = \mathrm{d}(Q_0; \Gamma) = \overline{Q_0Q_1}$. Построим сферу Γ_3 радиуса λ, проходящую через Q_1 и не заключающую внутри себя точек D; пусть Q_2 — центр этой сферы. Область, содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную сферой Γ_3, обозначим через D_3. Функция Грина $G(P, Q_0)$ области D_3 с полюсом Q_0 мажорирует функцию Грина $g(P, Q_0)$ области D с полюсом в той же точке Q_0. Отсюда

$$g(P, Q_0) \leqq G(P, Q_0) = \frac{1}{\overline{PQ_0}^{n-2}} - \left(\frac{\lambda}{\overline{Q_2Q_0} \cdot \overline{PQ_0^*}} \right)^{n-2},$$

где Q_0^* — образ точки Q_0 при инверсии относительно сферы Γ. Принимая во внимание, что $\overline{Q_2Q_0} = \lambda + \sigma$ и

$$\overline{PQ_0^*} \leqq \overline{PQ_0} + \overline{Q_0Q_0^*} = \overline{PQ_0} + \frac{\sigma(2\lambda + \sigma)}{\lambda + \sigma},$$

получаем

$$g(P, Q_0) \leqq \frac{1}{\overline{PQ}_0^{n-2}} - \left(\frac{\lambda}{\overline{PQ_0}(\lambda + \sigma) + \sigma(2\lambda + \sigma)} \right)^{n-2} < \frac{B_1 \sigma}{\overline{PQ}_0^{n-1}} ,$$

где B_1 — постоянная. Все точки части границы $\Gamma_2 \cap D$ области $(D_2 \setminus \bar{D}_1) \cap D$ отстоят от точки Q_0 на расстояние, не меньшее, чем $\overline{P_0Q_0}/2$, а, значит, $M \leqq B_1 2^{n-1} \sigma / \overline{P_0Q}_0^{n-1}$. Сопоставляя наши оценки, получаем (индекс 0 отбрасываем)

$$g(P, Q) \leqq \frac{2^{2n} B_1 s \sigma}{\overline{PQ}^n} = \frac{B s \sigma}{\overline{PQ}^n} . \tag{7}$$

Как и в плоском случае, для точек P, Q, принадлежащих достаточно малой области $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$, можно написать

$$g(P, Q) \leqq \frac{Bs\sigma}{[(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2]^{\frac{n}{2}}}, \tag{8}$$

что совпадает с (6). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При $n \geqq 3$ для нормальной производной функции Грина $g(P, Q)$ области D, граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, в достаточно малой подобласти $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ имеет место неравенство*

$$\frac{\partial g}{\partial n_Q} \leqq \frac{Bs}{[s^2 + (t-\tau)^2]^{n/2}}, \quad Q \in \Gamma, \tag{9}$$

где B — постоянная, зависящая только от области D.

Лемма 3 непосредственно следует из леммы 2.

4. Лемма 4. *Функция $h(P)$, гармоническая в области D пространства E^n ($n \geqq 2$), граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, и представимая при помощи формулы Грина-Стильтьеса:*

$$h(P) = \frac{1}{\omega_n} \int_\Gamma \frac{\partial g(P, Q)}{\partial n_Q} \mathrm{d}\nu(e),$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в E^n, $\partial g/\partial n$ — нормальная производная функции Грина, а $\nu(e)$ — аддитивная, непрерывная снизу функция открытого множества $e \subset \Gamma$, имеет конечные граничные значения по всем некасательным путям почти всюду на Γ. Эти граничные значения суммируемы на Γ.

Подобное предложение для случая круга хорошо известно, и общий случай при $n = 2$ сводится к случаю круга при помощи конформного отображения. Ограничимся доказательством для случая $n = 3$, так как при $n > 3$ оно полностью аналогично.

Достаточно рассмотреть случай неотрицательной, неубывающей функции $\nu(e)$, так как в общем случае функция множества представима в виде разности такого рода функций. Пусть $Q_0 \in \Gamma$, и пусть ω_τ означает часть (сегмент) поверхности Γ, состоящую из точек Γ, удаленных от Q_0 не более чем на τ. Из теории функций множеств известно, что предел

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\nu(\omega_\tau)}{\operatorname{mes} \omega_\tau} = f(Q_0)$$

существует почти всюду на Γ и что функция $f(Q_0)$ суммируема на поверхности Γ. Рассуждения, обычные в теории функций множеств (см., например, [2]), показывают, что функция $h(P)$ представима в виде

$$h(P) = h_1(P) + h_2(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\partial g(P, Q)}{\partial n_Q} \mathrm{d}\nu_1(e) + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\partial g(P, Q)}{\partial n_Q} \mathrm{d}\nu_2(e), \tag{10}$$

где $\nu_1(e) = \int\limits_e f(Q)\,\mathrm{d}\omega$, а $\nu_2(e)$ — неотрицательная, неубывающая, аддитивная функция множества e с производной, равной нулю почти всюду на Γ, т. е. почти всюду

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\nu_2(\omega_\tau)}{\operatorname{mes}\omega_\tau} = 0\,. \tag{11}$$

Полагая $\nu_2(\omega_\tau) = j(\tau)$ во всякой точке, где выполнено (11), будем иметь

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{j(\tau)}{\tau^2} = 0\,. \tag{12}$$

Представим теперь $h_2(P)$ в виде суммы двух интегралов:

$$h_2(P) = I_2' + I_2'' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_\varepsilon} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C\omega_\varepsilon}. \tag{13}$$

Пусть в точке Q_0 выполняются соотношения (11) и (12), и пусть точка P стремится к Q_0, оставаясь внутри конуса K с вершиной Q_0, имеющего нормаль в Q_0 своей осью симметрии, и с углом при вершине 2φ, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $1 < k' = \operatorname{tg}\varphi < \infty$. Тогда $t \leqq ks$ для любого $k > k'$, если $P \in K$ и P достаточно близка к Q_0. Ясно, что $\lim\limits_{s\to 0} I_2'' = 0$ при фиксированном ε, равномерно для всех точек P, стремящихся к Q_0 внутри K. Для интеграла I_2' имеем, согласно лемме 3,

$$I_2' < \frac{Bs}{4\pi}\int\limits_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}j(\tau)}{[s^2 + (t-\tau)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Bs}{4\pi}\left\{\int\limits_0^{t-0} + \int\limits_{t-0}^{\varepsilon}\right\}.$$

Существует положительная неубывающая функция $\eta(\tau)$, $\lim\limits_{\tau\to 0+}\eta(\tau) = 0$ такая, что $j(\tau) < \tau^2\eta(\tau)$ при $\tau < \varepsilon$. Пусть $t \leqq ks < \frac{\varepsilon}{4}$. Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{Bs}{4\pi}\int\limits_0^{t-0} \frac{\mathrm{d}j(\tau)}{[s^2 + (t-\tau)^2]^{\frac{3}{2}}} < \frac{Bk^2}{4\pi}\,\eta(\varepsilon) + \frac{3Bk^2s^3}{8\pi}\,\eta(\varepsilon)\int\limits_{s^2}^{s^2+t^2} \frac{\mathrm{d}z}{z^{\frac{5}{2}}} < \frac{Bk^2}{2\pi}\,\eta(\varepsilon)\,.$$

Второй интеграл оцениваем при помощи той же подстановки $z = s^2 + (\tau - t)^2$; следует также учесть неравенства $s \leqq \sqrt{z}$, $s^2 + (\varepsilon - t)^2 > \frac{\varepsilon^2}{2}$ и $\tau < (k+1)\sqrt{z}$. Получим

$$\frac{Bs}{4\pi}\int\limits_{t-0}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}j(\tau)}{[s^2 + (t-\tau)^2]^{\frac{3}{2}}} < \frac{2^{\frac{3}{2}}B}{4\pi}\,\eta(\varepsilon) + \frac{Bk^2}{4\pi}\,\eta(\varepsilon) +$$

$$+\frac{3Bs}{8\pi}\eta(\varepsilon)\int\limits_{s^2}^{s^2+(\varepsilon-t)^2}\frac{(k+1)^2\,\mathrm{d}z}{z^{\frac{3}{2}}}<\frac{B}{4\pi}\eta(\varepsilon)\,\{2^{\frac{3}{2}}+k^2+(k+1)^2\}\,.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2' = 0$ равномерно по s при $P \in K$.

При рассмотрении граничных значений функции $h_1(P)$ удобно ввести разность

$$h_1(P)-f(Q_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}[f(Q)-f(Q_0)]\frac{\partial g(P,Q)}{\partial n_Q}\,\mathrm{d}\omega$$

и неотрицательную, неубывающую функцию множества

$$\bar{\nu}_1(\omega_\tau)=\bar{j}(\tau)=\int\limits_{\omega_\tau}|f(Q)-f(Q_0)|\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Почти всюду на Γ (см. [5]) $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\bar{j}(\tau)}{\tau^2}=0$. Оценивая получающиеся здесь интегралы точно так же, как это было сделано выше при оценке интеграла I_2, закончим доказательство леммы 4.

II. Граничные значения по нормалям

5. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании у субгармонических функций класса A граничных значений по нормалям. Как известно (см., например, [2]), всякая субгармоническая в области D функция $u(P$ класса A представима в виде

$$u(P)=h(P)-\int\limits_{D}g(P,Q)\,\mathrm{d}\mu_Q(e)\,, \tag{14}$$

где $h(P)$ — наилучшая гармоническая мажоранта, $g(P,Q)$ — функция Грина области D и $\mu(e)$ — неотрицательная, неубывающая, непрерывная снизу аддитивная функция множества, соответствующая субгармонической функции $u(P)$ (распределение масс). Наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ в свою очередь характеризуется представимостью при помощи формулы Грина-Стильтьеса (см. [2]):

$$h(P)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial g(P,Q)}{\partial n_Q}\,\mathrm{d}\nu_Q(e)\,, \tag{15}$$

где $\nu(e)$ — неотрицательная, неубывающая, непрерывная снизу аддитивная функция множества $e\subset\Gamma$ и ω_n — площадь поверхности единичной сферы в E^n.

6. Займемся сначала потенциалом Грина-Стильтьеса.

Теорема 1. *Если потенциал Грина-Стильтьеса*

$$\omega(P) = \int\limits_D g(P, Q)\, d\mu(e)\ , \tag{16}$$

где $\mu(e)$ — неотрицательная, неубывающая, непрерывная снизу аддитивная функция множества $e \subset D$, построенный для области D пространства E^n $(n \geqq 2)$, граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, конечен в некоторой точке $P \in D$, то он имеет почти всюду на Γ равные нулю граничные значения по нормалям.

Эта теорема для случая $n = 3$ доказана в работе И. И. Привалова и П. И. Кузнецова [2]; для случая $n > 3$, поскольку в лемме 3 установлена нужная оценка функции Грина, доказательство протекает точно так же, как в работе [2]. Поэтому здесь мы ограничимся случаем $n = 2$, имеющим некоторые особенности.

Как известно [6], нормальная производная функции Грина на границе области рассматриваемого типа имеет положительный минимум, зависящий, разумеется, от выбора точки P. Следовательно, в достаточно узкой приграничной полосе $g(P, Q) > \sigma k(P)$, $k(P) > 0$. В силу этого неравенства из конечности интеграла (16) следует, что

$$\int\limits_{0<\sigma<\sigma_1} \sigma\, d\mu_Q < \infty\ . \tag{17}$$

Обозначив $\varepsilon(\sigma_0) = \int\limits_{0<\sigma<\sigma_0} \sigma\, d\mu$ для $\sigma_0 < \sigma_1$, получаем $\lim\limits_{\sigma\to 0} \varepsilon(\sigma_0) = 0$. Положив теперь $\eta(\sigma_0) = \sqrt{\varepsilon(\sigma_0)}$, покажем, что существуют множество $E = E(\sigma_0)$ и постоянная B_2, такие, что $\operatorname{mes} E \geqq \operatorname{mes} \Gamma - \eta(\sigma_0)$ и

$$\overline{\lim} \int\limits_{0<\sigma<\sigma_0} g(P, Q)\, d\mu < B_2 \eta(\sigma_0) \tag{18}$$

для всех точек множества E, причем P стремится к Q_0 по нормали (ср. [2]). Ясно, что неравенство (18) доказывает теорему, так как $\lim \int\limits_{\sigma \geqq \sigma_0} g\, d\mu = 0$ равномерно на Γ. Введем неотрицательную, неубывающую, непрерывную аддитивную снизу функцию множества $\Phi(e)$, $e \subset \Gamma$

$$\Phi(e) = \int \sigma\, d\mu\ , \tag{19}$$

где интегрирование производится по области, заполняемой отрезками нормалей длины σ_0, восставленных в точках множества e. Обозначим $\overline{\lim\limits_{\tau\to 0}} \dfrac{\Phi(\omega_\tau)}{\operatorname{mes} \omega_\tau} = \overline{\lim\limits_{\tau\to 0}} \dfrac{J(\tau)}{2\tau} = f(Q_0)$, и пусть $E = E(\sigma_0)$ — множество тех точек Γ, для которых $0 \leqq f(Q_0) \leqq \eta(\sigma_0)$. Тогда

$$\eta^2(\sigma_0) = \varepsilon(\sigma_0) = \Phi(\Gamma) \geqq \int\limits_\Gamma f(Q)\, ds \geqq \int\limits_{CE} f(Q)\, ds \geqq \eta(\sigma_0) \operatorname{mes} CE\ ,$$

и, значит, $\operatorname{mes} E \geqq \operatorname{mes} \Gamma - \eta(\sigma_0)$.

Пусть точка P стремится по нормали к точке $Q_0 \in E$. Представим интеграл $I = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon\sigma_0}} g \, \mathrm{d}\mu_0$ в виде суммы трех интегралов I_1, I_2, I_3, соответствующих областям интегрирования:

T_1: $0 < \sigma < \sigma_0$, $s \leqq \tau \leqq \varepsilon$;

T_2: $0 < \sigma < \sigma_0$, $\tau < s < \varepsilon$, $|\sigma - s| \geqq s/2$;

T_3: $0 < \sigma < \sigma_0$, $\tau < s < \varepsilon$, $|\sigma - s| < s/2$.

В силу леммы 1 имеем

$$g(P, Q) \leqq \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{Bs\sigma}{(s-\sigma)^2 + \tau^2}\right) \leqq \frac{Bs\sigma}{2[(s-\sigma)^2 + \tau^2]}.$$

Отсюда в областях T_1, T_2 получаем соответственно

$$g(P, Q) < \frac{Bs\sigma}{2\tau^2}, \quad g(P, Q) < \frac{2Bs\sigma}{s^2 + 4\tau^2}. \tag{20}$$

Следовательно,

$$I_1 < \frac{Bs}{2} \int\limits_{T_1} \frac{\sigma \, \mathrm{d}\mu}{\tau^2} \leqq \frac{Bs}{2} \int\limits_{s-0}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}J(\tau)}{\tau^2} < 8B\eta(\sigma_0),$$

$$I_2 < 2Bs \int\limits_{T_2} \frac{\sigma \, \mathrm{d}\mu}{s^2 + 4\tau^2} \leqq 2Bs \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}J(\tau)}{s^2 + 4\tau^2} < 8B\eta(\sigma_0).$$

В области T_3 имеем

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma}{s} < \frac{3}{2}, \quad \frac{Bs\sigma}{\tau^2} > \frac{B}{2},$$

$$g(P, Q) < \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{Bs\sigma}{\tau^2}\right) < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{B+2}{B} \frac{Bs\sigma}{\tau^2}\right) < \ln \left(\frac{B's}{\tau}\right). \tag{21}$$

$\left(\text{Здесь мы принимаем } B > 2 \text{ и } B' = \sqrt{\frac{3(B+2)}{2}}.\right)$ Таким образом,

$$I_3 < \int\limits_{T_3} \ln \left(\frac{B's}{\tau}\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{T_3} \ln \left(\frac{B's}{\tau}\right) \frac{\sigma \, \mathrm{d}\mu}{\sigma} <$$

$$< \frac{2}{3s} \int\limits_{0}^{s} \ln \left(\frac{B's}{\tau}\right) \mathrm{d}J(\tau) < \frac{8}{3} \eta(\sigma_0) [\ln B' + 1].$$

Сопоставляя полученные неравенства, видим, что $I \leqq B_2 \eta(\sigma_0)$. Так как $\lim\limits_{s \to 0} \int\limits_{C\Omega_{\varepsilon\sigma_0}} g \, \mathrm{d}\mu = 0$, где $C\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ — дополнение подобласти $\Omega_{\varepsilon\sigma_0}$ относительно области $0 < \sigma < \sigma_0$, то теорема 1 полностью доказана.

7. В силу представлений (14) и (15) из леммы 4 и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Субгармоническая функция $u(P)$, принадлежащая классу A в области D пространства E^n ($n \geqq 2$), граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, имеет почти всюду на Γ граничные значения по нормалям. Эти граничные значения суммируемы на Γ.*

III. Граничные значения по всем некасательным путям

8. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании у субгармонических функций класса A граничных значений по всем некасательным путям. Как было показано в работе [8], конечность потенциала Грина-Стильтьеса, характерная для функций класса A, недостаточна для того, чтобы обеспечить существование почти всюду на Γ граничных значений по всем некасательным путям, и необходимо, следовательно, наложить дополнительные ограничения на распределение масс внутри области D.

Теорема 3. *Пусть субгармоническая функция $u(P)$ принадлежит классу A в области D пространства E^n ($n \geqq 2$), граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям. Если, кроме того,*

1. *в случае $n \geqq 3$ при некотором α, $0 \leqq \alpha < 1$, выполняется условие*

$$\int\limits_{0<\sigma<\sigma_1} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}}\, \mathrm{d}\omega < \infty\,, \tag{22}$$

а в случае $n = 2$ выполняется условие

$$\int\limits_{0<\sigma<\sigma_1} \sigma\psi \ln^+(\sigma\psi)\, \mathrm{d}\omega\,, \tag{23}$$

где $\mathrm{d}\omega$ — элемент объема E^n и $\psi = \psi(Q)$ — производная функции множества $\mu(e)$, соответствующей $u(P)$,

2. *на границе Γ существует множество $\bar{E}$ полной меры, в каждой точке Q_0 которого при любом заданном угле φ, $0 < \varphi < \pi/2$, можно построить такой сколь угодно малый конус S (т. е. $0 < s < s_0$ в S, где s_0 — заданное малое число) с вершиной Q_0 и углом при вершине 2φ, имеющий нормаль в Q_0 осью вращения, что в нем функция множества $\mu(e)$, соответствующая функции $u(P)$ (распределение масс), будет абсолютно непрерывна,*

то $u(P)$ имеет почти всюду на Γ граничные значения по всем некасательным путям. Эти граничные значения суммируемы на Γ.

Прежде всего заметим, что в силу представления (14) и леммы 4 достаточно показать, что в условиях теоремы граничные значения потенциала Грина-Стильтьеса равны нулю почти всюду на Γ.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, построим функции множества $e \subset \Gamma$:

$$\Phi'(e) = \int (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} \, \mathrm{d}\omega \quad (n \geqq 3)\,, \tag{24}$$

$$\Phi'(e) = \int \sigma\psi \ln^{+}(\sigma\psi) \, \mathrm{d}\omega \quad (n = 2)\,, \tag{25}$$

где интегрирование производится по области, заполняемой отрезками нормалей длины σ_0, восставленных в точках множества e. Так как $x \leqq 1 + x^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}}$ и $x \leqq 1 + x \ln^{+} x$ при $x \geqq 0$, то ранее построенная функция множества $\Phi(e)$ (см. формулу (19)) и функция $\Phi'(e)$ мажорируются функцией $\tilde{\Phi}(e) = \Phi'(e) + \sigma_0 \operatorname{mes} e$. Для функции $\tilde{\Phi}(e)$ определяем, как и ранее, множество $\tilde{E} = \tilde{E}(\sigma_0)$, $\operatorname{mes} \tilde{E} \geqq \operatorname{mes} \Gamma - \eta(\sigma_0)$, в точках Q_0 которого

$$0 \leqq \overline{\lim_{\tau\to 0}} \frac{\tilde{\Phi}(\omega_\tau)}{\operatorname{mes} \omega_\tau} = f(Q_0) \leqq \eta(\sigma_0)\,,$$

где $\eta(\sigma_0) = \sqrt{\varepsilon(\sigma_0)}$, $\varepsilon(\sigma_0) = \int\limits_{0<\sigma<\sigma_0} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} \, \mathrm{d}\omega$ при $n \geqq 3$ и $\varepsilon(\sigma_0) = \int\limits_{0<\sigma<\sigma_0} \sigma\psi \ln^{+}(\sigma\psi) \, \mathrm{d}\omega$ при $n = 2$. Обозначив $\Phi'(\omega_\tau) = J'(\tau)$, $\Phi(\omega_\tau) = J(\tau)$, в точках множества $\tilde{E}$ получаем

$$\overline{\lim_{\tau\to 0}} \frac{J'(\tau)}{\tau^{n-1}} \leqq C\eta(\sigma_0)\,, \quad \overline{\lim_{\tau\to 0}} \frac{J(\tau)}{\tau^{n-1}} \leqq C\eta(\sigma_0), \tag{26}$$

где C — постоянная. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, видим, что достаточно было бы показать, что

$$\overline{\lim} \int\limits_{0<\sigma<\sigma_0} g(P, Q) \, \mathrm{d}\mu < B_3 \eta(\sigma_0) \tag{27}$$

для всех точек Q_0 множества $\tilde{E}$, причем точка P стремится к Q_0, оставаясь внутри конуса K с вершиной Q_0, имеющего нормаль в Q_0 своей осью симметрии и угол при вершине 2φ, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $1 < k' = \operatorname{tg} \varphi < \infty$. Тогда $t \leqq ks$, для любого $k > k'$, если $P \in K$ и P достаточно близка к Q_0. Представим интеграл $I = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon\sigma_0}} g \, \mathrm{d}\mu$ в виде суммы четырех интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, соответствующих областям интегрирования:

T_1: $0 < \sigma < \sigma_0\,, \quad \varepsilon \geqq \tau \geqq t + 8s\,;$

T_2: $0 < \sigma < \sigma_0\,, \quad 0 \leqq \tau \leqq t - 8s\,;$

T_3: $0 < \sigma < \sigma_0\,, \quad t - 8s < \tau < t + 8s\,, \quad \sigma \geqq 8s$ или $\sigma \leqq \frac{s}{8}\,;$

T_4: $0 < \sigma < \sigma_0\,, \quad t - 8s < \tau < t + 8s\,, \quad 8s > \sigma > \frac{s}{8}\,.$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для случая $n = 3$, указывая, если это будет необходимо, особенности других случаев. Можно предположить, что $t + 8s \leqq (k+8)\,s < \sigma_0 < \varepsilon$, $2k\sigma_0 < \varepsilon$. Согласно лемме 2 в областях T_1 и T_2 применима оценка (6) и, следовательно, в этих областях

$$g(P, Q) < \frac{Bs\sigma}{|\tau - t|^3}\,. \tag{28}$$

Используя (28) в интегралах I_1, I_2, интегрируя по частям и принимая во внимание (26), получаем

$$I_1 < Bs\int\limits_{T_1}\frac{\sigma \mathrm{d}\mu}{(\tau-t)^3} \leqq Bs\int\limits_{t+8s-0}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}J(\tau)}{(\tau-t)^3} = Bs\left[\frac{J(\tau)}{(\tau-t)^3}\right]_{t+8s}^{\varepsilon} + 3Bs\int\limits_{t+8s}^{\varepsilon}\frac{J(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(\tau-t)^4} <$$

$$< BC\eta(\sigma_0)\left\{16 + \frac{(k+8)^2}{256} + \frac{3}{4} + \frac{3k}{32} + \frac{k^2}{256}\right\},$$

$$I_2 < Bs\int\limits_{T_2}\frac{\sigma\,\mathrm{d}\mu}{(t-\tau)^3} \leqq Bs\int\limits_{0}^{t-8s}\frac{\mathrm{d}J(\tau)}{(t-\tau)^3} < Bs\int\limits_{0}^{ks}\frac{\mathrm{d}J(\tau)}{512s^3} < \frac{BCk^2}{256}\,\eta(\sigma_0)\,.$$

В области T_3 оценка (6) также применима и здесь $|s - \sigma| \geqq \frac{7s}{8}$, а значит,

$$g(P, Q) < \frac{512Bs\sigma}{[49s^2 + 64(t-\tau)^2]^{\frac{3}{2}}} < \frac{512B\sigma}{343s^2}\,.$$

Отсюда

$$I_3 < \frac{512B}{343s^2}\int\limits_{T_3}\sigma\,\mathrm{d}\mu \leqq \frac{512B}{343s^2}\int\limits_{t-8s-0}^{t+8s}\mathrm{d}J(\tau) < \frac{1024BC(k+8)^2}{343}\,\eta(\sigma_0)\,.$$

Обращаясь теперь к области T_4, замечаем, что здесь при $n \geqq 3$ применима только элементарная оценка

$$g(P, Q) < \frac{1}{\overline{PQ}^{n-2}} \tag{29}$$

(в случае $n = 2$ применима оценка (3)). Неотрицательная неубывающая, аддитивная функция множества $\mu(e)$, $e \subset D$, соответствующая субгармонической функции $u(P)$, почти всюду в области D (а, значит, и в T_4) имеет суммируемую производную

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\mu(\omega_\tau)}{\mathrm{mes}\,\omega_\tau} = \psi(Q)\,,$$

где ω_τ — шар с центром Q и радиусом τ. Интеграл I_4 представим в виде суммы двух интегралов

$$I_4 = \int\limits_{T_4} g\,\mathrm{d}\mu = I_4' + I_4'' = \int\limits_{T_4} g(P, Q)\,\psi(Q)\,\mathrm{d}\omega + \int\limits_{T_4} g(P, Q)\,\mathrm{d}\mu_2(e)\,, \tag{30}$$

где $\mathrm{d}\omega$ — элемент объема E^n и $\mu_2(e)$ — неотрицательная, неубывающая, аддитивная функция множества e с производной, равной нулю почти всюду на D.

Рассмотрим сначала интеграл I'_4, содержащий производную $\psi(Q)$ функции $\mu(e)$. Применяя неравенство Гёльдера и оценку (29), при $n \geqq 3$ получаем $\left(\text{так как } \sigma > \frac{s}{8}\right)$

$$I'_4 < \frac{8}{s} \int\limits_{T_4} \frac{\sigma\psi \, d\omega}{r^{n-2}} \leqq \frac{8}{s} \left[\int\limits_{T_4} \frac{d\omega}{r^{n-1+\alpha}} \right]^{\frac{n-2}{n-1+\alpha}} \left[\int\limits_{T_4} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} d\omega \right]^{\frac{1+\alpha}{n-1+\alpha}}, \tag{31}$$

где $r = \overline{PQ}$ и α — число ($0 \leqq \alpha < 1$) из условия 1 теоремы 3. Первый интеграл правой части (31) только увеличится, если мы заменим область интегрирования T_4 шаром с центром P и радиусом $2s + 16s + 2ks = 2(k + 9)s$. Принимая во внимание (26), получаем

$$\Big[\int\limits_{T_4} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} d\omega\Big]^{\frac{1+\alpha}{n-1+\alpha}} < \Big[\int\limits_0^{t+8s} dJ'(\tau)\Big]^{\frac{1+\alpha}{n-1+\alpha}} < \Big[C^{\frac{1}{n-1}}(k+8)\, s\eta^{\frac{1}{n-1}}(\sigma_0)\Big]^{\frac{(n-1)(1+\alpha)}{n-1+\alpha}}$$

и

$$I'_4 < \frac{8}{s} [2(k+9)s]^{\frac{(1-\alpha)(n-2)}{n-1+\alpha}} \omega_n \Big[C^{\frac{1}{n-1}} (k+8)\, s\eta^{\frac{1}{n-1}}(\sigma_0)\Big]^{\frac{(n-1)(1+\alpha)}{n-1+\alpha}}.$$

Так как $\dfrac{(1-\alpha)(n-2)}{n-1+\alpha} + \dfrac{(n-1)(1+\alpha)}{n-1+\alpha} > 1$ при $n \geqq 3$, то

$$I'_4 < 8[2(k+9)]^{\frac{(1-\alpha)(n-2)}{n-1+\alpha}} \Big[C^{\frac{1}{n-1}}(k+8)\, \eta^{\frac{1}{n-1}}(\sigma_0)\Big]^{\frac{(n-1)(1+\alpha)}{n-1+\alpha}}. \tag{32}$$

В случае $n = 2$, рассуждая так же, как при выводе оценки (21), находим, что в T_4

$$g(P, Q) < \ln \frac{B's}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}} = \ln \frac{B's}{r}. \tag{33}$$

Теперь применяем, вместо неравенства Гёльдера, неравенство Юнга (см. [10], стр. 137) $ab \leqq a\delta(a) + b\gamma(b)$, где $a = \ln\left(\frac{B's}{r}\right) \geqq 0$ (увеличиваем, если нужно, постоянную B'), $b = \sigma\psi \geqq 0$, $\delta(x) = e^x - 1$, $\gamma(x) = \ln(1 + x)$. Получаем

$$I'_4 < \frac{8}{s} \int\limits_{T_4} \ln\left(\frac{B's}{r}\right) \sigma\psi \, d\omega \leqq \frac{8}{s} \int\limits_{T_4} \frac{B's}{r} \ln\left(\frac{B's}{r}\right) d\omega + \frac{8}{s} \int\limits_{T_4} \sigma\psi \ln(1 + \sigma\psi)\, d\omega <$$

$$< 8B'2\pi \int\limits_0^{(k+8)s} \ln\left(\frac{B's}{r}\right) dr + \frac{8}{s} \int\limits_{t-8s}^{t+8s} \sigma\psi \ln^+(\sigma\psi)\, d\omega + \frac{8}{s} \int\limits_{t-8s}^{t+8s} \sigma\psi \, d\omega.$$

Здесь мы применили неравенство $\ln(1 + x) < 1 + \ln^+ x$. Принимая во внимание (26), находим

$$I'_4 < 16\pi B'(k+8)\, s \left[1 + \ln\left(\frac{B'}{k+8}\right)\right] + 16C(k+8)\, \eta(\sigma_0). \tag{34}$$

Рассмотрим теперь при $n \geqq 2$ интеграл I_4'', в котором интегрирование по области T_4 производится с сингулярной составляющей $\mu_2(e)$. Замечая, что $\frac{t+8s}{s/8} < 8(k+8)$, видим, что, какова бы ни была точка $P \in K$, область T_4 будет заключена в конусе с таким углом при вершине $2\varphi_1$, для которого $\operatorname{tg}\varphi_1 > 8(k+8)$ если толко точка $P \in K$ будет достаточно близка к Q_0. Рассмотрим пересечение $E_1 = \tilde{E} \cap \overline{E}$; для меры множества E_1 справедливо, очевидно, то же неравенство $\operatorname{mes} E_1 \geqq \operatorname{mes} \Gamma - \eta(\sigma_0)$, что и для меры множества $\tilde{E}$. В области T_4, построенной для точки $Q_0 \in E_1$, функция $\mu(e)$, согласно условию 2 теоремы 3, будет абсолютно непрерывна, если точка P достаточно близка к Q_0, а, значит, интеграл I_4'' будет равен нулю для таких точек P. Сопоставляя оценки для интегралов I_1, I_2, I_3, I_4', видим, что теорема 3 полностью доказана.

9. В том случае, когда точки сосредоточения массы составляют счетное множество, геометрическое условие 2 теоремы 3 можно заменить условием аналитическим.

Теорема 4. *Пусть субгармоническая функция $u(P)$ принадлежит классу A в области D пространства E^n $(n \geqq 2)$, граница Γ которой удовлетворяет высказанным в п. 2 условиям, и пусть функция множества $\mu(e)$, соответствующая функции $u(P)$, абсолютно непрерывна на открытом множестве $D - N$, получающемся при выбрасывании из области D не более чем счетного множества $N = \sum\limits_{\gamma=1}^{\infty} Q_\gamma$. Если, кроме того,*

1. *выполняется условие 1 теоремы 3 и*

2. *сходится ряд $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty} \sigma_\gamma^{n-1}$, где σ_γ — расстояние точки Q_γ до границы Γ,*

то функция $u(P)$ имеет почти всюду на Γ граничные значения по всем некасательным путям. Эти граничные значения суммируемы на Γ.

Достаточно убедиться, что если выполнено условие 2 теоремы 4, то функция множества $\mu(e)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 3.

Пусть L_ν — множество тех точек границы Γ, для которых существуют конусы S, содержащие точки Q_γ при $\gamma \geqq \nu$. Рассмотрим некоторую точку Q_γ, достаточно близкую к границе Γ. Пусть T_{Q_γ} — тот участок поверхности Γ, каждая точка которого является вершиной конуса с углом при вершине 2φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = k$, содержащего точку Q_γ внутри себя. Тогда из элементарных геометрических соображений легко видеть, что $\operatorname{mes} T_{Q_\gamma} \leqq \omega_n (2+k^2)^{n-1} \sigma_\gamma^{n-1}$. Значит, для достаточно больших ν

$$\operatorname{mes} L_\nu < \omega_n (2+k^2)^{n-1} \sum_{\gamma=\nu}^{\infty} \sigma_\gamma^{n-1}.$$

Пусть теперь $\bar{E}$ — множество всех точек $\bar{Q} \in \Gamma$, которые являются вершинами достаточно малых конусов, не содержащих точек Q_γ, с углом при вершине 2φ. Тогда конусы, вершинами которых являются точки дополнения $C\bar{E}$, должны содержать точки Q_γ со сколь угодно большими номерами γ. Таким образом, $\operatorname{mes} C\bar{E} < \operatorname{mes} L_\nu$, где $\nu \to \infty$, и, следовательно, $\operatorname{mes} C\bar{E} = 0$. Теорема 4 доказана.

10. Условия теоремы 4 выполнены, в частности, для потенциала Грина-Стильтьеса частного вида — логарифма модуля произведения Бляшке $u(z) = \ln |B(z)|$, свойства которого хорошо известны. Теорема 4 показывает, что обобщенные потенциалы Грина-Бляшке вида

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} g(P, Q_\gamma)\, \mu(Q_\gamma)\,,$$

где $\sum\limits_1^\infty \sigma_\gamma^{n-1} < \infty$, $\sum\limits_1^\infty \sigma_\gamma \mu(Q_\gamma) < \infty$, $n \geqq 2$, также имеют почти всюду на Γ равные нулю граничные значения по всем некасательным путям.

Заметим, наконец, что условие (23) уточняет для случая круга ($n = 2$) указанное Толстедом [9] достаточное условие существования граничных значений по всем некасательным путям, имеющее вид

$$\int\limits_{0<\sigma<\sigma_1} \sigma\psi \ln^+ (\psi)\, d\omega < \infty\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Привалов:* Об одной граничной задаче субгармонических функций, Матем. сборник, *41* (1934), 3—10.

[2] *И. И. Привалов* и *П. И. Кузнецов:* Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях, Матем. сборник, *6* (*48*), № 3 (1939), 345—376.

[3] *Г. М. Голузин:* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1952.

[4] *М. В. Келдыш* и *М. А. Лаврентьев:* Об одной оценке функции Грина, Доклады Акад. наук СССР, *24*, № 2 (1939), 102—103.

[5] *И. И. Привалов:* Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве, Матем. сборник, *3* (*45*), № 1 (1938).

[6] *О. А. Олейник:* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, Матем. сборник, *30* (*72*), № 3 (1952), 695—702.

[7] *J. E. Littlewood:* On functions subharmonic in a circle. II, Proc. London Math. Soc. (2), *28* (1928), 383—394.

[8] *E. B. Tolsted:* Limiting values of subharmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc., *1* (1950), 636—647.

[9] *E. B. Tolsted:* Non-tangential limits of subharmonic functions, Proc. London Math. Soc., *7* (1957), 321—333.

[10] *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд* и *Г. Полиа:* Неравенства, Издатинлит, Москва, 1948.

Résumé

SUR LES VALEURS LIMITES DES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES

E. D. SOLOMENTSEFF, Moscou

(Reçu le 17 février 1958)

Le but de cet article est de démontrer quelques théorèmes sur l'existence des valeurs limites des fonctions sousharmoniques de la classe A. Une fonction sousharmonique $u(P)$, définie dans un domaine arbitraire D de l'espace euclidien E^n $(n \geqq 2)$, appartient à la classe A, si la fonclion $u^+(P)$ admet une majorante harmonique dans D. L'histoire de cette question, quelque peu dramatique, a été racontée dans le travail de M. E. B. Tolsted [8] et dans le début de cet article.

Dans cet article j'utilise la méthode tracée dans le travail de I. I. Privaloff et P. I. Kouznetzoff [2]. J'étudie les valeurs limites des fonctions sousharmoniques de la classe A, définies dans un domaine fini D de l'espace E^n $(n \geqq 2)$ qui est homéomorphe à la boule de E^n et qui a une frontière Γ suffisamment lisse.

Au § 1 je trouve quelques estimations nécessaires de la fonction de Green. Je démontre aussi qu'une fonction harmonique de la classe A admet les valeurs limites par tous les chemins non-tangents à la frontière Γ, presque partout sur Γ.

Le théorème principal de § 2 dit:

Théorème 2. *Soit D un domaine de l'espace E^n $(n \geqq 2)$ satisfaisant aux conditions du no. 2; si une fonction sousharmonique $u(P)$ appartient à la classe A dans D, alors $u(P)$ admet les valeurs limites par normales, presque partout sur Γ. Ces valeurs limites sont sommables sur Γ.*

Au § 3 je donne les conditions suffisantes pour qu'une fonction de la classe A admette les valeurs limites par tous les chemins non-tangents, presque partout sur Γ. Pour des raisons de brévité, je me borne ici à énoncer le

Théorème 4. *Soit D un domaine de l'espace E^n $(n \geqq 2)$ satisfaisant aux conditions du no. 2 et soit $u(P)$ une fonction sousharmonique de la classe A dans D. Soit encore $\mu(e)$ la fonction d'ensemble, correspondante à $u(P)$, absolument continue sur l'ensemble $D - N$, où $N = \sum_{\gamma=1}^{\infty} Q_\gamma$ est un ensemble dénombrable. Si l'on a*

1. $$\int_{0<\sigma<\sigma_1} (\sigma\psi)^{\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha}} d\omega < \infty \quad \textit{pour } n \geqq 3,$$

$$\int_{0<\sigma<\sigma_1} \sigma\psi \ln^+ (\sigma\psi)\, d\omega < \infty \quad \textit{pour } n = 2$$

où α est un nombre tel que $0 \leqq \alpha < 1$, $d\omega$ *est l'élément de volume de* E^n *et* $\psi(P)$ *est la dérivée de la fonction* $\mu(e)$;

2. $\sum_{\gamma=1}^{\infty} \sigma_\gamma^{n-1} < \infty$, *où* σ_γ *est la distance* Q_γ *à* Γ,

alors $u(P)$ *admet les valeurs limites par tous les chemins non-tangents, presque partout sur* Γ. *Ces valeurs limites sont sommables sur* Γ.

(Le théorème 3 est applicable aux ensembles N des singularités qui peuvent être non-dénombrables.)

Ce théorème permet de construire les potentiels de Green analogues au logarithme du module du produit de Blaschke. Remarquons, enfin, que les théorèmes 3 et 4 de cet article généralisent et précisent les conditions suffisantes de M. E. B. Tolsted (voir [9]).