Alois Švec

Remarque sur les droites canoniques d'une surface

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 389–394

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100312`

REMARQUE SUR LES DROITES CANONIQUES D'UNE SURFACE

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 19 novembre 1957)

Dans ce travail je trouve une certaine homographie existant entre les points du plan tangent au point x d'une surface d'un espace projectif à trois dimensions et les plans d'étoile à centre x. L'homographie introduite est déterminée par l'élement du $4^{\text{ième}}$ ordre de la surface, à chaque droite canonique au paramètre λ il correspond une droite canonique au paramètre $1 + 3\lambda$.

1. Soient données dans l'espace projectif S_n à n dimensions ($n \geqq 3$) deux courbes $x = x(t)$, $y = y(t)$ à correspondance donnée par l'égalité des paramètres. Soit $y(t_0) = a_0x(t_0)$ un point commun de ces courbes; dans toutes les formules suivantes je supposerai $t = t_0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes (x) et (y) aient au point commun un contact géométrique d'ordre 3 est l'existence des nombres $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ tels que

$$y = a_0x\,, \quad y' = a_0b_1x' + a_1x\,, \quad y'' = a_0b_1^2x'' + (2a_1b_1 + a_0b_2)\,x' + a_2x\,, \quad (1)$$
$$y''' = a_0b_1^3x''' + 3(a_1b_1^2 + a_0b_1b_2)\,x'' + (3a_2b_1 + 3a_1b_2 + a_0b_3)\,x' + a_3x\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes considérées aient un contact géométrique d'ordre 3 et analytique d'ordre 1 ou 2 ou 3 resp. est $b_1 = 1$ ou $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ ou $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = 0$ resp. C'est bien connu.

Soient données deux courbes (x) et (y) à contact analytique d'ordre 1; ce qui permet de poser

$$y = x\,, \quad y' = x' + a_1x \quad (2)$$

au point de contact. Il est possible d'introduire deux points z_1, z_2 par les équations

$$y'' = x'' + 2a_1x' + c_1x + z_1\,, \quad y''' = x''' + 3a_1x'' + 3c_1x' + c_2x + z_2 \quad (3)$$

où c_1 et c_2 sont des nombres auxiliaires. Les points z_1 et z_2 n'ont aucune signification géométrique mais ils me conduiront à quelques objects géométriques importants. Je vais discuter tous les cas.

A. Les courbes (x) et (y) ont un contact analytique d'ordre 2. On voit facilement qu'on peut choisir c_1 de sorte que $z_1 = 0$. J'étudie alors l'équation (3_2). Les cas suivants sont possibles:

A₁. Les courbes (x) et (y) ont un contact analytique d'ordre 3. La condition nécessaire et suffisante pour cela est $[xz_2] = 0$.

A₂. Les courbes (x) et (y) ont un contact géométrique d'ordre 3, mais elles n'ont pas de contact analytique d'ordre 3. En vertu d'(1) on voit que la condition nécessaire et suffisante pour cela est que z_2 soit de la forme $z_2 = b_3x' + (c_3 - c_2)\,x$ de sorte que le point z_2 soit un point arbitraire (différent de x) de la tangente commune $[xx']$ des deux courbes.

A₃. Les courbes (x) et (y) n'ont pas de contact géométrique d'ordre 3. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que le point z_2 n'appartienne pas à la droite tangente $[xx']$. La droite $[xz_2]$ est (à l'exception du point x) l'ensemble de tous les centres de projection tels que les projections des courbes (x), (y) aient un contact analytique d'ordre 3.

B. Les courbes (x) et (y) ont un contact géométrique d'ordre 2 mais n'ont pas de contact analytique d'ordre 2. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que z_1 soit un point $(\neq x)$ de la tangente $[xx']$, c'est-à-dire $z_1 = (a_2 - c_1)\,x + b_2x'$, $b_2 \neq 0$. On peut écrire les équations (3) sous la forme

$$\begin{aligned} y'' &= x'' + (2a_1 + b_2)\,x' + a_2x\,, \\ y''' &= x''' + 3(a_1 + b_2)\,x'' + 3(a_2 + a_1b_2)\,x' + c_2x + \\ &\quad + z_2 - 3b_2x'' + 3(c_1 - a_2 - a_1b_2)\,x'\,. \end{aligned} \tag{4}$$

B₁. Les courbes (x) et (y) ont un contact géométrique d'ordre 3. La condition nécessaire et suffisante pour cela est l'existence de tels nombres b_3 et a_2 que

$$z_2 - 3b_2x'' = (b_3 - 3\overline{c_1 - a_2 - a_1b_2})\,x' + (a_3 - c_2)\,x\,;$$

cela veut dire que le point $z_2 - 3b_2x''$ est un point arbitraire de la tangente $[xx']$.

B₂. Les courbes (x) et (y) n'ont pas de contact analytique d'ordre 3. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que les points x, x', $z_2 - 3b_2x''$ ne soient pas linéairement dépendants; le plan déterminé par ces points est (sauf la droite $[xx']$) l'ensemble de tous les centres de projection tels que les projections des courbes (x) et (y) aient un contact géométrique d'ordre 3.

C. Les courbes (x) et (y) n'ont pas de contact géométrique d'ordre 2. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que le point z_1 ne soit pas un point de la tangente $[xx']$. La droite $[xz_1]$ (excepté le point x) est l'ensemble de tous les centres de projection tels que les projections des courbes (x) et (y) aient un contact analytique d'ordre 2. Le centre de projection étant $z_1 + rx$, j'obtiens $y'' \equiv x'' + 2a_1x' + (c_1 - r)\,x \pmod{z_1 + rx}$. Je dois distinguer deux cas:

C₁. z_2 est un point du plan déterminé par la tangente $[xx']$ et le point z_1: $z_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 x' + \alpha_3 z_1$; on a

$$y''' = x''' + 3a_1 x'' + 3(c_1 - r)\,x' + (c_2 + \alpha_1)\,x + (3r + \alpha_2)\,x' + \alpha_3 z\,,$$

ou

$$y''' \equiv x''' + 3a_1 x'' + 3(c_1 - r)\,x' + (c_2 + \alpha_1 - \alpha_3 r)\,x + (3r + \alpha_2)\,x' \pmod{z_1 + rx}\,. \tag{6}$$

Il existe un seul point $z_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 x$ de la droite $[xz_1]$ tel que les projections des courbes (x) et (y) de ce point aient un contact analytiques d'ordre 3.

C₂. z_2 n'est pas un point du plan $[xx'z_1]$, un calcul simple nous montre qu'il n'existe pas de tels points de la droite $[xz_1]$ que les projections des courbes (x), (y) d'un tel point aient un contact analytique d'ordre 3. Je peux écrire (3_2) sous la forme $y''' = x''' + 3a_1 x'' + 3(c_1 - r)\,x' + c_2 x + z_2 + 3rx'$.

On voit facilement que: A chaque point $z_1 + rx$ de la droite $[xz_1]$ il correspond un plan $[x, z_1, z_2 + 3rx']$, les droites de ce plan passant par le point $z_1 + rx$ sont toutes les droites à la propriété suivante: les projections des courbes (x), (y) d'une telle droite ont un contact analytique d'ordre 3.

2. Soit donnée dans un espace projectif à trois dimensions une surface (non réglée) π par les équations fondamentales

$$x_{uu} = \Theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x\,, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \Theta_v x_v + p_{22} x\,, \tag{7}$$

voir Fubini-Čech, *Géométrie projective différentielle,* p. 47. On a $\beta\gamma \neq 0$. Les équations fondamentales de la dualisation π^* de la surface π sont (dans l'espace corrélatif S_3^*)

$$\xi_{uu} = \Theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi\,, \quad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \Theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi \tag{8}$$

où (GPD p. 48)

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\Theta_v\,, \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\Theta_u\,. \tag{9}$$

J'introduis la normalisation de Fubini (GPD pp. 47 et 71)

$$\Theta = \log \beta\gamma \tag{10}$$

et les notations habituelles

$$\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\,, \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} \tag{11}$$

de sorte que les équations (9) donnent

$$\pi_{11} - p_{11} = \beta\psi_2\,, \quad \pi_{22} - p_{22} = \gamma\psi_1\,. \tag{12}$$

La droite canonique de 1ère ou 2onde espèce à paramètre λ de la surface π est la droite (GPD pp. 100—102)

$$[x, x_{uv} + \lambda\psi_2 x_u + \lambda\psi_1 x_v] \quad \text{ou} \quad [x_u + \lambda\psi_1 x,\ x_v + \lambda\psi_2 x]\,. \tag{13}$$

Pour $\lambda = 0$, j'obtiens les deux normales projectives de la surface π, les normales projectives de la surface π^* sont $[\xi\xi_{uv}]$ et $[\xi_u\xi_v]$.

3. L'homographie tangente la plus générale de la transformation asymptotique $\pi^* \to \pi$ est

$$\begin{gathered} K\xi = x\,, \quad K\xi_u = \lambda x + x_u\,, \quad K\xi_v = \mu x + x_v\,, \\ K\xi_{uv} = ax + bx_u + cx_v + ex_{uv}\,; \end{gathered} \tag{14}$$

on a

$$\begin{gathered} K\xi = x\,, \quad K\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x + (\lambda\,\mathrm{d}u + \mu\,\mathrm{d}v)\,x\,, \\ K\,\mathrm{d}^2\xi = \mathrm{d}^2x + 2(\lambda\,\mathrm{d}u + \mu\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}x + \varrho x + \varphi_1 x_u + \varphi_2 x_v + \varphi_3 x_{uv} \end{gathered} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\,2\lambda\,\mathrm{d}u^2 + 2(b - \mu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - 2\gamma\,\mathrm{d}v^2\,, \\ \varphi_2 &= -\,2\beta\,\mathrm{d}u^2 + 2(c - \lambda)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - 2\mu\,\mathrm{d}v^2\,, \\ \varphi_3 &= 2(e - 1)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (\lambda\Theta_u - \mu\beta + \beta\psi_2)\,\mathrm{d}u^2 + 2a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \\ &\quad + (\mu\Theta_v - \lambda\gamma + \gamma\psi_1)\,\mathrm{d}v^2 + \lambda\,\mathrm{d}^2u + \mu\,\mathrm{d}^2v\,. \end{aligned} \tag{17}$$

On peut obtenir une *transformation K-linéarisante d'ordre* 2, la droite $[x, \varphi_1 x_u + \varphi_2 x_v + \varphi_3 x_{uv}]$ étant la droite K-linéarisante de la tangente $[x, dx]$ de la surface π; si $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ je dis que la droite est indéterminée. Je vais décrire la signification géométrique: Soit t une tangente de la surface π et t' la droite K-linéarisante, soit γ une courbe arbitraire de la surface π ayant au point considéré la tangente t et soit γ^* la courbe correspondante de la surface π^*; alors trois cas sont possibles:

a) $t' \neq t$: les projections des courbes γ et $K\gamma^*$ d'un point arbitraire de la droite t' ont contact analyticque d'ordre 2 (les courbes γ et $K\gamma^*$ n'ayant pas de contact géométrique d'ordre 2);

b) $t' = t$: les courbes γ et $K\gamma^*$ ont un contact géométrique (mais non analytique) d'ordre 2;

c) t' est indéterminée: γ et $K\gamma^*$ ont un contact analytique d'ordre 2.

Dans le cas b) ou c) t s'appelle la tangente K-caractéristique ou K-principale.

La condition nécessaire et suffisante pour que la droite K-linéarisante de chaque tangente soit une tangente de la surface π est

$$e = 1\,. \tag{18}$$

Les droites K-linéarisantes des tangentes asymptotiques $[xx_u]$ et $[xx_v]$ sont $[x, -\,2\lambda x_u - 2\beta x_v]$ et $[x, -\,2\gamma x_u - 2\mu x_v]$; la condition nécessaire et suffisante pour que la droite K-linéarisante d'une tangente asymptotique soit l'autre tangente asymptotique est

$$\lambda = \mu = 0\,. \tag{19}$$

L'équation des courbes K-caractéristiques est $\varphi_2\,\mathrm{d}u - \varphi_1\,\mathrm{d}v = 0$ ou

$$\beta\,\mathrm{d}u^3 - c\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}v + b\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v^2 - \gamma\,\mathrm{d}v^3 = 0\,;$$

dans la suite je me borne à de telles K que (18) et (19) ont lieu. La condition nécessaire et suffisante pour que la 3-couche des courbes caractéristiques soit apolaire au réseau des asymptotiques est que

$$b = c = 0\,; \tag{20}$$

cette condition étant satisfaite, les caractéristiques sont les courbes de Segre. (20) resp. (19) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il corresponde à la normale projective de $1^{\text{ère}}$ resp. 2^{onde} sorte de la surface π la normale projective de $1^{\text{ère}}$ resp. 2^{onde} sorte de la dualisation π^*.

Je me borne à de telles homographies tangentes (14) pour lesquelles (18) jusque (20) ont lieu; j'obtiens

$$\begin{aligned} &K\xi = x\,, \quad K\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x\,, \ K\,\mathrm{d}^2\xi = \mathrm{d}^2x + \varrho x + \varphi_1 x_u + \varphi_2 x_v\,, \\ &K\,\mathrm{d}^3\xi = \mathrm{d}^3x + 3\varrho\,\mathrm{d}x + (.)\,x + \Phi_1 x_u + \Phi_2 x_v + \Phi_3 x_{uv} \end{aligned} \tag{21}$$

où

$$\varphi_1 = -\,2\gamma\,\mathrm{d}v^2\,, \quad \varphi_2 = -\,2\beta\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{22}$$

$$\varrho \ = \beta\psi_2\,\mathrm{d}u^2 + 2a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \gamma\psi_1\,\mathrm{d}v^2\,, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\,2\beta\psi_2\,\mathrm{d}u^3 + (.)\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}v + (.)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v^2 + (.)\,\mathrm{d}v^3 - 6\gamma\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}^2v\,, \\ \Phi_2 &= (.)\,\mathrm{d}u^3 + (.)\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}v + (.)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v^2 - 2\gamma\psi_1\,\mathrm{d}v^3 - 6\beta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}^2u\,, \\ \Phi_3 &= -\,2\beta\,\mathrm{d}u^3 - 2\gamma\,\mathrm{d}v^3\,. \end{aligned} \tag{24}$$

En tenant compte des équations précédentes et des remarques du No 1. il est possible de définir des *transformations K-linéarisantes d'ordre* 3 où les courbes γ et $K\gamma^*$ ont un contact analytique d'ordre 3 après une projection d'une *droite*. Mais dans mes recherches je me borne aux courbes asymptotiques. Par ex. pour l'asymptotique $v = \text{const.}$ j'ai

$$\varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = -\,2\beta\,\mathrm{d}u^2\,, \quad \Phi_1 = -\,2\beta\psi_2\,\mathrm{d}u^3\,, \quad \Phi_3 = -\,2\beta\,\mathrm{d}u^3$$

et (si j'emploie les notations du No 1.)

$$z_1 = -\,2\beta\,\mathrm{d}u^2 x_v\,, \quad z_2 = -\,2\beta\psi_2\,\mathrm{d}u^3 x_u + \Phi_2 x_v - 2\beta\,\mathrm{d}u^3 x_{uv}\,;$$

c'est le cas C_2. A chaque point $z_1 + rx$ il correspond un plan $[x, z_1, z_2 + 3rx_u]$ à signification géométrique claire. On a (en posant $\mathrm{d}u = 1$)

$$z_1 + rx = -\,2\beta\left(x_v - \frac{r}{2\beta}\,x\right),$$

$$[x, z_1, z_2 + 3rx_u] = 4\beta^2\left[x, x_v, x_{uv} + \left(\psi_2 - 3\,\frac{r}{2\beta}\right)x_u\right]$$

et j'obtiens une correspondance à signification géométrique

$$x_v + nx \to [x, x_v, x_{uv} + (\psi_2 + 3n)\,x_u]\,. \tag{25}$$

Pareillement on peut obtenir (pour l'asymptotique $u = \text{const}$) la correspondance

$$x_u + mx \to [x, x_u, x_{uv} + (\psi_1 + 3m)\,x_v]\,. \tag{26}$$

Il est possible d'introduire une homographie

$$\begin{aligned}\alpha_0 x + \alpha_1 x_u + \alpha_2 x_v \to \alpha_1[x x_u x_{uv}] - \alpha_2[x x_v x_{uv}] + \\ + (\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + 3\alpha_0)[x x_u x_v]\end{aligned} \tag{27}$$

telle que (25) et (26) sont les homographies partielles de (27). L'homographie (27) est invariante par rapport aux déformations projectives d'ordre deux de la surface. Je pense que cette homographie n'a pas encore été considérée.

L'homographie (27) donne naissance à une homographie existant entre les droites du plan tangent au point x et les droites passant par le point x. Cette homographie est

$$[x_u + mx, x_v + nx] \to [x, x_{uv} + (\psi_2 + 3n)\, x_u + (\psi_1 + 3m)\, x_v]\,. \tag{28}$$

Ce qui est important c'est que *à chaque droite canonique de la* $1^{\text{ère}}$ *espèce à paramètre* λ *il correspond la droite canonique de la* 2^{de} *sorte à paramètre* $1 + 3\lambda$:

$$[x_u + \lambda\psi_1 x, x_v + \lambda\psi_2 x] \to [x, x_{uv} + (1 + 3\lambda)(\psi_2 x_u + \psi_1 x_v)]\,. \tag{29}$$

A la normale projective ($\lambda = 0$) *il correspond la droite canonique à paramètre* $\lambda = 1$.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ ПОВЕРХНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

В работе исследуется асимптотическое соответствие между поверхностью (7) трехмерного проективного пространства и ее дуализацией (8). Рассмотрение линеаризирующего преобразования этого соответствия приводит к определению кривых Дарбу. Можно, однако, рассматривать и линеаризирующее преобразование третьего порядка, при котором мы требуем, чтобы касание соответственных кривых было третьего порядка после проектирования из прямой; поскольку автору известно, эти преобразования не были до сих пор исследованы. Подробным анализом этого преобразования, примененного к асимптотическим кривым, получаем геометрическое истолкование преобразования (27), которое до сих пор, очевидно, не исследовалось в литературе. При этом преобразовании каждой канонической прямой первого рода с параметром λ соответствует каноническая прямая второго рода с параметром $1 + 3\lambda$, что в основном дает геометрическое значение параметра канонической прямой.