Ilja Černý

О расширении линейных операторов в топологических линейных пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 167–177,178–189

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100292

О РАСШИРЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага

(Поступило в редакцию 10/IX 1957 г.)

Статья посвящается проблеме расширения линейного оператора (вообще говоря, не обязательно непрерывного), заданного на части топологического линейного пространства, при одновременном изменении топологии, вследствие которого расширенный оператор становится непрерывным.

В статье доказывается, грубо говоря, что (при некоторых условиях) линейный (не непрерывный) оператор A, заданный в топологическом линейном пространстве P, можно расширить на некоторые топологическое линейное пространство P^* (причем осуществимо непрерывное, простое и линейное погружение пространства P в P^*); расширенный оператор A^* является при топологии пространства P^* непрерывным. При дальнейших условиях доказывается, что построенное пространство P^* возникает из P путем присоединения ,,минимального количества" идеальых элементов и что топология в P по погружении P в P^* является самой мягкой из топологий в P, при которых оператор A непрерывен и которые более жестки, чем первоначальная топология в P.

Полученные результаты являются таким образом в изветсном смысле обобщением данного Шварцом построения пространства обобщенных функций, в которое погружено пространство всех локально интегрируемых функций и в котором оператор дифференцирования непрерывен. Построение пространства P^*, проведенное в настоящей статье, совершенно отлично от построения, данного Шварцом, Однако, если применить это построение к пространству всех непрерывных функций в $\boldsymbol{E}_1$ и к оператору дифференцирования, то в результате получится некоторое пространство P^*, находящееся в тесной связи с пространством всех обобщенных функций Шварца, являющихся производными (всех возможных порядков) непрерывных функций.

После вводных замечаний о топологии в линейных пространствах доказывается простая лемма (п. 6), которая в дальнейшем часто используется и которая может иметь и самостоятельное значение. Одним из главных результатов является теорема, сформулированная в п. 7 и доказанная в пп. 8—13. Вторым главным результатом является теорема из п. 15, которая доказывается в пп. 16—20. Теорема п. 14 лишь дополняет эти главные результаты. В пп. 21—25 показана возможность применения всех трех сформулированных теорем в случае, когда P есть пространство всех непрерывных функций (в $\mathbf{E}_1$), а A есть оператор дифференцирования, в п. 26 поясняется связь между P^* и пространством обобщенных функций Шварца, в п. 27 исследуется возможность применения указанных теорем к пространству L^2 и оператору ,,умножения на независимое переменное''.

Проблему расширения, подобную той, которая при известных условиях решена в настоящей работе для одного оператора, можно сформулировать для нескольких операторов; можно наложить еще дальнейшее требование, чтобы расширенные операторы были перестановочны. (Перестановочность расширенных операторов соответствует перестановочности частных производных обобщенных функций Шварца.) Оказывается, что по надлежащем уточнении требований, намеченных здесь лишь в общих чертах, можно и в этом случае расширить пространство P и данные операторы и изменить топологию так, чтобы расширенные операторы были непрерывными и перестановочными; применяемый для этой цели метод вполне аналогичен способу, использованному в настоящей статье.

1. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями и терминологией:

Множество, состоящее из одной точки, будем обозначать так же, как и содержащийся в нем элемент (недоразумение здесь невозможно).

Если P — линейное пространство (модуль над телом вещественных чисел), $M \subset P$, то символом $[M]$ будем обозначать *линейную оболочку* множества M (пересечение всех линейных многообразий $L \subset P$, содержащих M); пусть $\operatorname{conv} M$ означает *выпуклую оболочку* множества M (пересечениее всех выпуклых множеств $K \subset P$, содержащих M); пусть λM (для вещественных λ) есть множество всех точек вида λx, где $x \in M$.

Если $M_n \subset P$, то обозначим

$$M_1 \oplus \ldots \oplus M_s = E[x \in P;\, x = \sum_{i=1}^{s} x_i,\, x_i \in M_i]\,,$$

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots = \bigcup_{s=1}^{\infty} (M_1 \oplus \ldots \oplus M_s)\,.$$

2. Если A — отображение пространства P в пространство R (будем пользоваться также словом *оператор*, в особенности если $P = R$), то вместо $A(\varphi)$ мы будем иногда писать $A\varphi$ (значение A в точке $\varphi \in P$). Если A — отображение P в P, то через A^0 будет обозначено тождественное отображение P на P, через A^p ($p \geqq 1$) обозначим p-ю степень оператора A, через $A^{-p}(M)$ (где $M \subset P$) — множество тех $\varphi \in P$, для которых $A^p\varphi \in M$.

Сложное отображение обозначим через AB: его значение в точке φ будет $(AB)(\varphi)$ $(= A(B(\varphi)))$.

3. *Топологическим линейным пространством* (короче *т. л. п.*) будем всегда называть локально выпуклое топологическое линейное пространство, т. е. линейное пространство P, в котором задана топология со следующими свойствами: как топологическое пространство P является пространством Хаусдорфа, каждая точка обладает полной системой выпуклых окрестностей и операция сложения элементов в P, равно как и операция умножения элемента из P на число, непрерывна.

Как известно, для однозначного определения топологии в линейном пространстве P достаточно знать полную систему окрестностей 0; если $\{U_\alpha\}$ — одна из таких систем, то множества вида $x \oplus U_\alpha$ образуют полную систему окрестностей точки $x \in P$.

4. Вместо обычного способа определения топологии в линейном пространстве будет в дальнейшем удобнее пользоваться несколько иным способом. *Симметрическим выпуклым фильтром окрестностей* 0 в линейном пространстве P назовем любую систему $\mathfrak{F}$ симметрических выпуклых множеств $M \subset P$, для которой справедливы соотношения:

I. Если $M \in \mathfrak{F}$, $M \subset N \subset P$, и если N — симметрическое и выпуклое множество, то $N \in \mathfrak{F}$.

II. Если $M_k \in \mathfrak{F}$ ($k = 1, \ldots, s$), то и $\bigcap\limits_{k=1}^{s} M_k \in \mathfrak{F}$.

III. Если $M \in \mathfrak{F}$, то и $\frac{1}{2}M \in \mathfrak{F}$.

IV. $0 \in \bigcap\limits_{M \in \mathfrak{F}} M$.

Если требование IV заменить более сильным требованием

IV′. $0 = \bigcap\limits_{M \in \mathfrak{F}} M$,

то фильтр $\mathfrak{F}$ назовем *хаусдорфовым симметрическим выпуклым фильтром окрестностей* 0.

Наконец, множество $M \subset P$ назовем *поглощадющим*, если $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nM$.

5. Теперь нетрудно доказать следующее утверждение (доказательство предоставляем читателю):

Пусть P есть т. л. п., $\{U_\alpha\}$ — какая-либо полная система окрестностей 0. *Пусть $\mathfrak{F}$ — система всех симметрических выпуклых множеств $M \subset P$, содержащих одно из множеств U_α. Тогда $\mathfrak{F}$ является хаусдорфовым симметрическим выпуклым фильтром поглощающих окрестностей* 0 *и топология,* *данная окрестностями вида $x \oplus M$, $M \in \mathfrak{F}$, совпадает с исходной топологией в P (данной окрестностями вида $x \oplus U_\alpha$).*

Наоборот: Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный симметрический выпуклый фильтр поглощающих окрестностей 0 в линейном пространстве P. Тогда при топологии, данной окрестностями вида $x \oplus M$, $M \in \mathfrak{F}$, операции сложения и умножения на число непрерывны. Для того, чтобы указанный фильтр $\mathfrak{F}$ определял хаусдорфову топологию (т. е. чтобы P было т. л. п.), необходимо и достаточно, чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ был хаусдорфовым фильтром.

Обозначение: Линейное пространство P, в котором топология задана указанным способом при помощи (не обязательно хаусдорфова) симметрического выпуклого фильтра $\mathfrak{F}$ окрестностей 0, обозначим через $(P, \mathfrak{F})$.

6. Лемма. *Пусть $(R, \mathfrak{G})$ — линейное пространство с топологией, определяемой симметрическим выпуклым фильтром $\mathfrak{G}$ окрестностей 0. Пусть B — линейный оператор в R (отображение R в R). Тогда существует симметрический выпуклый фильтр $\mathfrak{G}'$ (окрестностей 0 в R) так, что*

α) $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ (топология, данная фильтром $\mathfrak{G}'$, является более жесткой, чем топология, определенная фильтром $\mathfrak{G}$);

β) B непрерывен в $(R, \mathfrak{G}')$;

γ) если $\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}$ — симметрический выпуклый фильтр окрестностей 0 в R и если B непрерывен в $(R, \mathfrak{G}'')$, то $\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}'$.

Фильтр $\mathfrak{G}'$ состоит как раз из тех $U \in \mathfrak{G}$, для которых $B^{-p}(U) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$. Если обозначить $\Omega = \bigcap_{U \in \mathfrak{G}'} U$, то Ω есть линейное многообразие, замкнутое относительно топологии, данной фильтром $\mathfrak{G}'$, и относительно оператора B.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{G}' = E[U \in \mathfrak{G};\ B^{-p}(U) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0]$ является симметрическим выпуклым фильтром; свойство α) очевидно.

Свойство β): Если $U' \in \mathfrak{G}'$, то и $B^{-1}(U') \in \mathfrak{G}'$, а также $B(B^{-1}(U')) = U'$; отсюда непосредственно следует непрерывность B.

Свойство γ): Пусть $U'' \in \mathfrak{G}''$; так как B^p непрерывно для любого $p \geqq 0$ в $(R, \mathfrak{G}'')$, можно найти $U''_p \in \mathfrak{G}''$ так, что $B^p(U''_p) \subset U''$. Отсюда сразу же следует, что

$$U''_p \subset B^{-p}(B^p(U''_p)) \subset B^{-p}(U'') .$$

Так как $B^{-p}(U'')$ — симметрическое выпуклое множество, то по свойству I фильтра (см. п. 4) получаем

$$B^{-p}(U'') \in \mathfrak{G}'' \quad \text{для всех} \quad p \geqq 0 .$$

Итак, $B^{-p}(U'') \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$, т. е. $U'' \in \mathfrak{G}'$.

Последнюю часть утверждения (о множестве Ω) докажем следующим образом: Пусть $\Phi \in \Omega$, $c \in \mathbf{E}_1$, $U \in \mathfrak{G}'$; тогда существует n так, что $|c| < 2^n$. По свойству III фильтра имеем $2^{-n}U \in \mathfrak{G}'$; ввиду того, что $\Phi \in \Omega \subset 2^{-n}U$, будет $c\Phi \in U$. Аналогично можно показать, что $\Phi_1 \in \Omega$, $\Phi_2 \in \Omega \Rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 \in \Omega$. Итак, Ω является линейным многообразием.

Если $\Phi \operatorname{non} \in \Omega$, то существует $U \in \mathfrak{G}'$ так, что $\Phi \operatorname{non} \in U$; тогда $(\Phi \oplus \frac{1}{2}U) \cap \frac{1}{2}U = \emptyset$, то есть $\Phi \operatorname{non} \in \bar{\Omega}$. Наконец, если $\Phi \in \Omega$, $U \in \mathfrak{G}'$, то и $B^{-1}(U) \in \mathfrak{G}'$, откуда $B\Phi \in B(B^{-1}(U)) = U$.

7. Теорема. Условия:

1. $(P, \mathfrak{F})$ *является т. л. п.* ($\mathfrak{F}$ *есть хаусдорфов симметрический выпуклый фильтр поглощающих окрестностей* 0 *в* P).

2. H — *топологическое пространство,* $o \in H$ *не является его изолированной точкой. Обозначим* $H_0 = H - o$, *и пусть* $\mathfrak{H}$ *есть система всех множеств* V *вида* $V = V' - o$, *где* $\{V'\}$ — *система всех окрестностей* o *в* H.

3. A_h $(h \in H_0)$ *суть операторы в* P (*отображения* P *в* P), *линейные и непрерывные в* P.

4. *Пусть* Q — *множество всех* $\varphi \in P$, *для которых существует* $\lim\limits_{h \to o} A_h\varphi$; *этот предел обозначим через* $A\varphi$. (*Тогда* Q — *линейное многообразие, и* A — *линейное отображение* Q *в* P.)

5. *Существуют линейные функционалы* S_g $(g \in D)$ *с областью определения* P, *относительно которых имеют место утверждения*:

а) $S_g\varphi = 0$ *для всех* $g \in D \Rightarrow \varphi = 0$;

б) $\lim\limits_{\substack{h \to o \\ \varphi \to 0}} S_g A_h^p \varphi = 0$ *для любых* $g \in D$ *и* $p \geqq 0$, *т. е. для всякого* $g \in D$, $p \geqq 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют* $U \in \mathfrak{F}$ *и* $V \in \mathfrak{H}$ *так, что*

$$h \in V\,, \quad \varphi \in U \Rightarrow |S_g A_h^p \varphi| < \varepsilon\,.$$

Утверждение. *Существует т. л. п.* $(P^*, \mathfrak{F}^*)$, *оператор* A^*, *непрерывный и линейный в* P^*, *и простое линейное непрерывное отображение* α *пространства* $(P, \mathfrak{F})$ *в* $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ *так, что*

$$\varphi \in Q \Rightarrow A^*(\alpha(\varphi)) = \alpha(A\varphi)\,.$$

Замечание. Итак, если „отождествить" точки φ и $\alpha(\varphi)$, то топология (в P), данная фильтром $\mathfrak{F}$, будет *мягче*, чем топология, данная фильтром $\mathfrak{F}^*$. Точнее: В пространстве $\alpha(P) \subset P^*$ фильтр $\mathfrak{F}_1^*$, составленный из множеств вида $U^* \cap \alpha(P)$, $U^* \in \mathfrak{F}^*$, содержится в фильтре $\mathfrak{F}_1$ множеств вида $\alpha(U)$, $U \in \mathfrak{F}$.

Ввиду длины доказательства будет удобнее, подразделить его на параграфы.

8. Пусть $R = P^{H_0}$ означает *множество всех отображений* Φ *пространства* H_0 *в пространство* P. Эти отображения будем обозначать большими греческими буквами Φ, соотв. Ψ, с индексами; *постоянное отображение*, принимающее значение $\varphi \in P$, обозначим через Φ_φ. В R определим оператор B так:

$$(B\Phi)(h) = A_h \Phi(h) . \tag{1}$$

B является, очевидно, линейным оператором.

Обозначим через E_0 *множество всех постоянных отображений* $\Phi_\varphi \in R$; пусть далее

$$E_p = B^p(E_0) , \quad E_\omega = \bigcup_{p=0}^{\infty} E_p , \quad E = [E_\omega] . \tag{2}$$

Пусть топология в R задана фильтром $\mathfrak{G}$ всех симметрических выпуклых множеств Z, содержащих какое-либо из множеств

$$'U = E[\Phi \in R; \text{ сущ. } V \in \mathfrak{H} \text{ так, что } \Phi(V) \subset U] , \tag{3}$$

где $U \in \mathfrak{F}$.

Топология, данная фильтром $\mathfrak{G}$, не является в общем случае хаусдорфовой, так как, очевидно,

$$'\Omega = \bigcap_{Z \in \mathfrak{G}} Z = \bigcap_{U \in \mathfrak{F}} {'U} = E[\Phi \in R; \lim_{h \to o} \Phi(h) = 0] . \tag{4}$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\Phi \in R$ было ограниченной точкой (т. е., чтобы множество, состоящее из единственной точки Φ, было ограничено), является существование $V \in \mathfrak{H}$, для которого $\Phi(V)$ есть множество ограниченное в $(P, \mathfrak{F})$. *Достаточным условием ограниченности* $\Phi \in R$ *является существование* $\lim\limits_{h \to o} \Phi(h)$; в частности, *все* $\Phi_\varphi \in R$ *будут*, следовательно, *ограниченными точками* $(R, \mathfrak{G})$. Окрестности $Z \in \mathfrak{G}$ не будут, вообще говоря, поглощающими.

9. Согласно лемме в п. 6 образуем для фильтра $\mathfrak{G}$ фильтр $\mathfrak{G}'$, составленный из тех $Z \in \mathfrak{G}$, для которых $B^{-p}(Z) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$. Тогда *оператор* B *непрерывен в* $(R, \mathfrak{G}')$.

Мы утверждаем, что *та же самая топология возникнет на основании фильтра* $\mathfrak{F}''$ *тех симметрических выпуклых множеств, которые содержат какое-либо множество вида*

$$\mathfrak{B}\{U_p\} = \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{\infty} B^p('U_p) , \tag{5}$$

где $\{U_p\}$ — произвольная последовательность множеств из $\mathfrak{F}$.

Согласно указанной лемме достаточно доказать: а) $\mathfrak{F}'' \subset \mathfrak{G}$; б) B непрерывно в $(R, \mathfrak{F}'')$; в) $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{F}''$.

Доказательство. а) Пусть $M \in \mathfrak{F}''$; тогда существует $\mathfrak{B}\{U_n\} \subset M$. Получаем тогда $'U_0 \subset M$, а, следовательно, и $M \in \mathfrak{G}$.

б) Пусть дано $\mathfrak{B}\{U_p\}$; положим $U_p^* = U_{p+1}$ для $p \geqq 0$. Тогда

$$\Phi \in \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{\infty} B^p('U_p^*) = \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{\infty} B^p('U_{p+1}) \Rightarrow B\Phi \in \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{\infty} B^{p+1}('U_{p+1}) \subset \mathfrak{B}\{U_p\} .$$

в) Пусть $Z \in \mathfrak{G}'$. Тогда $B^{-p}(Z) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$; следовательно, существуют $U_p \in \mathfrak{F}$ так, что

$$'U_p \subset B^{-p}(Z) .$$

Тогда $B^p('U_p) \subset Z$, $\bigcup_{p=0}^{\infty} B^p('U_p) \subset Z$, $\mathfrak{B}\{U_p\} = \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{\infty} B^p('U_p) \subset \operatorname{conv} Z = Z$. Итак, $Z \in \mathfrak{F}''$.

10. Для любого $Z \in \mathfrak{G}'$ будет $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nZ$, т. е. *в пространстве E система всех множеств вида $Z \cap E$ ($Z \in \mathfrak{G}'$) является симметрическим выпуклым фильтром поглощающих окрестностей* 0. (Определение E см. п. 8.)

Доказательство. $\Phi \in E$ имеют вид $\Phi = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k B^k \Phi_{\varphi_k}$, где $\varphi_k \in P$, $\alpha_k \geqq 0$, $\sum_{k=0}^{s} \alpha_k = 1$. Пусть $Z \in \mathfrak{G}'$; значит, $B^{-p}(Z) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$. Так как Φ_{φ_k} — ограниченные точки $(R, \mathfrak{G})$, то существуют $\lambda_k > 0$ так, что

$$\lambda_k \Phi_{\varphi_k} \in B^{-k}(Z) \quad (k = 0, 1, \ldots, s) .$$

Если положить $\lambda = \min(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$, то $\lambda\Phi_{\varphi_k} \in B^{-k}(Z)$ для $k = 0, \ldots, s$, откуда $B^k(\lambda\Phi_{\varphi_k}) \in B^k(B^{-k}(Z)) = Z$; ввиду того, что Φ — выпуклая комбинация $B^k\Phi_{\varphi_k}$ $(k = 0, \ldots, s)$ и что Z выпукло, будет и $\lambda\Phi \in Z$.

11. Обозначим

$$\Omega = \bigcap_{Z \in \mathfrak{G}'} Z = \bigcap_{\{U_n\}} \mathfrak{B}\{U_n\} . \tag{6}$$

В лемме п. 6 мы показали, что Ω есть линейное многообразие, замкнутое относительно топологии, данной фильтром $\mathfrak{G}'$, и также относительно оператора B (т. е. $\Phi \in \Omega \Rightarrow B\Phi \in \Omega$). Далее имеет место утверждение:

Пусть $\Phi \in \Omega$. Тогда $\lim_{h \to 0} S_g\Phi(h) = 0$ для всех $g \in D$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $g \in D$. По условию 5б) доказываемой теоремы для каждого $p \geqq 0$ существует окрестность $U_p \in \mathfrak{F}$ и $V_p \in \mathfrak{H}$ так, что

$$h \in V_p , \quad \varphi \in U_p \Rightarrow |S_g A_h^p \varphi| < \varepsilon .$$

Так как $\Phi \in \Omega \subset \mathfrak{B}\{U_p\}$, существует s так, что

$$\Phi \in \operatorname{conv} \bigcup_{p=0}^{s} B^p('U_p) ,$$

то есть

$$\Phi = \sum_{p=0}^{s} \alpha_p B^p \Phi_p , \quad \text{где} \quad \Phi_p \in {}'U_p,\ \alpha_p \geqq 0 , \quad \sum_{p=0}^{s} \alpha_p = 1 .$$

Условие $\Phi_p \in {}'U_p$ означает, что существует $V'_p \in \mathfrak{H}$ так, что

$$h \in V'_p \Rightarrow \Phi_p(h) \in U_p .$$

Пусть $V = \bigcap_{p=0}^{s} (V_p \cap V'_p)$; тогда $V \in \mathfrak{H}$ и

$$h \in V \Rightarrow \Phi_p(h) \in U_p \text{ для } p = 0, \ldots, s,$$

следовательно,

$$h \in V \Rightarrow |S_g((B^p\Phi_p)(h))| = |S_g A_h^p \Phi_p(h)| < \varepsilon .$$

Так как S_g линейно, для $h \in V$ получим

$$|S_g\Phi(h)| < \varepsilon \sum_{p=0}^{s} \alpha_p = \varepsilon .$$

Итак, действительно, $\lim_{h\to 0} S_g\Phi(h) = 0$.

12. Пусть $E' \subset R$ — произвольное линейное многообразие, замкнутое относительно топологии, данной фильтром $\mathfrak{G}$, и относительно оператора B, содержащее E и состоящее лишь из точек, ограниченных в $(R, \mathfrak{G}')$. (В частности, может быть $E' = E$.) Положим

$$P^*_{E'} = E'/\Omega \cap E' . \tag{7}$$

Обозначим через $[\Phi]$ класс по линейному многообразию $\Omega \cap E'$ (замкнутому относительно B и относительно топологии, данной фильтром $\mathfrak{G}'_{E'}$, всех множеств вида $Z \cap E'$, где $Z \in \mathfrak{G}'$), содержащий Φ.

Ввиду указанных только что свойств линейного многообразия $\Omega \cap E'$ можно определить:

а) $A^*[\Phi] = [B\Phi]$ для $[\Phi] \in P^*_{E'}$;

б) топологию в $P^*_{E'}$ при помощи фильтра $\mathfrak{G}^*_{E'}$ множеств вида

$$Z^* = E[[\Phi] \in P^*_{E'} ; \quad Z \cap [\Phi] \neq \emptyset] , \tag{8}$$

где $Z \in \mathfrak{G}'$. (Другими словами: обозначив через ϱ ,,естественное'' отображение E' на $P^*_{E'}$, т. е. отображение, ставящее в соответствие точке Φ класс $[\Phi]$, можем сказать, что $\mathfrak{G}^*_{E'}$ состоит из множеств вида $\varrho(Z \cap E')$, $Z \in \mathfrak{G}'$.) Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{G}^*_{E'}$ можно также определить, как симметрический выпуклый фильтр, составленный из множеств, которые содержат какое-либо множество вида

$$\mathfrak{W}\{U_p\} = E[[\Phi] \in P^*_{E'} ; \quad \mathfrak{V}\{U_p\} \cap [\Phi] \neq \emptyset] . \tag{8a}$$

Фильтр $\mathfrak{G}^*_{E'}$ *— симметрический и выпуклый и состоит из поглощающих окрестностей* 0. Вследствие перехода от E' к $P^*_{E'}$ мы получаем вместо фильтра $\mathfrak{G}'_{E'}$, который не является (вообще говоря) хаусдорфовым, хаусдорфов фильтр $\mathfrak{G}^*_{E'}$. Итак, *пространство* $(P^*_{E'}, \mathfrak{G}^*_{E'})$ *является т. л. п. Оператор* A^* *непрерывен* (легко следует из непрерывности B в $(R, \mathfrak{G}')$).

13. Погрузим теперь P в $P_{E'}^*$: пусть

$$\alpha(\varphi) = [\Phi_\varphi] \quad \text{для} \quad \varphi \in P \,. \tag{9}$$

Тогда α — *линейное* (что очевидно) *и простое отображение*, ибо $\alpha(\varphi) = [0] \Rightarrow \varphi_\varphi \in \Omega \Rightarrow S_g\varphi = \lim_{h\to 0} S_g\Phi_\varphi = 0$ для всех $g \in D$ (п. 11) $\Rightarrow \varphi = 0$ (условие 5а) нашей теоремы).

Далее: α *непрерывно*, ибо если дано $\mathfrak{W}\{U_p\}$, то

$$\varphi \in U_0 \Rightarrow \Phi_\varphi \in {}'U_0 \subset \mathfrak{V}\{U_p\} \Rightarrow [\Phi_\varphi] = \alpha(\varphi) \in \mathfrak{W}\{U_p\} \,.$$

Пусть, наконец, $\varphi \in Q$. Тогда имеем

$$(B\Phi_\varphi)(h) = A_h\varphi \to A\varphi \,, \tag{10}$$

и, следовательно (${}'\Omega$ было определено в п. 8, равенство (4)),

$$B\Phi_\varphi - \Phi_{A\varphi} \in {}'\Omega \subset \Omega \,, \tag{11}$$

откуда следует, что

$$\alpha(A\varphi) = [\Phi_{A\varphi}] = [\Phi_{A\varphi} + (B\Phi_\varphi - \Phi_{A\varphi})] = [B\Phi_\varphi] = A^*[\Phi_\varphi] = A^*\alpha(\varphi) \,.$$

Этим полностью доказана теорема, сформулированная в п. 7.

Замечание. Мы доказали несколько больше, чем утверждается в теореме п. 7: вместо одного пространства (P^*, $\mathfrak{F}^*$) мы построили целое семейство пространств ($P_{E'}^*$, $\mathfrak{G}_{E'}^*$), каждое из которых обладает требуемыми свойствами. „Наименьшим“ из них является, очевидно, пространство (P_E^*, $\mathfrak{G}_E^*$); *это пространство будем в дальнейшем всюду обозначать через* (P^*, $\mathfrak{F}^*$) (*и, следовательно, писать*: $P^* = E/\Omega \cap E$, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{G}_E^*$).

14. Теорема. *Условия и обозначения те же, как и в теореме п. 7; см. также только что сделанное замечание. Справедливо утверждение: Если Q плотно в (P, $\mathfrak{F}$), то $\alpha(Q)$ плотно в (P^*, $\mathfrak{F}^*$).*

Доказательство. Пусть прежде всего $\Phi = B^s\Phi_\varphi \in E_\omega$, $Z \in \mathfrak{G}'$. Тогда $B^{-p}(Z) \in \mathfrak{G}$ для всех $p \geqq 0$ и, значит, существуют $U_p \in \mathfrak{F}$ так, что

$${}'U_p \subset \frac{1}{s+2} B^{-p}(Z) \quad (p = 0, 1, \ldots, s) \,. \tag{12}$$

Так как Q плотно в (P, $\mathfrak{F}$), существуют $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s+1}$ в Q так, что

$$\varphi_1 - \varphi \in U_s \,, \quad \varphi_{p+1} - A\varphi_p \in U_{s-p} \; (p = 1, \ldots, s) \,. \tag{13}$$

В п. 13 (см. (10), (11)) мы видели, что

$$\varphi_p \in Q \Rightarrow B\Phi_{\varphi_p} - \Phi_{A\varphi_p} \in {}'\Omega \,; \tag{14}$$

следовательно, согласно (13) будет

$$\Phi_{\varphi_1} - \Phi_\varphi \in {}'U_s \,, \quad (\Phi_{\varphi_{p+1}} - B\Phi_{\varphi_p}) + (B\Phi_{\varphi_p} - \Phi_{A\varphi_p}) \in {}'U_{s-p} \,, \tag{15}$$

и далее

$$B^s(\Phi_{\varphi_1} - \Phi_\varphi) \in B^s('U_s) \subset \frac{1}{s+2} Z\,,$$
$$B^{s-p}(\Phi_{\varphi_{p+1}} - B\Phi_{\varphi_p}) + B^{s-p}(B\Phi_{\varphi_p} - \Phi_{A\varphi_p}) \in B^{s-p}('U_{s-p}) \subset \frac{1}{s+2} Z\,. \tag{16}$$

Складывая, получим

$$(\Phi_{\varphi_{s+1}} - B^s\Phi_\varphi) + \sum_{p=1}^{s} B^{s-p}(B\Phi_{\varphi_p} - \Phi_{A\varphi_p}) \in \frac{s+1}{s+2} Z\,, \tag{17}$$

причем (согласно (14))

$$\Phi' = \sum_{p=1}^{s} B^{s-p}(B\Phi_{\varphi_p} - \Phi_{A\varphi_p}) \in \Omega \subset \frac{1}{s+2} Z\,. \tag{18}$$

Согласно (17) и (18) будет

$$\Phi_{\varphi_{s+1}} - B^s\Phi_\varphi \in Z\,, \tag{19}$$

а, следовательно, (согласно (8)), и

$$[\Phi_{\varphi_{s+1}}] - [B^s\Phi_\varphi] = [\Phi_{\varphi_{s+1}}] - [\Phi] \in Z^*\,. \tag{20}$$

Итак, $\alpha(Q)$ плотно в $(\alpha(E_\omega), \mathfrak{F}^*)$; так как $\alpha(Q)$ есть линейное многообразие и $P^* = [\alpha(E_\omega)]$, то $\alpha(Q)$ плотно и в P^*.

15. Теорема. *Пусть выполняются все условия теоремы п. 7; воспользуемся теми же обозначениями, как и до сих пор. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:*

5в) *Если* $\Phi \in E_\omega$, $\lim\limits_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0$ *для всех* $g = D$, *то* $\lim\limits_{h\to o} \Phi(h) = 0$. (*Предел подразумевается при топологии в* P, *данной фильтром* $\mathfrak{F}$.)

6. $P = A(Q)$.

7. $A_hA_{h'} = A_{h'}A_h$ *для всех* h *и* h' *из* H_0.

8. *Обозначим через* Q_s *множество тех* $\varphi \in P$, *для которых* $A^s\varphi$ *имеет смысл* ($s = 1, 2, \ldots$); *пусть еще* $Q_0 = P$ *и пусть*

$$\varphi \in Q_s \Rightarrow \lim_{h\to o} A_h^s\varphi = A^s\varphi\,. \tag{21}$$

Тогда справедливо следующее утверждение: Пусть $\tilde{P}$ — *т. л. п. с топологией, введенной при помощи хаусдорфова симметрического выпуклого фильтра* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *поглощающих окрестностей* 0 *в* $\tilde{P}$. *Пусть существует простое, непрерывное и линейное отображение* β *пространства* $(P, \mathfrak{F})$ *в пространство* $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}})$. *Пусть в* $\tilde{P}$ *определен непрерывный линейный оператор* $\tilde{A}$, *для которого справедливо*:

$$\varphi \in Q \Rightarrow \tilde{A}\beta(\varphi) = \beta(A\varphi)\,. \tag{22}$$

Пусть кроме того

$$\tilde{A}^{-p}(0) \cap \beta(P) \subset \beta(Q_p) \quad \textit{для} \quad p \geqq 0 . \tag{23}$$

Тогда существует простое, линейное и непрерывное отображение β^* пространства $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ в $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}})$ так, что

$$[\Phi] \in P^* \Rightarrow \tilde{A}\beta^*[\Phi] = \beta^*(A^*[\Phi]) . \tag{24}$$

Доказательство подразделим ввиду его длины на параграфы.

16. Лемма. *Для любого $\Phi \in E$ существует $\lim\limits_{h \to o} \beta(\Phi(h))$. Если $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{s} B^k \Phi_{\varphi_k}$, то*

$$\lim_{h \to o} \beta(\Phi(h)) = \sum_{k=0}^{s} \tilde{A}^k \beta(\varphi_k) . \tag{25}$$

Доказательство. Пусть прежде всего $\Phi = B^s\Phi_\varphi \in E_\omega$. В силу условия 6. из п. 15 будет $P = A^s(Q_s)$ (Q_s было определено в условии 8. из п. 15). Следовательно, существует $\psi \in Q_s$ так, что

$$A^s\psi = \varphi . \tag{26}$$

В силу условия 7. и в ввиду того, что A_h непрерывны, для любого $\omega \in Q$ получим

$$A_h A\omega = A_h(\lim_{h' \to o} A_{h'}\, \omega) = \lim_{h' \to o} A_h A_{h'}\omega = \lim_{h' \to o} A_{h'} A_h \omega = AA_h\omega , \tag{27}$$

откуда легко следует, что

$$A_h^s A^s \psi = A^s A_h^s \psi . \tag{28}$$

Итак, можно написать

$$\beta(\Phi(h)) = \beta(A_h^s\varphi) = \beta(A_h^s A^s \psi) = \beta(A^s A_h^s \psi) = \tilde{A}^s \beta(A_h^s \psi) . \tag{29}$$

Так как $\psi \in Q_s$, по условию 8. будет

$$\lim_{h \to o} A_h^s \psi = A^s\psi = \varphi ; \tag{30}$$

принимая во внимание, что β и $\tilde{A}$ непрерывны, получим согласно (29) и (30)

$$\lim_{h \to o} \beta(\Phi(h)) = \lim_{h \to o} \tilde{A}^s \beta(A_h^s\psi) = \tilde{A}^s \beta(\lim_{h \to o} A_h^s \psi) = \tilde{A}^s\beta(\varphi) . \tag{31}$$

Существование $\lim\limits_{h \to o} \beta(\Phi(h))$ для общего $\Phi \in E$ и равенство (25) легко вытекают из только что доказанного.

17. Лемма. *Пусть выполняются все условия теоремы из п. 7.*

Если выполнено условие 5в) из п. 15, то для $\Phi \in E_\omega$ равносильны следующие условия:

$$\lim_{h \to o} S_g \Phi(h) = 0 \quad \textit{для всех} \;\; g \in D \tag{32}$$

и

$$\lim_{h\to o} \Phi(h) = 0 \ . \tag{33}$$

Если выполнено условие 6. *теоремы п.* 15, *то любой элемент* $\Phi \in E$ *можно записать в виде*

$$\Phi = B^{s+1}\Phi_\psi + \Phi' \ , \tag{34}$$

где $s \geqq 0$ — *подходящее целое число,* $\psi \in Q$, $\Phi' \in \Omega$.

Если выполняются одновременно 5в) *и* 6., *то для* $\Phi \in E$ *будет*

$$\lim_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0 \quad \textit{для всех } g \in D \Leftrightarrow \Phi \in \Omega \ ; \tag{35}$$

для $\Phi \in E_\omega$ *получим*

$$\lim_{h\to o} \Phi(h) = 0 \ (\textit{т. е. согласно } (4)\colon \ \Phi \in {}'\Omega) \Leftrightarrow \Phi \in \Omega \Leftrightarrow \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0 \quad \textit{для всех } \ g \in D \ ;$$

далее имеем

$$E_0 \cap \Omega = 0 \tag{37}$$

и

$$E \cap \Omega = E \cap ({}'\Omega \oplus B({}'\Omega) \oplus B^2({}'\Omega) \oplus \ldots) \ . \tag{38}$$

Доказательство. Пусть выполнено 5в). Если $\Phi \in E_\omega$ и $\lim\limits_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0$ для всех $g \in D$, то согласно 5в) будет $\lim\limits_{h\to o} \Phi(h) = 0$; обратное утверждение следует из непрерывности S_g, являющейся следствием 5б), если там положить $p = 0$.

Пусть выполняется условие 6. и пусть $\Phi \in E$. Тогда по определению E (см. (2))

$$\Phi = \sum_{k=0}^{s} B^k\Phi_{\varphi_k} \ , \quad \text{где} \quad \varphi_k \in P \ . \tag{39}$$

Согласно 6. существуют $\psi_k \in Q$ $(k = 1, \ldots, s + 1)$ так, что если положить $\psi_0 = 0$, то

$$A\psi_{k+1} = \varphi_k + \psi_k \quad (k = 0, \ldots, s + 1) \ . \tag{40}$$

Тогда согласно (39) получим

$$\Phi(h) = \sum_{k=0}^{s} A_h^k\varphi_k = \sum_{k=0}^{s} A_h^k(A\psi_{k+1} - \psi_k) = \tag{41}$$

$$= A_h^{s+1}\psi_{s+1} + \sum_{k=0}^{s} A_h^k(A\psi_{k+1} - A_h\psi_{k+1}) \ ;$$

притом, конечно,

$$A\psi_{k+1} - A_h\psi_{k+1} \to 0 \ , \quad \text{то есть} \quad \Phi_k = \Phi_{A\psi_{k+1}} - B\Phi_{\psi_{k+1}} \in {}'\Omega \ . \tag{42}$$

Отсюда далее вытекает, что

$$B^k\Phi_k \in \Omega \ , \quad \Phi' = \sum_{k=0}^{s} B^k\Phi_k \in \Omega \ . \tag{43}$$

Этим доказано соотношение (34).

Пусть выполняются оба условия 5в) и 6. Если для какого-либо $\Phi \in E$ имеет место

$$\lim_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in D$$

и если выразить Φ согласно (34), то по утверждению из п. 11 будет

$$\lim_{h\to o} S_g\Phi'(h) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in D\,.$$

Следовательно, и $\lim\limits_{h\to o} S_g((B^{s+1}\Phi_\psi)(h)) = 0$, откуда согласно 5в) следует, что $\lim\limits_{h\to o} (B^{s+1}\Phi_\psi)(h) = 0$, т. е. $B^{s+1}\Phi_\psi \in {}'\Omega \subset \Omega$. Итак, $\Phi \in \Omega$ (согласно (34)).

Соотношения (42) и (43) показывают, что мы доказали также соотношение

$$\Phi \in E \cap \Omega \Rightarrow \Phi \in E \cap ({}'\Omega \oplus B({}'\Omega) \oplus B^2({}'\Omega) \oplus \ldots)\,; \tag{44}$$

справедливость обратной импликации очевидна, ибо ${}'\Omega \subset \Omega$, а Ω замкнуто относительно B. Этим доказано (38).

Согласно п. 11

$$\Phi \in \Omega \Rightarrow \lim_{h\to o} S_g\Phi(h) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in D\,; \tag{45}$$

этим завершается доказательство эквивалентности (35).

Пусть $\Phi \in E_\omega$; эквивалентность (32) и (33) мы уже доказали, эквивалентность $\Phi \in \Omega$ и (32) является содержанием (35). В частности, для $\Phi_\varphi \in E_0$ имеем

$$\Phi_\varphi \in \Omega \Leftrightarrow \varphi = \lim_{h\to o} \Phi_\varphi(h) = 0\,.$$

Итак лемма доказана.

18. *Пусть выполняются условия теоремы из* п. 15. *Пусть* $\Phi \in E$. *Тогда равносильны следующих два условия*: $\Phi \in \Omega$ *и*

$$\lim_{h\to o} \beta(\Phi(h)) = 0\,. \tag{46}$$

Доказательство. Согласно лемме из п. 17, равенство (41), можно записать любое $\Phi \in E$ в виде

$$\Phi(h) = A_h^{s+1}\psi_{s+1} + \sum_{k=0}^{s} A_h^k(A\psi_{k+1} - A_h\psi_{k+1})\,, \tag{47}$$

где $\psi_k \in Q$. Согласно (25) имеем

$$\lim_{h\to o} \beta(A_h^{k+1}\psi_{k+1}) = \tilde{A}^{k+1}\beta(\psi_{k+1})\,,$$

из (27) и из свойств $\tilde{A}$ тогда следует, что

$$\lim_{h\to o} \beta(A_h^k A\psi_{k+1}) = \lim_{h\to o} \beta(AA_h^k\psi_{k+1}) =$$
$$= \lim_{h\to o} \tilde{A}\beta(A_h^k\psi_{k+1}) = \tilde{A}(\lim_{h\to o} \beta(A_h^k\psi_{k+1})) = \tilde{A}^{k+1}\beta(\psi_{k+1})\,.$$

Итак,

$$\lim_{h\to o} \beta(\sum_{k=0}^{s} A_h^k(A\psi_{k+1} - A_h\psi_{k+1})) = 0 .$$

Вследствие этого условие (46) равносильно условию

$$\lim_{h\to o} \beta(A_h^{s+1}\psi_{s+1}) = 0 . \tag{48}$$

Пусть теперь $\Phi \in \Omega$. Согласно п. 17 (равенства (34), (41), (42), (43)) тогда будет и $B^{s+1}\Phi_{\psi_{s+1}} \in \Omega$, откуда, согласно (36),

$$B^{s+1}\Phi_{\psi_{s+1}} \in {}'\Omega , \quad \text{т. е.} \quad \lim_{h\to o} A_h^{s+1}\psi_{s+1} = 0 .$$

Итак, ввиду непрерывности β имеет место (48), а следовательно и (46).

Пусть наоборот, имеет место (46), а, значит, и (48). Согласно (25) имеем

$$\lim_{h\to o} \beta(A_h^{s+1}\psi_{s+1}) = \tilde{A}^{s+1}\beta(\psi_{s+1}) = 0 , \tag{49}$$

следовательно,

$$\beta(\psi_{s+1}) \in \tilde{A}^{-(s+1)}(0) \cap \beta(P) .$$

Согласно (23) поэтому будет $\beta(\psi_{s+1}) \in \beta(Q_{s+1})$ и (ввиду того, что β просто в P)

$$\psi_{s+1} \in Q_{s+1} . \tag{50}$$

Согласно (49), (50) и (22)

$$0 = \tilde{A}^{s+1}\beta(\psi_{s+1}) = \beta(A^{s+1}\psi_{s+1}) ;$$

откуда (ввиду того, что β просто) следует, что

$$A^{s+1}\psi_{s+1} = 0 . \tag{51}$$

По условию 8. и согласно (50), (51) будет $B^{s+1}\Phi_{\psi_{s+1}} \in {}'\Omega$, следовательно,

$$\Phi = B^{s+1}\psi_{s+1} + \sum_{k=0}^{s} B^k(\Phi_{A\psi_{k+1}} - B\Phi_{\psi_{k+1}}) \in \Omega .$$

19. Для $[\Phi] \in P^*$ положим

$$\beta^*[\Phi] = \lim_{h\to o} \beta(\Phi(h)) ; \tag{52}$$

это допустимо согласно п. 16 и согласно п. 18, в котором доказано, что для $\Phi \in \Omega$ имеет место $\lim_{h\to o} \beta(\Phi(h)) = 0$ и, следовательно, что значение правой части (52) не зависит от выбора представителя $\Phi \in [\Phi]$. Если Φ выражено согласно (34), то, очевидно,

$$\beta^*[\Phi] = \tilde{A}^{s+1}\beta(\psi) . \tag{53}$$

Отображение β^*, очевидно, *линейно*; кроме того оно является *простым*, ибо, согласно (52) и (46),

$$\beta^*[\Phi] = 0 \Leftrightarrow \Phi \in \Omega \Leftrightarrow [\Phi] = [0] . \tag{54}$$

Пусть $[\Phi] \in P^*$ и пусть Φ выражено согласно (34). Тогда

$$\beta^*(A^*[\Phi]) = \beta^*([B\Phi]) = \beta^*[B^{s+2}\Phi_\psi + \Phi''] ,$$

где $\Phi'' = B\Phi' \in \Omega$; итак, $\beta^*[\Phi''] = \lim_{h\to o} \beta(\Phi(h)) = 0$, и согласно (53)

$$\beta^*(A^*[\Phi]) = \tilde{A}^{s+2}(\beta(\psi)) = \tilde{A}\beta^*[\Phi] . \tag{55}$$

Этим доказано (24). *Остается доказать непрерывность* β^*.

20. Для $\Phi \in E$ определим $\tilde{\beta}\Phi$ равенством

$$(\tilde{\beta}\Phi)(h) = \beta(\Phi(h)) . \tag{56}$$

Итак, $\tilde{\beta}$ есть отображение пространства E на пространство $\tilde{E} = \beta(E)$, элементы которого являются отображениями пространства H_0 в $\tilde{P}$ вида $\tilde{\Phi} = \beta\Phi$.

Пусть симметрические выпуклые фильтры $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ определены в E следующим образом: $\mathfrak{S}$ есть система всех симметрических выпуклых множеств, содержащих какое-либо из множеств

$$'U = E[\Phi \in E;\ \text{существует } V \in \mathfrak{H} \text{ так, что } \Phi(V) \subset U] , \tag{57}$$

где $U \in \mathfrak{F}$ (ср. с (3)); пусть $\mathfrak{S}'$ — фильтр, образованный для фильтра $\mathfrak{S}$ и оператора B согласно лемме п. 6.

Определим аналогичные фильтры в $\tilde{E}$: пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ есть система всех симметрических выпуклых множеств, содержащих какое-либо из множеств $\tilde{\beta}('U)$; фильтр $\tilde{\mathfrak{S}}'$ образуем по лемме п. 6 для фильтра $\tilde{\mathfrak{S}}$ и оператора $\tilde{B}$, определенного в $\tilde{E}$ при помощи равенства

$$\tilde{B}\tilde{\Phi} = \tilde{\beta}(B\Phi) \quad (\text{если } \tilde{\Phi} = \tilde{\beta}\Phi) . \tag{58}$$

Ясно, что элементы $\tilde{\mathfrak{S}}$ (соотв. $\tilde{\mathfrak{S}}'$) представляют собой как раз все образы (при отображении $\tilde{\beta}$) элементов из $\mathfrak{S}$ (соотв. из $\mathfrak{S}'$). Если обозначить (ср. с (6))

$$\Omega = \bigcap_{Z \in \mathfrak{S}'} Z , \quad \tilde{\Omega} = \bigcap_{\tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{S}}'} \tilde{Z} , \tag{59}$$

то, очевидно,

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\beta}(\Omega) . \tag{60}$$

Образуем, наконец, $P^* = E/\Omega$ и соответствующее пространство $\tilde{P}^* = \tilde{E}/\tilde{\Omega} = \tilde{\beta}(E)/\tilde{\beta}(\Omega)$. Пусть топология в P^* задана (как предполагается в теореме, которую мы доказываем) при помощи фильтра $\mathfrak{F}^*$, составленного из множеств

$$Z^* = E[[\Phi] \in P^*;\ Z \cap [\Phi] \neq \emptyset] , \quad Z \in \mathfrak{S}' ; \tag{61}$$

аналогично, пусть топология в $\tilde{P}^*$ задана фильтром $\tilde{\mathfrak{F}}^*$, составленным из множеств

$$\tilde{Z}^* = E[[\tilde{\Phi}] \in \tilde{P}^*;\ \tilde{Z} \cap [\tilde{\Phi}] \neq \emptyset] , \quad \tilde{Z} \in \tilde{\mathfrak{S}}' . \tag{62}$$

Отображение γ пространства $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ на $(\tilde{P}^*, \tilde{\mathfrak{F}}^*)$, определенное соотношением

$$\gamma[\Phi] = [\tilde{\beta}\Phi], \tag{63}$$

является, очевидно, непрерывным.

Определим теперь в $\tilde{E}$ симметрический выпуклый фильтр $'\tilde{\mathfrak{F}}$, а именно: $'\tilde{\mathfrak{F}}$ есть система всех симметрических выпуклых множеств, содержащих какое-либо из множеств

$$'\tilde{U} = E[\tilde{\Phi};\ \text{существует } V \in \mathfrak{H} \text{ так, что } \tilde{\Phi}(V) \subset \tilde{U}], \tag{64}$$

где $\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{F}}$. Пусть

$$'\tilde{\Omega} = \bigcap_{'\tilde{U} \in '\tilde{\mathfrak{F}}} {}'\tilde{U}. \tag{65}$$

Докажем, что

$$'\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}. \tag{66}$$

Ввиду того, что соотношение $\tilde{\Phi} \in {}'\tilde{\Omega}$ означает, в силу (65) и (64), только то, что $\lim\limits_{h \to o} \tilde{\Phi}(h) = 0$, получим (66) непосредственно из равенства (60) и п. 18 (пишем $\tilde{\Phi} = \tilde{\beta}\Phi$; согласно п. 18 имеем $\lim\limits_{h \to o} \beta(\Phi(h)) = 0 \Leftrightarrow \Phi \in \Omega$).

Итак, $\tilde{\Omega} = {}'\tilde{\Omega}$ есть *линейное многообразие, замкнутое в $\tilde{E}$ при топологии, данной фильтром* $'\tilde{\mathfrak{F}}$, и в $\tilde{P}^*$ можно ввести дальнейшую топологию при помощи фильтра $'\tilde{\mathfrak{F}}^*$, составленного из множеств вида

$$'\tilde{Z}^* = E[[\tilde{\Phi}] \in \tilde{P}^*;\ '\tilde{Z} \cap [\tilde{\Phi}] \neq \emptyset],\quad '\tilde{Z} \in {}'\tilde{\mathfrak{F}}. \tag{67}$$

Непрерывность отображения β^* (определенного в (52)) *будет доказана, если доказать, что*

I. *тождественное отображение* $(\tilde{P}^*, \tilde{\mathfrak{F}}^*)$ *на* $(\tilde{P}^*, '\tilde{\mathfrak{F}}^*)$ *непрерывно*;

II. *отображение* δ *пространства* $(\tilde{P}^*, '\tilde{\mathfrak{F}}^*)$ *в* $\tilde{P}$, *определенное равенством*

$$\delta[\tilde{\Phi}] = \lim_{h \to o} \tilde{\Phi}(h), \tag{68}$$

непрерывно (согласно п. 16 предел в правой части существует и согласно п. 18 он не зависит от выбора $\tilde{\Phi} \in [\tilde{\Phi}]$).

Дело в том, что отображение β^* является сложным отображением, составленным из γ (см. (63)), тождественного отображения $(\tilde{P}^*, \tilde{\mathfrak{F}}^*)$ на $(\tilde{P}^*, '\tilde{\mathfrak{F}}^*)$ и отображения δ.

Доказательство I. В силу определения $\tilde{P}^*$ и фильтров $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ и $'\tilde{\mathfrak{F}}^*$ (см. (62) и (67)), достаточно показать, что тождественное отображение $(\tilde{E}, \mathfrak{S}')$ на $(\tilde{E}, '\tilde{\mathfrak{F}})$ непрерывно — другими словами, что $\mathfrak{S}' \supset {}'\tilde{\mathfrak{F}}$. Согласно лемме п. 6 это соотношение будет доказано, если доказать, что

I′. $'\tilde{\mathfrak{F}} \subset \tilde{\mathfrak{G}}$ и

I″. *оператор* $\tilde{B}$ *непрерывен в* $(\tilde{E}, '\tilde{\mathfrak{F}})$.

Доказательство I′. Пусть $'\tilde{U} \in '\tilde{\mathfrak{F}}$; ввиду непрерывности β для $\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ существует такое $U \in \mathfrak{F}$, что $\beta(U) \subset \tilde{U}$. Учитывая (56), (57) и (64), получаем отсюда, что $\tilde{\beta}('U) \subset '\tilde{U}$, причем по определению $\tilde{\mathfrak{G}}$ будет $\tilde{\beta}('U) \in \tilde{\mathfrak{G}}$; значит, и $'\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{G}}$.

Доказательство I″. Пусть дано $'\tilde{U} \in '\tilde{\mathfrak{F}}$; для $\tilde{U}$ существует $\tilde{U}_1 \in \tilde{\mathfrak{F}}$ так, что

$$\tilde{A}(\tilde{U}_1) \subset \tfrac{1}{3}\tilde{U} \tag{69}$$

(так как $\tilde{A}$ непрерывен в $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}})$). Пусть $\tilde{\Phi} \in '\tilde{U}_1$; тогда существует $V_1 \in \mathfrak{H}$ так, что $\tilde{\Phi}(V_1) \subset \tilde{U}_1$, а, следовательно, и

$$\lim_{h\to 0} \tilde{\Phi}(h) \in \overline{\tilde{U}_1} \subset 2\tilde{U}_1$$

(предел в левой части существует согласно п. 16). Отсюда следует ввиду (69), что

$$\tilde{A}(\lim \tilde{\Phi}(h)) \in \tfrac{2}{3}\tilde{U} . \tag{70}$$

Нетрудно показать (напр., используя (25)), что

$$\lim \tilde{B}\tilde{\Phi}(h) = \lim \beta((B\Phi)(h)) = \tilde{A}(\lim \tilde{\Phi}(h)) . \tag{71}$$

Принимая во внимание (70), отсюда непосредственно выводим существование такого $V \in \mathfrak{H}$, что

$$h \in V \Rightarrow (\tilde{B}\tilde{\Phi})(h) \in \tilde{U} . \tag{72}$$

В общем получаем

$$\tilde{B}('\tilde{U}_1) \subset '\tilde{U} , \tag{73}$$

откуда и следует непрерывность $\tilde{B}$.

Доказательство II. Пусть $\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{F}}$; тогда

$$'\tilde{U}^* = E[[\tilde{\Phi}] \in \tilde{P}^*;\ [\tilde{\Phi}] \cap '\tilde{U} \neq \emptyset] \in '\tilde{\mathfrak{F}}^* . \tag{74}$$

Тогда для $[\tilde{\Phi}] \in '\tilde{U}^*$ существует $\tilde{\Psi} \in [\tilde{\Phi}] \cap '\tilde{U}$. Отсюда прежде всего следует существование такого $V_1 \in \mathfrak{H}$, что

$$h \in V_1 \Rightarrow \tilde{\Psi}(h) \in \tilde{U} , \tag{75}$$

а, во-вторых, что

$$\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi} \in \tilde{\Omega} = '\tilde{\Omega} \subset '\tilde{U} . \tag{76}$$

Следовательно, существует $V_2 \in \mathfrak{H}$ так, что

$$h \in V_2 \Rightarrow \tilde{\Phi}(h) - \tilde{\Psi}(h) \in \tilde{U} . \tag{77}$$

Из (75) и (77) следует, что

$$h \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \tilde{\Phi}(h) \in 2\tilde{U}\,, \tag{78}$$

а так как согласно п. 16 существует $\lim\limits_{h \to o} \tilde{\Phi}(h)$, то

$$\delta[\tilde{\Phi}] = \lim_{h \to o} \tilde{\Phi}(h) \in \overline{2\tilde{U}} \subset 3\tilde{U}\,. \tag{79}$$

Этим доказана непрерывность δ, а, значит, и β^*. Одновременно этим завершается доказательство теоремы, сформулированной в п. 15.

21. Теорема. *Пусть P — пространство всех непрерывных отображений $\mathbf{E}_1$ в $\mathbf{E}_1$. Пусть топология задана системой $\mathfrak{F}$ всех симметрических выпуклых множеств, содержащих какое-либо из множеств*

$$U(n) = E[\varphi \in P; |\varphi(t)| \leqq \frac{1}{n} \quad \text{для} \quad |t| \leqq n]\,. \tag{80}$$

(Тогда $\mathfrak{F}$ — хаусдорфов симметрический выпуклый фильтр поглощающих окрестностей 0, причем топология, данная фильтром $\mathfrak{F}$ совпадает с топологией, заданной при помощи метрики

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(\varphi, \psi)}{1 + \varrho_n(\varphi, \psi)}\,,$$

где

$$\varrho_n(\varphi, \psi) = \max_{|t| \leqq n} |\varphi(t) - \psi(t)|\,.$$

Сходимость $\varphi_n \to \varphi$ при этой топологии означает локально равномерную сходимость $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$.)

Пусть далее $H = \mathbf{E}_1$, $o = 0$,

$$(A_h\varphi)(t) = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}\,, \quad (A\varphi)(t) = \varphi'(t)\,. \tag{81}$$

(Тогда Q есть множество тех $\varphi \in P$, которые обладают непрерывной производной.)

Пусть, наконец, D есть множество всех бесконечное число раз дифференцируемых функций g, для которых множество

$$N_g = \overline{E[x \in \mathbf{E}_1; g(x) \neq 0]} \tag{82}$$

компактно.

Тогда выполнены все условия теоремы п. 15 (*а, значит, тем более все условия теоремы п.* 7 *и теоремы п.* 14); *Q плотно в P.*

Доказательство подразделим на параграфы.

22. Лемма. *Пусть $\varphi \in P$, $g \in D$, $p \geqq 0$ — целое число. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A_h^p\varphi)(t) \cdot g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot (L_h^p g)(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{83}$$

где

$$(L_h g)(t) = \frac{g(t-h) - g(t)}{h}. \tag{84}$$

Доказательство. Для $p = 0$ обе части (83) тождественны. Для $p = 1$ имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (A_h\varphi)(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{h} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(t+h) - \varphi(t)]\, g(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)[g(t-h) - g(t)]\, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)(L_h g)(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Для $p > 1$ (83) нетрудно доказать по методу индукции.

23. Докажем утверждение 5б): *Пусть* $g \in D$, $p \geqq 0$, $\varepsilon > 0$; *нужно найти* $\delta > 0$ *и натуральное число* n *так, чтобы*

$$0 < |h| < \delta\,, \quad \varphi \in U(n) \Rightarrow |S_g A_h^p \varphi| < \varepsilon\,. \tag{85}$$

Пусть

$$C = \max_{t \in \mathbf{E}_1} |g^{(p)}(t)| \tag{86}$$

и пусть N настолько велико, что

$$N_g \subset \langle -N, N \rangle\,. \tag{87}$$

Подберем натуральное число n так, чтобы

$$n > N + 1\,, \quad n > \frac{2(N+1)\,C}{\varepsilon}\,. \tag{88}$$

Согласно п. 22 имеем

$$S_g A_h^p \varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (A_h^p \varphi)(t)\,.\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,.\,(L_h^p g)(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{89}$$

Нетрудно показать, что для каждой функции g, обладающей непрерывной производной p-го порядка в $\mathbf{E}_1$ (в частности для $g \in D$)

$$(L_h^p g)(t) = g^{(p)}(\xi)\,, \tag{90}$$

где ξ — подходящая точка из интервала, ограниченного точками t и $t + ph$.

Возьмем $\delta = \dfrac{1}{p+1}$; тогда для $0 < |h| < \delta$ будет

$$(L_h^p g)(t) = 0 \quad \text{для} \quad |t| > N + 1\,. \tag{91}$$

Итак, если $\varphi \in U(n)$, то согласно (89), (91), (90), (86) и (88) будет

$$|S_g A_h^p \varphi| = \left| \int\limits_{-N-1}^{N+1} \varphi(t)(L_h^p g)(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqq 2(N+1)\, \frac{1}{n}\, C < \varepsilon\,,$$

чем и доказывается (85).

24. Докажем утверждение 5в), из которого вытекает утверждение 5а), как частный случай (для $\Phi \in E_0$). Справедливо даже следующее, более сильное, утверждение:

Если $\Phi \in E_\omega$, $\Phi(h) = A_h^p \varphi$, *и если* $\lim_{h \to 0} S_g \Phi(h) = 0$ *для всех* $g \in D$, *то* $\Phi = 0$.

Доказательство. Согласно п. 22 имеем

$$S_g \Phi(h) = S_g A_h^p \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)(L_h^p g)(t) \, \mathrm{d}t\,;$$

из равномерной непрерывности $g^{(p)}(t)$ и из (90) следует, что

$$\lim_{h \to 0} (L_h^p g)(t) = g^{(p)}(t) \quad \text{равномерно в } \mathbf{E}_1\,.$$

Ввиду компактности N_g будет поэтому

$$\lim_{h \to 0} S_g \Phi(h) = \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)(L_h^p g)(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \, g^{(p)}(t) \, \mathrm{d}t\,.$$

Итак, если $\lim_{h \to 0} S_g \Phi(h) = 0$ для всех $g \in D$, то φ есть многочлен степени ниже p. Следовательно, $\Phi(h) = A_h^p \varphi = 0$ для всех $h \neq 0$.

25. Доказательства утверждений 6., 7., 9., равно как и обстоятельства, что Q плотно в P, не представляют затруднений. Остается доказать 8.: Q_s есть множество тех $\varphi \in P$, которые обладают в $\mathbf{E}_1$ непрерывной производной порядка s; из равномерной непрерывотси $\varphi^{(s)}(t)$ в каждом компактном интервале непосредственно следует, что

$$\lim_{h \to 0} (A_h^s \varphi)(t) = \varphi^{(s)}(t)$$

локально равномерно в $\mathbf{E}_1$. Этим завершается доказательство теоремы п. 21.

Заметим, что согласно доказанному в предыдущих параграфах имеет место:

а) $\Omega \cap E = E[\Phi \in E;\ \lim_{h \to 0} S_g \Phi(h) = 0]$ (см. (35), п. 17);

б) $\Omega \cap E_\omega = 0$ (согласно п. 11 и 24);

в) $\Omega \cap E = E \cap ('\Omega \oplus B('\Omega) \oplus B^2('\Omega) \oplus \ldots)$ (см. (38));

г) $\alpha(Q)$ плотно в $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ (п. 14).

В следующем параграфе мы докажем важное утверждение о связи между пространством $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ и пространством обобщенных функций Шварца; это утверждение является следствием теоремы п. 15.

26. *Те же условия, как и в п.* 21. *Пусть* $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}})$ — *пространство всех обобщенных функций Шварца с обычной топологией*, см. [2]. *Тогда существует простое, непрерывное и линейное отображение* β^* *пространства* $(P^*, \mathfrak{F}^*)$ (образованного согласно пп. 7—13 из пространства P, топологии $\mathfrak{F}$ и т. д.; см. также важное замечание в конце п. 13) *в пространство* $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}})$.

Доказательство. Согласно теореме п. 15 достаточно проверить справедливость следующих утверждений:

А. *Существует простое, непрерывное и линейное отображение β пространства $(P, \mathfrak{F})$ в пространство $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}}.)$*

Б. *Если $\tilde{A}$ означает оператор дифференцирования в пространстве обобщенных функций, то $\tilde{A}^{-p}(0)$ есть множество всех многочленов* (в качестве обобщенных функций) *степени ниже p.*

Доказательство А. Для $\varphi \in P$ определим

$$\beta(\varphi) = T_\varphi\,, \quad \text{где} \quad T_\varphi(g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{92}$$

Отображение β, очевидно, линейно. Если $\beta(\varphi)$ — нулевая обобщенная функция, то $\varphi(t) = 0$ почти всюду, следовательно (в силу непрерывности φ), всюду; итак, отображение β просто. Согласно [2], теорема XVI, гл. III, β непрерывно.

Доказательство Б. Пусть $T^{(p)} = 0$ (p-я производная обобщенной функции T). Тогда согласно [2], п. 4, гл. III, T есть многочлен степени ниже p. Обратное утверждение очевидно.

27. *Пусть* $P = L^2(a, b)$ (т. е. множество всех измеримых функций, квадрат которых является интегрируемым в (a, b) в смысле Лебега; как обычно, мы не делаем различия между двумя функциями, которые отличаются только на множестве меры 0; a, b могут быть и несобственные числа). *Пусть топология в P задана при помощи нормы*

$$\|\varphi\| = [\int\limits_a^b \varphi^2(t)\, \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}\,. \tag{93}$$

Пусть H_0 — множество всех натуральных чисел, $o = \infty$ (предположим, что топология в H перенесена из $\mathbf{E}_1^*$).

Определим операторы A_n соотношениями

$$(A_n\varphi)(t) = \left\langle \begin{array}{lll} t\varphi(t) & \text{для} & t \in (a, b) \cap (-n, n)\,, \\ 0 & \text{для} & t \in (a, b) - (-n, n)\,. \end{array} \right. \tag{94}$$

(Тогда множество Q состоит из тех $\varphi \in P$, для которых сходится $\int\limits_a^b t^2\varphi^2(t)\, \mathrm{d}t$, а A есть „оператор умножения на независимое переменное“, т. е.

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t) \quad \text{для} \quad \varphi \in Q\,.) \tag{95}$$

Пусть D и S_g имеют тот же смысл, как и в п. 21. *Тогда выполняются условия* 5а), 5б), 5в), 7., 8. *и Q плотно в P. Вообще справедливо лишь $\overline{A(Q)} = P$; однако, если* $0 \operatorname{non} \in \overline{(a, b)}$, *то $A(Q) = P$, т. е. выполняется и* 6.

Доказательство. 5в), а следовательно, и 5а), можно доказать так же, как и в п. 24 (для случая P из п. 21); 7. и 8. очевидны; доказать, что Q плотно в P очень легко.

Докажем поэтому 5б). Пусть $g \in D$, $p \geqq 0$; тогда

$$|S_g A_n^p \varphi| = |\int_a^b (A_n^p \varphi)(t) \cdot g(t) \, \mathrm{d}t| = | \int_{(a,b) \cap (-n,n)} t^p \varphi(t) \, g(t) \, \mathrm{d}t| \leqq$$
$$\leqq [\int_a^b t^{2p} g^2(t) \, \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}} \cdot [\int_a^b \varphi^2(t) \, \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}} = K \cdot \|\varphi\| , \tag{96}$$

где постоянная K зависит только от p и g. (Оценка в (96) была получена по неравенству Шварца.) Из (96) легко следует 5б).

Пусть, наконец, $0 \operatorname{non} \in \overline{(a, b)}$. Тогда

$$\varphi(t) \in P \Rightarrow \frac{\varphi(t)}{t} \in P ,$$

откуда непосредственно следует, что $A(Q) = P$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *H. König:* Neue Begründung der Theorie der „Distributionen“ von L. Schwartz. Math. Nachrichten, 9. Band (1953), Heft 3.

[2] *L. Schwartz:* Théorie des distributions I, Act. scient. industr. 1091 (1950).

Summary

ON THE EXTENSION OF A LINEAR OPERATOR IN A TOPOLOGICAL LINEAR SPACE

ILJA ČERNÝ, Praha

(Received September 10, 1957)

This paper contains the following theorem considering the extension of a linear operator (generally not continuous) in a topological linear space with a simultaneous change of topology, the consequence of which is that the operator turns to be continuous (§§ 7—13):

Let P be a topological linear space, A a linear operator the domain of which is a linear manifold $Q \subset P$; let A_h ($h \in H - o$, where H is a topological space, o a cluster-point of H) be continuous linear operators in P; let $A\varphi = \lim_{h \to o} A_h \varphi$ if $\varphi \in Q$. Suppose there exist linear functionals S_g (g are elements of a set D) in P with the property that

a) $S_g \varphi = 0$ *for all* $g \in D \Rightarrow \varphi = 0$,

b) $\lim_{\substack{h \to o \\ \varphi \to 0}} S_g A_h^p \varphi = 0$ *for all* $g \in D$ *and* $p \geqq 0$.

Then there exists a topological linear space P^*, a linear operator A^* continuous

in P^* and a linear, continuous and one-to-one correspondence α between the space P and a linear subset of P^* such that

$$\varphi \in Q \Rightarrow A^*(\alpha(\varphi)) = \alpha(A\varphi) .$$

The existence of P^*, A^* and α with the required properties is proved by means of a direct construction on the base of P, A and A_h. Further, the following assertion is proved (§§ 15—20):

Suppose that besides the conditions of the first theorem the following conditions hold:

c) *If — for some $p \geqq 0$ and $\varphi \in P$ — $\lim\limits_{h \to o} S_g A_h^p \varphi = 0$ for all $g \in D$, then $\lim\limits_{h \to o} A_h^p \varphi = 0$;*

d) $P = A(Q)$;

e) *A_h are permutable ;*

f) *if $A^p\varphi$ is defined, then $A^p\varphi = \lim\limits_{h \to o} A_h^p \varphi$.*

Then the following assertion holds: *Let $\tilde{P}$ be a topological linear space, β a linear, continuous and one-to-one correspondence between P and a linear subset of $\tilde{P}$, and let $\tilde{A}$ be a continuous linear operator in $\tilde{P}$ such that*

g) $\varphi \in Q \Rightarrow \tilde{A}(\beta(\varphi)) = \beta(A\varphi)$,

h) $p \geqq 0,\ \varphi \in P,\ \tilde{A}^p\beta(\varphi) = 0 \Rightarrow A^p\varphi$ *is defined.*

Then there exists a linear, continuous and one-to-one correspondence β^* between the space P^* (which has been constructed in the proof of the first theorem) *and a linear subset of the space $\tilde{P}$ such that*

$$\varphi^* \in P^* \Rightarrow \tilde{A}(\beta^*(\varphi^*)) = \beta^*(A^*\varphi^*) .$$

Thus the latter theorem assures that in the construction of the space P^* by means of P no "superfluous" ideal elements were added and that the topology in P^* is not "superfluously" coarse.

§§ 21—25 show that all the conditions of both theorems are fulfilled, when P is the space of all continuous real-valued functions in $(-\infty, +\infty)$ and A is the operator of differentiation. § 26 proves an important connection between the space P^* and the space D_0 of all Schwartz's distributions which are derivatives (of all orders) of continuous functions: there exists a linear, continuous and one-to-one correspondence between P and D_0 preserving the operation of differentiation. (The construction of P^* made in §§ 7—13 is wholly independent of the Schwartz's construction of his space of distributions.)

§ 27 shows the possibility of constructing the space P^* also for the case, when $P = L^2(a, b)$ is the space of all measurable functions φ for which the Lebesgue integral $\int\limits_a^b \varphi^2(t)\, \mathrm{d}t < +\infty$, and when $(A\varphi)(t) = t\varphi(t)$. If a and b are either both positive or both negative, all the conditions of the second theorem hold.