Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Sur le comportement asymptotique des intégrales de l'équation différentielle $y^{(4)} + Q(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 230–245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100297

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y^{(4)} + Q(x)\, y = 0$

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Reçu le 28 mai 1957)

M. M. Biernacki démontre [2] que l'équation différentielle (a) a au moins une intégrale qui tend vers zéro lorsque $x \to \infty$, à condition que le coefficient $Q(x)$ soit une fonction non-décroissante, continue et continument dérivable sur l'intervalle (x_0, ∞). Il y avance en même temps l'hypothèse disant que l'équation considérée admet au moins deux intégrales linéairement indépendantes tendant vers zéro pour $x \to \infty$ et qu'elle a, en plus de cela, des intégrales qui ne sont pas bornées. Dans ce travail, je démontre que l'hypothèse de M. Biernacki concernant l'existence de deux intégrales linéairement indépendantes tendant vers zéro pour $x \to \infty$, est vraie, même déjà sous des conditions plus générales imposées à la fonction $Q(x)$. Quant à l'existence des intégrales non-bornées, je donne des conditions suffisantes.

Nous prendrons pour objet de nos études les intégrales de l'équation différentielle

$$y^{(4)} + Q(x)\, y = 0\,. \tag{a}$$

Dans tout notre travail, nous supposons que la fonction $Q(x)$ soit continue et non-négative sur l'axe réel $(-\infty, \infty)$, qu'elle ne s'annule identiquement sur aucun intervalle partiel et enfin que toutes les intégrales de l'équation (a) soient oscillatoires, c'est-à-dire que chacune d'elles a, à droite de tout nombre réel x_0, une infinité de zéros. D'autres suppositions sur la fonction $Q(x)$ seront introduites, si besoin est, à l'endroit correspondant.

Lemme 1. *Soit $y(x)$ une intégrale non-triviale, d'ailleurs quelconque, de l'équation*

$$y^{(4)} + Q(x)\, y = 0\,. \tag{a}$$

Alors la fonction $F = yy''' - y'y''$ est une fonction décroissante sur tout l'axe réel $(-\infty, \infty)$. Si $y(x)$ a au point x_0 un zéro d'ordre deux au moins, alors $F(x) > 0$ dans l'intervalle $(-\infty, x_0)$ et $F(x) < 0$ dans (x_0, ∞).

Démonstration. En multipliant l'équation (a) par y nous obtenons après modifications

$$(yy''' - y'y'')' = -\,[Q(x)\, y^2 + y''^2] \leqq 0 \tag{1}$$

d'où il s'ensuit que la fonction F est décroissante. On a $F(x_0) = 0$ pourvu que x_0 soit un zéro d'ordre deux au moins de l'intégrale $y(x)$. Le reste de l'énoncé concernant la fonction F est alors évident.

Lemme 2. *Soit $y(x)$ une solution de l'équation* (a) *et vérifiant*

$$y'(\varrho_0)\, y''(\varrho_0)\, y'''(\varrho_0) \neq 0\,,$$
$$\operatorname{sgn} y'(\varrho_0) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho_0) \neq \operatorname{sgn} y''(\varrho_0)\,, \tag{2}$$

où ϱ_0 est un de ses zéros. Alors pour tout zéro $\varrho < \varrho_0$ de cette intégrale nous avons

$$y'(\varrho)\, y''(\varrho)\, y'''(\varrho) \neq 0$$
$$\operatorname{sgn} y'(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} y''(\varrho)\,. \tag{3}$$

Démonstration. Posons $x = \varrho_0 - t$. L'équation (a) devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}t^4} + Q^*(t)\, y = 0$$

où $Q^*(t) = Q(\varrho_0 - t) \geqq 0$. L'intégrale $y(x)$ se transforme alors en $u(t) = y(\varrho_0 - t)$ vérifiant en $t = 0$ (correspondant à $x = \varrho_0$) les conditions

$$u'(0)\, u''(0)\, u'''(0) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} u'(0) = \operatorname{sgn} u''(0) = \operatorname{sgn} u'''(0)\,.$$

D'après [1], théorème 1.2, l'intégrale $u(t)$ vérifie en tout zéro $t_i > 0$ les conditions

$$u'(t_i)\, u''(t_i)\, u'''(t_i) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} u'(t_i) = \operatorname{sgn} u''(t_i) = \operatorname{sgn} u'''(t_i)\,. \tag{4}$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = (-1)^k \dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}$ et comme $\varrho_i = \varrho_0 - t_i$ représente un zéro de l'intégrale $y(x) = y(\varrho_0 - t) = u(t)$, on a

$$y'(\varrho_i)\, y''(\varrho_i)\, y'''(\varrho_i) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} y'(\varrho_i) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho_i) \neq \operatorname{sgn} y''(\varrho_i)\,.$$

La relation $\varrho_i < \varrho_0$ étant évidente, notre lemme 2 se trouve par là démontré.

Lemme 3. *Soient $x_0 < x_n$ deux nombres réels. Soit $y_3(x)$ l'intégrale de l'équation* (a), *déterminée par les conditions $y_3(x_0) = y_3'(x_0) = y_3''(x_0) = 0$, $y_3'''(x_0) = 1$. Soit $u_n(x)$ l'intégrale de l'équation* (a), *vérifiant les conditions: $u_n(x_0) = 0$, $u_n(x_n) = u_n'(x_n) = 0$. Alors entre tous deux zéros voisins de l'intégrale $y_3(x)$ situés dans l'intervalle (demi-ouvert) $\langle x_0, x_n)$, il y a exactement un zéro de l'intégrale $u_n(x)$; entre tous deux zéros voisins de l'intégrale $u_n(x)$, situés dans $(x_0, x_n\rangle$, il y a exactement un zéro de l'intégrale $y_3(x)$.*

Démonstration. Soient $y_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, les intégrales de l'équation (a) déterminées par les conditions

$$y_k^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } j \neq k\,, \\ 1\,, & \text{si } j = k\,, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{5}$$

Alors l'intégrale $u_n(x)$ peut être exprimée comme

$$u_n(x) = u_n'(x_0)\, y_1(x) + u_n''(x_0)\, y_2(x) + u_n'''(x_0)\, y_3(x)\,. \tag{6}$$

Cela signifie que le Wronskien $W(u_n, y_1, y_2, y_3) = 0$. En développant ce dernier d'après la colonne u_n, u_n', u_n'', u_n''', les mineurs qui y correspondent respectivement sont $y_3'''(x)$, $-y_3''(x)$, $y_3'(x)$, $-y_3(x)$. On aura donc

$$u_n(x)\, y_3'''(x) - u_n'(x)\, y_3''(x) + u_n''(x)\, y_3'(x) - u_n'''(x)\, y_3(x) = 0\,. \tag{7}$$

En partant de l'équation (7) nous obtenons les deux affirmations suivantes:

a) Dans l'intervalle (x_0, x_n) les intégrales $u_n(x)$ et $y_3(x)$ n'ont pas de zéro commun.

En effet, si ϱ, $x_0 < \varrho < x_n$, était un zéro commun aux deux intégrales $u_n(x)$ et $y_3(x)$, on obtiendrait de (7) que

$$-u_n'(\varrho)\, y_3''(\varrho) + u''(\varrho)\, y_3'(\varrho) = 0\,. \tag{8}$$

En vertu du théorème 1.2 de [1], on a $y_3'(\varrho)\, y_3''(\varrho) \neq 0$ et $\operatorname{sgn} y_3'(\varrho) = \operatorname{sgn} y_3''(\varrho)$. D'une manière analogue, comme dans le cas du lemme 2, on peut démontrer que l'intégrale $u_n(x)$ vérifie les relations (3) en tout son zéro qui est plus petit que x_n. Or cela signifie que l'équation (8) mène à une contradiction, ce qui implique donc la justesse de notre affirmation.

b) Si x_n est un zéro de l'intégrale $y_3(x)$, alors x_n est un zéro d'ordre trois de l'intégrale $u_n(x)$ et inversement, si x_n est un zéro d'ordre trois de l'intégrale $u_n(x)$, il est aussi un zéro (d'ordre un) de l'intégrale $y_3(x)$.

Pour la démonstration il suffit de se rappeler que d'après le théorème 1.2 de [1], tous les zéros de $y_3(x)$ qui sont plus grands que x_0 sont des zéros d'ordre un. De (7) nous obtenons immédiatement: si $u_n''(x_n) = 0$, alors $y_3(x_n) = 0$ et inversement. Soient maintenant α, β deux zéros voisins de l'intégrale $y_3(x)$, situés dans l'intervalle (x_0, x_n). Supposons que $u_n(x) \neq 0$ pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Alors dans cet intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ nous pouvons écrire l'équation (7) comme

$$\left[\frac{y_3''(x)}{u_n(x)}\right]' = -\frac{u_n''(x)}{u_n^2(x)}\, y_3'(x) + \frac{u_n'''(x)}{u_n^2(x)}\, y_3(x)\,. \tag{9}$$

En l'intégrant de α à β (intégration par parties du premier terme du second membre), nous obtenons

$$\frac{y_3''(\beta)}{u_n(\beta)} - \frac{y_n''(\alpha)}{u_n(\alpha)} = 2 \int_\alpha^\beta \frac{y_3(x)}{u_n(x)} \cdot \frac{u_n'''(x)\, u_n(x) - u_n'(x)\, u_n''(x)}{u_n^2 x)}\, dx\,. \tag{10}$$

Comme x_n est un zéro d'ordre deux au moins de l'intégrale $u_n(x)$, on a d'après notre lemme 1

$$F = u_n'''(x)\, u_n(x) - u_n'(x)\, u_n''(x) > 0$$

pour tout $x < x_n$. Cela signifie que l'intégrale au second membre de (10) est différente de zéro et que son signe est $\operatorname{sgn} y_3(x) \operatorname{sgn} u_n(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Ensuite, d'après le théorème 1.2 de [1], on a $y_3''(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \neq x_0$ et $y_3''(\alpha) = 0$ pour

$\alpha = x_0$, ensuite $y_3''(\beta) \neq 0$ et pour $\alpha \neq x_0$ on a $\operatorname{sgn} y_3''(\alpha) = \operatorname{sgn} y_3(x) \neq \operatorname{sgn} y_3''(\beta)$ tandis que pour $\alpha = x_0$ on a $\operatorname{sgn} y_3(x) \neq \operatorname{sgn} y_3''(\beta)$ pour $x \in (\alpha, \beta)$. Il s'en ensuit que le premier membre de (10) est différent de zéro et de signe $-\operatorname{sgn} y_3(x) \operatorname{sgn} u_n(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$. L'équation (10) conduit donc à une contradiction ce qui nous montre que dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, il y a au moins un zéro de l'intégrale $u_n(x)$. Dans le cas de $\alpha = x_0$ il suffit de considérer l'intervalle $\langle x_0 + \varepsilon, \beta \rangle$ avec ε positif et suffisamment petit, pour démontrer que l'équation (10), dans laquelle on remplace α par $x_0 + \varepsilon$, conduit de nouveau à une contradiction. Cela montre que dans l'intervalle $(x_0, \beta\rangle$ il y a au moins un zéro de l'intégrale $u_n(x)$. En tenant compte de a), nous obtenons qu'il y a au moins un zéro de l'intégrale $u_n(x)$ entre tous deux zéros voisins $\alpha, \beta, x_0 \leqq \alpha < \beta < x_n$, de l'intégrale $y_3(x)$.

Soient maintenant $\gamma, \delta, x_0 < \gamma < \delta \leqq x_n$ deux zéros voisins de l'intégrale $u_n(x)$ et supposons que $y_3(x) \neq 0$ pour tout $x \in \langle \gamma, \delta \rangle$. Alors, pour ces x, l'équation (7) peut être écrite sous la forme

$$\left[\frac{u_n''(x)}{y_3(x)}\right]' = -\frac{y_3''(x)}{y_3^2(x)} u_n'(x) + \frac{y_3'''(x)}{y_3^2(x)} u_n(x) . \tag{11}$$

En intégrant cette équation de γ à δ et en appliquant la méthode d'intégration par parties au premier terme du second membre, nous obtenons

$$\frac{u_n''(\delta)}{y_3(\delta)} - \frac{u_n''(\gamma)}{y_3(\gamma)} = 2 \int_\gamma^\delta \frac{u_n(x)}{y_3(x)} \cdot \frac{y_3'''(x)\, y_3(x) - y_3'(x)\, y_3''(x)}{y_3^2(x)} \,\mathrm{d}x . \tag{12}$$

Comme $y_3(x)$ a en x_0 un zéro d'ordre trois, on a en vertu du lemme 1

$$F = y_3'''(x)\, y_3(x) - y_3'(x)\, y_3''(x) < 0$$

pour $x > x_0$. Cela signifie que l'intégrale au second membre de (12) est différente de zéro et que son signe est $-\operatorname{sgn} y_3(x) \operatorname{sgn} u_n(x)$, $x \in (\gamma, \delta)$. Comme on l'a déja mentionné, $u_n(x)$ vérifie les relations (3) en tout zéro plus petit que x_n. Supposons d'abord que $\delta < x_n$. Il résulte de ce qui précède que $u_n''(\gamma) \neq 0$, $u_n''(\delta) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u_n''(\delta) = \operatorname{sgn} u_n(x) \neq \operatorname{sgn} u_n''(\gamma)$, $x \in (\gamma, \delta)$. Cela entraîne que le premier membre de (12) est non-nul et que son signe est $\operatorname{sgn} u_n(x) \operatorname{sgn} y_3(x)$, $x \in (\gamma, \delta)$. L'équation (12) conduit donc à une contradiction, ce qui nous montre que dans l'intervalle $\langle \gamma, \delta \rangle$, il y a au moins un zéro de l'intégrale $y_3(x)$. Dans le cas de $\delta = x_n$ et $y_3(x_n) \neq 0$ x_n est un zéro d'ordre deux seulement de $u_n(x)$, d'où l'on a $\operatorname{sgn} u_n''(\delta) = \operatorname{sgn} u_n(x)$, $x \in (\gamma, \delta)$ et l'équation (12) conduit de nouveau à une contradiction. Si l'on a $\delta = x_n$ et $y_3(x_n) = 0$, il faudra tenir compte de b) et remarquer que l'on a dans ce cas

$$\lim_{x \to x_n -} \frac{y_3''(x)}{y_3^2(x)} u_n(x) = 0 .$$

Cela montre que l'équation (12) reste valable même dans ce cas-là et comme

$$\operatorname{sgn} \lim_{x \to x_n -} \frac{u_n''(x)}{y_3(x)} = \operatorname{sgn} \frac{u_n'''(x_n)}{y_3'(x_n)} = \operatorname{sgn} u_n(x)\, y_3(x) \,, \quad x \in (\gamma, \delta) \,,$$

nous obtenons de nouveau une contradiction. Compte tenant de a), il en résulte qu'entre tous deux zéros voisins $\gamma, \delta, x_0 < \gamma < \delta \leqq x_n$ de l'intégrale $u_n(x)$ il y a au moins un zéro de l'intégrale $y_3(x)$. Notre lemme 3 se trouve par là démontré.

Définition. Désignons par S l'ensemble de toutes les intégrales de l'équation (a) jouissant de la propriété suivante: si $u(x) \in S$, alors en tout zéro ϱ de l'intégrale $u(x)$ nous avons

$$u'(\varrho)\, u''(\varrho)\, u'''(\varrho) \neq 0 \,, \quad \operatorname{sgn} u'(\varrho) = \operatorname{sgn} u'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} u''(\varrho) \,. \tag{13}$$

Théorème 1. *L'ensemble S est non-vide. Il existe au moins deux éléments $u(x)$, $v(x) \in S$, qui sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit $x_0 \in (-\infty, \infty)$ un nombre réel arbitraire. Soient $y_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, les intégrales de l'équation (a) déterminées par les conditions (5). Il est aisé de voir que ces intégrales forment un système fondamental de l'équation (a). Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots, x_n \to \infty$. Désignons par $u_n(x)$ l'intégrale de l'équation (a) vérifiant les relations

$$u_n(x_n) = u_n'(x_n) = 0 \,, \tag{14}$$

$$u_n(x_0) = 0 \,, \tag{15}$$

$$u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0) + u_n'''^2(x_0) = 1 \,. \tag{16}$$

Une telle intégrale existe toujours. D'après le théorème 1.2 de [1], nous avons en tout zéro ϱ, $\varrho < x_n$, de l'intégrale $u_n(x)$

$$u_n'(\varrho)\, u_n''(\varrho)\, u_n'''(\varrho) \neq 0 \,, \quad \operatorname{sgn} u_n'(\varrho) = \operatorname{sgn} u_n'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} u_n''(\varrho) \,. \tag{17}$$

Comme x_0 est un zéro de l'intégrale $u_n(x)$ et comme $x_0 < x_n$, on a (17) aussi pour $\varrho = x_0$.

Considérons maintenant les suites

$$\{u_n'(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \,, \quad \{u_n''(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \,, \quad \{u_n'''(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \,. \tag{18}$$

De (16) découle que ces suites-là sont bornées. Il existe donc une suite $\{u_{n_k}'(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$, extraite de la première des suites (18), qui est convergente; soit u_0' sa limite. Comme la suite correspondante $\{u_{n_k}''(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ est encore bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, soit $\{u_{n_{k_l}}''(x_0)\}_{l=1}^{\infty}$; désignons par u_0'' sa limite. En procédant de la même manière avec la troisième suite, nous trouvons enfin une suite croissante d'indices (que nous désignerons, pour simplifier l'écriture, par n) telle que

$$u_n'(x_0) \to u_0' \,, \quad u_n''(x_0) \to u_0'' \,, \quad u_n'''(x_0) \to u_0''' \,. \tag{19}$$

A cette suite $\{u_n\}$ correspond, par l'intermédiaire des relations (14)—(16) une suite $\{x_n\}$ croissante, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n \to \infty$. Désignons par $u(x)$ l'intégrale de l'équation (a) déterminée par les conditions

$$u(x_0) = 0\,, \quad u'(x_0) = u_0'\,, \quad u''(x_0) = u_0''\,, \quad u'''(x)_0 = u_0'''\,. \tag{20}$$

L'intégrale $u(x)$ est non-triviale, car tous les trois nombres u_0', u_0'', u_0''' ne peuvent pas être nuls en vertu de la relation

$$\lim_{n\to\infty} [u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0) + u_n'''^2(x_0)] = u_0'^2 + u_n''^2 + u_n'''^2 = 1\,.$$

Imposons aux intégrales $u_n(x)$ les conditions

$$u_n'(x_0) > 0\,, \quad u_n''(x_0) < 0\,, \quad u_n'''(x_0) > 0 \tag{21}$$

qui peuvent être toujours remplies. De là découle ensuite que

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(x_0) = u_0' \geqq 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} u_n''(x_0) = u_0'' \leqq 0\,, \ \lim_{n\to\infty} u_n'''(x_0) = u_0''' \geqq 0. \tag{22}$$

Nous allons montrer maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)\,. \tag{23}$$

Nous allons commencer par exprimer les intégrales $u_n(x)$ et $u(x)$ au moyen de $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. On a

$$u_n(x) = u_n'(x_0)\, y_1(x) + u_n''(x_0)\, y_2(x) + u_n'''(x_0)\, y_3(x)\,, \tag{24}$$

$$u(x) = u_0'y_1(x) + u_0''y_2(x) + u_0'''y_3(x)\,. \tag{24'}$$

Compte tenant de (22) on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_0'y_1(x) + u_0''y_2(x) + u_0'''y_3(x) = u(x)\,.$$

D'une façon analogue on démontre que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{(k)}(x) = u^{(k)}(x)\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{25}$$

Désignons par $\varrho_i^{(n)}$ l'i-ième zéro de l'intégrale $u_n(x)$ situé à droite de x_0. En vertu du lemme 3, pour n suffisamment grand, tous les $\varrho_i^{(n)}$ sont situés dans (α_{i-1}, α_i) où α_i désigne l'i-ième zéro de l'intégrale $y_3(x)$ à droite de x_0; c'est valable pour tous les n, pour lesquels $\alpha_i < \alpha_n$. La suite $\{\varrho_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ est donc bornée, aussi a-t-elle au moins un point limite, désignons-le par τ_i. Il est clair que $\alpha_{i-1} \leqq \tau_i \leqq \alpha_i$. Il existe donc une suite partielle $\{\varrho_i^{(n_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ convergeant vers τ_i. D'après (24) on a

$$0 = u_{n_k}(\varrho_i^{(n_k)}) = u_{n_k}'(x_0)\, y_1(\varrho_i^{(n_k)}) + u_{n_k}''(x_0)\, y_2(\varrho_i^{(n_k)}) + u_{n_k}'''(x_0)\, y_3(\varrho_i^{(n_k)})\,.$$

En passant à la limite pour $k \to \infty$ et en tenant compte de la continuité des fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, on obtient $u(\tau_i) = 0$. Ensuite comme

$$(-1)^i\, u_{n_k}'(\varrho_i^{(n_k)}) > 0\,, \quad (-1)^i\, u_{n_k}''(\varrho_i^{(n_k)}) < 0\,, \quad (-1)^i\, u_{n_k}'''(\varrho_i^{(n_k)}) > 0$$

et comme les dérivées des fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x_3(x)$ sont, elles-aussi, continues, il vient que

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^i u'_{n_k}(\varrho_i^{(n_k)}) = (-1)^i u'(\tau_i) \geqq 0 ,$$
$$\lim_{k\to\infty} (-1)^i u''_{n_k}(\varrho_i^{(n_k)}) = (-1)^i u''(\tau_i) \leqq 0 ,$$
$$\lim_{k\to\infty} (-1)^i u'''_{n_k}(\varrho_i^{(n_k)}) = (-1)^i u'''(\tau_i) \geqq 0 . \tag{26}$$

L'intégrale $u(x)$ étant non-triviale, il y a parmi les relations (26) une au moins pour laquelle le signe d'égalité n'est pas valable. Nous allons montrer que c'est le cas de toutes les trois relations (26). Supposons en effet que l'égalité ait lieu dans une de ces relations. En vertu du théorème 1.2 de [1] on aurait en tout zéro τ de l'intégrale $u(x)$, situé à droite de τ_i, $u'(\tau)\, u''(\tau)\, u'''(\tau) \neq 0$ et $\operatorname{sgn} u'(\tau) = \operatorname{sgn} u''(\tau) = \operatorname{sgn} u'''(\tau)$. Comme dans l'intervalle $\langle \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2} \rangle$ par exemple, il y a un zéro de l'intégrale $u(x)$ (pour les mêmes raisons comme dans l'intervalle $\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$) satisfaisant, lui-aussi, aux relations analogues à (26), nous arrivons à une contradiction. Il en résulte donc que le signe d'égalité n'a lieu dans aucune des relations (26). En appliquant maintenant notre lemme 2 nous voyons que l'intégrale $u(x)$ vérifie, en tout son zéro ϱ qui est plus petit que τ_i, les relations (13). Comme i était un entier positif arbitraire et comme α_{i-1} croît indéfiniment avec i, ce qui entraîne, en vertu de la relation $\alpha_{i-1} \leqq \tau_i$ aussi la croissance des τ_i, il résulte que l'intégrale $u(x)$ verifie les relations (13) en tout son zéro. La première partie du théorème 1 est donc démontrée.

L'intégrale cherchée $u(x)$ a un zéro au point x_0 qui a été choisi arbitrairement, mais qui joue un rôle important dans la construction de l'intégrale $u(x)$. Choisissons un nombre x_1 tel qu'il ne soit pas un zéro de l'intégrale $u(x)$. En partant de cet x_1, construisons une autre intégrale $v(x)$ pour laquelle x_1 joue le même rôle comme x_0 pour $u(x)$. Cette intégrale $v(x)$ s'annule en x_1 et vérifie les relations (13) en chaque zéro et elle est linéairement indépendante de l'intégrale $u(x)$. La démonstration du théorème 1 est par là achevée.

Remarque. Les intégrales $u(x)$ et $y_3(x)$ vérifient une équation analogue à (7) où nous écrivons $u(x)$ au lieu de $u_n(x)$. Il résulte alors de (13) que $u(x)$ et $y_3(x)$ n'ont pas de zéro commun situé à droite de x_0.

Théorème 2. *Soit $u(x) \in S$. Il existe alors une constante $K > 0$ telle que pour x suffisamment grand*

$$|u'(x)| \leqq K. \tag{27}$$

On a ensuite

$$\int^{\infty} Q(x)\, u^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty , \quad \int^{\infty} u''^2(x)\, \mathrm{d}(x) < \infty . \tag{28}$$

Démonstration. Multiplions l'équation $u^{(4)} + Q(x)\, u = 0$ par u. En intégrant par parties nous obtenons

$$u(x)\, u'''(x) - u'(x)\, u''(x) = k - \int_\alpha^x [Q(x)\, u^2(x) + u''^2(x)]\, dx \, .$$

D'après notre lemme 1, le premier membre est une fonction décroissante, tout en restant toujours positif, car en chaque zéro de l'intégrale $u(x)$ ce premier membre est égal à $-u'(\varrho)\, u''(\varrho)$ ce qui est un nombre positif en vertu de (13). De ces deux propriétés du premier membre résulte

1° $$\lim_{x\to\infty} [u(x)\, u'''(x) - u'(x)\, u''(x)] = L \geqq 0 \, ; \tag{29}$$

2° $$\int^\infty [Q(x)\, u^2(x) + u''^2(x)]\, dx < \infty \, . \tag{30}$$

Nous allons montrer d'abord que $L = 0$. En effet, si $L > 0$, on aurait $u'''(x)\, u(x) - u'(x)\, u''(x) > L > 0$. Cette inégalité peut être écrite comme

$$[u''(x)\, u(x) - u'^2(x)]' > L > 0 \, .$$

Il s'en ensuit que la fonction $u''(x)\, u(x) - u'^2(x)$ est croissante sur tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et qu'elle tend vers ∞; or cela est une contradiction, car cette fonction est négative en chaque zéro de l'intégrale $u(x)$ d'où il résulte qu'elle est négative sur tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Cette contradiction montre que $L = 0$.

La fonction $u'^2(x)$ a des maxima locaux aux zéros de la fonction $u''(x)$. Du fait que la fonction $u''u - u'^2$ est négative et croissante, il résulte que la suite des maxima de la fonction $u'^2(x)$ est décroissante. Cela signifie que la fonction $u'^2(x)$ est bornée dans l'intervalle (c, ∞), donc $u'(x)$ l'est également. On a

$$|u'(x)| < |u'(\gamma)| \quad \text{pour } x > \gamma \, ,$$

γ désignant un zéro de $u''(x)$.

Il découle de 2° que

$$\int^\infty Q(x)\, u^2(x)\, dx < \infty \, , \quad \int^\infty u''^2(x)\, dx < \infty \, .$$

Lemme 5. *Toute intégrale $y(x)$ de l'équation* (a) *qui n'appartient pas à S jouit de la propriété suivante: à partir d'un zéro ϱ_0 on a en tout son zéro $\varrho > \varrho_0$*

$$y'(\varrho)\, y'(\varrho)\, y'''(\varrho) \neq 0 \, , \quad \operatorname{sgn} y'(\varrho) = \operatorname{sgn} y''(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho) \, .$$

Démonstration. Si $y(x) \bar{\in} S$, il existe un zéro, soit ϱ_0, où les relations (13) ne sont pas vérifiées. Des cas suivant peuvent alors se présenter:

a) $$y'(\varrho_0)\, y''(\varrho_0)\, y'''(\varrho_0) = 0 \, .$$

Notre lemme 5 découle alors du théorème 1.2 de [1].

b) $y'(\varrho_0)\, y''(\varrho_0)\, y'''(\varrho_0) \neq 0$, mais on a ou bien

$$1. \quad \operatorname{sgn} y'(\varrho_0) = \operatorname{sgn} y''(\varrho_0) \, ,$$

ou bien

$$2. \quad \operatorname{sgn} y''(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho_0) \neq \operatorname{sgn} y'(\varrho_0)\,.$$

Dans le cas 1., notre lemme découle du théorème 1.1 de [1]. Considérons donc cas 2. Soit ϱ_1 le zéro le plus proche (à droite) de ϱ_0. Supposons que nous ayons $y(x) > 0$ dans (ϱ_0, ϱ_1). Ces suppositions faites, nous voyons que $y'(\varrho_0) > 0$, $y''(\varrho_0) < 0$, $y'''(\varrho_0) < 0$, $y'(\varrho_1) \leqq 0$. Si l'on avait $y'(\varrho_1) = 0$, le lemme 5 serait de nouveau une conséquence du théorème 1.2 de [1]. Supposons donc que $y'(\varrho_1) < 0$. Il résulte alors de l'équation (a) que $y'''(x)$ est décroissante dans l'intervalle (ϱ_0, ϱ_1), et comme $y'''(\varrho_0) < 0$, on a $y'''(x) < 0$ dans tout l'intervalle (ϱ_0, ϱ_1) et aussi $y'''(\varrho_1) < 0$. De là, il s'ensuit que $y''(x)$ décroît dans (ϱ_0, ϱ_1) et comme $y''(\varrho_0) < 0$, on a de nouveau $y''(x) < 0$ dans tout l'intervalle (ϱ_0, ϱ_1) avec $y''(\varrho_1) < 0$. On a donc en ϱ_1: $y(\varrho_1) = 0$, $\operatorname{sgn} y'(\varrho_1) = \operatorname{sgn} y''(\varrho_1) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho_1)$ En vertu du théorème 1.1 de [1] on obtient alors notre lemme 5 dont la démonstration est par là achevée.

Théorème 3. *L'ensemble S des intégrales de l'équation* (a) *est identique à l'ensemble des intégrales non-triviales de cette équation, qui admettent une dérivée bornée pour les grandes valeurs de x. Si $u, v \in S$ sont deux intégrales linéairement indépendantes, l'ensemble S coïncide avec l'ensemble de toutes les combinaisons lineaires de u et v (à l'exception de la combinaison triviale).*

Démonstration. Si $y(x) \in S$, $y'(x)$ est bornée en vertu du théorème 2. Soit $y(x) \bar{\in} S$, alors notre lemme 5 s'applique. Désignons par ϱ un zéro de $y(x)$ tel que l'on a $\operatorname{sgn} y'(\varrho) = \operatorname{sgn} y''(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho)$. On a alors $F(\varrho) = y'''(\varrho)\, y(\varrho) - y'(\varrho)\, y''(\varrho) < 0$. Or la fonction $F(x)$ étant décroissante (voir notre lemme 1), on a pour $x > \varrho$ aussi $F(x) < F(\varrho) < 0$. Il résulte de cette inégalité que la fonction $G(x) = y''(x)\, y(x) - y'^2(x)$ est décroissante pour $x > \varrho$ et que $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = -\infty$. De là s'ensuit immédiatement que $\limsup\limits_{x\to\infty} y'^2(x) = \infty$. Mais cela signifie que toutes les intégrales de l'équation (a) qui n'appartiennent pas S ont une dérivée non-bornée.

D'après notre théorème 1, l'ensemble S contient au moins deux intégrales linéairement indépendantes, soit $u(x)$ et $v(x)$. En vertu de la première partie du théorème 3, il est aisé de voir que les combinaisons linéaires de ces deux intégrales appartiennent à S également. Nous affirmons que l'ensemble de ces combinaisons linéaires est identique à S. En effet, s'il existait une intégrale $y(x)$ appartenant à S sans qu'on pût l'exprimer comme une combinaison linéaire de $u(x)$ et $v(x)$, les intégrales $u(x)$, $v(x)$ et $y(x)$ seraient linéairement indépendantes. Il serait aisé alors de démontrer à l'aide du théorème 3 que toutes leurs combinaisons linéaires appartiennent à S également. Mais cela n'est pas possible, car une de ces combinaisons a en x_0 un zéro d'ordre deux, ou même d'ordre trois. Cette intégrale ne peut pas appartenir à S, car elle ne satisfait pas, en x_0, les relations (13). Notre énoncé est par là démontré complètement.

L'ensemble S est donc à deux paramètres. Il est facile de démontrer que S coïncide avec l'ensemble de toutes les intégrales de l'équation différentielle

$$A_0(x)\, y'' - A_0' y' + B_0(x)\, y = 0 \tag{31}$$

où

$$A_0(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}, \quad B_0(x) = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Lemme 6. *Soit $f(x)$ une fonction admettant une dérivée bornée*

$$|f'(x)| \leqq K < \infty \tag{33}$$

dans l'intervalle (a, ∞). Supposons en plus que l'intégrale $\int\limits^{\infty} f^2(x)\, \mathrm{d}x$ soit convergente. Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Démonstration. Il découle de la convergence de l'intégrale $\int\limits^{\infty} f^2(x)\, \mathrm{d}x$ que l'on a $\liminf\limits_{x\to\infty} f^2(x) = 0$. Supposons que nous ayons $\limsup\limits_{x\to\infty} f^2(x) = L > 0$ avec $L \leqq \infty$, et choisissons un nombre réel M tel que

$$0 < M < L\,. \tag{34}$$

Il existe alors une suite de nombres réels $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to \infty$, telle que $f^2(x_n) = M$ pour tout n naturel. A chaque x_n nous pouvons faire correspondre un nombre $\alpha_n < x_n$ tel que $f^2(\alpha_n) = \frac{M}{2}$, α_n étant le plus grand des nombres (plus petits que x_n) jouissant de cette propriété; et, d'une manière analogue, nous dénoterons par β_n le plus petit des nombres plus grands que x_n pour lequel on a de nouveau $f^2(\beta_n) = \frac{M}{2}$. Il est clair que certains nombres α_n, comme aussi β_n, peuvent coïncider. Choisissons donc une suite $\{x_n\}$ telle qu'on ait pour tout $x \in (\alpha_n, x_n)$

$$f^2(\alpha_n) = \frac{M}{2} < f^2(x) < f^2(x_n) = M\,, \tag{35}$$

le nombre β_n étant le plus proche à droite de α_n tel que $f^2(\beta_n) = \frac{M}{2}$. Il est évident qu'un tel choix de la suite $\{x_n\}$ est toujours possible. Il est clair, d'après ce qui précède, que l'on a $f^2(x) > \frac{M}{2}$ pour $x \in (\alpha_n, \beta_n)$. Comme on a en plus

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2}\,(\beta_n - \alpha_n) \leqq \int\limits_{\alpha_1}^{\infty} f^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)$ est convergente d'où il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$, et donc à plus forte raison

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - \alpha_n) = 0 . \tag{36}$$

En appliquant la formule des accroissements finis nous obtenons ensuite

$$f^2(x_n) - f^2(\alpha_n) = [f^2(\xi)]'(x_n - \alpha_n) , \quad \xi \in (\alpha_n, x_n) . \tag{37}$$

Compte tenu de (33) et (35) on trouve

$$|[f^2(x)]'| = 2 . |f(x)| . |f'(x)| \leqq 2\sqrt{MK} ; \quad x \in (\alpha_n, x_n) .$$

De là et de (37) s'ensuit l'inégalité $0 < \frac{M}{2} \leqq 2K\sqrt{M} . (x_n - \alpha_n)$ d'où l'on peut tirer une contradiction évidente en faisant n tendre vers ∞. Il en résulte donc que $\limsup_{x\to\infty} f^2(x) = 0$, ce qui prouve notre énoncé.

Théorème 4. *Soit* $0 < m \leqq Q(x)$. *Alors pour chaque* $u(x) \in S$ *on a*

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0 . \tag{38}$$

Démonstration. De la supposition $0 < m \leqq Q(x)$ et de (28) on obtient

$$\int^{\infty} u^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty . \tag{39}$$

De là et de (27), il vient, en vertu du lemme 6, $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Soit a un zéro de l'intégrale $u(x)$. Considérons maintenant l'inégalité évidente

$$-\frac{1}{2} (u^2 + u''^2) \leqq uu'' .$$

En l'intégrant, nous obtenons, en vertu de (27) et du fait que $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$,

$$-\frac{1}{2} \int_a^{\infty} (u^2 + u''^2)\, \mathrm{d}x \leqq - \int_a^{\infty} u'^2\, \mathrm{d}x .$$

L'intégrale du premier membre étant convergente [cf. (28) et (39)] nous voyons que celle du second membre est aussi convergente, donc

$$\int_a^{\infty} u'^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty . \tag{40}$$

Considérons maintenant la fonction $G = uu'' - u'^2$. Nous savons que c'est une fonction croissante et partout négative. Ecrivons $\lim_{x\to\infty} G(x) = -k$; $k \geqq 0$. Nous allons montrer que $k = 0$. En effet, supposons que nous ayons $k > 0$. Alors

$$G = uu'' - u'^2 < -k < 0 .$$

De là nous obtenons $k + (uu')' < 2u'^2$ d'où par intégration

$$\int_a^x k \, dx + u(x) \, u'(x) < 2 \int_a^x u'^2(x) \, dx .$$

En faisant x tendre vers ∞ et en tenant compte de ce que $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = 0$ et de (27) nous obtenons

$$\infty = \int_a^\infty k \, dx < 2 \int_a^\infty u'^2(x) \, dx$$

en contradiction avec (40). Cela nous montre que $k = 0$. On a donc

$$\lim_{x \to \infty} G(x) = - k = 0.$$

Soit maintenant $\{\eta_\nu\}$ une suite de nombres telle que $u''(\eta_\nu) = 0$ et $\lim\limits_{\nu \to \infty} \eta_\nu = \infty$; c'est-à-dire que $u'^2(\eta_\nu)$ soient des maxima locaux de la fonction $u'^2(x)$. On a alors $\lim\limits_{\nu \to \infty} G(\eta_\nu) = - \lim\limits_{\nu \to \infty} u'^2(\eta_\nu) = 0$. Il s'en ensuit que la suite des maxima de la fonction $u'^2(x)$ tend vers zéro, donc aussi $\lim\limits_{x \to \infty} u'(x) = 0$.

Théorème 5. *Soit* $0 \leqq Q(x) \leqq M$. *Alors pour toute intégrale* $u(x) \in S$ *on a*

$$\int^\infty u'''^2(x) \, dx < \infty , \quad |u'''(x)| \quad \textit{est borné} , \tag{41}$$

$$\lim_{x \to \infty} u''(x) = 0 . \tag{42}$$

Démonstration. Multiplions l'équation (a), écrite pour $u(x)$ au lieu de $y(x)$, par $u''(x)$. Soit $u'''(a) = 0$. De là nous obtenons après modifications

$$u''(x) \, u'''(x) - \int_a^x u'''^2(x) \, dx = - \int_a^x Q(x) \, u(x) \, u''(x) \, dx . \tag{43}$$

Comme

$$- \frac{1}{2} \, Q(x)[u^2(x) + u''^2(x)] \leqq - Q(x) \, u(x) \, u''(x) \leqq \frac{1}{2} \, Q(x)[u^2(x) + u''^2(x)]$$

et comme $0 \leqq Q(x) \leqq M$, il vient de (43)

$$- \frac{1}{2} \int_a^x Q(x) \, u^2(x) \, dx - \frac{M}{2} \int_a^x u''^2(x) \, dx \leqq u''(x) \, u'''(x) - \int_a^x u'''^2(x) \, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2} \int_a^x Q(x) \, u^2(x) \, dx + \frac{M}{2} \int_a^x u''^2(x) \, dx .$$

En tenant compte de (28) et en faisant tendre x vers ∞ en passant par les zéros de la fonction $u''(x)$, nous obtenons

$$\int_a^\infty u'''^2(x) \, dx < \infty . \tag{44}$$

Multiplions maintenant la même équation par $u'''(x)$ et intégrons-la de a à x, il en vient

$$\frac{1}{2} u'''^2(x) = -\int_a^x Q(x)\, u(x)\, u'''(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Comme

$$Q(x)\, |u(x)\, u'''(x)| \leqq \frac{1}{2} [u^2(x) + u'''^2(x)]\, Q(x)$$

et comme $0 \leqq Q(x) \leqq M$, nous obtenons par intégration

$$u'''^2(x) \leqq \int_a^\infty Q(x)\, u^2(x)\, \mathrm{d}x + M\int_a^\infty u'''^2(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Compte tenu de (28) et (44) il en résulte que $u'''(x)$ est bornée pour x grand. De là et de (28) nous obtenons en vertu du lemme 6 $\lim\limits_{x\to\infty} u''(x) = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.

Théorème 6. *Si* $0 < m \leqq Q(x) \leqq M$, *alors pour toute intégrale* $u(x) \in S$ *on a*

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = \lim_{x\to\infty} u'''(x) = 0\,.$$

Démonstration. Les théorèmes 4 et 5 entraînent

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0\,.$$

Comme $Q(x) \leqq M$, on a

$$|u^{(4)}| = |-Q(x)\, u(x)| \leqq M|u(x)| \to 0 \quad \text{pour } x \to \infty\,.$$

Cela signifie que $u^{(4)}(x)$ est bornée pour les grandes valeurs de x. La relation (44) étant vérifiée, nous obtenons en vertu du lemme 6 $\lim\limits_{x\to\infty} u'''(x) = 0$.

Théorème 7. *Soit* $y(x)$ *une intégrale de l'équation* (a), $y(x) \bar{\in} S$. *Alors*

$$\int^\infty y'^2\, \mathrm{d}x = \infty\,, \quad \int^\infty (y^2 + y''^2)\, \mathrm{d}x = \infty\,. \tag{45}$$

Démonstration. Comme $y \bar{\in} S$, il existe un de ses zéros, soit ϱ, pour lequel on a

$$\operatorname{sgn} y'(\varrho) = \operatorname{sgn} y''(\varrho) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho)\,.$$

De là vient que

$$F(\varrho) = y(\varrho)\, y'''(\varrho) - y'(\varrho)\, y''(\varrho) < 0\,.$$

La fonction F étant décroissante, on aura $F(x) < F(\varrho) < 0$ pour $x > \varrho$. Or cela implique que la fonction $G(x) = y(x)\, y''(x) - y'^2(x)$ est décroissante pour

$x > \varrho$. On a donc $G(x) < G(\varrho) = -y'^2(\varrho) < 0$ pour $x > \varrho$. Par intégration on en obtient

$$y(x)\, y'(x) < G(\varrho)\, (x - \varrho) + 2\int_\varrho^x y'^2\, \mathrm{d}x\,.$$

On a $\lim_{x \to \infty} G(\varrho)(x - \varrho) = -\infty$. L'inégalité précédente entraîne donc $\int_\varrho^\infty y'^2\, \mathrm{d}x = \infty$. En y appliquant le théorème 259 de [3], nous voyons qu'une au moins des intégrales $\int^\infty y^2\, \mathrm{d}x$, $\int^\infty y''^2\, \mathrm{d}x$ est infinie, donc $\int^\infty (y^2 + y''^2)\, \mathrm{d}x = \infty$.

Théorème 8. *Soit* $0 < m \leqq Q(x)$. *Soit* $y(x)$ *une intégrale de l'équation* (a), $y(x) \bar{\in} S$. *Alors les fonctions* $y^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$, *sont non-bornées pour* x *grand.*

Démonstration. L'intégrale $y(x)$ n'appartenant pas à S, il existe en vertu du lemme 5 un zéro de $y(x)$ tel que pour les zéros ϱ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ numérotés dans leur ordre de croissance, situés à droite de ϱ_0 on a

$$\operatorname{sgn} y'(\varrho_i) = \operatorname{sgn} y''(\varrho_i) = \operatorname{sgn} y'''(\varrho_i)\,.$$

En vertu du théorème 1.5 a) de [1] on a

$$\varrho_{i+1} - \varrho_i \leqq \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[4]{m}}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{46}$$

où $p_{n,n-1}$ est une constante positive.

Les relations $F(x) < 0$, $G(x) < 0$ valable pour $x > \varrho_0$ impliquent que dans chaque intervalle $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$ il y a exactement un zéro de la fonction $y''(x)$ et un zéro de $y'(x)$. De la monotonie de $y'''(x)$ dans $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$ et du fait que $\operatorname{sgn} y'''(\varrho_i) \neq \operatorname{sgn} y'''(\varrho_{i+1})$ découle l'existence d'un zéro (et d'un seul) de $y'''(x)$ dans chaque intervalle $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$. De là et de (46) résulte que la distance des zéros voisins de la fonction $y^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, qui sont plus grands que ϱ_0, est bornée supérieurement.

Désignons par α_{ki} le zéro de la fonction $y^{(k)}(x)$ situé dans $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$. Remarquons que $y^k(x)$ atteint en $\alpha_{k+1,i}$ sa valeur extrême (localement). A l'aide de la formule de l'acroissements finis nous avons

$$|y^{(k)}(\alpha_{k+1,i})| = |\alpha_{ki} - \alpha_{k+1,i}| \cdot |y^{(k+1)}(\xi_i)|\,, \tag{47}$$

ξ_i étant situé entre $\alpha_{k+1,i}$ et $\alpha_{k,i}$, $k = 1, 2, 3, 4$. La fonction $y'(x)$ n'est pas bornée (voir la démonstration du théorème 3), tandis que les différences $|\alpha_{ki} - \alpha_{k+1,i}|$ le sont; l'égalité (47) implique donc que les fonctions $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$ ne sont pas bornées non plus.

Théorème 9. *Soit* $0 < m \leqq Q(x) \leqq M$. *Soit* $y(x)$ *une intégrale de l'équation* (a), $y(x) \bar{\in} S$. *Alors les fonctions* $y^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ *ne sont pas bornées pour* x *grand.*

Démonstration. Pour $k = 1, 2, 3, 4$ voir le théorème précédent. Pour $k = 0$, l'inégalité $Q(x) \leqq M$ avec l'équation (a) prouve l'énoncé de notre théorème.

LITTÉRATURE

[1] *M. Švec:* Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0$; Чехослов. матем. журнал, *6* (*81*), 1956, 46—71.

[2] *M. Biernacki:* Sur l'équation différentielle $y^{(4)} + A(x)\, y = 0$; Annales Univ. M. Curie-Sklodowska, *6* (1952), 65—78.

[3] *Hardy-Littlewood-Pólya:* Inequalities, Cambridge, 1934.

Резюме

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y^{(4)} + Q(x)\, y = 0$

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава

(Поступило в редакцию 28/V 1957 г.)

М. Бернацкий [2] доказал, что интеграл дифференциального уравнения (а) стремится к нулю при $x \to \infty$, если коэффициент $Q(x)$ является на интервале (x_0, ∞) непрерывной, неубывающей и имеющей непрерывные производные функцией. Одновременно он высказал там предположение, что существуют по крайней мере два линейно независимых интеграла этого уравнения, которые стремятся к нулю при $x \to \infty$, и что кроме этих интегралов существуют интегралы уравнения (а), неограниченные для больших x. В работе доказывается, что предположение Бернацкого о существовании двух линейно независимых интегралов, стремящихся к нулю при $x \to \infty$, правильно и при более общих условиях, выполняемых функцией $Q(x)$. Существование неограниченных интегралов доказано лишь при сильно ограничивающих условиях для функции $Q(x)$. Доказано следующее:

Пусть $Q(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на интервале $(-\infty, \infty)$, не равная тождественно нулю ни на одном частичном интервале и такая, что все ее интегралы являются колеблющимися.

Пусть S означает множество тех интегралов $u(x)$ уравнения (а), которые выполняют условие (13) в каждой своей нулевой точке.

Теорема 1. *Множество S непусто. Существуют хотя бы два линейно независимых интеграла, принадлезащих S.*

Теорема 2. *Пусть $u(x) \in S$. Тогда существует постоянная $K > 0$ такая, что для больших x*

$$|u'(x)| < K$$

и

$$\int^{\infty} Q(x)\, u^2\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int^{\infty} u''^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Теорема 3. *Множество S тождественно с множеством тех интегралов уравнения* (a), *первая производная которых ограничена для больших x. Если u, $v \in S$ линейно независимы, то S тождественно с множеством всех линейных комбинаций u и v (за исключением тривиальных).*

Теорема 4. *Пусть $0 < m \leqq Q(x)$. Тогда для любого $u(x) \in S$ имеет место* $\lim\limits_{n \to \infty} u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u'(x) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $0 \leqq Q(x) \leqq M$. Тогда для любого интеграла $u(x) \in S$ имеет место*

$$\int^{\infty} u'''^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

$u'''(x)$ ограничена для больших x, $\lim\limits_{x \to \infty} u''(x) = 0$.

Теорема 6. *Если $0 < m \leqq Q(x) \leqq M$, то для любого интеграла $u(x) \in S$ имеет место* $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = \lim\limits_{x \to \infty} u'(x) = \lim\limits_{x \to \infty} u''(x) = \lim\limits_{x \to \infty} u'''(x) = 0$.

Теорема 7. *Если $y(x)$ есть интеграл уравнения* (a) *и $y(x) \,\bar{\in}\, S$, то*

$$\int^{\infty} y'^2(x)\, \mathrm{d}x = \infty\,, \quad \int^{\infty} (y^2(x) + y''^2(x))\, \mathrm{d}x = \infty\,.$$

Теорема 8. *Пусть $0 < m \leqq Q(x)$. Пусть $y(x)$ есть интеграл уравнения* (a) *и пусть $y(x) \,\bar{\in}\, S$. Тогда $y^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$ является неограниченным для больших x.*

Теорема 9. *Пусть $0 < m \leqq Q(x) \leqq M$. Пусть $y(x)$ есть интеграл уравнения* (a) *и пусть $y(x) \,\bar{\in}\, S$. Тогда $y^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, является неограниченным для больших x.*