Czechoslovak Mathematical Journal

Vlastimil Pták

Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 487–495

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100322

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *8* (*83*) ПРАГА 15. XII. 1958 г., No 4

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРЕМЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ МАТРИЦАМ

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага

(Поступило в редакцию 22/II 1958 г.)

Доказывается простая комбинаторная теорема, лежащая в основе многих свойств неотрицательных матриц.

При исследовании некоторых проблем, находящихся в связи с неотрицательными матрицами, создается впечатление, что целый ряд свойств неотрицательных матриц носит чисто комбинаторный характер. Автор занимался этим вопросом и ему удалось найти простой комбинаторный принцип, лежащий в основе многих свойств неотрицательных матриц.

Эта комбинаторная теорема приводится в первом параграфе, во втором параграфе поясняется ее связь с теорией неотрицательных матриц.

Обозначения. Пусть n — данное натуральное число; через N обозначим множество всех натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Пусть F означает множество всех отображений φ, обладающих следующими двумя свойствами:

1° отображение φ ставит в соответствие каждому множеству $A \subset N$ опять некоторое множество $\varphi(A) \subset N$,

2° отображение φ аддитивно; имеет место равенство $\varphi(0) = 0$, и для любых двух $A_1 \subset N$, $A_2 \subset N$ — равенство

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)\,.$$

В том случае, когда отображение φ ставит в соответствие каждому множеству $A \subset N$ пустое множество, мы будем писать $\varphi = 0$.

Отображение $\varphi \in F$ назовем *разложимым*, если существует подмножество $P \subset N$, отличное от 0 и N, такое, что $\varphi(P) \subset P$. Отображение $\varphi \in F$ мы назовем *неразложимым*, если φ не является разложимым. Если $n = 1$, то каждое $\varphi \in F$ неразложимо, в частности, неразложимо отображение $\varphi = 0$. Для $n > 1$ отображение $\varphi = 0$ будет, очевидно, разложимо. В дальнейшем мы всюду предполагаем, что $n > 1$, так что для любого неразложимого φ имеет место $\varphi \neq 0$.

(1,1) *Пусть* $\varphi \in F$ *неразложимо; тогда* $\varphi(N) = N$ *и* $\varphi(A) \neq 0$, *если только* $A \neq 0$.

Доказательство. Обозначим $B = \varphi(N)$. Тогда имеем $\varphi(B) \subset \varphi(N) \subset B$, так что должно быть или $B = 0$ или $B = N$. Если бы $B = 0$, было бы, очевидно, $\varphi = 0$. Пусть $A \neq 0$. Если бы $\varphi(A) = 0$, было бы $\varphi(A) \subset A$. Так как $A \neq 0$, было бы $A = N$, значит, было бы и $\varphi(N) = 0$, так что $\varphi = 0$.

(1,2) *Пусть* $\varphi \in F$ *неразложимо,* $A \neq 0$. *Тогда будет*

$$A \cup \varphi(A) \cup \ldots \cup \varphi^{n-1}(A) = N .$$

Если v — *произвольное натуральное число, то*

$$\varphi^{v}(A) \cup \varphi^{v+1}(A) \cup \ldots \cup \varphi^{v+n-1}(A) = N .$$

Доказательство. Множества $F_0 = A$, $F_1 = A \cup \varphi(A)$, $F_2 = A \cup \cup \varphi(A) \cup \varphi^2(A), \ldots$ упорядочены посредством включения. Должно существовать натуральное число $k \leqq n$ такое, что $\varphi^k(A) \subset F_{k-1}$, ибо в противном случае F_1 содержало бы по крайней мере два элемента, F_2 — хотя бы три элемента и т. д., что невозможно. Тогда будет $k - 1 \leqq n - 1$, и мы получим

$$\varphi(F_{k-1}) = [\varphi(A) \cup \ldots \cup \varphi^{k-1}(A)] \cup \varphi^k(A) \subset F_{k-1} .$$

Так как $0 \neq A \subset F_{k-1}$, будет $F_{k-1} = N$, а тем более $F_{n-1} = N$. Вторая часть нашего утверждения легко вытекает из первой по методу полной индукции, если использовать равенство $\varphi(N) = N$.

1. Перейдем теперь к главной теореме. Если $\varphi \in F$ и p — некоторое натуральное число, то повторное отображение φ^p, очевидно, также входит в F. Следующая теорема показывает, что все неразложимые отображения $\varphi \in F$ можно подразделить на два класса в зависимости от поведения их степеней.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in F$ *неразложимо. Тогда могут наступить два следующих случая:*

1° *все отображения* $\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ *неразложимы; тогда* φ^v *неразложимо для всех* v *и* $\varphi^p(A) = N$ *для любого непустого* A, *если только* $p \geqq (n-1)^2 + 1$,

2° *существует* $k \leqq n$ *так, что* φ^k *разложимо; тогда существует бесконечное количество* v *таких, что* φ^v *разложимо; если же* φ^v *разложимо, то существует число* $d > 1$, *являющееся делителем* v, *и непустое множество* P *такое, что множества* $P_j = \varphi^j(P)$ *для* $j = 0, 1, \ldots, d-1$ *по-парно не пересекаются у обладают следующими свойствами;*

(1) $P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{d-1} = N$,

(2) $\varphi^d(P_i) = P_i$ *для* $i = 0, 1, \ldots, d-1$, *так что тем более* $\varphi^v(P_i) = P_i$,

(3) *если* $Q \subset N$ *и* $\varphi^v(Q) \subset Q$, *то* Q *является соединением некоторых* P_i *и, следовательно, имеет место даже соотношение* $\varphi^d(Q) = Q$.

Доказательство. Предположим прежде всего, что все отображения $\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ неразложимы. Если w — натуральное число, то через $Q(w)$ обозначим множество всех $x \in N$ таких, что $x \in \varphi^w(x)$. Через v обозначим наименьшее натуральное число, для которого $Q(v) \neq 0$. Очевидно, будет $v \leqq n$. Пусть $x \in Q(v)$; обозначим через X_0 множество, состоящее из единственного элемента x. Обозначим $X_j = \varphi^{jv}(X_0)$, так что $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \ldots$ Так как $X_i \subset \varphi^v(X_i)$, то здесь не может иметь места равенство за исключением случая $X_i = N$. Отсюда следует, что $\varphi^{(n-1)v}(X_0) = N$. Пусть, далее, дано непустое множество $A \subset N$. Обозначим через s наименьшее целое неотрицательное число, для которого $\varphi^s(A) \cap Q(v) \neq 0$. Возьмем $p \in \varphi^s(A) \cap \cap Q(v)$ и обозначим через P_0 множество, состоящее из единственного элемента p. Согласно предыдущему имеем

$$\varphi^{s+(n-1)v}(A) \supset \varphi^{(n-1)v}(P_0) = N .$$

Мы будем различать два случая:

(1) $v \leqq n - 2$. Так как $s \leqq n$, то будет $s + (n - 1)\, v \leqq n + (n - 1)\,.\,(n - 2) = 1 + (n - 1)^2$.

(2) $v \geqq n - 1$. Возьмем $p_0 \in Q(v)$ и обозначим $P_1 = \varphi(p_0)$, $P_2 = \varphi^2(p_0), \ldots$ Возьмем точку $p_{v-1} \in P_{v-1}$ так, чтобы $p_0 \in \varphi(p_{v-1})$, далее точку $p_{v-2} \in P_{v-2}$ так, чтобы $p_{v-1} \in \varphi(p_{v-2})$, и т. д.

Докажем прежде всего, что все точки $p_0, p_1, \ldots, p_{v-1}$ отличны друг от друга. Пусть, наоборот, существуют числа $0 \leqq i < j < v$, так, что $p_i = p_j$. Тогда будет $p_0 \in \varphi^{v-j}(p_j) = \varphi^{v-j}(p_i)$, откуда $p_i \in \varphi^{i+v-j}(p_i)$. Однако $i + v - j < v$, что противоречит выше сказанному. Для любого p_i $(0 \leqq i \leqq v - 1)$ имеет место $p_i \in \varphi^i(p_0)$, $p_0 \in \varphi^{v-i}(p_i)$, следовательно, $p_i \in Q(v)$. Пусть теперь $v = n - 1$, и пусть дано непустое множество A. Так как в $Q(v)$ содержится по меньшей мере $n - 1$ элементов, будет $(A \cup \varphi(A)) \cap Q(v) \neq 0$. Итак, $s \leqq 1$, так что опять $s + (n - 1)\, v \leqq 1 + (n - 1)^2$.

Доказательство будет завершено, если мы покажем, что случай $v = n$ невозможен. В этом случае $Q(v) = N$. Введем еще обозначение $p_n = p_0$ и докажем, что для любого i $(0 \leqq i \leqq n - 1)$ имеет место равенство $\varphi(p_i) = p_{i+1}$. Предположим, наоборот, что существует i $(0 \leqq i \leqq n - 1)$ так, что множество $\varphi(p_i)$ содержит кроме элемента p_{i+1} еще какой-либо другой элемент p_j. Если $j > i + 1$, то имеем

$$p_0 \in \varphi^{n-j}(p_j) \subset \varphi^{n-j+1}(p_i) \subset \varphi^{n-j+1+i}(p_0) .$$

Однако $n - j + 1 + i < n$, что является противоречием. Если $j \leqq i$, то $p_j \in \varphi(p_i)$, $p_i \in \varphi^{i-j}(p_j)$ следовательно, $p_j \in \varphi^{i-j+1}(p_j)$; однако $i - j + 1 < n$ за исключением случая $i = n - 1$, $j = 0$. Но тогда $p_j = p_n$. Отсюда следует, что $\varphi^n(x) = x$ для любого $x \in N$, так что φ^n разложимо, что противоречит предположению.

Предположим, во-вторых, что существует натуральное число v и непустое собственное подмножество $P \subset N$ так, что $\varphi^v(P) \subset P$. Возьмем P настолько малым, что ни для какой непустой собственной части P' множества P не имеет места соотношение $\varphi^v(P') \subset P'$.

Обозначим $V = \varphi^v(P)$, так что $V \subset P$. Согласно (1,1) будет $V \neq 0$. Имеем $\varphi^v(V) \subset \varphi^v(P) = V$ и, следовательно, должно быть $V = P$. Итак, $\varphi^v(P) = P$.

Обозначим $P_0 = P$, $P_1 = \varphi(P)$, $P_2 = \varphi^2(P), \ldots$ Для множества $B = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{v-1}$ имеет, очевидно, место $\varphi(B) \subset B$, так что должно быть $B = N$. Далее, $\varphi^v(P_i) = \varphi^v(\varphi^i(P)) = \varphi^i(\varphi^v(P)) = \varphi^i(P) = P_i$. Покажем теперь, что любое P_i имеет следующее свойство: Если $Q \subset P_i$ непусто и $\varphi^v(Q) \subset Q$, то $Q = P_i$. Действительно, $\varphi^{v-i}(Q) \subset \varphi^{v-i}(P_i) = P$. Далее, $\varphi^v(\varphi^{v-i}(Q)) = \varphi^{v-i}(\varphi^v(Q)) \subset \varphi^{v-i}(Q)$. Следовательно, должно быть $\varphi^{v-i}(Q) = P$, откуда $P_i = \varphi^i(P) = \varphi^i(\varphi^{v-i}(Q)) = \varphi^v(Q) \subset Q$, так что $P_i = Q$.

Из только что доказанного свойства непосредственно следует, что два любых множества P_i и P_j или дизъюнктны или тождественны. Действительно, если $P_i \cap P_j \neq 0$, то $\varphi^v(P_i \cap P_j) \subset P_i \cap P_j$ и, следовательно, это пересечение должно быть тождественно с P_i и с P_j.

Пусть теперь d — наименьшее натуральное число, для которого $P_d = P_0$. Докажем, что d является делителем v. Действительно, пусть h — наибольший общий делитель чисел d и v; пусть, далее, $h > 0$. Тогда существуют натуральные числа p, q такие, что $pd - qv = h$. Теперь $P_0 = P_d = P_{2d} = P_{3d} = \ldots$, откуда $P_0 = P_{pd} = P_{qv+h} = P_h$. Так как $0 < h \leqq d$, должно быть $d = h$. Если $H = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{d-1}$, то $\varphi(H) = H$, так что $H = N$. Покажем еще, что множества $P_0, P_1, \ldots, P_{d-1}$ по-парно не пересекаются. Если бы, наоборот, существовали числа $0 \leqq r < s < d$ так, что $P_r = P_s$, было бы $P_{r+d-s} = P_0$, однако $r + d - s = d - (s - r) < d$. Если Q — непустое множество, для которого $\varphi^v(Q) \subset Q$, то возьмем произвольное P_i. Имеем $\varphi^v(P_i \cap Q) \subset P_i \cap Q$, и поэтому или $P_i \cap Q = 0$ или $P_i \subset Q$. Множество Q является, следовательно, соединением некоторых P_i, откуда $\varphi^d(Q) = Q$.

2. Перейдем теперь к значению предыдущей теоремы в теории неотрицательных матриц. Если A — данная неотрицательная матрица порядка n, то поставим ей в соответствие отображение $\varphi \in F$ следующим образом. Пусть $\varphi(0) = 0$. Если $P \subset N$ непусто, то обозначим через $\varphi(P)$ множество всех тех $j \in N$, для которых существует $i \in P$ так, что $a_{ij} \neq 0$. Нетрудно видеть, что $\varphi \in F$. Ясно, что матрица A неразложима тогда и только тогда, если отображение φ неразложимо. По методу полной индукции нетрудно доказать, что степени A^v соответствует отображение φ^v.

Главная теорема тогда допускает следующую интерпретацию:

(2,1) *Пусть A — неотрицательная неразложимая матрица. Если все матрицы $A^2, A^3, \ldots, A^n$ неразложимы, то A^v неразложима для любого v, а для $v \geqq 1 + (n - 1)^2$ матрица A^v положительна.*

Если какая-либо степень A^v разложима, то существует делитель $d > 1$ числа v так, что степень A^d можно при помощи надлежащей перестановки строк и одновременно столбцов привести к виду

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & B_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots B_d \end{pmatrix}$$

с квадратными неразложимыми матрицами в главной диагонали. При том же разбиении на блоки матрицу A можно при помощи той же самой перестановки привести к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{d-1,d} \\ A_{d,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Эта теорема восходит к Фробениусу [1], однако Фробениус доказал в первой части теоремы несколько более слабое утверждение: Существует показатель v, для которого A^v положительна. Нижнюю границу для этого показателя приводит без доказательства Виландт [2]. Граница $1 + (n - 1)^2$ не допускает дальнейшего понижения, как показывает пример [2] матрицы, определенной равенствами

$$a_{12} = a_{23} = \dots = a_{n-1,n} = a_{n,1} = a_{n,2} = 1$$

и требованием, чтобы остальные элементы равнялись нулю.

Наметим теперь способ, как предыдущую теорему можно использовать в теории неотрицательных матриц. Мы будем пользоваться только следующим результатом:

Если A — неотрицательная неразложимая матрица, то существует число $\varrho > 0$, являющееся простым собственным значением матрицы A, причем $|\varrho'| \leqq \varrho$ для любого дальнейшего собственного значения ϱ' матрицы A. Если A положительна, то даже $|\varrho'| < \varrho$ для любого дальнейшего собственного значения ϱ' матрицы A.

Мы назовем неотрицательную неразложимую матрицу примитивной, если на окружности $|z| = \varrho$ не лежит ни одной точки ее спектра, кроме ϱ.

Нам понадобится еще следующая нетрудная лемма.

(2,2) *Пусть M — матрица циклического вида*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{h-1,h} \\ M_{h,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками вдоль главной диагонали. Пусть при том же разбиении на блоки единичная матрица E имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_h \end{pmatrix}$$

Пусть, далее, ε — произвольное число, для которого $\varepsilon^h = 1$. Обозначим

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 E_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon^h E_h \end{pmatrix}$$

Тогда $\varepsilon M = D^{-1}MD$, так что спектр матрицы M инвариантен относительно поворота комплексной плоскости на угол $\frac{2\pi}{h}$.

Доказательство непосредственно.

Из теоремы (2,1) и леммы (2,2) легко вытекают следующие результаты:

(2,3) *Пусть матрица A неотрицательна и неразложима. Тогда следующие высказывания эквивалентны друг другу:*

1° *матрица A примитивна,*

2° *все степени матрицы A неразложимы,*

3° *все матрицы A, A^2, ..., A^n неразложимы,*

4° *степень A^v положительна для $v \geqq 1 + (n-1)^2$,*

5° *существует число p такое, что A^p положительна.*

(2,4) *Пусть матрица A неотрицательна и неразложима. Если A примитивна, то A^v примитивна для любого v.*

(2,5) *Пусть матрица A неотрицательна и неразложима. Пусть A имеет в точности h собственных чисел, равных по абсолютной величине ϱ. Тогда весь спектр матрицы A перейдет в себя при повороте комплексной плоскости вокруг начала координат на угол $\frac{2\pi}{h}$. Все собственные значения, равные по абсолютной величине ϱ, являются простыми. Число h является наименьшим показателем, для которого A^h распадается в примитивные матрицы. Число неразложимых матриц, на которые распадается степень A^v, равно наибольшему общему делителю чисел v и h.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Frobenius*, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. *23* (1912), 456—477.

[2] *H. Wielandt*, Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zeitschrift *52* (1950), 664—248.

Summary

ON A COMBINATORIAL THEOREM AND ITS APPLICATION TO NONNEGATIVE MATRICES

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Received February 22, 1958)

In many investigations concerning nonnegative matrices the idea suggests itself that many of their properties are of a purely combinatorial character, in other words that they depend on the distribution of zeros and "nonzeros" in the matrix only regardless of the actual values of the positive entries. In the present paper we present a combinatorial theorem which contains the combinatorial substance of the behaviour of iterations of nonnegative matrices.

Notation. Let n be a natural number, $n > 1$ and let N be the set of natural numbers $1, 2, \ldots, n$. Let F be the set of all mappings φ with the following two properties.

1° the mapping φ assigns to every set $A \subset N$ some set $\varphi(A) \subset N$,

2° the mapping φ is additive; we have $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \cup \varphi(A_2)$ for any two sets $A_1 \subset N$, $A_2 \subset N$.

We write $\varphi = 0$ if $\varphi(A) = 0$ for every $A \subset N$. A mapping $\varphi \in F$ is said to be reducible if there is a set $P \subset N$ different from 0 and N such that $\varphi(P) \subset P$. A mapping $\varphi \in F$ is said to be irreducible if φ is not reducible.

(1.1) *Let $\varphi \in F$ be irreducible. Then $\varphi(N) = N$ and $\varphi(A) \neq 0$ whenever $A \neq 0$.*

Proof. Let $B = \varphi(N)$. We have then $\varphi(B) \subset \varphi(N) = B$, so that either $B = 0$ or $B = N$. The case $B = 0$ is impossible, since $B = 0$ implies $\varphi = 0$. Let $A \neq 0$ and $\varphi(A) = 0$. Then $\varphi(A) \subset A$ whence either $A = 0$ or $A = N$. Since $A \neq 0$, we have $A = N$ whence $\varphi(N) = 0$ which is impossible.

(1.2). *Let $\varphi = F$ be irreducible, $A \neq 0$. Then*

$$A \cup \varphi(A) \cup \ldots \cup \varphi^{n-1}(A) = N\,.$$

Proof. Let $F_0 = A$, $F_1 = A \cup \varphi(A)$, $F_2 = A \cup \varphi(A) \cup \varphi^2(A), \ldots$, so that $0 \neq F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots$. There exists a natural number $k \leqq n$ such that $\varphi^k(A) \subset \subset F_{k-1}$. Indeed, if this were not the case, F_1 would contain at least two elements, F_2 at least three elements etc. which is impossible.

It follows that $\varphi(F_{k-1}) \subset F_{k-1}$. Since $0 \neq A \subset F_{k-1}$, we have $F_{k-1} = N$ and, a fortiori, $F_{n-1} = N$.

If $\varphi \in F$ and p is a natural number, clearly $\varphi^p \in F$ as well. The following theorem shows that the class of all irreducible mappings $\varphi \in F$ may be divided into two subclasses according to the behaviour of the iterated mappings.

Theorem. *Let $\varphi \in F$ be irreducible. Then the following two cases are possible:*

1° the mappings $\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ are all irreducible; then φ^v is irreducible for every v and $\varphi^p(A) = N$ for every $A \neq 0$ and every $p \geqq 1 + (n-1)^2$,

2° there exists a $k \leqq n$ such that φ^k is reducible; then φ^v is reducible for infinitely many v. If φ^v is reducible, there exists a divisor $d > 1$ of v and a nonvoid set P such that the sets $P_j = \varphi^j(P)$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$, are mutually disjoint and posses the following properties:

(1) $P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{d-1} = N$,

(2) $\varphi^d(P_i) = P_i$ *for* $i = 0, 1, \ldots, d-1$ *so that, a fortiori,* $\varphi^v(P_i) = P_i$,

(3) *if* $Q \subset N$ *and* $\varphi^v(Q) \subset Q$, *then* Q *is the union of some* P_i *so that* $\varphi^d(Q) = Q$.

Proof. Suppose first that φ^j is irreducible for $j = 1, 2, \ldots, n$. For every natural w let $Q(w)$ be the set of all $x \in N$ such that $x \in \varphi^w(x)$. Let v be the least natural number for which $Q(v) \neq 0$. Clearly $v \leqq n$. Let $x \in Q(v)$ and let X_0 be the set consisting of the point x. Let $X_j = \varphi^{jv}(X_0)$ so that $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Since $X_i \subset \varphi^v(X_i)$, we cannot have equality here unless $X_i = N$. Hence $\varphi^{(n-1)v}(X_0) = N$. Take now a nonvoid $A \subset N$. Let s be the least nonnegative integer for which $\varphi^s(A) \cap Q(v) \neq 0$. Let P_0 be a one-point set contained in $\varphi^s(A) \cap Q(v)$. We have then

$$\varphi^{s+(n-1)v}(A) \supset \varphi^{(n-1)v}(P_0) = N .$$

We shall distinguish two cases:

(1) $v \leqq n-2$. Since $s \leqq n$, we have $s + (n-1)\,v \leqq n + (n-1)(n-2) = 1 + (n-1)^2$.

(2) $v \geqq n-1$. Take a $p_0 \in Q(v)$ and put $P_1 = \varphi(p_0)$, $P_2 = \varphi^2(p_0), \ldots$. Take a point $p_{v-1} \in P_{v-1}$ such that $p_0 \in \varphi(p_{v-1})$, then a point $p_{v-2} \in P_{v-2}$ such that $p_{v-1} \in \varphi(p_{v-2})$ and so on. We show next that the points $p_0, p_1, \ldots, p_{v-1}$ are different from each other. To see that, suppose that there exist two numbers $0 \leqq i < j < v$ such that $p_i = p_j$. Then $p_0 \in \varphi^{v-j}(p_j) = \varphi^{v-j}(p_i)$, whence $p_i \in \varphi^{i+v-j}(p_i)$ which is a contradiction since $i + v - j < v$. Clearly $p_i \in Q(v)$ for every i, $0 \leqq i \leqq v-1$.

Now let $v = n-1$ and let A be a nonvoid subset of N. Since $Q(v)$ contains at least $n-1$ elements, we have

$$(A \cup \varphi(A)) \cap Q(v) \neq 0 .$$

Hence $s \leqq 1$, so that

$$s + (n-1)\,v \leqq 1 + (n-1)^2 .$$

The proof will be concluded if we show that the case $v = n$ is impossible. In this case we have $Q(v) = N$. Put $p_n = p_0$. It is possible to show then that $\varphi(p_i) = p_{i+1}$ for every i $(0 \leqq i \leqq n-1)$. It follows that $\varphi^n(x) = x$ for every $x \in N$ so that φ^n is reducible, which is a contradiction.

To prove the second part of the theorem, suppose there exists a number v and a set $P \subset N$ different from 0 and N such that $\varphi^v(P) \subset P$. Suppose that P has been chosen small enough so that no nonvoid proper subset P' of P fulfills $\varphi^v(P') \subset P'$. It follows that $\varphi^v(P) = P$.

Define $P_0 = P$, $P_1 = \varphi(P)$, $P_2 = \varphi^2(P)$, ... For $B = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{v-1}$ we have clearly $\varphi(B) \subset B$ whence $B = N$. Clearly $\varphi^v(P_i) = P_i$ for every i. We show next that every P_i has the following property: if $0 \neq Q \subset P_i$ and $\varphi^v(Q) \subset Q$, then $Q = P_i$. Indeed, we have $\varphi^{v-i}(Q) \subset \varphi^{v-i}(P_i) = P$. Further

$$\varphi^v(\varphi^{v-i}(Q)) = \varphi^{v-i}(\varphi^v(Q)) \subset \varphi^{v-i}(Q)$$

whence $\varphi^{v-i}(Q) = P$ so that $P_i = \varphi^i(P) = \varphi^i(\varphi^{v-i}(Q)) = \varphi^v(Q) \subset Q$. We have then $P_i = Q$.

We may show now that any two of the sets P_i are either disjoint or identical. Indeed, if $P_i \cap P_j \neq 0$, we have $\varphi^v(P_i \cap P_j) \subset P_i \cap P_j$ so that $P_i \cap P_j$ must be equal both to P_i and P_j.

Now let d be the least natural number for which $P_d = P_0$. We intend to prove that d is a divisor of v. Indeed, let $m > 0$ be the greatest common divisor of d and v. There exist natural numbers p, q such that $pd - qv = m$. We have $P_0 = P_d = P_{2d} = P_{3d} = \ldots$ so that $P = P_{pd} = P_{qv+m} = P_m$.

Since $0 < m \leqq d$, we have $m = d$. We have $\varphi(H) = H$ for $H = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \ldots \cup P_{d-1}$, whence $H = N$. If there were two numbers $0 \leqq r < s < d$ such that $P_r = P_s$, we should have $P_{r+d-s} = P_0$ which is a contradiction since $r + d - s < d$.

Lef Q be a nonvoid set such that $\varphi^v(Q) \subset Q$ and let a P_i be given. Clearly P_i is either contained in Q or disjoint with Q. The set Q is thus seen to be union of some of the Q_i so that $\varphi^d(Q) = Q$. The proof is complete.

2. We proceed to explain the meaning of this theorem for nonnegative matrices. If A is a nonnegative matrix of degree n, we define a $\varphi \in F$ in the following manner:

Put $\varphi(0) = 0$. If $P \subset N$ is nonvoid, we define $\varphi(P)$ as the set of those $j \in N$ for which there exists an $i \in P$ such that $a_{ij} \neq 0$. The fact that $\varphi \in F$ is easily verified. Clearly φ is irreducible if and only if A is indecomposable. It is easy to see that the mapping φ^v corresponds to A^v.

We refer to the main text for the exact formulation of the results on nonnegative matrices which may be obtained from the preceding theorem; they are collected in the second section.