Alois Švec

Géométrie intrinsèque des congruences de droites et leurs déformations projectives

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 395,396–397,398

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100313

GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE DES CONGRUENCES DE DROITES ET LEURS DÉFORMATIONS PROJECTIVES

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 3 janvier 1958)

On introduit la notion de système de géométries intrinsèques des congruences de droites dans l'espace projectif; le comportement de ce système étant équivalent à déformation projective de second ordre.

1. Dans l'espace projectif à trois dimensions S_3 soit donnée une congruence nonparabolique de droites L, à chacune de ses droites soit associé un repère A_1, A_2, A_3, A_4 d'une telle manière que $[A_1A_2A_3A_4] = 1$, que $[A_1A_2]$ soit la droite considérée et que $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ soient ses transformées de Laplace. La congruence L peut alors être déterminée par les équations fondamentales

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\ \mathrm{d}A_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 \qquad\qquad + \omega_2A_4\,, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\ \mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(voir E. Čech, *Transformations développables des droites*, ce Journal, *t. 6(81)* 1956, pp. 260—286). On peut introduire le repère duel

$$E_1 = [A_2A_3A_4],\ E_2 = -[A_1A_3A_4],\ E_3 = [A_1A_2A_4],\ E_4 = -[A_1A_2A_3]\,; \tag{2}$$

les équations fondamentales de la dualisation L^* de la congruence L sont alors

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}E_3 &= -\omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4 - \omega_1E_1\,, \\ \mathrm{d}E_4 &= -\beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4 \qquad\qquad - \omega_2E_2\,, \\ \mathrm{d}E_1 &= -\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2\,, \\ \mathrm{d}E_2 &= -\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - \alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Je suppose enfin que les repères de la congruence L sont dejà specialisés d'une manière unique de sorte que

$$\omega_{ij} = a_{ij}\omega_1 + b_{ij}\omega_2\,. \tag{3}$$

A côté de la congruence L soit donnée une autre congruence L' dont le repère est choisie de manière analogue, toutes les expressions se rapportant à L' sont affectées d'un accent. Supposons que les congruences L et L' soient en transformation développable T (les surfaces développables des deux congruences se correspondent donc en cette même transformation)

$$\omega_1 = \omega_1', \quad \omega_2 = \omega_2' . \tag{4}$$

J'appelle *extension* (T_b, T_r) *de la transformation* le choix des projectivités

$$T_b(A_1 + xA_2) = A_1' + x\varrho A_2', \quad T_r(E_4 + yE_3) = E_4' + y\sigma E_3' \tag{5}$$

qui existent entre les droites se correspondant l'une à l'autre, $\varrho \neq 0$ et $\sigma \neq 0$ étant des fonctions arbitraires.

La congruence L soit décomposée en une couche de surfaces réglées non-développables par l'équations

$$\omega_2 - a\omega_1 = 0 . \tag{6}$$

On trouve alors aisément que le plan tangent à la surface réglée de la couche (6) au point $A_1 + \tau A_2$ est $E_4 - a\tau E_3$. Par l'intermédiaire de la transformation (4), la décomposition de la congruence L en la couche (6) se transmet à la congruence L'; le plan tangent à la surface réglée correspondante de la congruence L' au point $T_b(A_1 + \tau A_2) = A_1' + \tau\varrho A_2'$ est $E_4' - a\tau\varrho E_3'$. Par le choix de (6) et de l'extension ponctuelle T_b j'obtiens une certaine extension T_r (assez transparente géométriquement), où $T_r(E_4 - a\tau E_3) = E_4' - a\tau\varrho E_3'$, c'est-à-dire qu'en somme (je pose $-a\tau = y$, $\tau = x$)

$$T_b(A_1 + xA_2) = A_1' + x\varrho A_2', \quad T_r(E_4 + yE_3) = E_4' + y\varrho E_3' . \tag{7}$$

L'extension T_r est évidemment indépendante du choix de la couche (6), je peux donc dire qu'une transformation développable existant entre L et L' et l'extension ponctuelle T_b déterminent l'extension planaire T_r. Les extensions (T_b, T_r), où les projectivités T_b et T_r se correspondent de la manière décrite ci-dessus, seront appelées *extensions principales*.

2. Dans la suite j'exploite la notion de connexion d'*une congruence normalisée ponctuellement* où à chacune de ses droites p est associée une droite q sans point commune avec p, voir Enea Bortolotti, *Connessioni nelle varietà luogo di spazi*, Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Univ. di Cagliari, *III*, 1933; *Sulla geometria differenziale delle congruenze di rette*, Atti Soc. Italiana per il Progresso delle Scienze, *XXII* Riunione — Bari, 1933, Col. II., pp. 185—7. Soient données deux droites p_1 et p_2 de la congruence L et soit π l',,intervalle" d'une surface réglée quelconque entre ces deux droites. Au moyen de la normalisation on peut transporter chaque point $A \in p_1$ sur la droite p à travers π le long d'une courbe γ dont la tangente en tout point $P \in p$ coupe la droite q que correspond à p dans la normalisation. La correspondance ainsi engendrée entre les droites p_1 et p_2 sera une projectivité; l'ensemble de toutes ces projectivités entre les paires de droites de la congruence L à travers les surfaces réglées particulières s'appelle connexion de la congruence normalisée ponctuellement. La congruence L sera normalisée planairement si la dualisa-

tion L^* l'est ponctuellement. Dans la congruence normalisée L (j'appelle ainsi une congruence normalisée des deux façons) se présentent donc deux connexions. Dans ce qui suit *je vais m'occuper de telles normalisations pour lesquelles la droite normalisante coupe les transformées de Laplace de la droite de la congruence considérée.*

Supposons que la congruence L (1) soit normalisée ponctuellement par les droites $[A_3 + \lambda_1 A_1, A_4 + \lambda_2 A_2]$ et que sur une certaine surface réglée de la congruence L le point $A = A_1 + xA_2$ se maintient dans la connexion induite. On a alors nécessairement $[A, \mathrm{d}A, A_3 + \lambda_1 A_1, A_4 + \lambda_2 A_2] = 0$ ou bien aussi

$$\mathrm{d}x + \alpha_1\omega_2 + x(\omega_{22} - \omega_{11} + \lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2) - x^2\alpha_2\omega_1 = 0 . \tag{8}$$

L'équation (8) détermine évidemment une connexion de la congruence L. Si L est normalisée planairement par les droites $[E_1 + \mu_1 E_3, E_2 + \mu_2 E_4]$, alors le plan $E = E_4 + yE_3$ se maintient dans la connexion induite si l'on a

$$[E, \mathrm{d}E, E_1 + \mu_1 E_3, E_2 + \mu_2 E_4] = 0$$

ou bien encore

$$\mathrm{d}y - \beta_2\omega_1 + y(\omega_{44} - \omega_{33} + \mu_1\omega_1 - \mu_2\omega_2) + y^2\beta_1\omega_2 = 0 . \tag{9}$$

3. Je considère enfin deux congruences L et L' en correspondance T (4), la congruence L soit normalisée. Je vais étudier l'éxistence d'une normalisation de la congruence L' et l'existence de l'extension principale (T_b, T_r) de la correspondance T, pour lesquelles on a: Soient p et p' un couple de droites correspondantes des congruences L et L', soit $A \in p_1$, $T_bA = A' \in p'$; supposons que A se ment dans la connexion de la congruence L suivant une courbe γ située sur une surface π dans L, et que le point A' se ment sur la surface $T\pi$ correspondante suivant une courbe γ', alors $T_b\gamma = \gamma'$; une situation analogue se présentant même pour les dualisations L^* et L'^*.

La congruence L' soit normalisée par les droites $[A_3' + \lambda_1' A_1', A_4' + \lambda_2' A_2']$ et $[E_1' + \mu_1' E_3', E_2' + \mu_2' E_4']$, de même comme dans ce qui précède on trouve que si le point $T_bA = A_1' + x\varrho A_2'$ se transporte suivant la courbe donnée par la connexion de la congruence L' on a

$$\mathrm{d}x + \varrho^{-1}\alpha_1'\omega_2 + x(\mathrm{dlog}\,\varrho + \omega_{22}' - \omega_{11}' + \lambda_1'\omega_1 - \lambda_2'\omega_2) - \varrho x^2\alpha_2'\omega_1 = 0 . \tag{10}$$

D'une manière semblable j'obtiens pour le transfer du plan $T_rE = E_4' + y\varrho E_3'$

$$\mathrm{d}y - \varrho^{-1}\beta_2'\omega_1 + y(\mathrm{dlog}\,\varrho + \omega_{44}' - \omega_{33}' + \mu_1'\omega_1 - \mu_2'\omega_2) + \varrho y^2\beta_1'\omega_2 = 0 . \tag{11}$$

La condition citée ci-dessus pour la coïncidence des connexions déterminées par les normalisations des congruences L et L' est évidemment équivalente à la coïncidence des équations (8), (10) et (9), (11) sur chaque surface. En comparant j'obtiens

$$\alpha_1 = \varrho^{-1}\alpha_1' , \ \alpha_2 = \varrho\alpha_2' , \ \beta_1 = \varrho\beta_1' , \ \beta_2 = \varrho^{-1}\beta_2' , \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{dlog}\,\varrho + \tau_{22} - \tau_{11} &= (\lambda_1 - \lambda_1')\,\omega_1 - (\lambda_2 - \lambda_2')\,\omega_2 , \\ \mathrm{dlog}\,\varrho + \tau_{44} - \tau_{33} &= (\mu_1 - \mu_1')\,\omega_1 - (\mu_2 - \mu_2')\,\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où $\tau_{ii} = \omega'_{ii} - \omega_{ii}$. Les ϱ, λ_i, μ_i étant donnés λ'_i, μ'_i sont déterminés par les équations (13) d'une manière unique.

L'existence d'une normalisation de la congruence L' et d'une extension (T_b, T_r) satisfaisant aux conditions citées ci-dessus se réduit à l'existence d'une fonction ϱ vérifiant (12). On sait néanmoins bien d'après le travail cité de M. Čech que l'existence de ϱ vérifiant (12) est équivalente à une déformation projective des congruences L et L'. On obtient donc le résultat que voici:

Etant données deux congruences L et L' en transformation développable, l'existence de leurs normalisations et de l'extension de la transformation développable telles que les deux connexions induites coïncident (de la manière décrite ci-dessus) *est équivalente à la supposition de leur déformation projective. Si ce cas se présente, alors la normalisation de la congruence L détermine sans ambiguïté la normalisation correspondante de la congruence L' et l'extension de la transformation qui existe entre L et L'.*

Ce théorème résout dans une certaine mesure le problème de construction du système de géométries intrinsèques d'une congruence de droites, dont le comportement est équivalent à la deformation projective de la congruence. Ce problème-là a été posé dans le livre Теория конгруэнций de M. FINIKOV.

Резюме

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ И ИХ ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 3/I 1958 г.)

Пусть L — прямолинейная конгруэнция проективного пространства S_3, а L^* — ее дуализация. Конгруэнция L нормирована по точкам, если каждой ее прямой p поставлена в соответствие скрещивающаяся прямая q; понятие связности нормированной по точкам конгруэнции было введено Бортолотти. Конгруэнция L нормирована по плоскостям, если L^* нормирована по точкам; о конгруэнции, нормированной и по точкам и по плоскостям, мы говорим, что она нормирована.

Пусть L и L' находятся в соответствии C, при котором их развертывающиеся поверхности соответствуют друг другу. Тогда сохранение некоторой системы связностей в соответствии C является необходимым и достаточпым условием для проективного изгибания второго порядка конгруэнции L и L'.