Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Ráb

Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 222–229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100296

ÜBER LINEARE PERTURBATIONEN EINES SYSTEMS VON LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MILOŠ RÁB, Brno

(Eingelangt am 14. Mai 1957)

In der Arbeit wird eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Gleichheit der Lösungen eines Systems von linearen Differentialgleichungen und eines perturbierten Systems abgeleitet. Das Resultat wird zur Untersuchung der asymptotischen Formeln von Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung benützt.

Es seien $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{B}(t)$ zwei quadratische Matrizen vom Grad n; die Elemente $a_{ij}(t)$ der Matrix $\mathbf{A}(t)$ seien im Intervall $\langle t_0; \infty)$ stetig. Wir bezeichnen mit $y_1, \ldots, y_n$ die Komponenten des Spaltenvektors $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}' = \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}$, wo t eine reelle Veränderliche ist. $\mathbf{E}$ sei die Einheitsmatrix.

Betrachten wir das System

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} \tag{1}$$

und das perturbierte System

$$\mathbf{z}' = \{\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\}\,\mathbf{z}\,. \tag{2}$$

Wir werden uns mit der Frage beschäftigen, wann sich die Lösungen des Systems (2) asymptotisch gleich wie die des Systems (1) benehmen, genauer, wann die Lösungen $\mathbf{z}(t)$ des Systems (2) die Form

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)[\mathbf{c} + o(1)] \tag{3}$$

haben, wobei $\mathbf{Y}(t)$ die Matrix des Hauptsystems von Lösungen des Systems (1) und $\mathbf{c}$ einen konstanten, von Null verschiedenen Vektor bezeichnet.

In der Literatur wurde bisher die größte Aufmerksamkeit dem Fall gewidmet, wenn die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ Konstanten sind. Besonders einfach ist der Fall, wenn die charakteristische Gleichung $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt; es wurde aber die asymptotische Gestalt der Lösungen auch in dem Fall, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung mehrfach sind (FAEDO [1], LEVI [2]), vollinhaltlich beschrieben.

Für den allgemeinen Fall, dass die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ im Intervall $\langle t_0, \infty)$ stetige Funktionen sind, hat WINTNER [3] folgenden Satz bewiesen: Wenn alle Lösungen des Systems (1) beschränkt sind, $\liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\,\mathrm{d}x > -\infty$ und

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{B}(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4}$$

gilt, dann existiert zu jeder Lösung $\mathbf{z}(t)$ des Systems (2) eine solche Lösung $\mathbf{y}(t)$ des Systems (1), daß $\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ für $t \to \infty$ gilt.

In dieser Arbeit werden wir eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Gleichheit der Lösungen des Systems (1) und der des perturbierten Systems ableiten, die viel allgemeiner als die von Wintner ist. Es wird sich zeigen, daß (3) immer gilt, wenn nur die Perturbation „genug klein" ist und daß die „Größe" der Perturbation, welche das System zuläßt, nur davon abhängt, wie sich die Norm $\|\mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{B}(t)\,\mathbf{Y}(t)\|$ für große Werte von t benimmt.

Das Resultat wird zur Untersuchung der Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung n-ter speziell 2. und 3. Ordnung benützt.

I

Satz 1. *Es sei das System von linearen Differentialgleichungen* $\mathbf{z}' = \{\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\}\,\mathbf{z}$ *gegeben. Die Elemente* $a_{ij}(t)$ *der Matrix* $\mathbf{A}(t)$ *seien stetige Funktionen im Intervall* $\langle t_0, \infty)$. *Es sei*

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \dots, & y_{nn} \end{pmatrix}$$

das Fundamentalsystem von Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}$.

Wenn

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{B}(t)\,\mathbf{Y}(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty \tag{5}$$

gilt, haben die Lösungen $\mathbf{z}(t)$ *des perturbierten Systems die Gestalt*

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)[\mathbf{c} + o(1)]\,. \tag{6}$$

Beweis. Suchen wir die Lösung des Systems (2) in der Gestalt

$$\mathbf{z} = \mathbf{Y}\mathbf{u}\,. \tag{7}$$

Für die Komponenten des Spaltenvektors $\mathbf{u}$ bekommen wir das System

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{u}\,. \tag{8}$$

Wir werden zeigen, daß mit Bezug auf die Voraussetzung (5) eine solche Lösung des Systems (8) existiert, die die Anfangsbedingungen

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{c} \tag{9}$$

erfüllt, wobei $\boldsymbol{c}$ einen beliebigen konstanten und von Null verschiedenen Vektor bezeichnet (dies folgt aus einem allgemeineren Resultat von Wintner [3] s. 197).

Das System (8) mit den Anfangsbedingungen (9) ist mit dem System der Volterraschen Integralgleichungen

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{c} + \int_{\infty}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Y}(x)\, \boldsymbol{u}(x)\, \mathrm{d}x \tag{10}$$

equivalent. Die Existenz der Lösung des Systems (10) werden wir durch die Methode der schrittweisen Näherung beweisen.

Nehmen wir

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{c}\,, \quad \boldsymbol{u}_n = \int_{\infty}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Y}(x)\, \boldsymbol{u}_{n-1}(x)\, \mathrm{d}x$$

an. Wir werden zeigen, daß die Reihe $\boldsymbol{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n$ im Intervall (a, ∞) $\{a$ bezeichnet eine passende Zahl $\geqq t_0\}$ gleichmäßig konvergent ist.

Wegen (5) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl a, daß $\int_a^{\infty} \|\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, .$ $.\, \boldsymbol{Y}(x)\, \|\, \mathrm{d}x < \varepsilon$ gilt. Für $t \geqq a$ ist

$$\|\boldsymbol{u}_1(t)\| \leqq \int_t^{\infty} \|\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Y}(x)\|\, \|\boldsymbol{c}\|\, \mathrm{d}x \leqq M \int_t^{\infty} \|\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\|\, \mathrm{d}x < M\varepsilon\,,$$

wenn $\|\boldsymbol{c}\| < M$ gilt. Durch vollständige Induktion kann man leicht beweisen, daß $\|\boldsymbol{u}_n(t)\| < M\varepsilon^n$ ist. Wenn wir die Zahl a so groß wählen, daß $\varepsilon < 1$ gilt, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M\varepsilon^n$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t)$, sodaß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t)$ im Intervall (a, ∞) gleichmäßig konvergent ist und offenbar $\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t) = \boldsymbol{0}$ gilt, sodaß $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t) \to \boldsymbol{c}$ für $t \to \infty$ ist.

Die Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t)$ ist eine Lösung des Systems (10), denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t) = \boldsymbol{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\infty}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Y}(x)\, \boldsymbol{u}_{n-1}(x)\, \mathrm{d}x$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t)$ ist der letzte Ausdruck gleich $\boldsymbol{c} + \int_{\infty}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\, \boldsymbol{B}(x)\, \boldsymbol{Y}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(x)\, dx$. Die Lösung des Systems (2) hat wegen (7) die Form

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Y} \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n(t) = \boldsymbol{Y}[\boldsymbol{c} + o(1)]\,.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Wenden wir jetzt den Satz auf die Differentialgleichung

$$z^{(n)} + [P_1(t) + Q_1(t)]\, z^{(n-1)} + \ldots + [P_n(t) + Q_n(t)]\, z = 0 \tag{11}$$

an, die mit dem System

$$z_1' = z_2,\ z_2' = z_3,\ \ldots,\ z_{n-1}' = z_n,\ z_n' = -(P_1 + Q_1)\, z_n - \ldots - (P_n + Q_n)\, z_1$$

equivalent ist. Wenn wir mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das Hauptsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + P_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(t)\, y = 0 \tag{12}$$

und mit W ihre Wronskische Determinante bezeichnen, erhalten wir

$$\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y^{11}, & y^{21}, & \ldots, & y^{n1} \\ y^{12}, & y^{22}, & \ldots, & y^{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{1n}, & y^{2n}, & \ldots, & y^{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -Q_n, & -Q_{n-1}, & \ldots, & -Q_1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{W} \begin{pmatrix} Q_n y^{n1} y_1 + Q_{n-1} y^{n1} y_1' + \ldots + Q_1 y^{n1} y_1^{(n-1)}, & Q_n y^{n1} y_2 + \ldots + Q_1 y^{n1} y_2^{(n-1)}, & \ldots, & Q_n y^{n1} y_n + \ldots + Q_1 y^{n1} y_n^{(n-1)} \\ Q_n y^{n2} y_1 + Q_{n-1} y^{n2} y_1' + \ldots + Q_1 y^{n2} y_1^{(n-1)}, & Q_n y^{n2} y_2 + \ldots + Q_1 y^{n2} y_2^{(n-1)}, & \ldots, & Q_n y^{n2} y_n + \ldots + Q_1 y^{n2} y_n^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_n y^{nn} y_1 + Q_{n-1} y^{nn} y_1' + \ldots + Q_1 y^{nn} y_1^{(n-1)}, & Q_n y^{nn} y_2 + \ldots + Q_1 y^{nn} y_2^{(n-1)}, & \ldots, & Q_n y^{nn} y_n + \ldots + Q_1 y^{nn} y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Wir bekommen so für die Differentialgleichung (11) den folgenden

Satz 2. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung* (12) *seien im Intervall* $\langle t_0, \infty)$ *stetig. Wenn für alle* $i, k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{W_i(t)}{W(t)} \right| |Q_n(t)\, y_k(t) + Q_{n-1}(t)\, y_k'(t) + \ldots + Q_1(t)\, y_k^{(n-1)}(t)|\, dt < \infty$$

gilt, wobei $W_i(t)$ das Komplement des Elements $y_i^{(n-1)}$ in der Wronskischen Determinante $W(t)$ bezeichnet, besitzt die perturbierte Differentialgleichung (11) *das Hauptintegral von der Form*

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)[C_i + o(1)]$$

und seine Ableitungen sind durch die Formel

$$z^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}(t)[C_i + o(1)]$$

für $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ *gegeben.*

II

In diesem Absatz wenden wir die oben angeführten Resultate zur Ableitung der asymptotischen Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung 2. und 3. Ordnung an.

Der Ausgangspunkt ist ein Satz, den ZLÁMAL [5] abgeleitet hat:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Es sei } A'(t) \text{ eine im Intervall } \langle t_0, \infty) \text{ stetige Funktion und es möge} \\ A(t) \geqq \varepsilon > 0,\ A^{-\frac{1}{4}}(t) \text{ konvex sein.}\end{array}\right\} \quad (13)$$

Dann ist das Hauptsystem der Differentialgleichung

$$y'' + A(t)\, y = 0 \tag{14}$$

von der Form:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{A(t)}}\,[\sin \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)]\,, & y_2 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{A(t)}}[\cos \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)]\,, \\ y_1' = \sqrt[4]{A(t)}\, [\cos \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)]\,, & y_2' = -\sqrt[4]{A(t)}\, [\sin \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)]\,. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Durch Applikation des 2. Satzes auf die Differentialgleichung

$$z'' + Q_1(t)\, z' + [A(t) + Q_2(t)]\, z = 0 \tag{16}$$

bekommen wir leicht folgende Behauptung:

Wenn $A(t)$ die Voraussetzungen (13) *erfüllt und*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left| \frac{Q_2(t)}{\sqrt{A(t)}} \right| + |Q_1(t)| \right\} dt < \infty$$

gilt, hat die Differentialgleichung (16) *ein Hauptsystem von der Form* (15).

Es sei jetzt eine Differentialgleichung dritter Ordnung gegeben

$$z''' + 4A(t)\, z' + B(t)\, z = 0\,, \tag{17}$$

wobei $A'(t)$ und $B(t)$ im Intervall $\langle t_0, \infty)$ stetig sind. Wenn wir $\omega(t) = B(t) - 2A'(t)$ bezeichnen, können wir die Differentialgleichung (17) in der Form

$$z''' + 4A(t)\, z' + [2A'(t) + \omega(t)]\, z = 0 \tag{18}$$

schreiben. Wir werden (18) mit der Differentialgleichung

$$u''' + 4A(t)\, u' + 2A'(t)\, u = 0 \tag{19}$$

vergleichen. Wir können die Differentialgleichung (18) als einen speziellen Fall der perturbierten Differentialgleichung

$$z''' + Q_1(t)\, z'' + [4A(t) + Q_2(t)]\, z' + [2A'(t) + Q_3(t)]\, z = 0 \tag{20}$$

ansehen. Für diese Differentialgleichung beweisen wir folgenden Satz:

Satz 3. *Die Funktion* $A(t)$ *erfülle die Voraussetzungen* (13) *und*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left| \frac{Q_3(t)}{A(t)} \right| + \left| \frac{Q_2(t)}{\sqrt{A(t)}} \right| + |Q_1(t)| \right\} \mathrm{d}t < \infty \,. \tag{21}$$

Dann hat die Differentialgleichung (20) *ein Hauptsystem von Lösungen*

$$z_1 = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{A(t)}}\,, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\sin 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right],$$

$$z_1' = o(1)\,, \quad z_2' = 2\left[\cos 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right],$$

$$z_1'' = o(1)\,, \quad z_2'' = -4\sqrt{A(t)} \left[\sin 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right],$$

$$\left.\begin{aligned} z_3 &= \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\cos 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right], \\ z_3' &= -2\left[\sin 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right], \\ z_3'' &= -4\sqrt{A(t)} \left[\cos 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, \mathrm{d}u + o(1)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Beweis. Über die selbstadjungierte Differentialgleichung (19) ist bekannt [4], daß ihr Hauptsystem von Lösungen in der Form

$$u_1 = y_1^2\,, \quad u_2 = y_1 y_2\,, \quad u_3 = y_2^2 \tag{23}$$

herausgegriffen werden kann, wobei y_1 und y_2 zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (14) mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(t_0) = 1\,, \quad y_1'(t_0) = 0\,, \quad y_2(t_0) = 0\,, \quad y_2'(t_0) = 1$$

sind. Die Wronskische Determinante W des Hauptsystems (23) hat konstanten Wert und die Komplemente der letzten Zeile sind $W_1(t) = y_2^2(t)$, $W_2(t) =$

$= -2y_1(t)\, y_2(t)$, $W_3(t) = y_1^2(t)$. Wegen (15) hat die Differentialgleichung (19) das Hauptsystem

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= y_1^2 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\sin^2 \int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)\right], \\ \bar{u}_2 &= 2y_1y_2 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\sin 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)\right], \\ \bar{u}_3 &= y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\cos^2 \int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Statt des Systems (24) können wir das System

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_3 + \bar{u}_1 = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{A(t)}}, \\ u_2 &= \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\sin 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)\right], \\ u_3 &= \bar{u}_3 - \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{A(t)}} \left[\cos 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{A(u)}\, du + o(1)\right] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wählen.

Durch Differentiation der vorhergehenden Beziehungen und durch Anwendung der Formeln (15) kann man leicht beweisen, daß das Hauptsystem der Differentialgleichung (19) die Form (22) hat. Ferner gilt für $p, q = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$

$$\int^{\infty} \left|\frac{W_i(x)}{W(x)}\right| |y_p y_q Q_3 + (y_p' y_q + y_p y_q') Q_2 + 2(y_p' y_q' - A y_p y_q) Q_1|\, dx \leqq$$

$$\leqq M \int^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \left\{\left|\frac{Q_3(x)}{\sqrt{A(x)}}\right| + |Q_2(x)| + |\sqrt{A(x)}\, Q_1(x)|\right\} dx, \tag{26}$$

wobei M eine passende Konstante ist. Wegen (21) ist das letzte Integral konvergent, sodaß die Differentialgleichung (20) das Hauptsystem $z_i = \sum_{i=1}^{3} u_i[C_i + o(1)]$ besitzt und daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *S. Faedo:* Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei. Ann. Mat. Pura Appl. (4) *26* (1947), 207—215.

[2] *E. Levi:* Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Atti Accad. dei Lincei (8) *8* (1950), 465—570, (8) *9* (1950), 26—31.

[3] *A. Wintner:* Linear variations of constants. Amer. Jour. Math. *68* (1946), 185—213.

[4] *G. Sansone:* Equazioni differenziali nel campo reale I, II, Bologna 1947.
[5] *M. Zlámal:* Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Чех. мат. журнал. *6* (1956), 75—93.

Резюме

О ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно.
(Поступило в редакцию 14/V 1957 г.)

В работе исследуются асимптотические свойства решений возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{z}' = \{\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\}\,\mathbf{z} \tag{1}$$

в связи с решениями системы

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}\,. \tag{2}$$

Выводится достаточное условие для асимптотического равенства решений системы (1) и системы (2):

Пусть элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $\mathbf{A}(t)$ являются непрерывными функциями в интервале $\langle t_0, \infty)$. Пусть

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nn} \end{pmatrix}$$

есть фундаментальная система решений системы уравнений (2).

Если

$$\int^{\infty} \|\mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{B}(t)\,\mathbf{Y}(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

то общее решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)[\mathbf{c} + o(1)]\,.$$

Результат используется для доказательства теоремы:

Пусть $A'(t)$ — непрерывная в интервале $\langle t_0, \infty)$ функция, $A(t) \geqq \varepsilon > 0$, $\mathbf{A}^{-\frac{1}{4}}(t)$ выпукло и

$$\int^{\infty} \left\{ \left| \frac{Q_3(t)}{A(t)} \right| + \left| \frac{Q_2(t)}{\sqrt{A(t)}} \right| + |Q_1(t)| \right\} \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Тогда фундаментальная система решений дифференциального уравнения

$$z''' + Q_1(t)\,z'' + [4A(t) + Q_2(t)]\,z' + [2A'(t) + Q_3(t)]\,z = 0$$

имеет вид (22) (см. текст статьи).