Josef Novák

Über die eindeutigen stetigen Erweiterungen stetiger Funktionen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 344–355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100309

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ÜBER DIE EINDEUTIGEN STETIGEN ERWEITERUNGEN STETIGER FUNKTIONEN

JOSEF NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 17. Mai 1957)

In diesem Artikel[1]) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, damit eine auf dem Bereiche A definierte und dort stetige reelle Funktion auf eine einzige Weise auf die Abschliessung vA stetig erweitert werden kann. Dabei braucht man keineswegs das Axiom der abgeschlossenen Abschliessung vorauszusetzen. Weiter sind die Bedingungen angegeben, unter welchen eine stetige Funktion auf den kleinsten abgeschlossenen und A enthaltenden Bereich stetig erweitert werden kann.

Die Frage der eindeutigen stetigen Erweiterung stetiger Funktionen ist interessant insbesondere im Zusammenhang mit der Massfunktion. In der Literatur sind zwei Methoden bekannt. Die erste Methode von H. Lebesgue benützt den Begriff des äusseren Masses. Die zweite Methode der transfiniten Induktion wurde von E. Borel entworfen und einige Autoren haben den Erweiterungssatz des Masses mit dieser Methode bewiesen [1, 2, 3]. Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden die topologischen Sätze über die stetigen Erweiterungen im gewissen Sinne auf die Massfunktion angewendet. Daraus folgt unter anderem, dass die eindeutige Erweiterung des Masses von einem Ring auf den kleinsten σ-Ring eine Angelegenheit topologischer Natur ist.

I

Es sei eine abstrakte Menge X gegeben, in der konvergente Punktfolgen definiert sind. Dabei sollen die beiden wohlbekannten Fréchetschen Axiome erfüllt sein, nämlich das Axiom über die Konvergenz der stationären Folgen und das Axiom über die Konvergenz aller Teilfolgen einer konvergenten Folge.

[1]) Der Inhalt dieses Artikels wurde am III. mathematischen Kongress in Moskau im Juni 1956 vorgetragen. Die topologische Idee der stetigen Erweiterung des Masses wurde an der Tagung über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik im Oktober 1954 in Berlin mitgeteilt [4].

Ferner soll auch das Urysohnsche Axiom gelten, das folgendermassen lautet: Wenn x_n nicht gegen x konvergiert, so gibt es eine Teilfolge x_{n_k} derart, dass keine weitere Teilfolge $x_{n_{k_i}}$ gegen x konvergiert.

Man kann in der Menge X, in der die konvergenten Punktfolgen definiert sind, eine gewisse Art der Topologie einführen. Es sei nämlich $A \subset X$ eine Teilmenge. Unter der Abschliessung vA der Menge A verstehen wir die Menge aller Limespunkte [2]) $x = \lim x_n$, wobei die x_n zu A gehören. Der Operator v besitzt folgende Eigenschaften:

$$(*) \qquad v0 = 0; \;\; vX = X; \;\; \text{wenn } A \subset B \text{ ist, so ist } vA \subset vB;$$

es gilt $v(A \cup B) = vA \cup vB$; es ist $A \subset vA$ und $(x) = v(x)$ für[3]) jeden Punkt $x \in X$.

Das Axiom der abgeschlossenen Abschliessung $vA = v(vA)$ braucht dabei keineswegs erfüllt zu werden.

Für die abzählbaren Ordinalzahlen α definieren wir die α-te Abschliessung $v^\alpha A$ der Menge A folgendermassen:

$$v^0 A = A; \; v^1 A = vA,$$
$$v^\alpha A = v(v^{\alpha-1}A), \quad \text{falls } \alpha - 1 \text{ existiert},$$
$$v^\alpha A = \bigcup_{\xi<\alpha} v^\xi A, \quad \text{falls } \alpha - 1 \text{ nicht existiert } (\alpha \text{ Limeszahl}).$$

Man sieht leicht ein, dass der Operator v^α alle Eigenschaften (*) des Operators v besitzt. Da v ein monotoner Operator ist, so erhält man eine monotone Folge von Abschliessungen einer gegebenen Menge A:

$$A \subset vA \subset v^2 A \subset \ldots \subset v^\alpha A \subset \ldots,$$

wobei α alle abzählbaren Ordinalzahlen durchläuft. Daraus und aus der Definition des Operators v^α folgt, dass für jede wachsende Ordinalzahlenfolge $\xi_n \to \alpha$, die gegen eine abzählbare Ordinalzahl (Limeszahl) α konvergiert, folgende Formel gilt:

$$v^\alpha A = \bigcup_{n=1}^{\infty} v^{\xi_n} A .$$

Wir setzen $uA = \bigcup_{\alpha \text{ abz.}} v^\alpha A$, wobei α abz. eine abzählbare Ordinalzahl α bedeutet. Es ist leicht einzusehen, dass der Operator u alle Eigenschaften des Operators v besitzt und dass er auch dem Axiom der abgeschlossenen Abschliessung $uA = u(uA)$ genügt. u ist also ein topologischer Operator im gewöhnlichen Sinne des Wortes.[4])

---

[2]) Die Konvergenz wird mit $\lim x_n = x$ oder mit $x_n \to x$ bezeichnet.

[3]) (x) bedeutet eine Menge, die nur einen einzigen Punkt $x \in X$ enthält.

[4]) Daraus folgt, dass es keinen Sinn hat, den Operator v^α auch für nichtabzählbare Ordinalzahlen α zu definieren, denn für solche α gilt: $v^{\alpha+1}A = v^\alpha A$.

Erfüllt der Operator v das Axiom der abgeschlossenen Abschliessung, so ist $vA = v(vA)$ und die beiden Operatoren v und u sind identisch. Das ist z. B. der Fall, wenn der Operator v metrisch ist.

Es sei $A \subset X$ eine Teilmenge des Raumes X, in dem die Konvergenz und der Operator v definiert sind. Wir sagen, dass die Menge A die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, wenn es zu jeder konvergenten Folge von Punkten $x_n \to x$, wo $x_n \in vA$ und $x \in vA$ ist, eine Doppelfolge von Punkten $x_{mn} \in A$ derart gibt, dass gilt:

1. $\lim\limits_n x_{mn} = x_m$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$,

2. zu jeder Folge natürlicher Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ gibt es mindestens eine „Diagonalfolge" $\{x_{mn_m}\}$ derart, dass $\lim\limits_m x_{mn_m} = x$ ist, wobei $p_m < n_m$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$ ist.

Die Eigenschaft $\mathcal{E}$ kommt z. B. jeder Teilmenge des metrischen Raumes zu. Die Eigenschaft 2 wollen wir als Diagonaleigenschaft der Doppelfolge bezeichnen.

Es sei nun $f(x)$, $x \in X$, eine reelle Funktion auf X. Wir sagen, dass die Funktion $f(x)$ im Punkte $x_0 \in X$ stetig ist, wenn für jede gegen x_0 konvergente Punktfolge $x_n \to x_0$ gilt: $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Die Funktion $f(x)$ heisst stetig auf X, falls sie in jedem Punkte des Raumes X stetig ist [5]).

Wir sagen, dass die reelle Funktion $f(x)$, $x \in A$, die Eigenschaft $*A$ hat, falls für je zwei Punktfolgen $x_n \in A$ und $y_n \in A$ mit demselben Limespunkt $x = \lim x_n = \lim y_n \in vA$ die Zahlenlimes $\lim f(x_n)$ und $\lim f(y_n)$ existieren und beide gleich sind. Hat irgendeine reelle Funktion $f(x)$, $x \in A$, die Eigenschaft $*A$, so muss sie allerdings auf A stetig sein.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Es sei eine reelle Funktion $f(x)$, $x \in A \subset X$, gegeben, die auf der Menge A mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ stetig ist. Dann gibt es eine einzige auf vA stetige reelle Funktion $F(x)$ mit $F(x) = f(x)$ für jeden Punkt $x \in A$ dann und nur dann, wenn die Funktion $f(x)$ die Eigenschaft $*A$ hat.*

Beweis. Da es klar ist, dass die Bedingung notwendig ist, genügt es zu beweisen, dass sie hinreichend ist. Für jeden Punkt $x \in vA - A$ gibt es eine konvergente Folge von Punkten $x_n \in A$ mit $\lim x_n = x$ und aus der Eigenschaft $*A$ folgt die eindeutige Existenz des $\lim f(x_n)$, so dass die Funktion $F(x)$, $x \in vA$, wo

$$F(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in A\,,$$
$$F(x) = \lim f(x_n) \quad \text{für} \quad x \in vA - A$$

eindeutig definiert ist. Es bleibt die Stetigkeit der Funktion $F(x)$ auf vA zu beweisen. Es sei also $x_n \in vA$ mit $\lim x_n = x \in vA$. Dann gibt es in A eine Doppel-

[5]) Definieren wir die Umgebung des Punktes $x \in X$ als die Menge, die fast alle Punkte jeder gegen x konvergenten Punktfolge enthält, so sieht man leicht ein, dass diese Definition der Stetigkeit mit der üblichen Umgebungs-Definition der Stetigkeit reeller Funktionen äquivalent ist.

punktfolge $\{x_{mn}\}$ derart, dass $\lim\limits_n x_{mn} = x_m$ für jedes m ist. Da nach der Definition $F(x_m) = \lim\limits_n f(x_{mn}) = \lim\limits_n F(x_{mn})$ ist, so lässt sich zu jedem $m = 1, 2, \ldots$ eine natürliche Zahl p_m derart finden, dass $|F(x_{mn}) - F(x_m)| < \frac{1}{m}$ für jedes $n > p_m$ ist. Da die Menge A die Eigenschaft $\mathscr{E}$ besitzt, so gibt es eine ,,Diagonalfolge" von Punkten $x_{mn_m} \in A$ mit $\lim\limits_m x_{mn_m} = x$, so dass $\lim\limits_m F(x_{mn_m}) = F(x)$ ist, wobei $p_m < n_m$ ist. Daher ist $|F(x_{mn_m}) - F(x_m)| < \frac{1}{m}$. Daraus folgt: $\lim F(x_m) = F(x)$. Aus der Eigenschaft $*A$ folgt, dass es nur eine einzige solche Funktion $F(x)$ gibt.

Wir sagen, dass die Menge $B \subset X$ die Eigenschaft $\mathscr{F}$ hat, falls jeder Menge $v^\alpha B$, α abz., die Eigenschaft $\mathscr{E}$ zukommt.

Wenn $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots$ $(\alpha < \beta)$ eine steigende Mengenfolge ist und wenn die reellen Funktionen $f_\alpha(x)$, $x \in A_\alpha$ auf A_α derart definiert sind, dass $f_\alpha(x) = f_\eta(x)$ für $x \in A_\eta$ und $\eta < \alpha$ gilt, so bezeichnen wir mit $\bigsqcup\limits_{\alpha<\beta} f_\alpha(x)$ die reelle Funktion auf $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha$:

$$\bigsqcup_{\alpha<\beta} f_\alpha(x) = f_\alpha(x) \quad \text{für} \quad x \in A_\alpha \quad \text{und} \quad \alpha < \beta\,.$$

Satz 2. *Es sei eine reelle Funktion $f(x)$, $x \in B \subset X$, gegeben, die auf der Menge B mit der Eigenschaft $\mathscr{F}$ stetig ist. Jede stetige Funktion $f_\alpha(x)$, $x \in v^\alpha B$, wobei $f_\alpha(x) = f(x)$ für $x \in B$, habe die Eigenschaften:*

1° $*v^\alpha B$,

2° *wenn $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \gamma$, wo γ* abz. *ist, so sei die Funktion $\bigsqcup\limits_n f_{\alpha_n}(x)$ stetig auf der Menge $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} v^{\alpha_n} B$. Dann gibt es eine einzige auf uB stetige reelle Funktion $F(x)$ mit $F(x) = f(x)$ für $x \in B$.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass wir schon für $\xi < \alpha$ abz. die reellen und auf $v^\xi B$ stetigen Funktionen derart eindeutig definiert haben, dass $f_\xi(x) = f_\eta(x)$ für jeden Punkt $x \in v^\eta B$ mit $\eta < \xi$ ist. Gibt es die Ordinalzahl $\alpha - 1$, so folgt aus dem Satz 1 die Existenz einer einzigen Funktion $f_\alpha(x)$, $x \in v^\alpha B$, mit $f_\alpha(x) = f_{\alpha-1}(x)$ für $x \in v^{\alpha-1} B$, so dass auch $f_\alpha(x) = f_\eta(x)$ für $x \in v^\eta B$ und $\eta < \alpha$ ist. Gibt es $\alpha - 1$ nicht (α ist eine Limeszahl,) so existiert gemäss 2° eine stetige Funktion $f_\alpha(x) = \bigsqcup\limits_n f_{\xi_n}(x)$, $x \in v^\alpha B = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} v^\xi B$, wobei $\xi_1 < \xi_2 < \ldots \ldots < \xi_n < \ldots \to \alpha$. Dabei ist $f_\alpha(x) = f_\eta(x)$ für $x \in v^\eta B$ mit $\eta < \alpha$. Dabei ist leicht einzusehen, dass die Funktion $f_\alpha(x)$ von der Folge ξ_n unabhängig ist. Es genügt also

$$F(x) = \bigsqcup_{\alpha \text{ abz.}} f_\alpha(x)\,, \quad x \in uB = \bigcup_{\alpha \text{ abz.}} v^\alpha B$$

zu definieren.

Bemerkung 1. Falls die Menge A keine Eigenschaft $\mathscr{E}$ hat, braucht der Satz 1 keineswegs gültig zu sein. Es sei folgendes Beispiel dafür angegeben. Die Menge X bestehe aus den Paaren (m, n) der natürlichen Zahlen. Wir definieren die Konvergenz in X durch die Vorschrift: $\lim\limits_{n} (m, n) = (m, 1)$ und $\lim\limits_{m} (m, 1) = (1, 1)$. Es sei A die Menge aller Elemente (m, n), wo $n > 1$ ist. Die Menge A hat dann keine Eigenschaft $\mathscr{E}$, denn es gibt zur konvergenten Folge der Punkte $(m, 1) \in vA$ mit dem Limespunkt $(1, 1) \in vA$ keine Doppelpunktfolge in A, wie das die Eigenschaft $\mathscr{E}$ verlangt. Die Funktion $f(m, n) = m^{-1}$, $(m, n) \in A$, hat zwar die Eigenschaft $^*A$, jedoch keine Funktion $F(x)$, $x \in X$, mit $F(x) = f(x)$ für $x \in A$, ist stetig, denn es wäre $\lim\limits_{m} F(m, 1) = 0$ und $\lim\limits_{n} F(1, n) = 1$.

Bemerkung 2. Wenn die Bedingung 1° im Satze 2 erfüllt ist, braucht auch keineswegs immer die Bedingung 2° erfüllt zu sein. Es sei z. B. X die Menge aller Paare (m, n), wobei m und n natürliche Zahlen sind, und es konvergiere jede stationäre Punktfolge in X. Für jede natürliche Zahl m und n sei weiter $\lim\limits_{p} (m, 2^{n-1}(2p - 1)) = (m + 1, n)$ und $\lim\limits_{m} (m, n) = (1, n)$.

Wenn man jetzt auch die Gültigkeit des Urysohnschen Axiomes verlangt, so erhält man einen Raum mit konvergenten Punktfolgen und dem Operator v. Bezeichnen wir $A = \bigcup\limits_{n} (1, n)$, so ist $v^r A = \bigcup\limits_{m=1}^{r+1} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (m, n)$, so dass gilt: $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} v^m A = uA$. Jede Menge $v^r A$ hat die Eigenschaft $\mathscr{E}$ (denn in $v^{r+1}A - v^r A$ gibt es keine gegen einen Punkt von $v^{r+1}A - v^r A$ konvergente Punktfolge von unendlich vielen Punkten), so dass die Menge A die Eigenschaft $\mathscr{F}$ besitzt. Die reelle Funktion $f(1, 2^{n-1}(2p - 1)) = \dfrac{1}{p} > 0$ ist auf der Menge A stetig und beschränkt. Auch jede Funktion $f_r(x)$, $x \in v^r A$, wo

$$f_r(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in A\,,$$
$$f_r(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in v^r A - A$$

ist auf $v^r A$ stetig und beschränkt. Die Funktion $F(x) = \bigsqcup\limits_{r} f_r(x)$, $x \in X$, ist jedoch nicht stetig, denn es ist $\lim\limits_{m} (m, n) = (1, n)$ und $\lim\limits_{m} F(m, n) = 0$, während jedoch $F(1, n) > 0$ ist.

II

Wenn wir auf geeignete Weise die Konvergenz zufälliger Ereignisse definieren, so können wir über die Stetigkeit der Wahrscheinlichkeitsfunktion sprechen.

Da jede beschränkte Massfunktion, insbesondere jede Wahrscheinlichkeitsfunktion, auf der Algebra zufälliger Ereignisse stetig ist (Lemma 2), so kann man die Sätze 1 und 2 im gewissen Sinne anwenden.

Nach F. HAUSDORFF [5] konvergiert eine Mengenfolge $\{A_n\}$ gegen die Menge A, falls $A = \limsup A_n = \liminf A_n$ ist, wobei $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ und $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ ist. Diese Konvergenz erfüllt alle drei Konvergenzaxiome [6]. Mittels dieser Konvergenz ist der Operator v definiert und wir können über Abschliessungen der Mengensysteme sprechen. Da der Limes der Vereinigung oder der Differenz zweier Mengenfolgen gleich der Vereinigung oder der Differenz ihrer Limes ist [7], so ist die Abschliessung $v^\alpha \mathbf{A}$, α abz., wo $\mathbf{A}$ einen Mengenring oder eine Mengenalgebra mit dem grössten Element X bedeutet, wieder ein Mengenring oder eine Mengenalgebra. Daher bekommt man eine transfinite Folge von Mengenringen $\mathbf{A} \subset v\mathbf{A} \subset \ldots \subset v^\alpha \mathbf{A} \subset \ldots$, deren Vereinigung $u\mathbf{A}$ gleich dem kleinsten σ-Ring $\sigma(\mathbf{A})$ über $\mathbf{A}$ ist, d. h.

$$u\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \text{ abz.}} v^\alpha \mathbf{A} = \sigma(\mathbf{A}) .$$

In der Tat, ist $A_n \in u\mathbf{A}$, dann folgt aus der Eigenschaft der Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_k \bigcup_{n=1}^{k} A_n \in u\mathbf{A}$ ist.

Wir wollen jetzt beweisen, dass jeder Ring die ein wenig modifizierte Eigenschaft $\mathscr{E}$ hat. Es gilt nämlich:

Lemma 1. *Es sei ein endlich additives und endlich multiplikatives Mengensystem* $\mathbf{C}$ *und in* $v\mathbf{C}$ *eine nicht fallende Folge von Mengen* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *mit* $\bigcup A_n \in v\mathbf{C}$ *gegeben. Wir setzen* $A = \bigcup A_n$. *Dann gibt es in* $\mathbf{C}$ *eine Doppelmengenfolge* $\{A_{mn}\}$ *mit* $\lim_n A_{mn} = A_m$ *für jedes* $m = 1, 2, \ldots$ *und mit der Diagonaleigenschaft.*

Beweis. Da $A_m \in v\mathbf{C}$ und $A \in v\mathbf{C}$, so gibt es eine Doppelfolge der Mengen $B_{mn} \in \mathbf{C}$ mit $\lim_n B_{mn} = A_m$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$ und eine gegen A konvergente Folge der Mengen $B_n \in \mathbf{C}$. Wir setzen $A_{mn} = \bigcup_{k=1}^{m} B_{kn} \cap B_n$. Aus der Voraussetzung folgt, dass $A_{mn} \in \mathbf{C}$. Für jedes $m = 1, 2, \ldots$ gilt dann:

$$\lim_n A_{mn} = \bigcup_{k=1}^{m} (\lim_n B_n \cap \lim_n B_{kn}) = \bigcup_{k=1}^{m} A \cap A_k = A_m .$$

Die Doppelmengenfolge $\{A_{mn}\}$ hat die Diagonaleigenschaft; es gilt nämlich für jede Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ und für jedes $p = 1, 2, \ldots$

$$A_p = \liminf_n A_{pn} = \liminf_m A_{pn_m} \subset \liminf_m A_{mn_m} \subset \limsup_m A_{mn_m} \subset \limsup_n B_n = A ,$$

denn es ist $A_{pn_m} \subset A_{mn_m}$ für $m > p$. Daraus folgt, dass $A \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_p \subset \liminf_{m} A_{mn_m} \subset$ $\subset \limsup A_{mn_m} \subset A$, so dass $\lim_{m} A_{mn_m} = A$ ist.[6])

Lemma 2. *Eine endliche Massfunktion ist auf dem Mengenring* $\mathbf{E}$ *dann und nur dann stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. I: Die Bedingung ist notwendig. Es sei μ eine endliche Massfunktion, die auf dem Ring $\mathbf{E}$ nicht beschränkt ist. Haben wir schon zueinander disjunkte Mengen $A_i \in \mathbf{E}$ mit $\mu(A_i) > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gewählt, so gibt es unserer Voraussetzung nach eine Menge $B \in \mathbf{E}$ so, dass $\mu(B) > 1 + \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Es genügt dann $A_{n+1} = B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ zu definieren. Wir haben dann $\liminf_{n} \mu(A_n) \geqq 1$, obwohl $\lim_{n} E_n = 0$ ist. Die Funktion μ ist im Element 0 nicht stetig.

II: Die Bedingung ist hinreichend.[7]) Wir setzen zuerst voraus, dass $\lim E_n =$ $= 0$ ist, wobei $E_n \in \mathbf{E}$ gilt. Wir führen die Bezeichnung ein: $S_k^{\bar{k}} = \bigcup_{n=k}^{\bar{k}} E_n$ für $k \leqq \bar{k}$. Aus der allgemeinen Formel $T_n \subset (\bigcap_{k=1}^{n} T_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} (T_{k+1} - T_k)$ (Beweis: Gehört $x \in T_n$, so ist $x \in \bigcap_{k=1}^{n} T_k$, oder es gibt die erste Zahl $k < n$ derart, dass $x \in T_{k+1} - T_k$) und da die Massfunktion μ monoton ist, folgt, dass

$$\mu(S_n^{\bar{n}}) \leqq \mu(\bigcap_{k=1}^{n} S_k^{\bar{k}}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(S_{k+1}^{\overline{k+1}} - S_k^{\bar{k}}) \text{ ist.}$$

Da die monotone Mengenfolge $\{\bigcap_{k=1}^{n} S_k^{\bar{k}}\}_{n=2}^{\infty}$ gegen die leere Menge 0 konvergiert (sonst gäbe es einen zu unendlich vielen E_n gehörigen Punkt und daher wäre $\limsup E_n \neq 0$) und da $\mu(E_n) < \infty$ für $n = 1, 2, \ldots,$ ist, so ist nach einem bekannten Satz [8]: $\lim_{n} \mu(\bigcap_{k=1}^{n} S_k^{\bar{k}}) = 0$. Da $E_n \subset S_n^{\bar{n}}$ ist, so gilt $\limsup \mu(E_n) \leqq$ $\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_{k+1}^{\overline{k+1}} - S_k^{\bar{k}})$.

---

[6]) Es ist leicht zu beweisen, dass dasselbe Lemma auch für eine absteigende Folge $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ gilt. Für allgemein konvergente Mengenfolgen gilt leider das Lemma nicht, wie das folgende einfache Beispiel zeigt. $\mathbf{C}$ besteht aus allen Untermengen des Cantorschen Diskontinuums D die zugleich abgeschlossen und offen sind. Es sei $\{a_n\}$ eine Folge von allen rationalen Zahlen aus D, wobei $a_m \neq a_n$ für $m \neq n$ ist. Wir setzen $A_m = (a_m)$, $A = 0$, so dass $A_m \in v\mathbf{C}$, $A \in \mathbf{C}$, $\lim A_m = A$. Wenn $A_{mk} \in \mathbf{C}$, $\lim A_{mk} = A_m$, dann gibt es für jedes m eine Zahl $p = p(m)$ derart, dass $a_m \in A_{mk}$ für $k > p$. Hätte die Doppelfolge A_{mk} die Diagonaleigenschaft, so gäbe es $k_m > p(m)$ derart, dass $\lim A_{m,k_m} = A$. Jede Menge $\bigcup_{m=r}^{\infty} A_{m,k_m}$ ist aber offen, enthält alle a_m, $m > r$, und ist daher dicht in D, so dass der Durchschnitt $\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=r}^{\infty} A_{m,k_m}$ nicht leer, also verschieden von A ist.

[7]) Dieser Teil des Beweises stammt von M. Jiřina.

Es sei nun eine beliebige reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Massfunktion μ monoton und beschränkt ist, gibt es für jedes $k = 1, 2, \ldots$ einen Zahlenlimes $\lim_p \mu(\bigcup_{n=k}^{p} E_n) < \infty$. Daher kann man jeder Zahl k eine natürliche Zahl $\bar{k} > k$ derart zuordnen, dass

$$\mu(\bigcup_{n=k}^{p} E_n) - \mu(S_k^{\bar{k}}) = \mu(\bigcup_{n=k}^{p} E_n - S_k^{\bar{k}}) < \varepsilon \, . \, 2^{-k}$$

für jedes $p \geqq \bar{k}$ ist. Da

$$S_{k+1}^{\overline{k+1}} - S_k^{\bar{k}} \subset \bigcup_{n=k}^{p} E_n - S_k^{\bar{k}} \quad \text{für} \quad p \geqq \overline{k+1}$$

ist, so gilt

$$\limsup_n \mu(E_n) \leqq \varepsilon \, . \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon \, .$$

Daraus folgt $\lim_n \mu(E_n) = 0$.

Es sei nun $\lim E_n = E$ mit $E_n \in \mathbf{E}$ und $E \in \mathbf{E}$. Dann ist

$$\lim_n (E_n - E) = \lim_n (E - E_n) = 0 \, .$$

Daher gilt

$$\lim_n \mu(E_n) = \lim \mu(E \cap E_n) + \lim \mu(E_n - E) = \lim \mu(E \cap E_n)$$

und

$$\mu(E) = \lim \mu(E \cap E_n) + \lim \mu(E - E_n) = \lim \mu(E \cap E_n) \, .$$

Daraus folgt $\lim \mu(E_n) = \mu(E)$.

Lemma 3. *Jede Massfunktion μ, die auf dem Mengenring $\mathbf{E}$ beschränkt ist, hat die Eigenschaft $^*\mathbf{E}$.*

Beweis. Es sei $\lim E_n = A$, wobei $E_n \in \mathbf{E}$ und $A \in v\mathbf{E}$. Da μ beschränkt ist, so gibt es für jedes $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_p \mu(\bigcup_{n=k}^{p} E_n) = r_k < \infty$$

mit $r_k \geqq r_{k+1}$ und

$$\lim_p \mu(\bigcap_{n=k}^{p} E_n) = s_k \leqq r_k$$

mit $s_k \leqq s_{k+1}$, wobei $p \geqq k$ ist. Da die Ungleichung $r_k \leqq \mu(E_k) \leqq s_k$ für jedes k gilt, so genügt es $\lim (r_k - s_k) = 0$ zu beweisen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Mengen

$$B_{kp} = \bigcup_{n=k}^{p} E_n - \bigcap_{n=k}^{p} E_n \, ,$$

wo $p \geqq k$ ist. Da $\lim\limits_p (B_{kp}) = r_k - s_k$ ist, gibt es eine „Diagonalfolge" $\mu(B_{kp_k})$ mit

$$\lim \mu(B_{kp_k}) = \lim_k (r_k - s_k) .$$

Um die Existenz des Zahlenlimes $\lim \mu(E_n)$ zu beweisen, genügt es nach Lemma 2 die Gleichheit $\lim\limits_k B_{kp_k} = 0$ zu beweisen. In der Tat ist $B_{kp_k} \subset \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} E_n - \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} E_n$, wobei die Mengen auf der rechten Seite eine absteigende Folge bilden. Daher ist

$$\limsup_k B_{kp_k} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} [\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n - \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n] = \limsup E_n - \liminf E_n = 0 ,$$

denn es gilt $\limsup E_n = \liminf E_n = A$.

Es sei jetzt $F_n \in \mathbf{E}$ mit $\lim F_n = A$. Da auch $\lim E_n = A$ ist, so ist

$$\lim (E_n - F_n) = \lim (F_n - E_n) = 0$$

und

$$\lim \mu(E_n - F_n) = \lim \mu(F_n - E_n) = 0 ,$$

so dass wir erhalten

$$\lim \mu(E_n) = \lim \mu[(E_n \cap F_n) \cup (E_n - F_n)] = \lim \mu(E_n \cap F_n) =$$
$$= \lim \mu[(F_n \cap E_n) \cup (F_n - E_n)] = \lim \mu(F_n) .$$

Korrolar. *Zu jeder beschränkten Massfunktion $\mu(E)$, $E \in \mathbf{E}$ gibt es eine einzige Massfunktion $\mu_1(A)$, $A \in v\mathbf{E}$ derart, dass $\mu_1(E) = \mu(E)$ für $E \in \mathbf{E}$ ist.*

Beweis. Aus Lemma 3 folgt, dass man die Funktion $\mu_1(A) = \lim \mu(E_n)$, wobei $E_n \in \mathbf{E}$, $A \in v\mathbf{E}$ und $\lim E_n = A$ ist, eindeutig definieren kann. Nach Lemma 2 gilt: $\mu_1(E) = \mu(E)$ für $E \in \mathbf{E}$. Es ist leicht einzusehen, dass $\mu_1(0) = 0$, $\mu_1(A) \geqq 0$ und $\mu_1(A \cup B) = \mu_1(A) + \mu_1(B)$ für $A \cap B = 0$, $A \in v\mathbf{E}$, $B \in v\mathbf{E}$ ist. Nun folgt aus den Lemmas 3 und 1, dass die additive Mengenfunktion μ_1 von oben stetig ist. Daher ist $\mu_1(A)$ eine Massfunktion. Nach Lemma 3 gibt es nur eine einzige solche Massfunktion μ_1.

Wir wollen jetzt beweisen, dass die Funktion $\mu_\omega(A) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k(A)$, $A \in v^\omega\mathbf{E}$ — — wobei μ_k eine Massfunktion auf $v^k\mathbf{E}$ mit $\mu_k(E) = \mu(E)$ für $E \in \mathbf{E}$ bedeutet — eine stetige Funktion ist, d. h. dass der Satz gilt:

Die Funktion $\mu_\omega(A) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k(A)$, $A \in v^\omega\mathbf{E}$ ist eine Massfunktion.

Beweis. Es ist klar, dass μ_ω eine nicht negative und endlich additive Mengenfunktion auf $v^\omega\mathbf{E}$ ist, wobei $\mu_\omega(0) = 0$ gilt. Jetzt beweisen wir, dass sie σ-additiv ist. Dazu genügt es, die Ungleichung $\mu_\omega(A) \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_\omega(A_n)$ für disjunkte Mengen $A_n \in v^\omega\mathbf{E}$ mit $\bigcup A_n \in v^\omega\mathbf{E}$ zu beweisen, denn die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Additivität der Funktion μ_ω.

Wir benützen dazu die Eigenschaft des äusseren Masses, nämlich $\mu^*(A) \leqq \leqq \Sigma\mu^*(A_n)$. Es genügt also zu beweisen, dass $\mu^*(B) = \mu_\omega(B)$ für jede Menge $B \in v^{k+1}\mathbf{E}$ unter der induktiven Voraussetzung gilt, dass diese Gleichheit für jede Menge aus $v^k\mathbf{E}$ gilt. Es sei $B = \lim B_n$, wo $B_n \in v^k\mathbf{E}$, so dass $B = \lim_m \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n$ ist. Wir setzen $C_n^m = B_n - \bigcup_{i=m}^{n-1} B_i$, wo $n > m$ ist, so dass die Mengen $C_n^m \in v^k\mathbf{E}$ bei festem m zueinander fremd sind und $\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n^m \in v^{k+1}\mathbf{E}$ und $B = \lim_m \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n^m \subset \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n^m$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$ ist. Daher ist

$$\mu_\omega(B) = \mu_{k+1}(B) = \lim_m \mu_{k+1}(\bigcup_{n=m}^{\infty} C_n^m) = \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} \mu_k(C_n^m) = \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} \mu^*(C_n^m) .$$

Da aber $\sum_{n=m}^{\infty} \mu^*(C_n^m) \geqq \mu^*(B)$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$ gilt, so ist $\mu_\omega(B) \geqq \mu^*(B)$.

Da es zu jeder Menge B_n ein abzählbares System von Mengen aus $\mathbf{E}$ gibt, in deren Vereinigung B_n enthalten ist (Induktionsvoraussetzung) und da $B \subset \bigcup B_n$ ist, so gibt es auch Mengen $E_n \in \mathbf{E}$ mit $B \subset \bigcup E_n$. Für jedes solche System von Mengen E_n gilt

$$\mu_\omega(B) = \mu_{k+1}(B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{k+1}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k(E_n)$$

so dass $\mu_\omega(B) \leqq \mu^*(B)$ ist. Daraus folgt, dass $\mu_\omega(B) = \mu^*(B)$ ist.

Bemerkung. Wenn wir im Beweis α_k und α statt k und ω schreiben, wobei $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \to \alpha$ ist, so bekommen wir eine transfinite Konstruktion der Massfunktion μ_α. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt dann, dass man jede Massfunktion μ, die auf einem Mengenring $\mathbf{E}$ definiert und dort beschränkt ist, auf eine einzige Art durch sukzessives Verfahren erweitert werden kann. So bekommt man eine Massfunktion $\bar{\mu}$ auf dem σ-Ring $\sigma(\mathbf{E})$. In der Fachliteratur benützt man beim Beweise den Begriff des äusseren Masses. Es ist zu bemerken, dass man für die Erweiterung der Massfunktion μ von $\mathbf{E}$ auf $v\mathbf{E}$ überhaupt keinen Begriff des äusseren Masses braucht. Es ist mir nicht gelungen ohne diesen Begriff auch die Erweiterung der Form $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \mu_{\alpha_k}$ zu beweisen. Den Begriff der Caratheodoryschen Messbarkeit braucht man in dem Beweis überhaupt nicht.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *R. Neves:* Sôbre a construçae algebrica da teoria geral da Medida. Gendro de estudas matematicas, Pôrto, Publ. no. *13* (1945).

[2] *J. Albuquerque:* Ensembles de Borel, Portugaliae Math. *4* (1943—45), S. 161.

[3] *L. Leblanc* and *G. E. Fox:* On the extension of measure by the method of Borel, Can. J. Math. *8* (1956), S. 516.

[4] *J. Novák:* Über die topologische Struktur des Wahrscheinlichkeitsfeldes, Bericht über die Tagung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin (1954).

[5] *F. Hausdorff:* Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (1914), S. 21.

[6] *J. Novák* and *M. Novotný:* On the convergence in σ-algebras of point-sets, Czechoslovak Math. J. *3(78)*, 1953, S. 291.

[7] *D. Maharam:* An algebraic characterisation of measure algebras, Ann. of Math. *48* (1947), Th. 1.

[8] *A. Kolmogrov:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933, S. 13.

ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ЙОСЕФ НОВАК (Josef Novák), Прага

(Поступило в редакцию 17/V 1957 г.)

В части I этой работы вводится в множество X топология при помощи сходящихся последовательностей. Множество A имеет свойство $\mathscr{E}$, если из предположения $x_n \in vA$, $x \in vA$, $\lim x_n = x$ следует существование двойной последовательности точек $x_{mn} \in A$, удовлетворяющей следующим требованиям:

1. $\lim x_{mn} = x_m$ для любого $m = 1, 2, \ldots$

2. Для каждой последовательности натуральных чисел $p_1, p_2, \ldots$ существует простая последовательность точек x_{mn_m}, выделенная из указанной двойной последовательности со свойством $\lim\limits_m x_{mn_m} = x$, причем $p_m < n_m$ для любого $m = 1, 2, \ldots$

Действительная функция $f(x)$, $x \in A$, где $A \subset X$, обладает свойством $*A$, если из предположения $\lim x_n = \lim y_n \in vA$, где $x_n \in A$, $y_n \in A$, следует, что $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.

В части I далее доказывается, что действительная непрерывная функция $f(x)$, определенная на множестве A со свойством $\mathscr{E}$, допускает непрерывное и единственное расширение на множество vA тогда и только тогда, если она обладает свойством $*A$. Пусть, далее, для любого счетного порядкового числа α множество $v^\alpha A$ имеет свойство $\mathscr{E}$, и пусть определены непрерывные функции $f_\alpha(x)$, $x \in v^\alpha A$, такие, что $f_\alpha(x) = f(x)$ для $x \in A$, со свойством 1° $*v_\alpha A$ и со следующим свойством: 2° если $\{\alpha_n\}$ есть неубывающая последовательность счетных порядковых чисел, сходящаяся к порядковому числу γ, то функция $\bigsqcup\limits_{\alpha_n<\gamma} f_{\alpha_n}(x)$, $x \in \bigcup\limits_{\alpha_n<\gamma} v^{\alpha_n}A$, принимающая в точке $x \in v^{\alpha_n}A$ значение $f_{\alpha_n}(x)$, непрерывна на множестве $\bigcup\limits_{\alpha_n<\gamma} v^{\alpha_n}A$. Тогда функцию $f(x)$ можно одним единственным способом непрерывно расширить на наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

На примерах показано, что утверждение, вообще говоря, не справедливо если множество A не имеет свойства $\mathscr{E}$. Свойство 2° важно для существования функции, и его также нельзя выпустить из условия теоремы.

В части II указывается применение к ограниченной мере. Сходимость в системе множеств определяется известным образом: $\lim A_n = A$, если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. При помощи этой сходимости в систему множеств вводится топология v, по отношению к которой ограниченная мера является непрерывной множественной функцией, обладающей на кольце $\mathbf{E}$ множеств свойством $^*\mathbf{E}$. При помощи определенного свойства кольца $\mathbf{E}$, аналогичного свойству $\mathscr{E}$, можно доказать, что каждую ограниченную меру можно однозначно расширить из кольца $\mathbf{E}$ на кольцо $v\mathbf{E}$. Притом мы не нуждаемся в понятии внешней меры. Однако, для доказательства однозначного расширения меры из кольца $\mathbf{E}$ на кольцо $v^{\gamma}\mathbf{E}$, где $\gamma \geqq \omega$ счетное порядковое число, было использовано свойство внешней меры μ^*, а именно неравенство

$$\mu^* A \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \text{ где } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ с дизъюнктными } A_n.$$