Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Svoboda

Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 399–447

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100314

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

SUR UNE CLASSE DE SURFACES SPHÉRIQUES DANS UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

KAREL SVOBODA, Brno

(Reçu le 10. février 1958)

Ce Mémoire est consacré à l'étude d'une classe de surfaces, qui se trouvent plongées dans un espace à $n + 1$ dimensions à courbure constante et qui jouissent de la propriété que, dans un point quelconque de la surface, les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, sont des circonférences, dont les centres se confondent avec les traces des perpendiculaires menées par les points de la surface aux plans des circonférences en question. Après avoir fait des recherches relatives à l'existence et à la généralité, on a donné les propriétés fondamentales des surfaces considérées et on a déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de l'espace projectif à $n + 1$ dimensions puisse être définie comme une surface d'un espace à courbure constante qui jouit des propriétés métriques mentionnées. Ces conditions sont examinées à la base de la relation existant entre les surfaces considérées et les surfaces minima d'un espace à n dimensions à courbure constante, dont les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, sont des circonférences.

1. Préliminaires

1.1. Ces préliminaires contiennent les notions fondamentales et les relations analytiques qui seront utilisées pour la définition et l'étude d'une classe de surfaces plongées dans un espace à courbure constante. En ce qui concerne ces explications préliminaires, elles sont reproduites d'après le Mémoire [1], dans lequel M. O. Borůvka a étudié la courbure normale des surfaces dans des espaces à courbure constante à un nombre quelconque de dimensions.

Considérons une surface $\boldsymbol{M}$ plongée dans un espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante c. Supposons que les espaces osculateurs d'ordre k, en chaque point M de la surface, soient de la même dimension que nous désignons par s_k. L'espace osculateur d'ordre k en chaque point de la surface étant plongé dans l'espace osculateur d'ordre $k + 1$ et la surface $\boldsymbol{M}$ étant supposée appartenir à l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ considéré, il existe un entier p tel qu'on a pour les dimensions des espaces osculateurs les inégalités $s_1 < s_2 < \ldots < s_p =$

$= n + 1$, les espaces osculateurs de la surface d'ordre $\geqq p$ étant tous à $n + 1$ dimensions. On dit que p est le nombre d'espaces osculateurs de la surface $\boldsymbol{M}$ au point M.

Dans un point quelconque M de la surface $\boldsymbol{M}$ *le $k^{ième}$ espace principal* ($k = 1, 2, \ldots, p - 1$) est, par définition, l'espace linéaire passant par le point M, totalement orthogonal à l'espace osculateur de la surface d'ordre k et situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre $k + 1$ au point M. En chaque point M de la surface on a précisément $p - 1$ espaces principaux de la surface et le $k^{ième}$ espace principal est à $s_{k+1} - s_k$ ($\geqq 1$) dimensions.

Considérons sur la surface $\boldsymbol{M}$ une courbe C passant par le point M et supposons qu'il existe, au point M de la courbe en question, le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, p - 1$) de la $k^{ième}$ normale de la courbe C et que sa $k^{ième}$ courbure scalaire a_k soit positive au point M. Il passe par le point M, même dans chaque direction du plan tangent de la surface $\boldsymbol{M}$ au point M, des courbes jouissant des propriétés supposées. Le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}_k$ de la $k^{ième}$ normale de la courbe C au point M se trouve situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre $k + 1$ au point M.

Prenons le vecteur $\boldsymbol{v}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, p - 1$), dont la direction est celle du vecteur unitaire de la $k^{ième}$ normale de la courbe C au point M et dont la longueur est égale au produit des courbures scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de cette courbe. Dans un point quelconque M de la courbe C, *le vecteur de la $k^{ième}$ courbure normale* ($k = 1, 2, \ldots, p - 1$) *de la courbe C au point M* est le vecteur, qui est la projection orthogonale du vecteur $\boldsymbol{v}_k$ dans le $k^{ième}$ espace principal de la surface au point M. Le vecteur de la $k^{ième}$ courbure normale ne dépend que de la direction des tangentes des courbes passant sur la surface $\boldsymbol{M}$ par le point M. Le lieu des extrémités des vecteurs de la $k^{ième}$ courbure normale, associés à l'ensemble de courbes tracées sur la surface $\boldsymbol{M}$ et passant par le point M, est une courbe qui s'appelle *l'indicatrice de courbure normale d'ordre k de la surface $\boldsymbol{M}$ au point M*. Il y a donc, en somme, en chaque point de la surface précisément $p - 1$ indicatrices de courbure normale d'ordre respectivement $1, 2, \ldots, p - 1$.

La propriété fondamentale des indicatrices de courbure normale des différents ordres, dans un point quelconque de la surface, est exprimée par le théorème, démontré par M. O. Borůvka dans le Mémoire [1], d'après lequel toutes les indicatrices de courbure normale sont des courbes rationnelles fermées. Nous allons suivre l'idée de la démonstration du théorème mentionné dans le cas spécial des surfaces qui feront l'objet de ce Mémoire.

1.2. Dans le cas de $c \neq 0$ l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ est un espace non-euclidien à $n + 1$ dimensions qui se trouve déterminé par une quadrique régulière $\boldsymbol{A}$; nous la prenons sous la forme

$$\frac{1}{c}(x)^2 + (x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0 \qquad (1.1)$$

et la regardons comme l'absolu de l'espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$. Pour abréger, nous désignons par $f(X, X)$ le premier membre de cette équation.

Un point de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ est un ensemble ordonné de $n + 2$ nombres $x, x^0, x^1, \ldots, x^n$ tels que $f(X, X) = \frac{1}{c}$. Donc, les points de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ sont des points analytiques de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions. Etant donnés deux points analytiques X, Y de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ nous désignons par le symbole $f(X, Y)$ la forme polaire de la forme quadratique $f(X, X)$ correspondant aux coordonnées de ces deux points et nous l'appelons produit scalaire des points X, Y. En particulier, pour un point analytique X quelconque de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$, nous appelons carré scalaire du point X l'expression $f(X, X)$. Un vecteur de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$, issu d'un point M, est tout point analytique de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ situé dans l'hyperplan polaire du point M par rapport à l'absolu. Le carré de sa longueur est donné par le carré scalaire du point analytique en question et le sommet d'un vecteur $\mathbf{v}$ issu d'un point M de l'espace est le point analytique $M + \mathbf{v}$. Le point M étant mobile dans l'espace, $\mathrm{d}M$ est un vecteur issu du point M et le carré $\mathrm{d}s^2$ de la longueur de l'élément d'arc décrit par le point M est le carré scalaire du vecteur $\mathrm{d}M$. Deux vecteurs issus d'un point M de l'espace sont rectangulaires, si les deux points analytiques correspondants, situés dans l'hyperplan polaire du point M, sont conjugués par rapport à l'absolu $\mathbf{A}$.

Cela étant, considérons dans l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ un point mobile M et associons à chaque sa position $n + 1$ vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ issus du même point M. Nous obtenons ainsi dans l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ un ensemble de $n + 2$ points analytiques linéairement indépendants qui sont deux à deux conjugués par rapport à la quadrique $\mathbf{A}$. Donc, ces points constituent une base analytique, polaire par rapport à cette quadrique, et on peut associer à chaque point analytique X de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ un ensemble ordonné de $n + 2$ coordonnées de ce point, qui se trouvent déterminées par la combinaison linéaire suivante

$$X = xM + x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \tag{1.2}$$

En particulier, on a les formules

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega M + \omega^0\mathbf{e}_0 + \omega^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \omega^n\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= \omega_i M + \omega_i^0\mathbf{e}_0 + \omega_i^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \omega_i^n\mathbf{e}_n \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{1.3}$$

les coefficients ω étant des formes linéaires aux différentielles des paramètres dont dépend le repère mobile associé au point M.

Pour que le point X ne dépende pas de la position du repère mobile, il faut et il suffit que les coordonnées du point X vérifient les équations différentielles

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x + x\omega + x^0\omega_0 + x^1\omega_1 + \ldots + x^n\omega_n &= 0\,, \\ \mathrm{d}x^i + x\omega^i + x^0\omega_0^i + x^1\omega_1^i + \ldots + x^n\omega_n^i &= 0 \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{1.4}$$

Il y a, en conséquence des relations supposées entre le point M et les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, des relations entre les coefficients du système (1.3). On les obtient en différentiant les équations

$$f(M, M) = \frac{1}{c}, \quad f(M, \mathbf{e}_i) = 0, \quad f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

δ_{ij} désignant le delta de Kronecker. En tenant compte de (1.4) on trouve ainsi

$$\omega = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \omega_i + c\omega^i = 0 \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

et il en résulte en particulier

$$\mathrm{d}s^2 = (\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^n)^2. \tag{1.6}$$

En outre, les formes ω sont assujetties à remplir les équations de structure de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à courbure constante $c \neq 0$. On les obtient en exprimant que les seconds membres des équations du système (1.3) sont des différentielles exactes. Les équations de structure correspondantes sont exprimées par les formules

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega^i] &= [\omega^0\omega_0^i] + [\omega^1\omega_1^i] + \ldots + [\omega^n\omega_n^i], \\ [\mathrm{d}\omega_i^j] &= [\omega_i^0\omega_0^j] + [\omega_i^1\omega_1^j] + \ldots + [\omega_i^n\omega_n^j] - c[\omega^i\omega^j] \end{aligned} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.7}$$

1.3. Dans le cas de $c = 0$ l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ est l'espace euclidien à $n + 1$ dimensions qui se trouve déterminé par la quadrique régulière $\boldsymbol{A}$ de son hyperplan à l'infini; nous la prenons sous la forme

$$x = 0, \quad (x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0 \tag{1.8}$$

et la regardons comme l'absolu de l'espace euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$.

Un point de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ est un ensemble ordonné de $n + 2$ nombres $x, x^0, x^1, \ldots, x^n$ tels que $x = 1$. Donc, les points de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ sont des points analytiques de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions. Un vecteur issu d'un point M de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ est tout point analytique de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$ situé dans l'hyperplan $x = 0$. Les notions du produit scalaire de deux vecteurs, du carré scalaire d'un vecteur, d'un vecteur unitaire, du sommet d'un vecteur, de deux vecteurs rectangulaires sont employées au sens de la géométrie euclidienne.

Considérons dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ un point mobile M et associons-lui $n + 1$ vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ issus du même point M. Nous obtenons ainsi dans l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ une base analytique dont les points $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sont situés dans l'hyperplan $x = 0$ et conjugués deux à deux par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$. On peut associer à chaque point M de cet espace un ensemble de $n + 2$ coordonnées de ce point, qui se trouvent déterminées par la relation (1.2), et on a, en particulier, les équations (1.3). Une considération analogue à celle qui a été faite dans le cas de l'espace non-euclidien montre que les relations (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) restent valables même dans le cas de l'espace euclidien, à condition d'y poser $c = 0$.

2. Définition et l'existence des surfaces à circonférences de courbure normale localement sphériques

2.1. Les considérations et les calculs suivants seront consacrés à l'étude d'une classe de surfaces plongées dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante c, dont les indicatrices de courbure normale, en nombre déterminé, jouissent des propriétés que nous allons préciser à l'instant. Pour cela, nous appellerons indicatrice de courbure normale d'ordre k de la surface $\boldsymbol{M}$ au point M une *circonférence de courbure normale localement sphérique d'ordre k*, si cette indicatrice est une circonférence de rayon différent de zéro et de centre qui se confond avec la trace de la perpendiculaire menée par le point M au plan de la circonférence. Le $k^{ième}$ espace principal de la surface au point M étant le plus petit espace linéaire passant par le point M et contenant l'indicatrice de courbure normale d'ordre k, il est à trois, ou bien à deux dimensions suivant que le plan de la circonférence de courbure normale d'ordre k ne contient pas le point M, ou bien passe par lui. Le centre de la circonférence localement sphérique en question se trouve situé, dans le premier cas, à distance non nulle du point correspondant de la surface tandis que, dans l'autre cas, il coïncide avec ce point.

Maintenant, en faisant usage de la notion introduite, nous allons décrire les propriétés précises des surfaces, plongées dans l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à courbure constante, qui feront l'objet des considérations suivantes.

Choisissons deux nombres entiers $r \geqq 1$, $m \geqq 3$ tels que $r < m - 1$ et supposons que le nombre naturel n satisfasse à l'inégalité $n + 1 \geqq 2m + r$. *Nous allons nous occuper des surfaces, plongées dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante c, qui jouissent des propriétés locales suivantes:*

Dans un point M quelconque de la surface l'indicatrice de courbure normale d'ordre k est une circonférence localement sphérique, dont le centre se trouve situé, pour $k = 1, 2, \ldots, r$, à distance non nulle du point M, ou bien se confond, pour $k = r + 1, r + 2, \ldots, m - 1$, avec le point M.

Nous appellerons une telle surface, si elle existe dans l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ considéré, *surface $\boldsymbol{M}(r)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques.*

Remarquons qu'en vertu de la définition précédente le $k^{ième}$ espace principal de la surface $\boldsymbol{M}(r)$ dans un point M quelconque est à trois dimensions, si $k = 1, 2, \ldots, r$, ou bien à deux dimensions, si $k = r + 1, r + 2, \ldots, m - 1$.

2.2. Faisons correspondre à chaque point M de la surface $\boldsymbol{M}(r)$ un repère mobile R formé par le point M et par les vecteurs rectangulaires deux à deux et unitaires $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. D'après (1.3) et (1.5), on a les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \omega^n \mathbf{e}_n , \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= - c\omega^i M + \omega_i^0 \mathbf{e}_0 + \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \omega_i^n \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \ldots, n) , \quad (2.1)$$

les coefficients ω satisfaisant aux relations linéaires $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ et aux équations de structure d'un espace à courbure constante, qui sont écrites dans (1.7).

Tout d'abord, nous nous bornons au cas $r = 1$. Pour procéder d'une manière simple, nous particulariserons le choix du repère R attaché à chaque point M de la surface $\boldsymbol{M}(1)$ de façon à prendre les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans le plan tangent à la surface au point M, les vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ dans le premier espace principal et les vecteurs $\mathbf{e}_{2k+1}$, $\mathbf{e}_{2k+2}$ $(k = 2, 3, \ldots, m - 1)$ dans le $k^{ième}$ espace principal de la surface au point M. On verra plus tard qu'il y a avantage à faire ce choix asymétrique des vecteurs en question. Une telle particularisation du repère est toujours possible en vertu de la définition des espaces principaux et nous disons, pour abréger, que le repère R attaché à la surface $\boldsymbol{M}(1)$ de la manière indiquée est un repère normal. Le repère R étant normal, l'espace osculateur d'ordre $k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ de la surface, en chaque point M, se trouve déterminé par les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2k+1}, \mathbf{e}_{2k+2}$. Le choix considéré du repère a pour conséquence des relations entre les coefficients du système (2.1). Nous les déduirons et nous explorerons ensuite les questions de l'existence des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, en particulier, en chaque point M de la surface, étant dans le plan tangent correspondant, on a d'après (2.1) les relations

$$\omega^j = 0 \quad (j = 0, 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{2.2}$$

qui entraînent, d'après les formules (1.7),

$$[\omega^1\omega_1^j] + [\omega^2\omega_2^j] = 0 \quad (j = 0, 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{2.3}$$

On a donc, d'après le lemme de E. Cartan, les équations

$$\begin{aligned} \omega_1^j &= p_{11}^j\omega^1 + p_{12}^j\omega^2\,, \\ \omega_2^j &= p_{21}^j\omega^1 + p_{22}^j\omega^2 \end{aligned} \quad (j = 0, 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{2.4}$$

les p étant des fonctions des variables dont dépend le repère R attaché à la surface. On a, d'après (2.3), les relations $p_{21}^j = p_{12}^j$ $(j = 0, 3, 4, \ldots, n)$.

Maintenant, nous allons exprimer d'une façon analytique les propriétés locales des surfaces en question. Pour cela, imaginons sur la surface un point particulier M quelconque et une courbe générale C passant par le point M et supposons que toutes les courbures scalaires de la courbe C qui figurent dans la suite soient différentes de zéro au point M. Un raisonnement facile à faire permet de voir qu'il passe par le point M, même dans chaque direction du plan tangent de la surface au point M, des courbes dont les courbures scalaires satisfont à la supposition précédente. Si l'on désigne par s l'arc de la courbe C, on peut poser

$$\omega^1 = \mathrm{d}s \,.\, \cos\Theta\,, \quad \omega^2 = \mathrm{d}s \,.\, \sin\Theta\,, \tag{2.5}$$

Θ étant l'angle que fait au point M le vecteur de la tangente de la courbe considérée avec le vecteur $\mathbf{e}_1$ correspondant.

Le plan osculateur de la courbe C au point M se trouve déterminé par les points M, $\mathrm{d}M$, d^2M. On vérifie facilement, d'après (2.1), (2.2), (2.4) et (2.5), que

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}s^2} = -cM + X^0\mathbf{e}_0 + (\ldots) + X^3\mathbf{e}_3 + \ldots + X^n\mathbf{e}_n\,, \tag{2.6}$$

l'expression $(\ldots)$ non écrite n'étant qu'une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et

$$X^j = p^j_{11}\cos^2\Theta + 2p^j_{12}\cos\Theta\sin\Theta + p^j_{22}\sin^2\Theta \quad (j = 0, 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{2.7}$$

Or le point d^2M se trouve situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre 2 au point M et cet espace est déterminé, d'après les remarques précédentes et d'après le choix du repère normal, par les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$. Il en résulte que $X^j = 0$ $(j = 5, 6, \ldots, n)$ pour chaque Θ et ces équations entraînent, d'après (2.7), les relations

$$p^j_{11} = p^j_{12} = p^j_{21} = p^j_{22} = 0 \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,.$$

On obtient ainsi, d'après (2.4), les équations

$$\omega^j_1 = 0\,,\ \omega^j_2 = 0 \quad (j = 5, 6, \ldots, n) \tag{2.8}$$

qui fournissent, dans le cas de $k = 1$, la traduction analytique des propriétés relatives au premier espace principal et au choix correspondant du repère normal R.

La courbe C, plongée dans l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à courbure constante c, peut être définie par les formules de Frenet et on a, en particulier,

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}s^2} = -cM + a_1\mathbf{n}_1\,,$$

$\mathbf{n}_1$ étant le vecteur unitaire de la première normale et a_1 la première courbure scalaire de la courbe C au point M. En comparant l'équation précédente et (2.6) on voit que X^0, X^3, X^4 sont les coordonnées du vecteur de la première courbure normale de la courbe C au point M, suivant la base formée par les vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ du premier espace principal de la surface. Il en résulte que les équations (2.7) déterminent, pour $j = 0, 3, 4$, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 de la surface au point M.

D'après la supposition exprimée, dans le cas de $k = 1$, par la définition des surfaces en question l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1, en chaque point M, est une circonférence de rayon R_1 et de centre, dont la distance V du point correspondant M est différente de zéro. Dans la suite, nous allons supposer que R_1 et V soient des fonctions positives des paramètres dont dépend le point M sur la surface considérée. Pour que la propriété mentionnée de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 soit remplie, il faut et il suffit que les coordonnées X^0, X^3, X^4, exprimées par les formules (2.7), des points de l'indicatrice satisfassent aux équations suivantes

$$(X^0 - x^0)^2 + (X^3 - x^3)^2 + (X^4 - x^4)^2 = R_1^2 ,$$
$$(X^0 - x^0)\, x^0 + (X^3 - x^3)\, x^3 + (X^4 - x^4)\, x^4 = 0 . \tag{2.9}$$

Dans ces équations, les x^0, x^3, x^4 sont les coordonnées du centre de l'indicatrice en question et elles satisfont à une équation de la forme

$$(x^0)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = V^2 . \tag{2.10}$$

Or, si l'on fait un choix convenable des vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ dans le premier espace principal de la surface, on peut s'arranger que, le repère normal R au point M soit tel qu'on a $x_0 > 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ de sorte que les équations (2.9) et (2.10) s'écrivent sous la forme simple

$$X^0 = V , \quad (X^3)^2 + (X^4)^2 = R_1^2 .$$

En substituant les formules (2.7) dans les équations précédentes, on obtient des relations qui sont remplies pour chaque Θ seulement si

$$p^0_{11} = p^0_{22} = V , \quad p^0_{12} = p^0_{21} = 0 ,$$
$$(p^3_{11})^2 + (p^4_{11})^2 = 2(p^3_{12})^2 + 2(p^4_{12})^2 + p^3_{11}p^3_{22} + p^4_{11}p^4_{22} = (p^3_{22})^2 + (p^4_{22})^2 = R_1^2 ,$$
$$p^3_{11}p^3_{12} + p^4_{11}p^4_{12} = p^3_{12}p^3_{22} + p^4_{12}p^4_{22} = 0 .$$

On voit ainsi que, dans un point M quelconque de la surface, après avoir fait, au besoin, une particularisation convenable des vecteurs $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ dans le premier espace principal, on peut s'arranger à avoir les relations

$$\begin{aligned} &p^0_{11} = V , && p^0_{12} = p^0_{21} = 0 , && p^0_{22} = V , \\ &p^3_{11} = R_1 , && p^3_{12} = p^3_{21} = 0 , && p^3_{22} = -R_1 , \\ &p^4_{11} = 0 , && p^4_{12} = p^4_{21} = R_1 , && p^4_{22} = 0 , \end{aligned}$$

qui permettent, d'après (2.7), de ramener les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 à la forme suivante

$$X^0 = V , \ X^3 = R_1 \cos 2\Theta , \ X^4 = R_1 \sin 2\Theta .$$

Les mêmes relations entraînent, d'après les équations résiduelles (2.4), les formules

$$\begin{aligned} &\omega^0_1 = V\omega^1 , && \omega^3_1 = R_1\omega^1 , && \omega^4_1 = R_1\omega^2 , \\ &\omega^0_2 = V\omega^2 , && \omega^3_2 = -R_1\omega^2 , && \omega^4_2 = R_1\omega^1 , \end{aligned} \tag{2.11}$$

qui expriment, dans le cas de $k = 1$, les propriétés des surfaces en question en ce qui concerne l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1.

Appliquons les formules de structure aux équations (2.8). Nous avons, en tenant compte de (2.2), (2.11) et des formules (2.8) elles-mêmes, les relations extérieures quadratiques

$$\begin{aligned} &\left[\omega^1 \left(\frac{V}{R_1}\,\omega^j_0 + \omega^j_3\right)\right] + [\omega^2\omega^j_4] = 0 , \\ &[\omega^1\omega^j_4] + \left[\omega^2 \left(\frac{V}{R_1}\,\omega^j_0 - \omega^j_3\right)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (j = 5, 6, \ldots, n) \tag{2.12}$$

et nous pouvons poser, d'après le lemme de E. Cartan,

$$\frac{V}{R_1}\,\omega_0^j = p_{01}^j\omega^1 + p_{02}^j\omega^2\,,$$

$$\omega_3^j = p_{31}^j\omega^1 + p_{32}^j\omega^2\,,\ \ \omega_4^j = p_{41}^j\omega^1 + p_{42}^j\omega^2 \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,. \qquad (2.13)$$

Les p qui figurent dans (2.13) sont des fonctions des paramètres dont dépend le repère normal R et elles satisfont, d'après (2.12), à des relations de la forme $p_{01}^j = p_{31}^j + p_{42}^j$, $p_{02}^j = p_{41}^j - p_{32}^j$ $(j = 5, 6, \ldots, n)$.

En vertu de la supposition $r = 1$, les propriétés locales énoncées dans la définition des surfaces en question entraînent que le second espace principal de la surface, dans un point M quelconque, est à deux dimensions et l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 est une circonférence localement sphérique de centre au point M. L'espace principal en question se trouve déterminé par le point M et par les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$ de sorte que l'espace osculateur de la surface d'ordre 3 au point M contient les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6$ et il est à sept dimensions.

L'espace osculateur d'ordre 3 de la courbe C au point M se trouve déterminé par les points M, $\mathrm{d}M$, d^2M, d^3M. Les relations précédentes montrent qu'on a

$$\frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}s^3} = (\ldots) + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + \ldots + X^n\mathbf{e}_n\,, \qquad (2.14)$$

l'expression $(\ldots)$ non écrite n'étant qu'une combinaison linéaire du point M et des vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$, et

$$X^j = R_1\{(2p_{31}^j + p_{42}^j)\cos^3\Theta + 3p_{41}^j\cos^2\Theta\sin\Theta +$$
$$+ 3p_{42}^j\cos\Theta\sin^2\Theta + (-2p_{32}^j + p_{41}^j)\sin^3\Theta\} \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,. \qquad (2.15)$$

Or le point d^3M se trouve situé dans l'espace osculateur de la surface d'ordre 3 au point M qui est déterminé par les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6$. On a donc $X^j = 0$ $(j = 7, 8, \ldots, n)$ pour chaque Θ, à condition que $n > 6$. Il en résulte, en tenant compte de (2.15) et des relations valables pour les fonctions p, que

$$p_{01}^j = p_{02}^j = p_{31}^j = p_{32}^j = p_{41}^j = p_{42}^j = 0 \quad (j = 7, 8, \ldots, n)$$

et par suite, d'après (2.13),

$$\omega_0^j = 0\,,\quad \omega_3^j = 0\,,\quad \omega_4^j = 0 \quad (j = 7, 8, \ldots, n)\,. \qquad (2.16)$$

Dans le cas considéré, les équations précédentes donnent la traduction analytique des propriétés des surfaces en question qui concernent, dans le cas de $k = 2$, le second espace principal et les formes ω dans (2.16) n'existent pas seulement si $n = 6$.

D'autre part, les formules de Frenet entraînent, en particulier,

$$\frac{\mathrm{d}^3M}{\mathrm{d}s^3} = (\ldots) + a_1a_2\mathbf{n}_2\,,$$

$\boldsymbol{n}_2$ étant le vecteur unitaire de la seconde normale, a_2 la seconde courbure scalaire de la courbe C au point M et l'expression $(\ldots)$ non écrite n'étant qu'une combinaison linéaire du point M et des vecteurs unitaires de la tangente et de la première normale de cette courbe. En comparant la formule précédente et celle donnée dans (2.14) on vérifie que X^5, X^6 sont les coordonnées du vecteur de la seconde courbure normale de la courbe C, ces coordonnées étant rapportées à la base du deuxième espace principal, formée par les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$. De plus, on en voit que les équations (2.15) expriment, pour $j = 5, 6$, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 de la surface au point M.

Pour que cette indicatrice soit une circonférence de centre M et de rayon que nous désignons par R_1R_2 et que nous regardons comme une fonction positive des paramètres dont dépend le point M sur la surface, il faut et il suffit que l'expression obtenue par substitution des valeurs (2.15) dans l'équation $(X^5)^2 + (X^6)^2 = (R_1R_2)^2$ ne dépende pas de Θ. On obtient par un calcul facile, que nous omettons, les relations

$$\begin{gathered}
(2p^5_{31} + p^5_{42})^2 + (2p^6_{31} + p^6_{42})^2 = R_2^2 \,, \quad (2p^5_{31} + p^5_{42})\, p^5_{41} + (p^6_{31} + p^6_{42})\, p^6_{41} = 0 \,, \\
3(p^5_{41})^2 + 2(2p^5_{31} + p^5_{42})\, p^5_{42} + 3(p^6_{41})^2 + 2(2p^6_{31} + p^6_{42})\, p^6_{42} = R_2^2 \,, \\
9p^5_{41}p^5_{42} + (2p^5_{31} + p^5_{42})(-2p^5_{32} + p^5_{41}) + 9p^6_{41}p^6_{42} + (2p^6_{31} + p^6_{42})(-2p^6_{32} + p^6_{41}) = 0 \,, \\
3(p^5_{42})^2 + 2(-2p^5_{32} + p^5_{41})\, p^5_{41} + 3(p^6_{42})^2 + 2(-2p^6_{32} + p^6_{41})\, p^6_{41} = R_2^2 \,, \\
(-2p^5_{32} + p^5_{41})\, p^5_{42} + (-2p^6_{32} + p^6_{41})\, p^6_{42} = 0 \,, \\
(-2p^5_{32} + p^5_{41})^2 + (-2p^6_{32} + p^6_{41})^2 = R_2^2 \,.
\end{gathered}$$

Or, on peut s'arranger, après avoir fait, au besoin, une particularisation convenable des vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$ dans le second espace principal de la surface, qu'on ait

$$\begin{aligned}
&p^5_{01} = p^5_{02} = 0 \,, \quad p^5_{31} = R_2 \,, \quad p^5_{32} = p^5_{41} = 0 \,, \quad p^5_{42} = -R_2 \,, \\
&p^6_{01} = p^6_{02} = 0 \,, \quad p^6_{31} = 0 \,, \quad p^6_{32} = p^6_{41} = R_2 \,, \quad p^6_{42} = 0
\end{aligned}$$

et que les équations précédentes soient remplies par ces valeurs. Les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$ étant choisis de cette manière convenable, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 sont, en tenant compte de (2.15) et des valeurs déduites, les suivantes

$$X^5 = R_1R_2 \cos 3\Theta \,, \quad X^6 = R_1R_2 \sin 3\Theta \,.$$

En outre, les relations linéaires (2.13), dans lesquelles $j = 5,6$, prennent la forme

$$\omega^5_0 = 0 \,, \ \omega^6_0 = 0 \,, \ \omega^5_3 = R_2\omega^1 \,, \ \omega^6_3 = R_2\omega^2 \,, \ \omega^5_4 = -R_2\omega^2 \,, \ \omega^6_4 = R_2\omega^1 \,. \quad (2.17)$$

En définitive, après avoir fait un choix convenable du repère normal R attaché à la surface étudiée $\boldsymbol{M}(1)$, les propriétés locales considérées s'expriment, dans le cas de $k = 2$, par les équations (2.16) et (2.17), à condition de supprimer le groupe d'équations (2.16), si la surface en question se trouve plongée dans un espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à sept dimensions.

En résumant, nous avons établi, après avoir fait le choix convenable du repère R attaché à chaque point de la surface, qu'on a, d'après (2.2), (2.8), (2.16), (2.17), les équations de la forme

$$\begin{gathered}
\omega^0 = \omega^3 = \omega^4 = \ldots = \omega^n = 0\,, \\
\omega_1^0 = V\omega^1\,, \quad \omega_2^0 = V\omega^2\,, \quad \omega_0^5 = \omega_0^6 = \ldots = \omega_0^n = 0\,, \\
\omega_{2k-1}^{2k+1} = R_k\omega^1\,, \quad \omega_{2k-1}^{2k+2} = R_k\omega^2\,, \qquad \omega_{2k}^{2k+1} = -R_k\omega^2\,, \quad \omega_{2k}^{2k+2} = R_k\omega^1\,, \\
\omega_{2k-1}^{2k+3} = \omega_{2k-1}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1}^{n} = 0\,, \quad \omega_{2k}^{2k+3} = \omega_{2k}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k}^{n} = 0\,,
\end{gathered} \tag{2.18}$$

dans lesquelles $k = 1, 2$. Il faut supprimer dans ce système le groupe d'équations résultant de celles qui sont écrites dans la dernière ligne pour $k = 2$, si $n = 6$. Donc, les équations du système (2.18) définissent, dans le cas $m = 3$, d'une manière analytique, les surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale qui se trouvent plongées dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante.

Soit maintenant $m > 3$ et continuons à déduire des relations linéaires qui expriment la supposition que, dans un point M quelconque de la surface $\boldsymbol{M}(1)$, l'indicatrice de courbure normale d'ordre k ($k = 3, 4, \ldots, m - 1$) soit une circonférence de centre M de sorte que le $k^{ième}$ espace principal de la surface au point M est précisément à deux dimensions. Pour cela procédons par la voie d'induction complète.

Choisissons un entier i tel que $3 \leqq i \leqq m - 1$ et supposons que nous ayons déjà démontré que, dans un point quelconque de la surface $\boldsymbol{M}(1)$, après avoir fait, au besoin, une particularisation convenable du repère normal R attaché à la surface, on peut s'arranger que les propriétés considérées des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$, qui se rapportent aux indicatrices de courbure normale d'ordre $\leqq i - 1$ et aux espaces principaux correspondants, soient exprimées par le système (2.18), dans lequel $k = 1, 2, \ldots, i - 1$, à condition de supprimer les équations résultant de celles qui sont écrites dans la dernière ligne pour $k = i - 1$, si $n = 2i$. Le repère normal R étant choisi d'une manière convenable, supposons en outre que les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre k, dans un point quelconque M de la surface, soient données par les formules

$$X^{2k+1} = R_1 R_2 \ldots R_k \cos{(k + 1)}\,\Theta\,, \quad X^{2k+2} = R_1 R_2 \ldots R_k \sin{(k + 1)}\,\Theta\,, \tag{2.19}$$

les X^{2k+1}, X^{2k+2} désignant les coordonnées des points de l'indicatrice en question, rapportées au système de référence formé par le point M et les vecteurs $\mathbf{e}_{2k+1}$, $\mathbf{e}_{2k+2}$ du $k^{ième}$ espace principal. Nous avons vu que les suppositions indiquées sont vérifiées pour $i = 3$.

Nous allons montrer que, dans un point M quelconque de la surface, les propriétés considérées de l'indicatrice de courbure normale d'ordre i et du $i^{ième}$

espace principal s'expriment par des équations, qui complètent les équations supposées (2.18) à un tel système d'équations différentielles, qui peut être écrit sous la forme (2.18), à condition que $k = 1, 2, \ldots, i$, et qu'il y faut supprimer le groupe d'équations résultant de celles qui se trouvent dans la dernière ligne pour $k = i$, si $n = 2i + 2$. En même temps, nous allons démontrer que les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre i prennent la forme (2.19) avec $k = i$.

Considérons les équations

$$\omega^j_{2i-3} = 0\,, \quad \omega^j_{2i-2} = 0 \quad (j = 2i+1, 2i+2, \ldots, n) \tag{2.20}$$

qui sont écrites dans la dernière ligne du système (2.18) pour $k = i - 1$, si $n > 2i$. Cette supposition a toujours lieu, car il n'a pas de sens de considérer, dans le cas contraire, l'indicatrice de courbure normale d'ordre i et le $i^{\text{ième}}$ espace principal de la surface au point M. En appliquant les formules de structure aux équations (2.20) on obtient les relations

$$\begin{matrix} [\omega^1\omega^j_{2i-1}] + [\omega^2\omega^j_{2i}] = 0\,, \\ [\omega^1\omega^j_{2i}] - [\omega^2\omega^j_{2i-1}] = 0 \end{matrix} \quad (j = 2i+1, 2i+2, \ldots, n) \tag{2.21}$$

qui entraînent, d'après le lemme de E. Cartan, les équations

$$\begin{matrix} \omega^j_{2i-1} = p^j_{2i-1,1}\omega^1 + p^j_{2i-1,2}\omega^2\,, \\ \omega^j_{2i} \quad = p^j_{2i,1}\omega^1 \quad + p^j_{2i,2}\omega^2 \end{matrix} \quad (j = 2i+1, 2i+2, \ldots, n)\,, \tag{2.22}$$

les p étant des fonctions des paramètres dont dépend le repère R attaché à la surface en question. Les fonctions p satisfont, d'après (2.21), à des relations de la forme $p^j_{2i,1} = p^j_{2i-1,2}$, $p^j_{2i,2} = -p^j_{2i-1,1}$ $(j = 2i+1, 2i+2, \ldots, n)$.

Dans un point M quelconque de la surface, le $i^{\text{ième}}$ espace principal est à deux dimensions et le repère normal R est choisi de manière que les vecteurs $\mathbf{e}_{2i+1}$, $\mathbf{e}_{2i+2}$ se trouvent situés dans cet espace. Pour exprimer ce choix d'une façon analytique, considérons l'espace osculateur d'ordre $i + 1$ au point M d'une courbe C quelconque tracée sur la surface en question et passant par le point M. L'espace osculateur considéré se trouve déterminé par les points M, $\mathrm{d}M$, $\mathrm{d}^2M, \ldots, \mathrm{d}^{i+1}M$. Cela étant, on a

$$\frac{\mathrm{d}^{i+1}M}{\mathrm{d}s^{i+1}} = (\ldots) + X^{2i+1}\mathbf{e}_{2i+1} + X^{2i+2}\mathbf{e}_{2i+2} + \ldots + X^n\mathbf{e}_n\,, \tag{2.23}$$

l'expression $(\ldots)$ non écrite n'étant qu'une combinaison linéaire du point M et des vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2i}$, et

$$X^j = R_1R_2\ldots R_{i-1}\{p^j_{2i-1,1}\cos{(i+1)}\,\Theta + p^j_{2i-1,2}\sin{(i+1)}\,\Theta\} \tag{2.24}$$
$$(j = 2i+1, 2i+2, \ldots, n)\,.$$

Or le point $\mathrm{d}^{i+1}M$ se trouve situé dans l'espace osculateur d'ordre $i + 1$ de la surface au point M qui est déterminé par les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2i+1}, \mathbf{e}_{2i+2}$.

On en voit, d'après (2.23), que $X^j = 0$ ($j = 2i + 3, 2i + 4, \ldots, n$) pour chaque Θ, à condition que $n > 2i + 2$. Il en résulte, d'après (2.24), que

$$p^j_{2i-1,1} = p^j_{2i-1,2} = p^j_{2i,1} = p^j_{2i,2} = 0 \quad (j = 2i + 3, 2i + 4, \ldots, n)$$

et le système (2.22) entraîne les équations

$$\omega^j_{2i-1} = 0\,, \quad \omega^j_{2i} = 0 \quad (j = 2i + 3, 2i + 4, \ldots, n) \tag{2.25}$$

qui expriment les suppositions au sujet des vecteurs $\mathbf{e}_{2i+1}$, $\mathbf{e}_{2i+2}$ du $i^{ième}$ espace principal de la surface. Les formes ω qui figurent dans (2.25) n'existent pas dans le cas où $n = 2i + 2$.

La courbe C peut être définie par les formules de Frenet et on a, en particulier,

$$\frac{\mathrm{d}^{i+1}M}{\mathrm{d}s^{i+1}} = (\ldots) + a_1 a_2 \ldots a_i \mathbf{n}_i\,,$$

$\mathbf{n}_i$ étant le vecteur unitaire de la $i^{ième}$ normale de la courbe en question et l'expression $(\ldots)$ non écrite n'étant qu'une combinaison linéaire des vecteurs unitaires de la tangente et de la première jusqu'à l'$(i - 1)^{ième}$ normale de la courbe C. Il en résulte en vertu de (2.23) que les X^{2i+1}, X^{2i+2} sont les coordonnées du vecteur de la $i^{ième}$ courbure scalaire de la courbe C au point M. Donc, les expressions (2.24) fournissent, pour $j = 2i + 1, 2i + 2$, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre i de la surface au point M, ces coordonnées étant déterminées par rapport à la base formée par les vecteurs $\mathbf{e}_{2i+1}$, $\mathbf{e}_{2i+2}$ du $i^{ième}$ espace principal.

Ces formules mettent en évidence que l'indicatrice de courbure normale en question est une ellipse de centre M sur la surface. On en voit le résultat suivant:

L'indicatrice de courbure normale d'ordre i, dans un point M quelconque de la surface $\boldsymbol{M}(1)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, plongée dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ $(>2i + 3)$ dimensions, est nécessairement une ellipse dont le centre se confond avec le point M.

Or l'indicatrice de courbure normale d'ordre i doit être, d'après les suppositions précédentes, une circonférence de rayon que nous désignons par $R_1 R_2 \ldots$ $\ldots R_i$; nous le regardons comme une fonction positive des paramètres du point M sur la surface. Pour que cette indicatrice soit une circonférence, il faut et il suffit que l'équation

$$(X^{2i+1})^2 + (X^{2i+2})^2 = (R_1 R_2 \ldots R_i)^2$$

soit satisfaite par les valeurs (2.24) pour chaque Θ. Cela donne par un calcul facile les relations

$$(p^{2i+1}_{2i-1,1})^2 + (p^{2i+2}_{2i-1,1})^2 = (p^{2i+1}_{2i-1,2})^2 + (p^{2i+2}_{2i-1,2})^2 = R_i^2\,,$$
$$p^{2i+1}_{2i-1,1}\, p^{2i+1}_{2i-1,2} + p^{2i+2}_{2i-1,1}\, p^{2i+2}_{2i-1,2} = 0\,.$$

Or, après avoir fait, au besoin, un choix convenable des vecteurs $\mathbf{e}_{2i+1}$, $\mathbf{e}_{2i+2}$ situés dans le $i^{ième}$ espace principal, on peut s'arranger que le repère normal R au point M soit tel qu'on ait les relations

$$p_{2i-1,1}^{2i+1} = R_i\,, \quad p_{2i-1,2}^{2i+1} = p_{2i,1}^{2i+1} = 0\,, \quad p_{2i,2}^{2i+1} = -R_i\,,$$
$$p_{2i-1,1}^{2i+2} = 0\,, \quad p_{2i-1,2}^{2i+2} = p_{2i,1}^{2i+2} = R_i\,, \quad p_{2i,2}^{2i+2} = 0$$

et qu'on puisse satisfaire aux équations précédentes par les valeurs en question. Le repère R étant choisi d'une telle manière, les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre i prennent, d'après (2.24), la forme

$$X^{2i+1} = R_1 R_2 \ldots R_i \cos(i+1)\,\Theta\,, \quad X^{2i+2} = R_1 R_2 \ldots R_i \sin(i+1)\,\Theta$$

et les relations linéaires (2.22) dans lesquelles $j = 2i+1,\ 2i+2$ s'écrivent

$$\omega_{2i-1}^{2i+1} = R_i\omega^1\,, \quad \omega_{2i-1}^{2i+2} = R_i\omega^2\,, \quad \omega_{2i}^{2i+1} = -R_i\omega^2\,, \quad \omega_{2i}^{2i+2} = R_i\omega^1\,. \qquad (2.26)$$

Les équations précédentes (2.25) et (2.26) fournissent, dans le cas de $k = i$, la version analytique des propriétés considérées des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$. Les équations en question et celles du système (2.18) avec $k = 1, 2, \ldots, i-1$ entraînent un système d'équations différentielles qui est de la même forme (2.18) et qui est vrai pour $k = 1, 2, \ldots, i$, à condition d'y supprimer, dans le cas de $n = 2i + 2$, les équations résultant de celles qui sont écrites dans la dernière ligne pour $k = i$. En même temps, nous avons établi que les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre i prennent la forme supposée (2.19), à condition d'y poser $k = i$.

En définitive, nous avons obtenu dans les considérations précédentes, après avoir fait un choix convenable du repère normal R, les formules analytiques qui expriment les propriétés considérées des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m-1$ circonférences de courbure normale localement sphériques.

2.3. On voit ainsi que les surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m-1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, s'il en existe, peuvent être définies par le système d'équations différentielles suivant

$$\omega^0 = \omega^3 = \omega^4 = \ldots = \omega^n = 0\,,$$
$$\omega_1^0 = V\omega^1\,, \quad \omega_2^0 = V\omega^2\,, \quad \omega_0^5 = \omega_0^6 = \ldots = \omega_0^n = 0\,,$$
$$\omega_{2k-1}^{2k+1} = R_k\omega^1\,, \quad \omega_{2k-1}^{2k+2} = R_k\omega^2\,, \quad \omega_{2k}^{2k+1} = -R_k\omega^2\,, \quad \omega_{2k}^{2k+2} = R_k\omega^1\,, \qquad (2.27)$$
$$\omega_{2k-1}^{2k+3} = \omega_{2k-1}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1}^{n} = 0\,, \quad \omega_{2k}^{2k+3} = \omega_{2k}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k}^{n} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m-1)\,,$$

le groupe d'équations résultant de celles qui sont écrites dans la dernière ligne pour $k = m - 1$ étant à supprimer si $n = 2m$.

Nous allons chercher les conditions d'intégrabilité du système (2.27) en supposant que *la distance V du plan de la circonférence de courbure normale d'ordre 1 du point correspondant de la surface soit constante.* Nous nous bornons au cas énoncé dans toutes les considérations qui suivent. Cette supposition nous permet de démontrer le théorème suivant qui répond à la question de l'existence et de la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ en question.

Théorème 2.1. *La distance V du plan de la circonférence de courbure normale localement sphérique d'ordre 1 du point correspondant de la surface étant constante, il existe, dans un espace quelconque $\boldsymbol{S}_{n+1}$ $(n \geqq 2m)$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante, des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques et elles dépendent, en général, de $2(n - m - 1)$ fonctions d'une variable.*

Démonstration. Pour procéder d'une manière simple, nous déduirons les relations extérieures quadratiques qui résultent par différentiation extérieure des équations écrites dans les deux premières lignes du système (2.27). On a, en vertu des formules de structure, les relations

$$[\omega^1\omega_0^3] + [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] - [\omega^2\omega_0^3] = 0\,,$$
$$[\omega^1\omega_0^3] - [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] + [\omega^2\omega_0^3] = 0$$

et on en déduit immédiatement

$$\omega_0^3 = 0\,, \quad \omega_0^4 = 0\,. \tag{2.28}$$

Or on vérifie facilement que ces relations linéaires n'entraînent aucune relation nouvelle. Les formules de structure appliquées aux équations résiduelles du système (2.27) donnent les relations quadratiques

$$\left[\omega^1 \frac{\mathrm{d}R_k}{R_k}\right] + [\omega^2(\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2})] = 0\,,$$
$$[\omega^1(\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2})] - \left[\omega^2 \frac{\mathrm{d}R_k}{R_k}\right] = 0\,,$$
$$[\omega^1\omega_{2m-1}^j] + [\omega^2\omega_{2m}^j] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_{2m}^j] - [\omega^2\omega_{2m-1}^j] = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\, j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,$$

les équations dans la dernière ligne étant à supprimer si $n = 2m$. Or, on peut mettre le système indiqué sous la forme

$$\left[(\omega^1 - i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2}}\right)\right] = 0\,,$$
$$\left[(\omega^1 + i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_1^2 + \omega_{2k-1}^{2k} - \omega_{2k+1}^{2k+2}}\right)\right] = 0\,,$$
$$[(\omega^1 - i\omega^2)(\omega_{2m-1}^j + i\omega_{2m}^j)] = 0\,, \quad [(\omega^1 + i\omega^2)(\omega_{2m-1}^j - i\omega_{2m}^j)] = 0 \tag{2.29}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m - 1;\, j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,,$$

à condition d'y ajouter la remarque précédente.

Donc, le système d'équations différentielles (2.27) qui définit les surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, entraîne les équations (2.28) et les conditions d'intégrabilité du système ainsi obtenu s'expriment par les équations (2.29).

Le nombre de relations (2.29) est évidemment $2(n - m - 1)$ et il y a, parmi ces relations, le même nombre de formes linéairement indépendantes qui figurent dans les équations (2.29) outre les formes ω^1 et ω^2. Il en résulte que le système d'équations différentielles (2.27) et (2.28) est en involution et que sa solution générale dépend de $2(n - m - 1)$ fonctions arbitraires d'une variable. Le théorème précédent se trouve ainsi démontré.

Nous reviendrons aux résultats démontrés dans le théorème 2.1 et nous les énoncerons, en vue des considérations ultérieures, d'une manière plus détaillée.

2.4. Maintenant, nous allons étudier les surfaces à circonférences de courbure normale localement sphériques en supposant $r > 1$. On a donc, en particulier, la supposition que l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2, dans un point M quelconque de la surface, soit une circonférence dont le centre se trouve à distance non nulle du point M correspondant de sorte que le second espace principal au point M est à trois dimensions.

Nous ferons usage des résultats obtenus dans les paragraphes précédents qui comprennent les recherches relatives aux surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ à circonférences de courbure normale localement sphériques dans le cas de $r = 1$. En particulier, nous avons démontré qu'il est possible de faire correspondre à un point M quelconque de la surface un repère normal R convenable d'une telle façon qu'on a les équations (2.2), (2.8) et (2.11). Rappelons que les équations (2.8) entraînent les relations (2.13).

En supposant $r = 2$ conservons le choix antérieur des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans le plan tangent, des vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ dans le premier espace principal de la surface au point M et particularisons le choix du repère R de manière à prendre, dans chaque point M de la surface en question, les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$ dans le second espace principal et les vecteurs $\mathbf{e}_{2k+2}$, $\mathbf{e}_{2k+3}$ $(k = 3, 4, \ldots, m - 1)$ dans le $k^{ième}$ espace principal de la surface. Le second espace principal étant à trois dimensions, l'espace osculateur d'ordre 3 de la surface au point M est à huit dimensions et il se trouve déterminé, d'après le choix indiqué du repère normal R, par le point M et par les vecteurs $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7$. Le point d^3M situé dans l'espace osculateur d'ordre 3 de la courbe au point M peut être exprimé par l'équation (2.14), les X^j désignant les expressions (2.15). Ce point étant situé dans l'espace osculateur d'ordre 3 de la surface au point M, on a $X^j = 0$ $(j = 8, 9, \ldots, n)$ pour chaque Θ et on en obtient, d'après (2.13), les relations

$$\omega_0^j = 0\,, \quad \omega_3^j = 0\,, \quad \omega_4^j = 0 \qquad (j = 8, 9, \ldots, n)\,.$$

Les X^5, X^6, X^7, qui restent encore, déterminent les équations paramétriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 dans le système de reférence qui se trouve déterminé, dans le second espace principal de la surface, par le point M et par les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$. Pour que cette indicatrice soit une circonférence localement sphérique de rayon R_1R_2 et de centre à distance V' non nulle du point M, il faut et il suffit qu'il existe un point de coordonnées x^5, x^6, x^7 tel qu'on a pour chaque Θ

$$(X^5 - x^5)^2 + (X^6 - x^6)^2 + (X^7 - x^7)^2 = (R_1R_2)^2 \,,$$
$$(X^5 - x^5)\, x^5 + (X^6 - x^6)\, x^6 + (X^7 - x^7)\, x^7 = 0 \,, \tag{2.30}$$

les coordonnées x^5, x^6, x^7 satisfaisant à l'équation suivante

$$(x^5)^2 + (x^6)^2 + (x^7)^2 = V'^2 \,.$$

Nous allons supposer que le rayon de l'indicatrice et la distance de son plan du point correspondant de la surface soient des fonctions positives des paramètres dont dépend la position du point M sur la surface. Or on peut choisir les vecteurs $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_7$ dans le second espace principal de la surface de manière à avoir $x^5 = 0$, $x^6 = 0$, $x^7 > 0$ et, par suite, à prendre les équations (2.30) sous la forme

$$(X^5)^2 + (X^6)^2 = (R_1R_2)^2 \,, \quad X^7 = V' \,.$$

Or la deuxième de ces équation s'annule, d'après (2.15), pour chaque Θ seulement si

$$2p^7_{31} + p^7_{42} = -\,(2p^7_{31} + p^7_{42}) = 2p^7_{31} - 3p^7_{42} = -\,(2p^7_{31} - 3p^7_{42}) = \frac{V'}{R_1} \,,$$
$$p^7_{32} = p^7_{41} = 0 \,.$$

On en voit que $V' = 0$ et cela est en contradiction avec l'hypothèse faite au sujet de la distance en question.

Le raisonnement précédent permet d'énoncer le résultat suivant sur les surfaces à circonférences de courbure normale localement sphériques:

Si l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1, dans un point M quelconque de la surface, est une circonférence localement sphérique dont le centre se trouve à distance non nulle du point M et si l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 est aussi une circonférence localement sphérique, alors son centre se confond avec le point M.

La propriété précédente ne dépend pas de la supposition faite au sujet de la distance V. Or la distance V étant constante, on peut énoncer le théorème supplémentaire qui se rapporte à l'existence des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$:

Théorème 2.2. *Pour qu'il existe une surface $\boldsymbol{M}(r)$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, plongée dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ $(n + 1 \geqq \geqq 2m + r)$ à $n + 1$ dimensions à courbure constante, il faut et il suffit qu'on ait $r = 1$.*

Démonstration. Ce sont les considérations précédentes et le résultat énoncé dans le théorème 2.1 qui fournissent la démonstration du théorème en question.

Les centres des circonférences de courbure normale localement sphériques des différents ordres, dans un point M quelconque de la surface considérée, se confondent avec le point M, à la seule exception du centre de la circonférence de courbure normale d'ordre 1 qui est à distance non nulle du point M. Le double du vecteur déterminé par le point M et par le centre correspondant de la circonférence de courbure normale d'ordre 1 est, par définition, *le vecteur de courbure moyenne de la surface au point* M. On en voit que, *dans tous les points de la surface en question à circonférences de courbure normale localement sphériques, la longueur du vecteur de courbure moyenne est constante et différente de zéro.*

Dans la suite, les recherches relatives aux surfaces à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques se bornent, en vertu des résultats précédents, à l'étude des surfaces $\boldsymbol{M}(1)$ que nous désignons $\boldsymbol{M}$ tout simplement. Rappelons que nous allons étudier les propriétés des surfaces $\boldsymbol{M}$ sous la supposition que la distance V soit constante le long de la surface en question.

2.5. Revenons à la question de l'existence et de la généralité des surfaces $\boldsymbol{M}$. Le nombre de fonctions d'une variable dont dépend la solution générale du système d'équations de Pfaff (2.27) et (2.28) éprouve une diminuation si l'on admet que quelques formes différentielles qui figurent dans les équations (2.29) en outre des formes $\omega^1 \pm i\omega^2$ s'annulent identiquement. En laissant de côté le cas spécial des surfaces $\boldsymbol{M}$ qui jouissent de la propriété d'avoir les R_k constants et qui serons traitées dans un Mémoire ultérieur il semble qu'il soit utile, comme on le verra plus tard, de distinguer les considérations correspondantes suivant que toutes les formes d'un des deux systèmes

$$\omega^j_{2m-1} + i\omega^j_{2m}\,, \quad \omega^j_{2m-1} - i\omega^j_{2m} \quad (j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n) \tag{2.31}$$

s'annulent ou bien ne s'annulent pas identiquement, à condition que les formes en question n'existent pas dans le cas $n = 2m$. Si toutes les formes qui appartiennent à un de ces deux systèmes s'annulent identiquement, on vérifie par un calcul facile que les équations de Pfaff correspondantes n'entraînent, par la différentiation extérieure, aucune relation nouvelle. On en voit que le nombre total de fonctions d'une variable dont dépend la surface en question dans le cas mentionné diminue de $n - 2m$ fonctions.

Dans la suite nous allons discuter trois cas de surfaces $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques. Pour cela, nous désignerons par $\boldsymbol{M}_1$ chaque surface $\boldsymbol{M}$ de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ qui jouit de la propriété qu'au moins une forme de chacun des deux systèmes (2.31) soit différente de zéro. Dans ce cas, la dimension de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ satisfait à l'inégalité $n \geqq 2m + 1$. D'une manière analogue, nous désignerons par $\boldsymbol{M}_2$ chaque surface $\boldsymbol{M}$ de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$, si au moins une forme d'un des deux systèmes (2.31) est differénte de zéro tandis que toutes les formes de l'autre système s'annulent identiquement; pour plus de netteté, nous allons supposer dans la suite que ce soient les formes

$\omega^j_{2m-1} + i\omega^j_{2m}$ $(j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n)$ qui s'annulent identiquement. On a pour la dimension de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ la même inégalité que dans le cas précédent. Finalement, nous désignerons par $\boldsymbol{M}_3$ chaque surface $\boldsymbol{M}$ de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$, pour laquelle toutes les formes des deux systèmes (2.31) sont nulles. La dimension de l'espace $\mathbf{S}_{n+1}$ satisfait à l'inégalité $n \geqq 2m$ dans le cas considéré.

En vue des remarques qui précèdent et de la distinction considérée des surfaces $\boldsymbol{M}$ nous pouvons énoncer, d'une manière plus précise, les résultats antérieurs concernant l'existence et la généralité des surfaces en question:

Les surfaces $\boldsymbol{M}_1$, ou bien $\boldsymbol{M}_2$, ou bien, finalement, $\boldsymbol{M}_3$ à $m-1$ circonférences de courbure normale localement sphériques existent dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ quelconque à courbure constante et elles dépendent, en général, de $2(n-m-1)$, ou bien de $n-2$, ou bien, finalement, de $2(m-1)$ fonctions d'une variable.

Dans la suite, nous traiterons les deux cas de $c \neq 0$ et de $c = 0$ simultanément, les considérations que nous avons en vue ne diffèrent pas formellement dans ces deux cas.

3. Deux types de surfaces à circonférences de courbure normale localement sphériques

3.1. Nous avons démontré dans les considérations du chapitre précédent que, chaque surface $\boldsymbol{M}$ à $m-1$ circonférences de courbure normale localement sphériques se trouve déterminée, dans un espace $\mathbf{S}_{n+1}$ $(n \geqq 2m)$ à $n+1$ dimensions à courbure constante c, par le système d'équations différentielles (2.1), dont les coefficients satisfont, le repère normal R attaché à la surface étant convenablement choisi, aux équations (2.27) et (2.28). Le système correspondant est le suivant

$$\begin{aligned}
dM &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,\\
d\mathbf{e}_0 &= -V\omega^1\mathbf{e}_1 - V\omega^2\mathbf{e}_2\,,\\
d\mathbf{e}_1 &= -c\omega^1 M + V\omega^1\mathbf{e}_0 + \omega^2_1\mathbf{e}_2 + R_1\omega^1\mathbf{e}_3 + R_1\omega^2\mathbf{e}_4\,,\\
d\mathbf{e}_2 &= -c\omega^2 M + V\omega^2\mathbf{e}_0 - \omega^2_1\mathbf{e}_1 - R_1\omega^2\mathbf{e}_3 + R_1\omega^1\mathbf{e}_4\,,\\
d\mathbf{e}_{2k-1} &= -R_{k-1}\omega^1\mathbf{e}_{2k-3} + R_{k-1}\omega^2\mathbf{e}_{2k-2} + \omega^{2k}_{2k-1}\mathbf{e}_{2k} + R_k\omega^1\mathbf{e}_{2k+1} + R_k\omega^2\mathbf{e}_{2k+2},\\
d\mathbf{e}_{2k} &= -R_{k-1}\omega^2\mathbf{e}_{2k-3} - R_{k-1}\omega^1\mathbf{e}_{2k-2} - \omega^{2k}_{2k-1}\mathbf{e}_{2k-1} - R_k\omega^2\mathbf{e}_{2k+1} + R_k\omega^1\mathbf{e}_{2k+2}\,,\\
d\mathbf{e}_{2m-1} &= -R_{m-1}\omega^1\mathbf{e}_{2m-3} + R_{m-1}\omega^2\mathbf{e}_{2m-2} + \omega^{2m}_{2m-1}\mathbf{e}_{2m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega^j_{2m-1}\mathbf{e}_j\,, \qquad (3.1)\\
d\mathbf{e}_{2m} &= -R_{m-1}\omega^2\mathbf{e}_{2m-3} - R_{m-1}\omega^1\mathbf{e}_{2m-2} - \omega^{2m}_{2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega^j_{2m}\mathbf{e}_j\,,\\
d\mathbf{e}_h &= -\omega^h_{2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} - \omega^h_{2m}\mathbf{e}_{2m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega^j_h\mathbf{e}_j
\end{aligned}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m-1;\ h = 2m+1, 2m+2, \ldots, n)\,,$$

et nous y admettons les deux cas possibles $c \neq 0$ et $c = 0$.

Ce système avec les équations de structure (1.7) peut être envisagé comme définissant, dans l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions, une surface qui est le lieu du point M, et en même temps un repère mobile R, attaché à chaque point de cette surface, dont les sommets sont, par rapport à un système de référence fixe, les fonctions M, $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Introduisons dans les considérations suivantes un nouveau repère mobile, dont les sommets sont les points linéairement indépendants

$$M, E_0 = M + \frac{1}{V}\mathbf{e}_0 , \quad E_k = \mathbf{e}_{2k-1} + i\mathbf{e}_{2k} , \quad E_{-k} = \mathbf{e}_{2k-1} - i\mathbf{e}_{2k}, \mathbf{e}_{2m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.2}$$

de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$. En posant

$$\Omega^1 = \omega^1 + i\omega^2 , \quad \Omega^{-1} = \omega^1 - i\omega^2 , \tag{3.3}$$

il est facile à voir que, le système d'equations différentielles, qui définissent les surfaces en question, peut être remplacé par un système équivalent de la forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega^1E_{-1} , \\
\mathrm{d}E_0 &= 0 , \\
\mathrm{d}E_1 &= -(V^2 + c)\,\Omega^1M + V^2\Omega^1E_0 - i\omega_1^2E_1 + R_1\Omega^{-1}E_2 , \\
\mathrm{d}E_{-1} &= -(V^2 + c)\,\Omega^{-1}M + V^2\Omega^{-1}E_0 + i\omega_1^2E_{-1} + R_1\Omega^1E_{-2} , \\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega^1E_{k-1} - i\omega_{2k-1}^{2k}E_k + R_k\Omega^{-1}E_{k+1} , \\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega^{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1}^{2k}E_{-k} + R_k\Omega^1E_{-(k+1)} , \\
\mathrm{d}E_m &= -R_{m-1}\Omega^1E_{m-1} - i\omega_{2m-1}^{2m}E_m + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1}^j + i\omega_{2m}^j)\,\mathbf{e}_j , \\
\mathrm{d}E_{-m} &= -R_{m-1}\Omega^{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1}^{2m}E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1}^j - i\omega_{2m}^j)\,\mathbf{e}_j , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1}^h - i\omega_{2m}^h)\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1}^h + i\omega_{2m}^h)\,E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega_h^j\mathbf{e}_j
\end{aligned} \tag{3.4}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m - 1;\ h = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n) .$$

Dans ce qui suit, nous ferons usage du système précédent pour la recherche des propriétés des surfaces en question. Remarquons pour cela qu'il faut distinguer, en vertu de la forme du système (3.4), deux cas suivant que $V^2 + c \neq 0$, ou bien $V^2 + c = 0$; on a nécessairement $c \neq 0$ dans le cas $V^2 + c = 0$ tandis que la valeur de la constante c est sans importance dans le cas $V^2 + c \neq 0$.

Maintenant, nous faisons une remarque et une convention qui nous sera utile dans l'étude ultérieure des surfaces considérées. Dans ce but, nous écrivons l'équation de la quadrique $\mathbf{A}$ par rapport au système de référence de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ qui se trouve déterminé par les points linéairement indépendants

$M, E_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Par rapport à ce système de référence chaque point X de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ peut être exprimé sous la forme

$$X = \bar{x}M + \bar{x}^0 E_0 + \bar{x}^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \bar{x}^n \mathbf{e}_n \,, \tag{3.5}$$

les $\bar{x}, \bar{x}^0, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ étant les coordonnées du point X par rapport au système considéré. Si nous désignons par $x, x^0, x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées du même point X par rapport au système de référence R, nous obtenons, d'après (3.5), (1.2) et d'après l'équation qui définit dans (3.2) le point E_0, les relations

$$x = \bar{x} + \bar{x}^0 \,, \quad x^0 = \frac{1}{V}\,\bar{x}^0 \,, \quad x^k = \bar{x}^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

qui expriment la transformation des systèmes de référence en question. En substituant les expressions précédentes dans les équations (1.1) et (1.8) on voit que l'équation de la quadrique $\boldsymbol{A}$ est la suivante

$$\frac{1}{c}\,(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}\,(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0 \,, \tag{3.6}$$

si $c \neq 0$, ou bien

$$x + x^0 = 0 \,, \quad \frac{1}{V^2}\,(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0 \,, \tag{3.7}$$

si $c = 0$. Dans les équations (3.6) et (3.7) nous avons omis les barres au-dessus des lettres x. Dans la suite, nous employerons le système de référence, par rapport auquel la quadrique $\boldsymbol{A}$ se trouve déterminée par l'équation (3.6), ou bien (3.7).

3.2. D'après les considérations précédentes, chaque surface $\boldsymbol{M}$ plongée dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à courbure constante c détermine une surface définie de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$, qui est exprimée analytiquement par le système d'équations différentielles (3.4). Par contre, chaque surface qui se trouve déterminée, dans l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$, par le système d'équations différentielles (3.4) définit, dans l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à courbure constante c qui se forme de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ par le choix d'une quadrique $\boldsymbol{A}$ pour l'absolu, une certaine surface $\boldsymbol{M}$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques. Les réalités indiquées nous donnent le droit d'employer la notation $\boldsymbol{M}$ pour les surfaces qui se trouvent déterminées, dans l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$, par le système mentionné (3.4).

Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Le point E_0 est fixe en position et il est attaché, d'une manière univoque, à la surface $\boldsymbol{M}$ de l'espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$.*

Démonstration. Cette affirmation résulte immédiatement du système (3.4).

Cette circonstance nous donne la possibilité de décrire une connexion entre les surfaces $\boldsymbol{M}$ en question et celles qui sont plongées dans un espace à n dimensions et qui jouissent, du point de vue métrique, de la propriété que toutes les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, sont des circonférences centrées au point correspondant de la surface. En même temps, on voit ainsi apparaître la possibilité de déduire la signification géométrique de la constante $V^2 + c$ qui figure dans les équations du système (3.4).

Considérons un espace projectif $\mathbf{R}_n$ à n dimensions dont les éléments sont des droites de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ passant par le point E_0 fixe et désignons par X^0 la droite qui passe par deux points différents X et E_0 de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$. Il est possible de faire correspondre à un repère quelconque M, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, ou bien $M, E_0, E_1, E_{-1}, \ldots, E_m, E_{-m}, \mathbf{e}_{2m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ un repère formé par des droites M^0, $\mathbf{e}_1^0$, ..., $\mathbf{e}_n^0$, ou bien $M^0, E_1^0, E^0_{-1}, \ldots, E_m^0, E^0_{-m}, \mathbf{e}^0_{2m+1}, \ldots$ ..., $\mathbf{e}_n^0$ de l'espace $\mathbf{R}_n$. Cela étant, la projection, prise du point E_0, des points situés sur la surface $\boldsymbol{M}$ est une variété conique plongée dans l'espace $\mathbf{R}_n$ et à chaque droite génératrice M^0 de cette variété se trouve attaché un repère mobile dont nous venons de parler. D'après (3.4), la variété en question est déterminée dans l'espace réglé $\mathbf{R}_n$ par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M^0 &= \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}E_1^0 + \tfrac{1}{2}\Omega^1 E^0_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1^0 &= -(V^2 + c)\,\Omega^1 M^0 - i\omega_1^2 E_1^0 + R_1\Omega^{-1}E_2^0\,,\\
\mathrm{d}E^0_{-1} &= -(V^2 + c)\,\Omega^{-1}M^0 + i\omega_1^2 E^0_{-1} + R_1\Omega^1 E^0_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k^0 &= -R_{k-1}\Omega^1 E^0_{k-1} - i\omega^{2k}_{2k-1}E_k^0 + R_k\Omega^{-1}E^0_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E^0_{-k} &= -R_{k-1}\Omega^{-1}E^0_{-(k-1)} + i\omega^{2k}_{2k-1}E^0_{-k} + R_k\Omega^1 E^0_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m^0 &= -R_{m-1}\Omega^1 E^0_{m-1} - i\omega^{2m}_{2m-1}E_m^0 + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega^j_{2m-1} + i\omega^j_{2m})\,\mathbf{e}_j^0\,,\\
\mathrm{d}E^0_{-m} &= -R_{m-1}\Omega^{-1}E^0_{-(m-1)} + i\omega^{2m}_{2m-1}E^0_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega^j_{2m-1} - i\omega^j_{2m})\,\mathbf{e}_j^0\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h^0 &= -\tfrac{1}{2}(\omega^h_{2m-1} - i\omega^h_{2m})\,E_m^0 - \tfrac{1}{2}(\omega^h_{2m-1} + i\omega^h_{2m})\,E^0_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega_h^j\mathbf{e}_j^0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m - 1;\ h = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)\,.$$

Dans la suite, pour plus de simplicité, nous allons regarder chaque droite passant par le point E_0 de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ comme un point de l'espace $\mathbf{R}_n$. Donc, les points de cet espace sont des droites analytiques de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$. Les points M^0, $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, ..., $\mathbf{e}_n^0$ de l'espace $\mathbf{R}_n$ étant linéairement indépendants, ils forment une base analytique de cet espace de sorte que chaque point analytique X^0 de l'espace en question peut être exprimé comme une combinaison linéaire des points fondamentaux de la base considérée. En vertu des conventions précédentes et d'après l'équation (3.5) écrite sans barres au-dessus des lettres x et l'équation qui définit dans (3.2) le point E_0, on voit que la combinaison linéaire indiquée est la suivante

$$X^0 = xM^0 + x^1\mathbf{e}_1^0 + x^2\mathbf{e}_2^0 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n^0\,. \tag{3.9}$$

Dans cette équation les x, x^1, ..., x^n sont les coordonnées du point analytique X^0 par rapport au système de référence considéré.

On vérifie facilement, en utilisant les équations du système (3.8), que la quadrique $\boldsymbol{K}$, donnée dans le cas de $V^2 + c \neq 0$ par l'équation

$$\frac{1}{V^2 + c} (x)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0\,, \tag{3.10}$$

est fixe. De même, on obtient dans le cas où $V^2 + c = 0$ que la quadrique $\boldsymbol{K}$, donnée par les équations

$$x = 0\,, \quad (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0\,, \tag{3.11}$$

est fixe.

Désignons par $\boldsymbol{T}_n$ l'espace à n dimensions subordonné à l'espace projectif $\boldsymbol{R}_n$ et déterminé par le choix de la quadrique $\boldsymbol{K}$ pour l'absolu. Alors, la signification géométrique de la constante $V^2 + c$ peut être exprimée par le théorème suivant:

Théorème 3.2. *La constante $V^2 + c$ est la courbure de l'espace $\boldsymbol{T}_n$ qui est formé dans l'espace $\boldsymbol{R}_n$ par la quadrique $\boldsymbol{K}$ regardée comme l'absolu.*

Démonstration. Les affirmations du théorème précédent résultent facilement des considérations contenues dans les remarques préliminaires du premier chapitre et des équations (3.8), (3.10) et (3.11).

Remarquons que l'espace $\boldsymbol{T}_n$ en question est un espace non-euclidien dans le cas où $V^2 + c \neq 0$ et l'espace euclidien dans le cas de $V^2 + c = 0$.

3.3. Dans les considérations suivantes, qui concernent, pour la plupart, les recherches des propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}$ en question, nous distinguerons deux cas qui se trouvent déterminés par la valeur de la constante $V^2 + c$ et nous les traiterons séparément. Les résultats précédents montrent que ces deux types de surfaces se distinguent, du point de vue géométrique, par la métrique qui est définie dans l'espace $\boldsymbol{R}_n$ par la quadrique $\boldsymbol{K}$. Cette métrique étant non-euclidienne ($V^2 + c \neq 0$), nous appelerons la surface $\boldsymbol{M}$ correspondante *surface du type non-euclidien* sans tenir compte de la métrique de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ qui peut être soit euclidienne ($c = 0$) soit non-euclidienne ($c \neq 0$). La métrique de l'espace $\boldsymbol{T}_n$ étant euclidienne ($V^2 + c = 0$), nous appelerons la surface $\boldsymbol{M}$ correspondante *surface du type euclidien*; dans ce cas la métrique de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ doit être non-euclidienne ($c \neq 0$).

4. Surfaces du type euclidien à circonférences de courbure normale localement sphériques

4.1. Dans ce chapitre, nous allons nous occuper des propriétés des surfaces $\boldsymbol{M}$ du type euclidien. Analytiquement, ces surfaces se trouvent définies par le système d'équations différentielles (3.4), dans lequel il faut poser $V^2 + c = 0$. L'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ devant être non-euclidien dans ce cas, la quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ de cet espace est donnée par l'équation (3.6). En examinant les propriétés projectives de la surface $\boldsymbol{M}$ nous allons la regarder comme une surface d'un espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$, définie par le système (3.4). En passant de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ à l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$ nous allons supposer que la quadrique mentionnée $\boldsymbol{A}$ possède la propriété d'être l'absolu de l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$.

Désignons par $\boldsymbol{M}^0$ la projection, prise du point E_0 correspondant, de la surface $\boldsymbol{M}$. Alors, la projection $\boldsymbol{M}^0$ en question est une variété conique de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ et elle peut être regardée comme une surface de l'espace $\boldsymbol{R}_n$, définie par le système d'équations différentielles (3.8), dans lequel on a $V^2 + c = 0$. L'espace $\boldsymbol{T}_n$ est euclidien dans le cas considéré et il se forme de l'espace $\boldsymbol{R}_n$ par le choix de la quadrique $\boldsymbol{K}$, donnée par les équations (3.11), pour l'absolu.

La quadrique $\boldsymbol{K}$ est une variété conique de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ dont le sommet se trouve au point E_0; le rapport de cette quadrique avec la quadrique $\boldsymbol{A}$ est fourni par le théorème suivant:

Théorème 4.1. *Le point E_0 attaché à la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien est situé sur la quadrique $\boldsymbol{A}$. La quadrique $\boldsymbol{K}$ est la quadrique d'intersection de la quadrique $\boldsymbol{A}$ et de son hyperplan tangent Q au point E_0.*

Démonstration. On voit facilement, en vertu de (3.6) que le point E_0 se trouve situé, sous la supposition $V^2 + c = 0$, sur la quadrique $\boldsymbol{A}$ et que l'équation de l'hyperplan tangent Q à la quadrique $\boldsymbol{A}$ au point E_0 est

$$x = 0\,. \tag{4.1}$$

Donc, la quadrique d'intersection de l'hyperplan Q et de la quadrique $\boldsymbol{A}$ est déterminée par les équations (3.6) et (4.1) que l'on peut mettre sous la forme (3.11). Or, ces équations déterminent la quadrique $\boldsymbol{K}$ comme un objet formé par des droites de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$. On en voit la justesse des affirmations énoncées.

Maintenant, nous allons déduire la propriété suivante des surfaces $\boldsymbol{M}$ du type euclidien:

Théorème 4.2. *La surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien se trouve située sur la quadrique $\boldsymbol{M}$ qui est contenue dans le faisceau de quadriques, déterminé par la quadrique $\boldsymbol{A}$ et par l'hyperplan double Q qui est tangent à la quadrique $\boldsymbol{A}$ au point E_0. Dans l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à l'absolu $\boldsymbol{A}$ la quadrique $\boldsymbol{M}$ est une hypersphère de centre au point E_0.*

Démonstration. En désignant, d'une manière habituelle, les coordonnées du point M de la surface $\boldsymbol{M}$ on a, d'après les remarques figurant dans les explications préliminaires, une équation de la forme

$$\frac{1}{c}\,(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}\,(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = \frac{1}{c}\,. \tag{4.2}$$

La droite M^0 passant par les points M et E_0 de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ peut être regardée comme un point de l'espace $\boldsymbol{R}_n$ et on a pour les coordonnées de ce point une équation de la forme

$$x = 1\,. \tag{4.3}$$

Les deux équations (4.2) et (4.3) sont remplies par les coordonnées du même point M situé sur la surface en question et elles entraînent une équation nouvelle

$$\frac{1}{c}(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - \frac{1}{c}(x)^2 = 0\,. \qquad (4.4)$$

On en voit que les points de la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien se trouvent situés sur l'hypersurface quadratique M qui est définie par l'équation (4.4). En outre, cette équation montre la relation mutuelle des deux quadriques M et A qui est énoncée dans le théorème précédent.

En prenant la quadrique A pour l'absolu de l'espace non-euclidien S_{n+1} correspondant, la quadrique M devient, dans la métrique ainsi déterminée, une hypersphère de l'espace S_{n+1}. La démonstration du théorème précédent est ainsi accomplie.

Alors, chaque surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien apparaît, en vertu des résultats du théorème 4.2, comme une *surface sphérique* plongée dans un espace non-euclidien S_{n+1}.

4.2. Considérons la projection, prise du point correspondant E_0, de la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien dans un espace P_n à n dimensions qui ne passe pas par le point E_0. Cette projection est parfaitement déterminée par la variété conique qui se trouve engendrée par les droites joignant le point E_0 et les points de la surface considérée et qui peut être regardée comme une surface $\boldsymbol{M}^0$ plongée dans l'espace R_n. Or il existe une correspondance biunivoque entre les projections, dans un espace P_n quelconque, des points de la surface $\boldsymbol{M}$ et entre les points correspondants de la surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace R_n et cela nous met en mesure d'énoncer les résultats relatifs à la projection de la surface $\boldsymbol{M}$ en nous bornant à la surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace R_n. Dans le cas considéré des surfaces du type euclidien, on peut induire à l'espace R_n une métrique euclidienne moyennant la quadrique K, donnée par l'équation (3.11), et parler de l'espace euclidien T_n.

Théorème 4.3. *La projection, prise du point E_0, de la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien est une surface $\boldsymbol{M}^0$ qui jouit, dans la métrique euclidienne déterminée par l'absolu K, de la propriété que les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, dans un point M^0 quelconque de cette surface sont des circonférences centrées au point M^0.*

D é m o n s t r a t i o n. Analytiquement, chaque surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien se trouve déterminée par le système d'équations différentielles (3.4) avec la valeur $V^2 + c = 0$. La variété conique, qui projete la surface $\boldsymbol{M}$ du point E_0 correspondant, est une surface $\boldsymbol{M}^0$ plongée dans l'espace R_n et déterminée par le système d'équations différentielles (3.8), où $V^2 + c = 0$. Or on trouve facilement, en comparant ce système avec les résultats du Mémoire [1] de M. O. Borůvka, que le système en question définit, de façon analytique, les surfaces qui jouissent, dans l'espace euclidien $\mathbf{T}_n$ à l'absolu $\mathbf{K}$, des propriétés métriques énoncées dans le théorème précédent. Les affirmations de ce théorème sont ainsi démontrées.

D'après les remarques préliminaires de ce paragraphe nous avons démontré que la projection, prise du point E_0 correspondant, de la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien dans un espace $\mathbf{P}_n$ quelconque qui ne passe pas par le point E_0 est une surface qui jouit, du point de vue métrique, des propriétés décrites dans le théorème 4.3. On obtient la métrique euclidienne correspondante en choisissant pour l'absolu la quadrique d'intersection de l'espace $\mathbf{P}_n$ et de la quadrique $\mathbf{K}$. En vertu du théorème 4.1, cette quadrique absolue est une projection, prise du point E_0, de la quadrique $\mathbf{A}$ dans l'espace $\mathbf{P}_n$. Rappelons que chaque surface $\boldsymbol{M}^0$ est une surface minimum à $m - 1$ circonférences de courbure normale, plongée dans l'espace euclidien à n dimensions. Dans ce qui suit, nous allons faire usage des résultats obtenus dans le Mémoire [3] au sujet des surfaces en question.

Les équations (1.6) et (2.2) montrent que les courbes définies par l'équation différentielle $\Omega^1 = 0$, ou $\Omega^{-1} = 0$ sont des courbes minima de la surface $\boldsymbol{M}$. Pour donner des propriétés des courbes minima en question, rappelons que nous avons dénommé, dans le Mémoire [3], chaque réseau conjugué d'un espace projectif $\mathbf{P}_n$ à n dimensions *réseau conjugué* (U) si sa suite des transformations laplaciennes s'arrête, dans les deux sens, après la première transformation à la manière de Laplace aux courbes, qui sont situées elles-mêmes, ainsi que leurs espaces osculateurs d'ordre $m - 1$, sur une quadrique régulière d'un sous-espace linéaire à $n - 1$ dimensions de l'espace projectif $\mathbf{P}_n$.

Dans ce qui suit nous allons traiter le réseau conjugué (U) qui se trouve défini dans l'espace projectif $\mathbf{R}_n$ moyennant la quadrique $\mathbf{K}$. Cette quadrique étant parfaitement déterminée par la quadrique $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ et par le point E_0 attaché à la surface $\boldsymbol{M}$, nous désignons par $(U)_{\mathbf{A}}$ le réseau conjugué (U) en question.

Cela étant, nous pouvons énoncer la propriété suivante des courbes minima sur une surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien:

Théorème 4.4. *Les courbes minima sur la surface $\boldsymbol{M}$ du type euclidien forment un réseau de courbes, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$ sur la surface $\boldsymbol{M}^0$, plongée dans l'espace euclidien $\mathbf{T}_n$.*

Démonstration. En regardant la surface $\boldsymbol{M}$ comme une surface plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ et définie par le système d'équations différentielles (3.4), on vérifie sans aucune difficulté que les courbes exprimées par l'équation différentielle $\Omega^1\Omega^{-1} = 0$ forment un réseau de courbes. D'après (3.8), la projection, prise du point E_0, de ce réseau est un réseau de courbes $\Omega^1\Omega^{-1} = 0$ sur la surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace $\mathbf{R}_n$. Or ces courbes apparaissent, dans la métrique euclidienne induite par l'absolu $\mathbf{K}$, comme les courbes minima sur la surface minimum $\boldsymbol{M}^0$ à $m - 1$ circonférences de courbure normale. Cela étant, remarquons que nous avons démontré dans le Mémoire [3] que, les courbes en question forment le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$. Il en suit la justesse des affirmations contenues dans le théorème précédent.

Nous utiliserons les résultats démontrés dans ce qui précède pour la recherche des propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}$ du type euclidien. Nous allons distinguer les considérations correspondantes du point de vue du paragraphe 2.5, où nous avons obtenu trois classes différentes de surfaces en question.

4.3. Tout d'abord, nous explorerons les surfaces $\boldsymbol{M}_1$ du type euclidien et nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 4.5. *Pour qu'une surface de l'espace projectif* $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2m + 1)$ *à* $n + 1$ *dimensions puisse être définie comme une surface* $\boldsymbol{M}_1$ *du type euclidien, plongée dans un espace non-euclidien* $\mathbf{S}_{n+1}$ *à* $n + 1$ *dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe situé sur une quadrique régulière* $\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{P}_{n+1}$ *et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point* E_0, *est le réseau conjugué* $(U)_{\mathbf{A}}$ *de l'espace projectif* $\mathbf{R}_n$. *Les courbes engendrées après la première transformation du réseau* $(U)_{\mathbf{A}}$ *dans un sens et dans l'autre peuvent être arbitraires, à la condition près, qu'aucune d'entre elles n'est plongée dans un sous-espace linéaire à* $m - 1$ *dimensions de l'espace* $\mathbf{R}_n$.

D é m o n s t r a t i o n. Tout d'abord, nous allons démontrer que chaque surface $\boldsymbol{M}_1$ du type euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques jouit des propriétés projectives mentionnées. Pour cela, nous la regardons comme une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ et nous rappelons que, d'après les théorèmes 3.1 et 4.1, il existe un point E_0 fixe qui est situé sur la quadrique $\mathbf{A}$ et qui est attaché, d'une manière univoque, à la surface en question. Les courbes minima de la surface $\boldsymbol{M}_1$ forment, d'après le théorème 4.4, un réseau de courbes, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$ sur la surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace $\mathbf{R}_n$. Pour finir cette démonstration il ne reste qu'à démontrer les affirmations qui se rapportent aux courbes formées après la première transformation du réseau $(U)_{\mathbf{A}}$ dans un sens et dans l'autre. Or, cette affirmation se trouve démontrée dans le théorème 2.2 du Mémoire [3]. Donc, chaque surface $\boldsymbol{M}_1$ du type euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques jouit des propriétés projectives en question.

Par contre, supposons maintenant qu'il soit possible de faire correspondre à une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ un point E_0 fixe sur la quadrique $\mathbf{A}$ et que la surface en question puisse être douée d'un réseau de courbes, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$ de l'espace projectif $\mathbf{R}_n$, ce réseau jouissant des propriétés décrites plus haut. Cela étant, nous démontrerons qu'une telle surface peut être regardée comme une surface $\boldsymbol{M}_1$ du type euclidien qui jouit, dans un espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$, des propriétés métriques en question.

Faisons correspondre à chaque point M de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ un repère mobile R formé par les points linéairement indépendants M, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$. Cela étant, chaque point X de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ peut être mis sous la forme (1.2) et, en particulier, on a le système d'équations différentielles (1.3) qui entraînent que le point X ne dépend pas de la position du repère si et seulement si les coordonnées de ce point satisfont aux équations différentielles (1.4). En exprimant que la quadrique régulière $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ est déterminée, par rapport à un repère mobile R quelconque, par l'équation (1.1), on obtient facilement les conditions (1.5).

On peut évidemment particulariser le repère mobile R attaché à la surface en question de manière à prendre les points $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans le plan tangent de la surface au point M. Ce choix étant fait, on a les équations (2.2), qui entraînent, d'après les formules de structure de l'espace projectif, les équations extérieures quadratiques (2.3). Dans les considérations suivantes, nous particulariserons, pour procéder d'une manière simple, le choix du repère R et nous exprimerons les propriétés énoncées dans le théorème précédent par des relations analytiques entre les coefficients du système (1.4).

Ayant égard aux suppositions faites au sujet des surfaces en question on peut attacher à la surface considérée de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ un point E_0 fixe qui se trouve situé sur la quadrique $\mathbf{A}$, donnée par l'équation (1.1). Pour exprimer cette supposition, on peut choisir le point $\mathbf{e}_0$ du repère mobile R de manière à prendre ce point sur la droite déterminée par les points M et E_0. Cela étant, il existe une fonction V, différente de zéro, des paramètres dont dépend le choix du repère attaché à la surface, telle que l'on a

$$E_0 = M + \frac{1}{V}\,\mathbf{e}_0\,. \tag{4.5}$$

Le point E_0 étant fixe en position, on peut déterminer une fonction convenable g des paramètres mentionnés de façon à avoir $\mathrm{d}E_0 = gE_0$ et cette relation donne d'après (4.5), (1.3), (1.5) et (2.2) une équation de la forme

$$\omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \mathrm{d}\left(\frac{1}{V}\right)\mathbf{e}_0 + \frac{1}{V}\,(\omega_0^1\mathbf{e}_1 + \omega_0^2\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_0^n\mathbf{e}_n) = g\left(M + \frac{1}{V}\,\mathbf{e}_0\right).$$

Les points M, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$ étant linéairement indépendants, l'équation précédente entraîne que les coefficients des points particuliers s'annulent identiquement. On obtient ainsi $g = 0$, puis $\mathrm{d}\left(\frac{1}{V}\right) = 0$ de sorte que V est une constante le long de la surface en question et les coefficients des autres points entraînent des équations de la forme

$$\omega_0^1 = -V\omega^1\,,\quad \omega_0^2 = -V\omega^2\,,\quad \omega_0^3 = \omega_0^4 = \ldots = \omega_0^n = 0\,. \tag{4.6}$$

Finalement, en exprimant la supposition que le point E_0 soit situé sur la quadrique $\boldsymbol{A}$ donnée par l'équation (1.1), on obtient, en vertu de (4.5), la condition $V^2 + c = 0$.

On voit ainsi que les suppositions faites au sujet du point E_0 attaché à la surface en question sont exprimées, après avoir fait une particularisation convenable du repère R, par les équations (4.6), où V est une constante différente de zéro qui satisfait à la condition $V^2 + c = 0$.

Maintenant, nous allons exprimer les suppositions qu'il existe, sur la surface en question de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$, un réseau de courbes, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\boldsymbol{A}}$ sur la surface de l'espace $\boldsymbol{R}_n$, jouissant des propriétés énoncées dans le théorème que nous démontrons. Dans ce but, nous allons faire usage du repère qui se déduit du repère considéré R en y remplaçant le point $\mathbf{e}_0$ par le point E_0 et nous allons supposer que ce soient les deux familles de courbes $\Omega^1 = 0$ et $\Omega^{-1} = 0$ qui forment le réseau en question.

Cela étant, la projection, prise du point E_0, de la surface considérée de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ est une surface de l'espace $\boldsymbol{R}_n$ et elle se trouve déterminée, comme on le voit facilement en vertu des formules (1.3), (1.5), (2.2), (4.5), (4.6) et de la condition $V^2 + c = 0$, par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M^0 &= \omega^1\mathbf{e}_1^0 + \omega^2\mathbf{e}_2^0\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i^0 &= \omega_i^1\mathbf{e}_1^0 + \omega_i^2\mathbf{e}_2^0 + \ldots + \omega_i^n\mathbf{e}_n^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Les deux familles de courbes $\Omega^1 = 0$ et $\Omega^{-1} = 0$ forment, d'après nos suppositions, le réseau conjugué $(U)_{\boldsymbol{A}}$ situé sur cette surface et jouissant des propriétés considérées. Or, les considérations que nous avons faites dans la démonstration du théorème 2.2 du Mémoire [3] montrent que les propriétés en question des courbes sur la surface de l'espace $\boldsymbol{R}_n$ peuvent être exprimées, le repère attaché à la surface étant choisi convenablement, par le système d'équations

$$\begin{gathered} \omega_{2k-1}^{2k+1} + i\omega_{2k}^{2k+1} = R_k\Omega^{-1}\,, \qquad \omega_{2k-1}^{2k+1} - i\omega_{2k}^{2k+1} = R_k\Omega^1\,, \\ \omega_{2k-1}^{2k+2} + i\omega_{2k}^{2k+2} = iR_k\Omega^{-1}\,, \qquad \omega_{2k-1}^{2k+2} - i\omega_{2k}^{2k+2} = -\,iR_k\Omega^1\,, \\ \omega_{2k-1}^{2k+3} = \omega_{2k-1}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1}^{n} = 0\,, \quad \omega_{2k}^{2k+3} = \omega_{2k}^{2k+4} = \ldots = \omega_{2k}^{n} = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, m-1) \end{gathered} \tag{4.8}$$

et par la condition qu'au moins une forme de chacun des deux systèmes (2.31) soit différente de zéro.

Donc, le système (4.8) exprime, d'après les considérations précédentes, les suppositions que nous avons faites au sujet de la surface en question de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$, ces suppositions se rapportant à l'existence du réseau de courbes jouissant des propriétés indiquées.

On en voit que toutes les suppositions de cette partie de la démonstration se trouvent exprimées, le repère attaché à la surface étant choisi convenablement, par les équations (2.2), (4.6) et (4.8). Ce système étant identique au système d'équations différentielles (2.27) et (2.28), on en conclut que chaque surface plongée dans l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ et jouissant des propriétés projectives en question peut être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_1$ du type euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, plongée dans un espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$. Le théorème 4.5 se trouve ainsi démontré.

Le théorème précédent reste valable même dans le cas le plus simple de $n = 2m + 1$.

4.4. Nous allons faire attention aux propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}_2$ du type euclidien. Ces propriétés sont fournies par le théorème suivant:

Théorème 4.6. *Pour qu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2m + 1)$ à $n + 1$ dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_2$ du type euclidien, plongée dans un espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point E_0 fixe situé sur une quadrique régulière $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$ de l'espace projectif $\mathbf{R}_n$. Les courbes engendrées après la première transformation du réseau $(U)_{\mathbf{A}}$ dans un sens et dans l'autre peuvent être arbitraires, à la condition près, que précisément une d'entre elles se trouve plongée dans un sous-espace linéaire à $m - 1$ dimensions de l'espace $\mathbf{R}_n$.*

Démonstration. Nous nous bornons à indiquer ces propriétés géométriques sans nous occuper de la démonstration détaillée du théorème précédent. En effet, cette démonstration ne diffère pas essentiellement de la démonstration du théorème 4.5 et elle s'appuie sur les théorèmes 4.1, 4.4 et sur le théorème 2.3 démontré dans le Mémoire [3].

Le théorème précédent reste valable même dans le cas de $n = 2m + 1$.

4.5. Finalement, nous allons étudier les surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type euclidien. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 4.7. *Pour qu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2m)$ à $n + 1$ dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_3$ du type euclidien, plongée dans un espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point E_0 fixe situé sur une quadrique régulière $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(U)_{\mathbf{A}}$ de l'espace projectif $\mathbf{R}_n$. Les courbes engendrées après la première transformation du réseau $(U)_{\mathbf{A}}$ dans un sens et dans l'autre peuvent être arbitraires, à la condition près, que toutes les deux se trouvent plongées dans un sous-espace linéaire à $m - 1$ dimensions de l'espace $\mathbf{R}_n$.*

Démonstration. Les traits principaux de la démonstration du théorème précédent coïncident avec la démonstration du théorème 4.5 et ils s'appuient sur les théorèmes 4.1, 4.4 et sur le théorème 2.4 qui a été démontré dans le

Mémoire [3]. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de démontrer en détail le théorème précédent.

Si $n = 2m$ en particulier, le théorème 4.7 reste valable sans changement quelconque.

Dans le cas mentionné de $n = 2m$ on peut donner une construction géométrique simple des surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type euclidien qui se trouvent plongées dans un espace non-euclidien à $2m + 1$ dimensions. Pour cela, considérons le système d'équations différentielles qui définit les surfaces en question. Le système correspondant est le suivant

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega^1 E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_0 &= 0\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= V^2\Omega^1 E_0 - i\omega_1^2 E_1 + R_1\Omega^{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= V^2\Omega^{-1}E_0 + i\omega_1^2 E_{-1} + R_1\Omega^1 E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega^1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1}^{2k}E_k + R_k\Omega^{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega^{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1}^{2k}E_{-k} + R_k\Omega^1 E_{-(k+1)}\,, \\
\mathrm{d}E_m &= -R_{m-1}\Omega^1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1}^{2m}E_m\,, \\
\mathrm{d}E_{-m} &= -R_{m-1}\Omega^{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1}^{2m}E_{-m} \\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Le système (4.9) et les résultats précédents nous permettent de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4.8. *Une surface $\boldsymbol{M}_3$ du type euclidien, plongée dans un espace non-euclidien S_{2m+1} à $2m + 1$ dimensions, est engendrée, en la regardant comme une surface de l'espace projectif P_{2m+1}, par les points d'intersection des couples d'espaces générateurs à m dimensions de la quadrique M, qui passent par les espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ de deux courbes, situées dans les espaces à m dimensions qui sont tracées sur la quadrique M et qui passent par le point E_0 attaché à la surface en question.*

Démonstration. On voit, en vertu du système (4.9), que le point E_m (E_{-m}) décrit une courbe $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) et que l'espace osculateur d'ordre k ($k = 1, 2, \ldots, m$) de la courbe en question se trouve déterminé par les points linéairement indépendants $E_{m-k}, E_{m-k+1}, \ldots, E_m$ ($E_{-(m-k)}, E_{-(m-k+1)}, \ldots, E_{-m}$). Les considérations précédentes montrent que les points mentionnés sont situés sur la quadrique M, qui contient la surface étudiée, et qu'ils sont conjugués deux à deux par rapport à cette quadrique. On en voit que les espaces osculateurs d'ordre k de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) se trouvent situés sur la quadrique M. Or, on obtient dans le cas $k = m$ l'espace $[E_0E_1 \ldots E_m]$ ($[E_{-1}E_{-2} \ldots E_{-m}]$) à m dimensions qui est fixe en position, en vertu du système (4.9), et qui passe par le point E_0 fixe attaché à la surface. Donc, les courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$ se trouvent plongées dans des espaces générateurs à m dimensions de la quadrique M, ces espaces passant par le point E_0; remarquons que les espaces en question sont contenus dans l'hyperplan tangent Q de la quadrique $\boldsymbol{M}$ au point E_0.

Choisissons une courbe de la famille $\Omega^1 = 0$ ($\Omega^{-1} = 0$) sur la surface $\boldsymbol{M}_3$. Si le point M se déplace sur la courbe choisie, le point E_m (E_{-m}) reste en position fixe et on vérifie facilement, en vertu du système (4.9), que l'espace $[ME_1 \ldots E_m]$ ($[ME_{-1} \ldots E_{-m}]$) reste aussi en position fixe. Or, l'espace considéré contient l'espace osculateur d'ordre $m - 1$ de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) au point correspondant E_m (E_{-m}) et il dépend d'un paramètre qui est une intégrale première de l'équation différentielle $\Omega^1 = 0$ ($\Omega^{-1} = 0$). Remarquons qu'on n'a aucune correspondance entre les espaces osculateurs de ces deux familles. Les points $M, E_1, \ldots, E_m$ ($M, E_{-1}, \ldots, E_{-m}$) étant situés sur la quadrique $\boldsymbol{M}$ et en même temps conjugués deux à deux par rapport à elle, l'espace $[ME_1 \ldots E_m]$ ($[ME_{-1} \ldots E_{-m}]$) est un espace générateur de la quadrique $\boldsymbol{M}$ et il passe par l'espace osculateur d'ordre $m - 1$ de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$). On obtient ainsi deux familles d'espaces générateurs à m dimensions de la quadrique $\boldsymbol{M}$, ces espaces passant par les espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ des courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$ et jouissant de la propriété que deux espaces arbitraires, qui appartiennent à des familles différentes, se coupent précisément en un point M de la quadrique $\boldsymbol{M}$. On en voit l'affirmation relative à la construction des surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type euclidien.

Remarquons qu'une courbe quelconque du réseau, dont on parle en général dans le théorème 4.7, peut être engendrée de la manière indiquée si l'on choisit un point fixe d'une des deux courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$ et l'espace générateur correspondant de la quadrique $\boldsymbol{M}$ et si l'on construit les points d'intersection de l'espace en question avec des espaces générateurs de la même quadrique, qui appartiennent aux points de l'autre de ces deux courbes.

La construction précédente est une généralisation immédiate de celle des surfaces du type euclidien, qui se trouvent plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante et dont l'indicatrice de courbure normale est une circonférence localement sphérique. Ces surfaces ont été étudiées dans le Mémoire [2].

5. Surfaces du type non-euclidien à circonférences de courbure normale localement sphériques

5.1. Maintenant, nous allons considérer les surfaces $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien. Analytiquement, ces surfaces se trouvent définies par le système d'équations différentielles (3.4), dans lequel on a $V^2 + c \neq 0$. Dans le cas considéré, l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ peut être soit non-euclidien soit euclidien et sa quadrique absolue $\boldsymbol{A}$ est donnée soit par l'equation (3.6), soit par les équations (3.7). En examinant les propriétés projectives de la surface $\boldsymbol{M}$, nous allons la regarder comme une surface d'un espace projectif $\boldsymbol{P}_{n+1}$, définie par le système (3.4). En passant de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ à l'espace non-euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$, nous allons supposer que la quadrique mentionnée $\boldsymbol{A}$ possède, dans un cas et dans l'autre, la propriété d'être l'absolu de l'espace non-euclidien ou euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$.

La projection, prise du point E_0 correspondant, de la surface $\boldsymbol{M}$ est une variété conique de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$ et elle peut être regardée comme une surface plongée dans l'espace projectif $\boldsymbol{R}_n$. Cette surface $\boldsymbol{M}^0$ se trouve définie, d'une manière analytique, par le système d'équations différentielles (3.8), dans lequel on a $V^2 + c \neq 0$. Dans le cas considéré l'espace $\boldsymbol{T}_n$ est non-euclidien et il résulte de l'espace $\boldsymbol{R}_n$ par le choix de la quadrique $\boldsymbol{K}$, donnée par l'équation (3.10), pour l'absolu.

Les théorèmes que nous démontrerons dans les considérations suivantes expriment les propriétés fondamentales des surfaces du type non-euclidien et ils indiquent suffisamment la distinction entre les propriétés des surfaces en question et celles des surfaces du type euclidien qui ont été examinées dans le chapitre précédent. La quadrique $\boldsymbol{K}$, regardée comme une variété conique de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$, est en relation étroite avec la quadrique $\boldsymbol{A}$ du même espace. Cette relation est donnée par le théorème suivant:

Théorème 5.1. *Dans le cas où $c \neq 0$, le point E_0 attaché à la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien n'est pas situé sur la quadrique $\boldsymbol{A}$; la quadrique $\boldsymbol{K}$ est circonscrite du point E_0 à la quadrique $\boldsymbol{A}$ et elle est tangente à cette quadrique le long de sa section avec l'hyperplan polaire Q du point E_0 par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$. Dans le cas où $c = 0$, le point E_0 n'est pas situé dans l'hyperplan Q qui contient la quadrique $\boldsymbol{A}$; la quadrique $\boldsymbol{K}$ est une projection, prise du point E_0, de la quadrique $\boldsymbol{A}$.*

Démonstration. Dans le cas où $c \neq 0$, on voit facilement, en vertu de (3.6), que le point E_0 n'est pas situé, sous la supposition $V^2 + c \neq 0$, sur la quadrique $\boldsymbol{A}$ et que l'hyperplan polaire Q du point E_0 par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$ est donné, dans un système de référence quelconque, par l'équation

$$x + \frac{V^2 + c}{V^2} x^0 = 0 \,. \tag{5.1}$$

En éliminant la coordonnée x^0 des équations (3.6) et (5.1) on obtient l'équation de la quadrique qui est circonscrite du point E_0 à la quadrique $\boldsymbol{A}$. Par un calcul facile on obtient ainsi l'équation (3.10) qui détermine, dans le cas considéré, la quadrique $\boldsymbol{K}$ comme un objet formé par des droites de l'espace $\boldsymbol{P}_{n+1}$.

Dans le cas de $c = 0$, l'équation (3.7) montre que le point E_0 n'est pas situé dans l'hyperplan Q donné par l'équation $x + x^0 = 0$. En éliminant la coordonnée x^0 des équations (3.7) on obtient l'équation de la quadrique qui est une projection, prise du point E_0, de la quadrique $\boldsymbol{A}$ donnée, dans le cas considéré, par les équations en question. On obtient ainsi l'équation (3.10) qui détermine la quadrique $\boldsymbol{K}$ comme un objet formé par des droites de l'éspace $\boldsymbol{P}_{n+1}$. On en voit facilement que le théorème précédent se trouve ainsi démontré.

Remarquons que la première équation (3.7) est identique à l'équation (5.1) en y posant $c = 0$. C'est pourquoi nous allons regarder l'hyperplan qui contient la quadrique régulière $\boldsymbol{A}$ en question comme l'hyperplan polaire du point E_0 par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$ donnée par les équations (3.7).

La propriété suivante des surfaces considérées est tout-à-fait analogue à celle des surfaces du type euclidien.

Théorème 5.2. *Dans le cas où $c \neq 0$, la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien se trouve située sur la quadrique $\boldsymbol{M}$ qui est tangente à la quadrique $\boldsymbol{A}$ le long de sa section avec l'hyperplan polaire Q du point E_0 par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$ et qui appartient au faisceau de quadriques déterminé par la quadrique $\boldsymbol{A}$ et par l'hyperplan double Q. Dans le cas de $c = 0$, la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien se trouve située sur la quadrique $\boldsymbol{M}$ qui est tangente à la projection, prise du point E_0, de la quadrique $\boldsymbol{A}$ le long de sa section avec l'hyperplan polaire du point E_0 par rapport à la quadrique $\boldsymbol{A}$ et qui contient la quadrique en question. Dans l'espace non-euclidien (euclidien) $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à l'absolu $\boldsymbol{A}$ la quadrique $\boldsymbol{M}$ est une hypersphère de centre E_0.*

Démonstration. En désignant d'une manière habituelle les coordonnées du point M de la surface $\boldsymbol{M}$, on a dans le cas où $c \neq 0$, d'après les remarques faites dans les explications préliminaires, une équation de la forme

$$\frac{1}{c}(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = \frac{1}{c}. \tag{5.2}$$

D'une manière analogue, les coordonnées du point M^0 satisfont, en vertu de la supposition $V^2 + c \neq 0$, à une équation de la forme

$$\frac{1}{V^2 + c}(x)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = \frac{1}{V^2 + c}. \tag{5.3}$$

Les deux équations (5.2) et (5.3) étant remplies par les coordonnées du même point M situé sur la surface en question, on a aussi l'équation suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 &= \\ = \frac{V^2 + c}{c}\left\{\frac{1}{V^2 + c}(x)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2\right\},\end{aligned}$$

que l'on peut mettre, par un calcul facile, sous la forme

$$\frac{1}{c}(x + x^0)^2 + \frac{1}{V^2}(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - \frac{1}{c}\left(x + \frac{V^2 + c}{V^2}x^0\right)^2 = 0\,. \tag{5.4}$$

On en voit que les points de la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien se trouvent situés, dans le cas considéré, sur une hypersurface quadratique $\boldsymbol{M}$, et l'équation précédente montre que cette quadrique appartient au faisceau de quadriques déterminé par la quadrique $\boldsymbol{A}$ et par l'hyperplan double Q. Autrement dit, la quadrique $\boldsymbol{M}$ est tangente à la quadrique $\boldsymbol{A}$ le long de sa section avec l'hyperplan Q.

Dans le cas de $c = 0$, la démonstration se fait d'une manière analogue. Maintenant, on a les équations

$$x + x^0 = 1\,, \quad \frac{1}{V^2}(x)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = \frac{1}{V^2}\,, \tag{5.5}$$

qui résultent des explications préliminaires et qui conduisent à une équation de la forme

$$\frac{1}{V^2}(x)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - \frac{1}{V^2}(x + x^0)^2 = 0\,. \tag{5.6}$$

Cette équation montre que les points de la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien se trouvent situés sur une quadrique $\boldsymbol{M}$, dont la relation avec la quadrique $\boldsymbol{A}$ est décrite dans le théorème précédent.

En choisissant la quadrique $\boldsymbol{A}$ pour l'absolu de l'espace non-euclidien (euclidien) $\boldsymbol{S}_{n+1}$ correspondant, la quadrique $\boldsymbol{M}$ devient, dans la métrique ainsi déterminée, une hypersphère de l'espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$. La démonstration du théorème précédent est ainsi accomplie.

Remarquons que chaque surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien est une *surface sphérique* plongée dans un espace non-euclidien ou euclidien $\boldsymbol{S}_{n+1}$.

5.2. Choisissons un espace quelconque $\boldsymbol{P}_n$ à n dimensions qui ne passe pas par le point E_0, attaché à la surface $\boldsymbol{M}$ considérée du type non-euclidien, et étudions la projection, prise du point E_0, de la surface $\boldsymbol{M}$ dans l'espace en question. Nous faisons usage des explications faites dans le cas des surfaces du type euclidien et nous nous bornons aux résultats relatifs aux surfaces $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace $\boldsymbol{R}_n$. Rappelons que, dans le cas des surfaces du type non-euclidien, on peut induire à l'espace $\boldsymbol{R}_n$ une métrique non-euclidienne moyennant la quadrique $\boldsymbol{K}$, donnée par l'équation (3.10), et considérer l'espace non-euclidien $\boldsymbol{T}_n$.

Théorème 5.3. *La projection, prise du point E_0 correspondant, de la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien est une surface $\boldsymbol{M}^0$ qui jouit, dans la métrique non-euclidienne déterminée par l'absolu $\boldsymbol{K}$, de la propriété que les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, dans un point quelconque M^0 de cette surface sont des circonférences centrées au point M^0.*

D é m o n s t r a t i o n. Analytiquement, la surface $\boldsymbol{M}$ étudiée du type non-euclidien se trouve déterminée par le système d'équations différentielles (3.4) avec la valeur $V^2 + c \neq 0$. La projection, prise du point E_0, de la surface $\boldsymbol{M}$ est une surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace $\boldsymbol{R}_n$, qui se trouve définie par le système d'équations différentielles (3.8), dans lequel $V^2 + c \neq 0$. Or les résultats de M. O. Borůvka dans le Mémoire [1] montrent que le système en question définit, de façon analytique, les surfaces qui sont plongées dans l'espace non-euclidien $\boldsymbol{T}_n$

à l'absolu $\mathbf{K}$ et qui jouissent, dans la métrique déterminée par la quadrique mentionnée, des propriétés énoncées dans le théorème précédent, qui se trouve ainsi démontré.

Nous avons démontré par les considérations qui précèdent que la projection, prise du point E_0, de la surface du type non-euclidien dans un espace quelconque $\mathbf{P}_n$, qui ne passe pas par le point E_0, est une surface dont les propriétés métriques sont énoncées dans le théorème 5.3. La métrique non-euclidienne correspondante s'obtient en prenant la quadrique d'intersection de l'espace $\mathbf{P}_n$ avec la quadrique $\mathbf{K}$ pour l'absolu. En vertu du théorème 5.1, cette quadrique est une projection, prise du point E_0, de la quadrique $\mathbf{A}$ dans l'espace $\mathbf{P}_n$. Remarquons que chaque surface $\boldsymbol{M}^0$ est une surface minimum à $m - 1$ circonférences de courbure normale, plongée dans un espàce non-euclidien à n dimensions. Dans les considérations suivantes nous ferons usage des résultats qui se rapportent aux propriétés démontrées dans le Mémoire [3] au sujet des surfaces en question.

Dans le théorème suivant il s'agit des propriétés des courbes minima sur une surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien, ces courbes étant définies par l'équation différentielle $\Omega^1\Omega^{-1} = 0$. Rappelons pour cela que nous avons appelé, dans le Mémoire [3], chaque réseau conjugué sur une surface de l'espace $\mathbf{P}_n$ à n dimensions *réseau conjugué* (V), si les premières, deuxièmes, ..., $m^{ièmes}$ transformations laplaciennes de ce réseau, dans les deux sens, sont situées sur une quadrique régulière de l'espace $\mathbf{P}_n$ et si les transformations laplaciennes, déduites du réseau en question par le même nombre de transformations dans un sens et dans l'autre, sont conjuguées par rapport à la quadrique indiquée à toutes les transformations laplaciennes du réseau initial, qui sont contenues parmi les transformations mentionnées.

Dans ce qui suit nous allons traiter le réseau conjugué (V) qui se trouve défini dans l'espace projectif $\mathbf{R}_n$ moyennant la quadrique $\mathbf{K}$. Cette quadrique étant parfaitement déterminée par la quadrique $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ et par le point E_0 attaché à la surface $\boldsymbol{M}$, nous désignons par $(V)_{\mathbf{A}}$ le réseau conjugué (V) en question.

Cela étant, nous pouvons démontrer la propriété suivante des courbes minima sur la surface $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien.

Théorème 5.4. *Les courbes minima sur la surface* $\boldsymbol{M}$ *du type non-euclidien forment un réseau de courbes, dont la projection, prise du point* E_0 *correspondant, est le réseau conjugué* $(V)_{\mathbf{A}}$ *sur la surface* $\boldsymbol{M}^0$, *plongée dans l'espace non-euclidien* $\mathbf{T}_n$.

Démonstration. La méthode de la démonstration du théorème précédent étant tout-à-fait analogue à celle de la démonstration du théorème 4.4, il est possible d'omettre la démonstration en question, dont la partie principale consiste dans l'application des résultats démontrés dans le Mémoire [3].

Les considérations suivantes sont consacrées à la recherche des propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}$ du type non-euclidien. Nous allons distinguer les considérations correspondantes du point de vue du paragraphe 2.5, où nous avons obtenu trois classes différentes de surfaces en question.

5.3. En premier lieu, nous nous occuperons des surfaces $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien et nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 5.5. *Pour qu'une surface de l'espace projectif* $\mathbf{P}_{n+1}$ ($n \geqq 2m + 1$) *à* $n + 1$ *dimensions puisse être définie comme une surface* $\boldsymbol{M}_1$ *du type non-euclidien, plongée dans un espace non-euclidien* (*euclidien*) $\mathbf{S}_{n+1}$ *à* $n + 1$ *dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière* $\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{P}_{n+1}$ (*dans un hyperplan* Q *de l'espace* $\mathbf{P}_{n+1}$ *qui contient une quadrique régulière* $\mathbf{A}$) *et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point* E_0, *est le réseau conjugué* $(V)_\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{R}_n$. *La suite de Laplace du réseau conjugué en question ne s'arrête dans aucun des deux sens après m transformations.*

Démonstration. Tout d'abord, nous allons démontrer que chaque surface $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques jouit des propriétés projectives mentionnées. Pour cela, nous la regardons comme une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ et nous rappelons que, d'après les théorèmes 3.1 et 5.1, il existe un point E_0 fixe jouissant des propriétés énoncées et que, d'après le théorème 5.4, les courbes minima de la surface en question forment un réseau de courbes, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(V)_\mathbf{A}$ sur la surface $\boldsymbol{M}^0$ de l'espace $\mathbf{R}_n$. L'affirmation sur la suite des transformations laplaciennes du réseau conjugué $(V)_\mathbf{A}$ a été démontrée dans le théorème 3.2 du Mémoire [3]. On en voit que chaque surface $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques jouit des propriétés projectives en question.

Maintenant, il ne reste qù à établir la réciproque. Supposons qu'il soit possible de faire correspondre à une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ un point E_0 fixe possédant des propriétés indiquées et que la surface considérée puisse être douée d'un réseau de courbes dont les propriétés détaillées sont fournies par le théorème précédent. Ces suppositions étant satisfaites, nous démontrerons qu'une telle surface peut être regardée comme une surface $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien qui jouit, dans un espace non-euclidien ou euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$, des propriétés métriques en question. Parce que la démonstration des affirmations correspondantes est analogue dans les deux cas possibles, nous ne nous bornons qu'au cas où il s'agit d'une métrique non-euclidienne. Cela exige la supposition que la quadrique $\mathbf{A}$ soit une quadrique régulière de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$.

Faisons correspondre à chaque point M de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ un repère mobile R formé par les points linéairement indépendants M, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$ et répétons les mêmes considérations que nous avons suivi en démontrant le théorème 4.5. En particulier, rappelons que le choix des points $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans le plan tangent de la surface au point M entraîne les équations linéaires (2.2). Ensuite, on vérifie facilement que la supposition relative à l'existence du point E_0 peut être exprimée, en choisissant convenablement le point $\mathbf{e}_0$, par les équations de la forme (4.8), dans lesquelles V est une constante différente de zéro. Le point E_0 n'étant pas situé sur la quadrique $\mathbf{A}$ donnée par l'équation (1.1), on obtient facilement l'inégalité $V^2 + c \neq 0$. Donc, le repère mobile R attaché à la surface étant choisi convenablement, les équations (4.6) et la condition $V^2 + c \neq 0$ expriment, de façon analytique, les propriétés de la surface en question, qui se rapportent à l'existence du point E_0 correspondant.

La partie ultérieure de la démonstration s'accorde avec les considérations que nous avons faites dans la démonstration du théorème 4.5 si nous changeons la condition valable pour la constante $V^2 + c$. Donc, il n'est pas nécessaire de s'occuper en détail de cette partie de la démonstration et on peut se contenter de la circonstance que toutes les propriétés concernant l'existence d'un réseau de courbes sur la surface étudiée sont exprimées, le repère R considéré étant choisi convenablement, par le système d'équations différentielles (4.8) et par la condition qu'au moins une forme de chaque des deux systèmes (2.31) soit différente de zéro. On y utilise essentiellement les résultats qui se trouvent dans la démonstration du théorème 2.2 contenu dans le Mémoire [3].

On voit ainsi que toutes les suppositions de cette partie de la démonstration peuvent être exprimées, si nous particularisons le repère attaché à la surface d'une manière convenable, par les équations (2.2), (4.6) et (4.8). Parce que ce système est identique au système d'équations différentielles (2.27) et (2.28), il est possible de regarder chaque surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ jouissant des propriétés indiquées comme une surface $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques, plongée dans un espace non-euclidien $\mathbf{S}_{n+1}$. En respectant les suppositions de ci-dessus on voit que le théorème est ainsi démontré.

En supposant que le point E_0 ne se trouve pas situé dans un hyperplan Q qui contient une quadrique régulière $\mathbf{A}$, on est amené à remplacer la condition $V^2 + c \neq 0$ par l'inégalité $V \neq 0$, qui est contenue dans la condition précédente pour $c = 0$. On en voit facilement que le théorème précédent reste valable en ce qui concerne la proposition relative aux surfaces plongées dans l'espace euclidien et il se trouve ainsi démontré complètement.

Le théorème 5.5 est valable dans un espace quelconque dont la dimension satisfait à l'inégalité $n \geqq 2m + 1$. Il contient comme le cas le plus simple une caractérisation projective des surfaces $\boldsymbol{M}_1$ considérées du type non-euclidien qui sont plongées dans un espace à $2m + 2$ dimensions. Dans ce cas on peut énoncer le résultat du théorème précédent d'une manière plus précise:

Théorème 5.6. *Pour qu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{2m+2}$ à $2m + 2$ dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_1$ du type non-euclidien,* *plongée dans un espace non-euclidien (euclidien)* $\mathbf{S}_{2m+2}$ *à* $2m+2$ *dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière* $\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{P}_{2m+2}$ *(dans un hyperplan* Q *de l'espace* $\mathbf{P}_{2m+2}$ *qui contient une quadrique régulière* $\mathbf{A}$*) et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point* E_0*, est le réseau conjugué de l'espace* $\mathbf{R}_{2m+1}$*, dont la suite de Laplace est périodique à période* $2(m+1)$ *et autopolaire par rapport à la quadrique régulière* $\mathbf{K}$ *de l'espace* $\mathbf{R}_{2m+1}$.

Démonstration. Toutes les affirmations du théorème précédent sont des conséquences immédiates des résultats démontrés dans le théorème 5.5 et dans le théorème 3.3 du Mémoire [3]. Donc, il n'est pas besoin de s'occuper en détail de la démonstration du théorème ci-dessus.

5.4. Maintenant, nous allons étudier les propriétés projectives caractéristiques des surfaces $\boldsymbol{M}_2$ du type non-euclidien. Ces propriétés sont fournies par le théorème suivant:

Théorème 5.7. *Pour qu'une surface de l'espace projectif* $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2m+1)$ *à* $n+1$ *dimensions puisse être définie comme une surface* $\boldsymbol{M}_2$ *du type non-euclidien, plongée dans un espace non-euclidien (euclidien)* $\mathbf{S}_{n+1}$ *à* $n+1$ *dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière* $\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{P}_{n+1}$ *(dans un hyperplan* Q *de l'espace* $\mathbf{P}_{n+1}$ *qui contient une quadrique régulière* $\mathbf{A}$*) et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point* E_0*, est le réseau conjugué* $(V)_{\mathbf{A}}$ *de l'espace* $\mathbf{R}_n$*. La suite de Laplace du réseau conjugué en question s'arrête précisément dans un des deux sens après m transformations de le manière de Goursat.*

Démonstration. Il n'est pas nécessaire de démontrer en détail le théorème précédent, car la démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème 5.5. On y applique les résultats des théorèmes 5.1 et 5.4 et les conclusions formulées dans le théorème 3.4 du Mémoire [3].

Dans le cas le plus simple où $n = 2m+1$, le résultat correspondant peut être énoncé d'une manière plus précise:

Théorème 5.8. *Pour qu'une surface de l'espace projectif* $\mathbf{P}_{2m+2}$ *à* $2m+2$ *dimensions puisse être définie comme une surface* $\boldsymbol{M}_2$ *du type non-euclidien, plongée dans un espace non-euclidien (euclidien)* $\mathbf{S}_{2m+2}$ *à* $2m+2$ *dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point* E_0 *fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière* $\mathbf{A}$ *de l'espace* $\mathbf{P}_{2m+2}$ *(dans un hyperplan* Q *de l'espace* $\mathbf{P}_{2m+2}$ *qui contient une quadrique régulière* $\mathbf{A}$*) et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point* E_0*, est le réseau conjugué de l'espace* $\mathbf{R}_{2m+1}$*. La suite de Laplace du réseau conjugué en question est autopolaire par rapport à la quadrique régulière* $\mathbf{K}$ *de l'espace* $\mathbf{R}_{2m+1}$ *et elle jouit de la propriété que les premières, deuxièmes, ...,* $m^{\text{ièmes}}$ *transformations laplaciennes se trouvent situées sur la quadrique* $\mathbf{K}$ *et que la suite en question s'arrête, dans un des deux sens, après m transformations* *de la manière de Goursat et, dans l'autre sens, après $m + 1$ transformations de la manière de Laplace.*

Démonstration. Les affirmations du théorème en question résultent immédiatement du théorème 5.7 et du théorème 3.5 formulé dans le Mémoire [3]. Donc, il est possible d'omettre la démonstration détaillée.

5.5. Finalement, nous allons nous occuper des surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien.

Théorème 5.9. *Pour qu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2m)$ à $n + 1$ dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien, plongée dans un espace non-euclidien (euclidien) $\mathbf{S}_{n+1}$ à $n + 1$ dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un point E_0 fixe qui n'est pas situé sur une quadrique régulière $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ (dans un hyperplan Q de l'espace $\mathbf{P}_{n+1}$ qui contient une quadrique régulière $\mathbf{A}$) et que la surface en question soit douée d'un réseau, dont la projection, prise du point E_0, est le réseau conjugué $(V)_{\mathbf{A}}$ de l'espace $\mathbf{R}_n$. La suite de Laplace du réseau en question s'arrête dans les deux sens après m transformations de la manière de Goursat.*

Démonstration. Il n'est pas besoin de démontrer en détail le théorème précédent, car la démonstration est analogue à celle du théorème 5.5. Elle s'appuie sur les théorèmes 5.1, 5.4 et en particulier sur les résultats démontrés dans le théorème 3.6 du Mémoire [3].

Le théorème 5.9 reste valable même dans le cas le plus simple de $n = 2m$

On peut donner dans ce cas une construction géométrique simple des surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien qui se trouvent plongées dans un espace non-euclidien ou euclidien à $2m + 1$ dimensions. Pour cela, nous écrivons le système d'équations différentielles qui définit les surfaces en question. Le système correspondant est le suivant

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega^{1}E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_0 &= 0\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -(V^2 + c)\,\Omega^1 M + V^2\Omega^1 E_0 - i\omega_1^2 E_1 + R_1\Omega^{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -(V^2 + c)\,\Omega^{-1} M + V^2\Omega^{-1} E_0 + i\omega_1^2 E_{-1} + R_1\Omega^{1}E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega^1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1}^{2k} E_k + R_k\Omega^{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega^{-1} E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1}^{2k} E_{-k} + R_k\Omega^{1}E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -R_{m-1}\Omega^1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1}^{2m} E_m\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -R_{m-1}\Omega^{-1} E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1}^{2m} E_{-m}\\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, m-1)\,.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Au moyen de ce système et des résultats précédents nous déduirons la construction suivante des surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien:

Théorème 5.10. *Une surface $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien, plongée dans un espace non-euclidien ou euclidien S_{2m+1} à $2m + 1$ dimensions, se trouve engendrée, en tant qu'une surface de l'espace projectif P_{2m+1}, par des points d'intersection des couples d'espaces générateurs à m dimensions de la quadrique M, qui passent par des espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ de deux courbes qui sont situées elles-mêmes, ainsi que leurs espaces osculateurs d'ordre $m - 1$, sur la quadrique M et dans l'hyperplan polaire Q du point E_0, attaché à la surface en question, par rapport à cette quadrique.*

Démonstration. On voit, en vertu du système (5.7), que le point E_m (E_{-m}) décrit une courbe $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ et que l'espace osculateur d'ordre k $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m - 1)$ de la courbe en question se trouve déterminé par les points linéairement indépendants $E_{m-k}, E_{m-k+1}, \ldots, E_m$ $(E_{-(m-k)}, E_{-(m-k+1)}, \ldots, E_{-m})$. Ces points étant situés sur la quadrique M qui contient la surface en question et étant conjugués deux à deux par rapport à cette quadrique, on voit en particulier que la courbe $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ se trouve située elle-même, ainsi que ses espaces osculateurs d'ordre $m - 1$, sur la quadrique M. On vérifie facilement que les points $E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-m})$ sont conjugués au point E_0 par rapport à la quadrique M et on en conclut que les espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ se trouvent plongés dans l'hyperplan polaire Q du point E_0 par rapport à la quadrique M.

Choisissons une courbe de la famille $\Omega^1 = 0$ $(\Omega^{-1} = 0)$ sur la surface $\boldsymbol{M}_3$. Si le point M se déplace sur la courbe choisie, le point E_m (E_{-m}) reste en position fixe et le système (5.7) montre facilement que l'espace $[ME_1 \ldots E_m]$ $([ME_{-1} \ldots E_{-m}])$ reste aussi en position fixe. Or cet espace passe par l'espace osculateur d'ordre $m - 1$ de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ au point E_m (E_{-m}) correspondant et il dépend d'un paramètre qui est une intégrale première de l'équation différentielle $\Omega^1 = 0$ $(\Omega^{-1} = 0)$. On n'a aucune correspondance entre les espaces en question de sorte qu'il n'existe aucune correspondance entre les points des courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$. Remarquons que les points $M, E_1, \ldots, E_m$ $(M, E_{-1}, \ldots, E_{-m})$ se trouvent situés sur la quadrique M et qu'ils sont conjugués deux à deux par rapport à elle. Par conséquent, l'espace $[ME_1 \ldots E_m]$ $([ME_{-1} \ldots E_{-m}])$ est un espace générateur de la quadrique M et il passe par l'espace osculateur d'ordre $m - 1$ de la courbe $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$. On obtient ainsi deux familles d'espaces générateurs à m dimensions de la quadrique M, ces espaces passant par des espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ des courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$ et jouissant de la propriété que deux espaces arbitraires qui appartiennent à des familles différentes se coupent en un point de la quadrique M. On en voit que la surface considérée $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien peut être engendrée de la manière formulée dans le théorème précédent.

Remarquons qu'une courbe quelconque du réseau, dont on parle en général dans le théorème 5.8, peut être engendrée de la manière indiquée si l'on choisit un point fixe d'une des deux courbes $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{E}_{-m}$ et l'espace générateur correspondant de la quadrique $\boldsymbol{M}$ et si l'on construit les points d'intersection de l'espace en question avec des espaces générateurs de la même quadrique, qui appartiennent aux points de l'autre de ces deux courbes.

Il faut compléter les considérations précédentes par une remarque importante. La surface $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien étant donnée, on peut déterminer d'une manière univoque le point E_0 fixe en position et la quadrique régulière $\boldsymbol{M}$. Cela étant, la surface en question se trouve engendrée sur la quadrique $\boldsymbol{M}$ de la manière énoncée à l'aide des espaces générateurs de la quadrique $\boldsymbol{M}$ qui passent par des espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ de deux courbes situées sur la quadrique $\boldsymbol{M}$. Par contre, si nous choisissons une quadrique régulière $\boldsymbol{M}$ et un point E_0 fixe qui n'est pas situé sur cette quadrique et que nous prenions deux courbes sur la quadrique $\boldsymbol{M}$, dont les espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ se trouvent situés sur la quadrique en question et dans l'hyperplan polaire du point E_0, nous pouvons construire le lieu des points d'intersection des couples d'espaces générateurs de la quadrique $\boldsymbol{M}$, qui passent par des espaces osculateurs d'ordre $m - 1$ des courbes choisies. Or le lieu de ces points n'est pas identique à l'ensemble des points d'une surface $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien. On peut démontrer que le lieu considéré est formé par des points qui remplissent deux surfaces $\boldsymbol{M}_3$ du type non-euclidien et que les deux points que l'on obtient par la construction précédente appliquée sur les espaces osculateurs fixes d'ordre $m - 1$ des courbes données, se trouvent situés sur une droite passant par le point E_0. Il existe une correspondance biunivoque entre les deux surfaces $\boldsymbol{M}_3$ situées sur la même quadrique $\boldsymbol{M}$, à savoir une homographie centrale qui laisse fixe le point E_0, ainsi que l'hyperplan Q, et transforme la quadrique $\boldsymbol{M}$ en elle-même. Nous nous bornons aux remarques précédentes sans les justifier en détail.

La construction déduite dans le théorème 5.10 est une généralisation immédiate de celle des surfaces du type non-euclidien, qui se trouvent plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante et dont l'indicatrice de courbure normale est une circonférence localement sphérique. Ces surfaces font l'objet des recherches du Mémoire [2].

6. Note sur les surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique

6.1. Dans la définition, énoncée au paragraphe 2.1, des surfaces à $m - 1$ circonférences de courbure normale localement sphériques nous avons fait la supposition que $r \geqq 1$, $m \geqq 3$, $r < m - 1$. Ces inégalités entraînent qu'il existe, pour un point M quelconque de la surface, au moins une circonférence localement sphérique dont le centre ne coïncide pas avec le point M et, en même temps, au moins une circonférence localement sphérique de centre M. Or on a $r = 1$ d'après le théorème 2.2 et les inégalités précédentes montrent que $m > 2$. On en voit que, dans un point M quelconque de la surface, l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est une circonférence de courbure normale localement sphérique dont le centre est à distance non nulle du point M de la surface et que les indicatrices de courbure normale d'ordre $2, \ldots, m-1$ sont des circonférences localement sphériques centrées au point M. Les surfaces en question existent dans un espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ quelconque à courbure constante dont la dimension satisfait à l'inégalité $n+1 \geqq 2m+1$.

Dans ce chapitre, nous allons faire quelques remarques sur les surfaces, dont la définition s'obtient de celle qui a été énoncée au paragraphe 2.1, si nous y supprimons les propriétés relatives à des indicatrices de courbure normale d'ordre $k = r+1, r+2, \ldots, m-1$. Or, on a $r = 1$ nécessairement de sorte que les surfaces que nous allons étudier dans la suite sont plongées dans un espace à $n+1$ ($\geqq 5$) dimensions et elles jouissent de la propriété d'avoir, dans un point M quelconque, pour l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 une circonférence localement sphérique de centre qui est à distance différente de zéro du point M de la surface. Nous désignons encore $\boldsymbol{M}$ les surfaces en question et nous les appelons *surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique*.

Dans le cas de $n = 4$ on obtient ainsi les surfaces qui sont étudiées profondément dans le Mémoire [2]. C'est pourquoi nous allons supposer dans la suite que les surfaces considérées appartiennent à un espace $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à $n+1$ (>5) dimensions à courbure constante c.

6.2. Faisons correspondre à chaque point M de la surface $\boldsymbol{M}$ un repère mobile R et exprimons alors que l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est une circonférence localement sphérique dont le centre jouit des propriétés supposées dans la définition précédente. D'après (2.2), (2.8) et (2.11) on voit que les surfaces en question se trouvent déterminées, d'une manière analytique, par le système d'équations différentielles (2.1) dont les coefficients sont donnés par des équations de la forme

$$\begin{gathered}
\omega^0 = \omega^3 = \omega^4 = \ldots. = \omega^n = 0\,, \\
\omega_1^0 = V\omega^1\,, \quad \omega_1^3 = R_1\omega^1\,, \quad \omega_1^4 = R_1\omega^2\,, \\
\omega_2^0 = V\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = -R_1\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = R_1\omega^1\,, \\
\omega_1^j = 0\,, \quad \omega_2^j = 0 \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Dans les remarques suivantes nous nous bornons encore au cas où la distance V est constante le long de la surface en question.

Les conditions d'intégrabilité du système (6.1), obtenues par différentiation extérieure, forment un système de relations extérieures quadratiques et on le peut mettre par un calcul facile sous la forme

$$
\begin{gathered}
[\omega^1\omega_0^3] + [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] - [\omega^2\omega_0^3] = 0\,, \\
[\omega^1\omega_0^3] - [\omega^2\omega_0^4] = 0\,, \quad [\omega^1\omega_0^4] + [\omega^2\omega_0^3] = 0\,, \\
\left[\omega^1 \frac{\mathrm{d}R_1}{R_1}\right] + [\omega^2(2\omega_1^2 - \omega_3^4)] = 0\,, \quad [\omega^1(2\omega_1^2 - \omega_3^4)] - \left[\omega^2 \frac{\mathrm{d}R_1}{R_1}\right] = 0\,, \qquad (6.2) \\
\left[\omega^1\left(\frac{V}{R_1}\,\omega_0^j + \omega_3^j\right)\right] + [\omega^2\omega_4^j] = 0\,, \; [\omega^1\omega_4^j] + \left[\omega^2\left(\frac{V}{R_1}\,\omega_0^j - \omega_3^j\right)\right] = 0 \\
(j = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{gathered}
$$

Les relations qui sont écrites dans les deux premières lignes du système (6.2) entraînent les équations

$$\omega_0^3 = 0\,, \quad \omega_0^4 = 0 \qquad (6.3)$$

qui fournissent, à leur tour, deux relations nouvelles

$$\sum_{j=5}^{n}[\omega_0^j\omega_3^j] = 0\,, \quad \sum_{j=5}^{n}[\omega_0^j\omega_4^j] = 0. \qquad (6.4)$$

Nous posons, en vertu des équations (6.2),

$$
\begin{gathered}
\frac{V}{R_1}\,\omega_0^j = (p_{31}^j + p_{42}^j)\,\omega^1 - (p_{32}^j - p_{41}^j)\,\omega^2\,, \\
\omega_3^j = p_{31}^j\omega^1 + p_{32}^j\omega^2\,, \quad \omega_4^j = p_{41}^j\omega^1 + p_{42}^j\omega^2 \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,,
\end{gathered} \qquad (6.5)
$$

les p étant des fonctions des paramètres dont dépend le repère R. En substituant les expressions (6.5) dans les équations (6.4), on obtient les relations

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=5}^{n}(\overline{p_{31}^j + p_{42}^j}\cdot p_{32}^j + \overline{p_{32}^j - p_{41}^j}\cdot p_{31}^j) = 0\,, \\
\sum_{j=5}^{n}(\overline{p_{31}^j + p_{42}^j}\cdot p_{42}^j + \overline{p_{32}^j - p_{41}^j}\cdot p_{41}^j) = 0
\end{gathered} \qquad (6.6)
$$

qui doivent être vérifiées par les fonctions p.

Nous laissons de côté la recherche de l'existence des surfaces considérées dans le cas le plus général et nous nous bornons aux surfaces pour lesquelles

$$p_{31}^j + p_{42}^j = 0\,, \quad p_{32}^j - p_{41}^j = 0 \quad (j = 5, 6, \ldots, n)\,. \qquad (6.7)$$

Donc, nous supposons dans la suite que les équations (6.6) soient satisfaites par les relations (6.7) et que les surfaces soient définies, d'une manière analytique, par le système (6.1) qui est prolongé, d'après (6.3) et (6.5), par les équations

$$\omega_0^j = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \qquad (6.8)$$

Or, on voit facilement que les équations (6.8) n'entraînent aucune relation nouvelle. Il en suit que les conditions d'intégrabilité du système d'équations de Pfaff (6.1) et (6.8) sont exprimées par les relations extérieures qui sont écrites dans les quatre dernières lignes du système (6.2) et dans lesquelles on a substitué d'après (6.8). On peut mettre les relations en question sous la forme

$$\begin{gathered}
\left[(\omega^1 - i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + i\,.\,\overline{2\omega_1^2 - \omega_3^4}\right)\right] = 0\,, \\
\left[(\omega^1 + i\omega^2)\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} - i\,.\,\overline{2\omega_1^2 - \omega_3^4}\right)\right] = 0\,, \\
[(\omega^1 - i\omega^2)(\omega_3^j + i\omega_4^j)] = 0\,, \quad [(\omega^1 + i\omega^2)(\omega_3^j - i\omega_4^j)] = 0 \\
(j = 5, 6, \ldots, n)
\end{gathered} \tag{6.9}$$

et on en voit que le système d'équations de Pfaff (6.1) et (6.8) est en involution et que sa solution générale dépend de $2(n - 3)$ fonctions d'une variable. Le raisonnement précédent permet de voir qu'*il existe, dans un espace* $\mathbf{S}_{n+1}$ $(n \geqq 5)$ *quelconque à* $n + 1$ *dimensions à courbure constante, au moins une classe de surfaces* $\boldsymbol{M}$ *à une circonférence de courbure normale localement sphérique. En général, les surfaces de la classe en question dépendent de* $2(n - 3)$ *fonctions d'une variable.*

Remarquons que l'on obtient le nombre de fonctions d'une variable dont dépend la solution générale du système considéré d'équations de Pfaff en posant $m = 2$ dans le résultat énoncé dans le théorème 2.1. Il reste à répondre à la question de savoir s'il existe, outre les surfaces considérées dans ce qui précède, encore d'autres classes de surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique, ou bien si les surfaces en question sont les seules qui jouissent des propriétés métriques mentionnées.

Le résultat précédent reste valable même dans le cas de $n = 4$, comme on le voit facilement en comparant les considérations de ce paragraphe avec celles du Mémoire [2]; or, dans le cas en question, il existe, dans un espace à cinq dimensions à courbure constante, précisément une classe de surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique.

6.3. Les surfaces $\boldsymbol{M}$, dont l'existence a été établie au paragraphe précédent, se trouvent déterminées par le système d'équations différentielles (2.1) à coefficients qui sont donnés par les équations (6.1) et (6.8). En faisant usage de la notation antérieure, on peut remplacer le système en question par le système équivalent suivant

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega^1 E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_0 &= 0\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= -(V^2 + c)\,\Omega^1 M + V^2\Omega^1 E_0 - i\omega_1^2 E_1 + R_1\Omega^{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= -(V^2 + c)\,\Omega^{-1} M + V^2\Omega^{-1} E_0 + i\omega_1^2 E_{-1} + R_1\Omega^1 E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_2 &= -R_1\Omega^1 E_1 - i\omega_3^4 E_2 + \sum_{j=5}^{n}(\omega_3^j + i\omega_4^j)\,\mathbf{e}_j\,,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\mathrm{d}E_{-2} = - R_1 \Omega^{-1} E_{-1} + i\omega_3^4 E_{-2} + \sum_{j=5}^{n} (\omega_3^j - i\omega_4^j)\, \mathbf{e}_j\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_h = - \tfrac{1}{2}(\omega_3^h - i\omega_4^h)\, E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_3^h + i\omega_4^h)\, E_{-2} + \sum_{j=5}^{n} \omega_h^j \mathbf{e}_j$$

$$(h = 5, 6, \ldots, n)\,.$$

La comparaison des deux systèmes (6.10) et (3.4) montre immédiatement que *les propriétés géométriques que nous avons établies dans les chapitres précédents restent valables même dans le cas de la classe considérée de surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique.* Quant aux propriétés qui dépendent du nombre de circonférences de courbure normale localement sphériques, il faut poser, dans les résultats correspondants, $m = 2$. Pour cette raison il est possible de se dispenser d'une déscription complète des propriétés des surfaces en question.

En particulier, les considérations précédentes fournissent les propriétés essentielles des surfaces à une circonférence de courbure normale localement sphérique, plongées dans un espace à six dimensions à courbure constante, et elles complètent les résultats qui se rapportent aux surfaces $\boldsymbol{M}$ étudiées dans le Mémoire [2].

LITTÉRATURE

[1] *O. Borůvka*: Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, I. No *165* (1932), II. No *212* (1935), III. No *214* (1935).

[2] *K. Svoboda,* Sur une classe de surfaces à l'indicatrice de courbure normale localement sphérique dans un espace à cinq dimensions, Práce Brněnské základny Československé akademie věd, *XXVII* (1955), 373—392.

[3] *K. Svoboda,* Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti, Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 287—316.

Резюме

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно

(Поступило в редакцию 10/II 1958 г.)

Пусть r, m, n — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $r \geqq 1$, $m \geqq 3$, $r < m - 1$, $n + 1 \geqq 2m + r$. Пусть $\boldsymbol{S}_{n+1}$ — пространство $n + 1$ измерений постоянной кривизны c и $\boldsymbol{A}$ — его абсолютное квадратичное многообразие. Рассмотрим поверхность $\boldsymbol{M}$ с $m - 1$ локально-сферическими окружностями нормальной кривизны, погруженную в это пространство и определенную следующим образом:

Индикатриса нормальной кривизны k-го порядка в любой точке M поверхности является окружностью, центр которой находится в точке пересечения прямой, проходящей через соответствующую точку M поверхности перпендикулярно к плоскости окружности, с этой плоскостью и отстоит от точки M на постоянное расстояние, не равное нулю, если $k = 1, 2, \ldots, r$, или на нулевое расстояние, если $k = r + 1, r + 2, \ldots, m - 1$.

Для того, чтобы в пространстве $\mathbf{S}_{n+1}$ существовала поверхность $\boldsymbol{M}$ с $m - 1$ локально-сферическими окружностями нормальной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $r = 1$. В этом случае существуют поверхности $\boldsymbol{M}$ во всяком пространстве $\mathbf{S}_{n+1}$ с постоянной кривизной и зависят, в общем случае, от $2(n - m - 1)$ функций одного переменного.

Поверхность $\boldsymbol{M}$ определена системой дифференциальных уравнений (3.4) и обозначена $\boldsymbol{M}_1$, или $\boldsymbol{M}_2$, или $\boldsymbol{M}_3$, если по крайней мере одна форма каждой из обеих систем (2.31) не равна нулю, или по крайней мере одна форма только одной из этих систем не равна нулю и все формы второй системы равны нулю, или все формы обеих систем равны нулю. Измерение пространства $\mathbf{S}_{n+1}$ удовлетворяет в рассматриваемых случаях неравенству $n \geqq 2m + 1$, или $n \geqq 2m + 1$, или $n \geqq 2m$.

Поверхности $\boldsymbol{M}$, рассматриваемые как поверхности проективного расширения $\mathbf{P}_{n+1}$ пространства $\mathbf{S}_{n+1}$, распадаются на два типа по значению постоянной $V^2 + c$, а именно, на тип неевклидовый ($V^2 + c \neq 0$) и тип евклидовый ($V^2 + c = 0$). В первом случае пространство $\mathbf{S}_{n+1}$ может быть неевклидово ($c \neq 0$) или евклидово ($c = 0$), в другом случае только неевклидово.

Каждой поверхности $\boldsymbol{M}$ принадлежит определенная точка E_0 пространства $\mathbf{P}_{n+1}$. Поверхность $\boldsymbol{M}$ проектируется из точки E_0 коническим многообразием $\boldsymbol{M}^0$, погруженным в проективное пространство n измерений $\mathbf{R}_n$ и определенным системой дифференциальных уравнений (3.8). Пространство $\mathbf{R}_n$ образовано прямыми пространства $\mathbf{P}_{n+1}$, проходящими через точку E_0. Постоянная $V^2 + c$ является кривизной пространства $\mathbf{T}_n$, которое определено в пространстве $\mathbf{R}_n$ абсолютным квадратичным многообразием $\mathbf{K}$.

Точка E_0, принадлежащая поверхности $\boldsymbol{M}$ евклидова типа, лежит на квадратичной гиперповерхности $\mathbf{A}$. Квадратичное многообразие $\mathbf{K}$ является пересечением гиперповерхности $\mathbf{A}$ со своей касательной гиперплоскостью Q в точке E_0. Поверхность $\boldsymbol{M}$ евклидова типа лежит на квадратичной гиперповерхности $\mathbf{M}$, содержащейся в пучке квадратичных гиперповерхностей, данном многообразием $\mathbf{A}$ и двойной гиперплоскостью Q. Многообразие $\boldsymbol{M}^0$ является в пространстве $\mathbf{T}_n$ минимальной поверхностью с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны.

Для того, чтобы поверхность проективного пространства $\boldsymbol{P}_{n+1}$ могла быть определена как поверхность $\boldsymbol{M}_1$, или $\boldsymbol{M}_2$, или $\boldsymbol{M}_3$ евклидова типа, погруженная в неевклидово пространство $\boldsymbol{S}_{n+1}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенная точка E_0, лежащая на неособом квадратичном многообразии $\boldsymbol{A}$, и сеть кривых на поверхности, проекцией которой из точки E_0 является сопряжённая сеть пространства $\boldsymbol{R}_n$, имеющая следующее свойство: Последовательность Лапласа этой сети обрывается в обоих направлениях после первого преобразования способом Лапласа на кривых, которые принадлежат с их соприкасающимися пространствами порядка $m - 1$ неособому многообразию $\boldsymbol{K}$ второго порядка линейного подпространства $n - 1$ измерений пространства $\boldsymbol{R}_n$. Эти кривые произвольны, но удовлетворяют условию, что ни одна из них не погружена, или только одна из них погружена, или каждая из них погружена в линейное подпространство $m - 1$ измерений пространства $\boldsymbol{R}_n$.

Поверхность $\boldsymbol{M}_3$ евклидова типа, погруженная в пространство $2m + 1$ измерений, образована точками пересечения пар образующих пространств гиперповерхности $\boldsymbol{M}$, проходящих через соприкасающиеся пространства $(m - 1)$-го порядка двух кривых, лежащих в образующих пространствах гиперповерхности $\boldsymbol{M}$, проходящих через точку E_0.

Если $c \neq 0$, то точка E_0, принадлежащая поверхности $\boldsymbol{M}$ неевклидова типа, не лежит на квадратичной гиперповерхности $\boldsymbol{A}$; квадратичное многообразие $\boldsymbol{K}$ описано из точки E_0 гиперповерхности $\boldsymbol{A}$. Если $c = 0$, то точка E_0 не лежит на гиперплоскости Q, содержащей многообразие $\boldsymbol{A}$; квадратичное многообразие $\boldsymbol{K}$ является проекцией многообразия $\boldsymbol{A}$ из точки E_0. Поверхность $\boldsymbol{M}$ неевклидова типа лежит на квадратичной гиперповерхности $\boldsymbol{M}$, содержащейся в пучке квадратичных гиперповерхностей, данном в случае $c \neq 0$ многообразием $\boldsymbol{A}$ и двойной полярной гиперплоскостью Q точки E_0, а в случае $c = 0$ проекцией многообразия $\boldsymbol{A}$ из точки E_0 и двойной гиперплоскостью Q, содержащей многообразие $\boldsymbol{A}$. Многообразие $\boldsymbol{M}^0$ является в пространстве $\boldsymbol{T}_n$ минимальной поверхностью с $m - 1$ окружностями нормальной кривизны.

Для того, чтобы поверхность проективного пространства $\boldsymbol{P}_{n+1}$ могла быть определена как поверхность $\boldsymbol{M}_1$, или $\boldsymbol{M}_2$, или $\boldsymbol{M}_3$ неевклидова типа, погруженная в неевклидово (евклидово) пространство $\boldsymbol{S}_{n+1}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенная точка E_0, не лежащая на неособом квадратичном многообразии $\boldsymbol{A}$ (на гиперплоскости, содержащей неособое квадратичное многообразие $\boldsymbol{A}$) и сеть кривых на поверхности, проекцией которой из точки E_0 является сопряжённая сеть пространства $\boldsymbol{R}_n$, имеющая следующее свойство: Первые, вторые, ..., m-ые преобразования Лапласа этой сети в обоих направлениях принадлежат неособому многообразию $\boldsymbol{K}$ второго порядка проективного пространства $\boldsymbol{R}_n$ таким образом, что преобразования Лапласа, возникшие из рассматриваемой сети равным числом преобразований в обоих направлениях, полярно сопряжены относительно гиперповерхности $\mathbf{K}$ со всеми преобразованиями Лапласа начальной сети, которые находятся в ее последовательности между упомянутыми преобразованиями. Эта последовательность не обрывается ни в каком из обоих направлений после m преобразований, или обрывается только в одном направлении после m преобразований способом Гурзата, или обрывается в обоих направлениях после m преобразований способом Гурзата. Если $n = 2m + 1$, то соответствующая последовательность периодична с периодом $2(m + 1)$ и автополярна относительно гиперповерхности $\mathbf{K}$, или обрывается во втором направлении после $m + 1$ преобразования способом Лапласа.

Поверхность $\boldsymbol{M}_3$ неевклидова типа, погруженная в пространство $2m + 1$ измерений, образована точками пересечения пар образующих пространств гиперповерхности $\mathbf{M}$, проходящих через соприкасающиеся пространства $(m - 1)$-го порядка двух кривых, лежащих с их соприкасающимися пространствами $(m - 1)$-го порядка на гиперповерхности $\mathbf{M}$ и в полярной гиперплоскости Q точки E_0.