František Šik

Über Summen einfach geordneter Gruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 22–53

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100275

ÜBER SUMMEN EINFACH GEORDNETER GRUPPEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Eingelangt am 9. Juni 1956)

Die vorliegende Arbeit behandelt l-Gruppen, die eine Summe irgend eines Systems einfach geordneter Gruppen sind. Für ihr Studium werden die Eigenschaften der Polarität, besonders der mit der Polarität verknüpfte Begriff der Komponente, benützt.

1

Dieser Absatz enthält eine Aufzählung der benützten Begriffe und eine Zusammenfassung der Sätze, die in Bezug auf das Thema der Abhandlung einen Hilfscharakter haben. Bei den geläufigeren Begriffen sind keine Hinweise auf die Literatur gegeben. Sie können alle z. B. in der Monographie von G. BIRKHOFF [2] gefunden werden. Die in dieser Arbeit neu gebildeten Begriffe sind durch die Bezeichnung „Definition" eingeführt.

Eine Verbandsgruppe nennen wir kurz eine *l-Gruppe*. Der Buchstabe G wird in der ganzen Arbeit — wenn nichts anderes ausdrücklich vermerkt wird — für die Bezeichnung einer l-Gruppe vorbehalten.

Wie bekannt, sind die Verbandsoperationen $\bigvee, \bigwedge$ auf einer l-Gruppe untereinander und mit der Gruppenoperation — die additiv geschrieben wird — durch die unendlichen Distributivgesetze verbunden; es gilt

Hilfssatz 1. *x_ϱ seien Elemente der l-Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn $\bigvee x_\varrho$ existiert, dann gilt* $x + \bigvee x_\varrho = \bigvee(x + x_\varrho)$, $(\bigvee x_\varrho) + x = \bigvee(x_\varrho + x)$; $x \wedge \bigvee x_\varrho = \bigvee(x \wedge x_\varrho)$. *Unter der Voraussetzung, dass $\bigwedge x_\varrho$ existiert, gelten die Dualrelationen* ([2] XIV § 10).

S sei eine Untermenge des Verbandes $\mathfrak{G}$; wenn für eine beliebige Untermenge $X \subset S$, für die $\bigvee\limits_{x \in X} x, \bigwedge\limits_{x \in X} x$ in $\mathfrak{G}$ existiert, die Elemente $\bigvee\limits_{x \in X} x, \bigwedge\limits_{x \in X} x$ in S liegen, so nennt man S einen in $\mathfrak{G}$ *abgeschlossenen Unterverband* (siehe auch [2] IV § 1).

Wie üblich, versteht man unter dem *absoluten Betrag* $|x|$ des Elementes $x \in G$ den Ausdruck $|x| = x \vee - x$, die Elemente $x^+ = x_+ = x \vee 0$ resp. $x^- = x_- = x \wedge 0$ nennt man *den positiven* resp. *negativen Teil* des Elementes x[1])

[1]) Unter dem negativen Teil des Elementes x versteht man in der Literatur machmal das Element $-(x_-)$.

(das Symbol 0 bezeichnet die Null der l-Gruppe G). Ist M eine Untermenge in G, so bedeutet M_+ (oder M^+) die Menge der positiven Teile aller Elemente aus M.

Eine Untermenge der l-Gruppe G nennen wir eine *l-Untergruppe* in G, wenn sie gleichzeitig ein Unterverband in G ist. Eine l-Untergruppe H der l-Gruppe G heisst *regelmässig* in G, wenn für eine beliebige in G von oben beschränkte Untermenge $\{x_\alpha\} \subset H$ das Element $\bigvee x_\alpha$ in G existiert und $\bigvee x_\alpha \in H$ gilt (siehe auch [6] II 1,21; [7] Seite 42; [9] § 4).

Eine Untermenge M des Verbandes G heisst *konvex* (in G), wenn für $a, b \in M$, $x \in G$, aus der Relation $a \vee b \geqq x \geqq a \wedge b$ folgt, dass $x \in M$ ist. Die Konvexität einer Untergruppe kann man folgendermassen ausdrücken. *Eine Untergruppe H der l-Gruppe G ist dann und nur dann konvex (in G), wenn $a \in H$, $x \in G$, $|a| \geqq$ $\geqq |x| \Rightarrow x \in H$ gilt.* G. Birkhoff hat bewiesen, dass die Bedingung hinreichend ist ([2] XIV § 5). Die Notwendigkeit ist leicht zu beweisen.

Ein konvexer Normalteiler J der l-Gruppe G heisst ein *l-Ideal* (in G). Das Restklassensystem in G modulo J, G/J, ist selbst eine l-Gruppe, welche wir die *l-Faktorgruppe* nennen wollen ([2] XIV § 5). Die teilweise Anordnung in G/J ist durch die Vorschrift gegeben: für ein $A \in G/J$ gilt $A \geqq J$ dann und nur dann, wenn für ein $a \in A$, $a \geqq 0$ gilt.

Die Behauptung, dass *das System aller l-Ideale auf einer l-Gruppe einen vollständigen distributiven Verband bildet, in welchem die Verbandsoperationen durch den Durchschnitt und durch die Summe*[2]) *realisiert sind*, stammt von G. Birkhoff ([1] Th. 21; [2] XIV Th. 10).

Zwei l-Ideale J, K in G nennen wir *komplementäre direkte Faktoren* (in G), wenn $J \cap K = (0)$, $J + K = G$ gilt ([9] § 1). Jedes l-Ideal, das einer von einem Paare der komplementären direkten Faktoren in G ist, nennen wir einen *direkten Faktor* in G.

Zwei Elemente $x, y \in G$ nennt man *disjunktiv* und bezeichnet $x\ \delta\ y$, wenn $|x| \wedge |y| = 0$ gilt.[3])

Es gelten folgende Hilfssätze.

Hilfssatz 2. $x\ \delta\ a$, $x\ \delta\ b \Rightarrow x\ \delta\ (a \pm b)$, $x\ \delta\ (a \vee b)$, $x\ \delta\ (a \wedge b)$ ([2] XIV § 11).

Hilfssatz 3. $a\ \delta\ b \Rightarrow |a + b| = |a| + |b| = |b| + |a| = |a| \vee |b|$, $a + b =$ $= b + a$ ([9] die Behauptung (7)).

Hilfssatz 4. $a_+\ \delta\ a_-$, $|a| = a_+ \vee -(a_-) = a_+ - a_-$ ([2] XIV § 4 Cor. 2 und Lemma 4).

Ist $X, Y \subset G$, so bedeutet das Symbol $X\ \delta\ Y$, dass für ein beliebiges $x \in X$ und ein beliebiges $y \in Y$ $x\ \delta\ y$ gilt. Eine Menge $X' \subset G$ heisst *eine Komponente*

---

[2]) Unter einer Summe verstehen wir die Summe von Komplexen in der Gruppe.

[3]) Auf diese Weise wird die Disjunktivität z. B. in [6] (I 1,6) oder in [2] (XIV § 6) eingeführt; sie muss von dem durch Birkhoff in [2] XIV § 4 eingeführten Begriff der Disjunktivität unterschieden werden: die Elemente x, y sind disjunktiv, wenn $x \wedge y = 0$ ist.

in G ([6] II § 1), wenn in G eine solche Untermenge X existiert, dass X' die Menge aller Elemente $x' \in G$ mit der Eigenschaft $x' \,\delta\, X$ ist. Die Menge X' nennt man auch *das disjunktive Komplement* (in G) der Menge X. Unter einem *komplementären Paar von Komponenten* vesteht man ein Paar von Komponenten, von denen jede das disjunktive Komplement der anderen ist. Man zeigt leicht, dass *die Komponente und ihr disjunktives Komplement ein komplementäres Paar von Komponenten bilden.*

In der Arbeit [9] habe ich bewiesen, dass *das System aller Komponenten in G eine vollständige Boolesche Algebra bildet, in der das Infimum $\sqcap K_\nu$ des Komponentensystems $\{K_\nu\}$ sein Durchschnitt und das Komplement (im Sinne der Booleschen Algebra) sein disjunktives Komplement ist. Die Null der l-Gruppe und G selbst sind das kleinste und das grösste Element dieser Algebra.* (Die Verbandsoperationen in dieser Booleschen Algebra sollen — zum Unterschied von den Verbandsoperationen in der l-Gruppe G — durch die Symbole $\sqcup$, $\sqcap$, $\bigsqcup$, $\bigsqcap$ bezeichnet werden.)

Die Menge aller direkten Faktoren in G bildet eine Boolesche Algebra, die ein (nicht notwendig abgeschlossener) Unterverband in der Booleschen Algebra aller Komponenten in G ist. Das Supremum zweier direkten Faktoren in dieser Booleschen Algebra ist ihre Summe ([9] Satz 1). Also ist jeder direkte Faktor in G eine Komponente in G und sein disjunktives Komplement ist sein (einziger) komplementärer direkter Faktor.

Unter einer minimalen (maximalen) Komponente versteht man übereinstimmend mit der geläufigen Terminologie ein Atom (ein Dualatom) der Algebra von Komponenten. Analog gilt dies für die direkten Faktoren.

Ein System von Komponenten nennt man *vollständig* in G ([6] II 2,21), wenn $\bigsqcup K_\nu = G$ gilt.

Man beweist leicht, dass *ein System von Komponenten $\{K_\nu\}$ dann und nur dann vollständig in G ist, wenn $(\bigcup K_\nu)' = (0)$ gilt.*

Beweis. Ein Komponentensystem $\{K_\nu\}$ sei vollständig in G. $(\bigcup K_\nu)''$ ist eine Komponente, die $\bigcup K_\nu$ umfasst; G ist die kleinste von ihnen. Also ist $G = (\bigcup K_\nu)''$. Daher folgt $(0) = G' = (\bigcup K_\nu)''' \supset (\bigcup K_\nu)'$, also gilt $(\bigcup K_\nu)' = (0)$.

Umgekehrt sei $(\bigcup K_\nu)' = (0)$. Da $(\bigcup K_\nu) \subset \bigsqcup K_\nu$ ist, gilt $(0) = (\bigcup K_\nu)' \supset (\bigsqcup K_\nu)'$. Also gilt $(\bigsqcup K_\nu)' = (0)$. Da $\bigsqcup K_\nu$, $(\bigsqcup K_\nu)'$ ein komplementäres Komponentenpaar bildet, ist $\bigsqcup K_\nu = G$.

Jede Komponente in G ist eine konvexe Untergruppe in G (siehe z. B. [9] Lemma 3). Sie muss jedoch kein l-Ideal sein (siehe Beispiel VI, Absatz 4 dieser Arbeit: das disjunktive Komplement des Elementes a ist kein l-Ideal); ist sie ein l-Ideal, so muss sie wiederum kein direkter Faktor sein (siehe Beispiel V, Absatz 4: die Komponenten $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$ haben die verlangten Eigenschaften). Aus Hilfssatz 3 folgt aber, dass eine Komponente K ein direkter Faktor ist, wenn für ihr disjunktives Komplement K' $K + K' = G$ gilt.

Hilfssatz 5. *Auf einer vollständigen l-Gruppe ist jede Komponente ein direkter Faktor* ([2] XIV § 11, 12).

Hilfssatz 6. *Auf einer vollständigen l-Gruppe G ist jede Komponente eine in G regelmässige l-Untergruppe* ([2] XIV § 11, 12).

Für zwei konvexe Untergruppen J, K gilt $J \delta K$ dann und nur dann, wenn $J \cap K = (0)$ ist. Daraus folgt leicht die Behauptung:

Wenn $\{K_\nu\}$ ein Komponentensystem und J eine Komponente ist und $J \delta K_\nu$ für alle ν gilt, so gilt $J \delta \bigsqcup K_\nu$.

Hilfssatz 7. *G sei eine l-Untergruppe der l-Gruppe $\mathfrak{G}$, K, K' ein komplementäres Komponentenpaar in G; dann existiert ein komplementäres Komponentenpaar $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ in $\mathfrak{G}$ für das $\mathscr{K} \cap G = K$, $\mathscr{K}' \cap G = K'$ gilt.*

Beweis. Bezeichnen wir $\mathscr{K}$ die Menge aller zu K' disjunktiven Elemente aus $\mathfrak{G}$ und $\mathscr{K}'$ das disjunktive Komplement in $\mathfrak{G}$ zu $\mathscr{K}$, dann gilt offenbar $\mathscr{K} \cap G = K'' = K$, $\mathscr{K}' \cap G = K'$.

Den Hilfssatz 7 kann man nicht umkehren: ist $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ ein komplementäres Komponentenpaar in $\mathfrak{G}$, dann muss $\mathscr{K} \cap G$, $\mathscr{K}' \cap G$ kein komplementäres Komponentenpaar in G bilden.

Beispiel. Ist $\mathfrak{G}$ die direkte Summe zweier einfach geordneter additiver Gruppen der reellen Zahlen, dann ist die Gruppe G der Paare (x, x), wo x eine beliebige reelle Zahl bedeutet, eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$. Die Mengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ der Zahlenpaare $(x, 0)$ und $(0, x)$, wo x eine beliebige reelle Zahl bedeutet, bilden ein komplementäres Komponentepaar in $\mathfrak{G}$, aber es gilt $\mathscr{K} \cap G = \mathscr{K}' \cap G = (0, 0)$.

Hilfssatz 8. *K sei eine Komponente in G, L eine Komponente in K. Dann ist L eine Komponente in G.*

Beweis. Nach Hilfssatz 7 existiert in G eine Komponente J, so dass $L = K \cap J$ ist. Nun ist L als Durchschnitt zweier Komponenten in G eine Komponente in G.

Hilfssatz 9. *J sei ein direkter Faktor der l-Gruppe G, K ein direkter Faktor in J. Dann ist K ein direktor Faktor in G.*

Beweis. Die Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung des Hilfssatzes 8 und der Tatsache, dass die direkten Faktoren einen distributiven Verband bilden, in dem die Verbandsoperationen durch den Durchschnitt und durch die Summe realisiert werden.

Hilfssatz 10. *K sei eine Komponente in der l-Gruppe G. K ist dann und nur dann einfach geordnet, wenn sie keine Komponente L in G enthält, für die $(0) \neq L \subsetneqq K$ gilt.*

Beweis. L sei eine Komponente in G, für die $(0) \neq L \subsetneqq K$ gilt. Dann gilt für das disjunktive Komplement L' in G der Komponente L $L' \cap K \neq (0)$. (Im umgekehrten Fall wäre $K = G \cap K = (L \sqcup L') \cap K = (L \cap K) \sqcup (L' \cap K) = = L \sqcup (0) = L$, was in Widerspruch ist.) Ist $0 < x \in L$, $0 < y \in L' \cap K$, dann gilt $x \, \delta \, y$, also ist $x \wedge y = 0$. Daher gilt $x \parallel y$.[4]) Also ist K nicht einfach geordnet.

K sei nicht einfach geordnet. Dann existiert ein Element $x \in K$ so, dass $x \parallel 0$ gilt. Also ist $x_+ > 0$, $x_- < 0$, $x_+ \, \delta \, x_-$ (Hilfssatz 4). Daher existiert ein komplementäres Komponentenpaar $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ in G, für das $x_+ \in \mathscr{L}$, $x_- \in \mathscr{L}'$ gilt. Dann gilt $0 \neq x_+ \in \mathscr{L} \cap K = L \subsetneqq K$ ($L \neq K$, da $x_- \bar{\in} L$, $x_- \in K$ ist). Also existiert eine Komponente L in G mit den verlangten Eigenschaften.

Setzen wir $K = G$, so bekommen wir das folgende Kriterium für die einfache Anordnung der l-Gruppe G.

Hilfssatz 11. *Eine l-Gruppe ist dann und nur dann einfach geordnet, wenn sie keine echte Komponente enthält.*

Wir definieren folgende Begriffe für ein System $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$, von l-Gruppen. (Wir setzen immer voraus, dass der triviale Fall, nämlich $G_\nu = (0)$ für ein ν, ausgeschlossen ist.)

Die *vollständige direkte Summe* eines Systems $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$, ist eine l-Gruppe, die auf dem kartesischen Produkte des Mengensystems $\{G_\nu\}$ definiert ist und in der die algebraischen Operationen komponentenweise definiert sind. Dass dadurch wirklich eine l-Gruppe definiert ist, lässt sich leicht erkennen. Diese l-Gruppe bezeichnet man mit $\tilde{\sum} G_\nu$ und ihre Elemente mit $\{..x_\nu..\}$ (dabei ist $x_\nu \in G_\nu$). Das Element $x_\nu \in G_\nu$ nennt man *die ν-te Komponente* des Elementes $\{..x_\nu..\}$. Die Untermenge aller Elemente aus $\tilde{\sum} G_\nu$, die nur eine endliche Zahl der von Null verschiedenen Komponenten haben, ist offenbar eine l-Untergruppe in $\tilde{\sum} G_\nu$; wir nennen sie die *direkte Summe* des Systems $\{G_\nu\}$ und bezeichnen sie mit $\dot{\sum} G_\nu$. Im Falle eines endlichen Systems $\{G_k\}_{k=1}^n$ von l-Gruppen fallen die Begriffe der vollständigen direkten Summe und der direkten Summe zusammen. Anstatt $\tilde{\sum} G_k$ oder $\dot{\sum} G_k$ benutzt man manchmal die Bezeichnung $G_1 \dotplus G_2 \dotplus \dots \dotplus G_n$.

Es sei bemerkt, dass in $\tilde{\sum} G_\nu$ für jedes ν eine l-Untergruppe $\bar{G}_\nu$ existiert, die mit G isomorph ist. Das ist die Menge aller Elemente von der Form $\{..0, x_\nu, 0..\}$, deren ν-te Komponente gleich $x_\nu \in G_\nu$, alle anderen gleich Null sind. Im weiteren werden wir unter $\bar{G}_\nu$ die gerade definierte l-Untergruppe verstehen.

Analog versteht man unter $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ (wo $M \subset \Lambda$ ist) die l-Untergruppe der Elemente aus $\tilde{\sum} G_\nu$, deren ν-te Komponente für $\nu \in M$ resp. $\nu \bar{\in} M$ ein beliebiges Element aus G_ν resp. die Null (aus G_ν) ist. Ist $M = \emptyset$, dann versteht man unter $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ nur die Null (der l-Gruppe G).

[4]) Das Symbol $x \parallel y$ bedeutet, dass die Elemente x, y unvergleichbar sind.

Unter der *Projektion* der Untermenge $A \subset \tilde{\sum} G_\nu$ in G_ν versteht man die Menge der Elemente aus G_ν, die die ν-te Komponente eines Elementes aus A sind ([9] § 1). Die Projektion der Untermenge $A \subset G$ in den direkten Faktor J der l-Gruppe G ist auf diese Weise auch definiert. Es genügt zu erwähnen, dass G isomorph mit der direkten Summe $J \dotplus J'$ der l-Gruppe J und ihren eindeutig bestimmten komplementären direkten Faktor J' in G ist.

Hilfssatz 12. *Wenn man jedem Elemente aus G seine Projektion in einen direkten Faktor J von G zuordnet, bekommt man eine homomorphe Abbildung (der Gruppe und des Verbandes) G auf J. Für die Projektion x des Elementes* $a \in G$, $a \geqq 0$, *gilt* $a \geqq x \geqq 0$ ([9] Lemma 10).

Eine l-Untergruppe G von $\tilde{\sum} G_\nu$ nennt man eine *subdirekte Summe* des Systems von l-Gruppen $\{G_\nu\}$, wenn die Projektion von G in G_ν gleich G_ν für alle ν ist.

Hilfssatz 13. *Die l-Gruppe G ist dann und nur dann eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen, wenn auf G ein solches System von l-Idealen* $\{G_\nu\}$ *existiert, für das* $\bigcap G_\nu = (0)$ *und* G/G_ν *für jedes* ν *eine einfach geordnete Gruppe ist.*

Das ist ein Spezialfall des Satzes 9 aus [2] VI § 6.

Hilfssatz 14. *Eine l-Gruppe G sei die vollständige direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen* $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$, $G = \tilde{\sum} G_\nu$. *Jede Komponente in G ist ein direkter Faktor in G und ist von der Form* $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $M \subset \Lambda$. *Das disjunktive Komplement der Komponente* $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ *ist* $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$. *Ist M eine beliebige Menge von Indizen, dann ist* $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ *eine Komponente in G.*

B e w e i s. K, K' sei ein komplementäres Komponentenpaar in $G = \tilde{\sum} G_\nu$. Wir bezeichnen mit M die Menge aller Indizes ν, zu welchen ein Element in K existiert, dessen ν-te Komponente $\neq 0$ ist. Aus der Relation $K \,\delta\, K'$ folgt, dass die ν-te Komponente (für $\nu \in M$) eines beliebigen Elementes aus K' gleich der Null ist. Daraus folgt, dass $(\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}) \,\delta\, K'$ gilt, und daher ist $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu} \subset K$. Da K eine Menge der Elemente aus G ist, deren ν-te Komponente für $\nu \bar{\in} M$ gleich der Null und $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ die grösste Menge in G mit dieser Eigenschaft ist, so gilt auch die umgekehrte Inklusion. Also ist $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu} = K$. Die Komponente K ist also ein direkter Faktor in G. Man erkennt leicht, dass jede Menge von der Form $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ eine Komponente in G ist und dass ihr disjunktives Komplement $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ ist.

Definition. *Eine l-Untergruppe G in* $\tilde{\sum} G_\nu$ *ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems von l-Gruppen* $\{G_\nu\}$, *wenn sie eine subdirekte Summe dieses Systems ist und wenn* $G \supset \overline{G}_\nu$ *für alle* ν *gilt.*

Offenbar gilt $\tilde{\sum} G_\nu \supset G \supset \dot{\sum} G_\nu$. Beispiele III und V, Absatz 4 zeigen, dass die eingeführten Typen von Summen insgesamt verschieden sind.

Hilfssatz 15. *Die l-Gruppe G sei eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$. J, J' ist ein komplementäres Komponentenpaar in G dann und nur dann, wenn eine Menge $M \subset \Lambda$ so existiert, dass $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $J' = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ gilt.*

Beweis. J' sei das disjunktive Komplement in G der Menge $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$. Nach Hilfssatz 7 existiert eine Komponente $\mathscr{K}$ in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, so dass $\mathscr{K} \cap G = J'$ gilt. Also ist nach Hilfssatz 14 $J' = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in N} G_\nu}$, $N \subset \Lambda$. Wir wollen beweisen, dass $M \cap N = \emptyset$. Wenn umgekehrt ein $\mu \in M \cap N$ existiert, dann liegt in $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ und in $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in N} G_\nu}$ jedes Element $x = \{..0, x_\mu, 0..\}$, wo $x_\mu \neq 0$, also gilt $0 \neq x \in (G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}) \cap (G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in N} G_\nu}) = J \cap J'$; das ist aber unmöglich, da die Mengen J, J' disjunktiv sind. Also gilt $M \cap N = \emptyset$. Da weiter $J\, \delta\, (G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu})$, $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu} \supset \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in N} G_\nu}$ ist, so folgt daraus $G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu} = J'$.

Analog beweisen wir, dass das disjunktive Komplement in G der Komponente J' gleich $G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, also gleich J ist.

Die Notwendigkeit der Bedingung. Sind J, J' zwei komplementäre Komponenten in G, dann existiert in $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 7 ein komplementäres Komponentenpaar $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$, so dass $J = \mathscr{K} \cap G$, $J' = \mathscr{K}' \cap G$ gilt. Nach Hilfssatz 14 sind die Komponenten $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ von der Form $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$. Also gilt $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $J' = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$.

In dem letzten Abschnitte des vorigen Beweises haben wir gleichzeitig den folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 16. *G sei eine l-Untergruppe der vollständigen direkten Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$. Sind J, J' zwei komplementäre Komponenten in G, dann existiert eine solche Menge $M \subset \Lambda$, dass $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $J' = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G}$ gilt.*

2

In § 2 werden vollständig subdirekte Summen von Systemen einfach geordneter Gruppen studiert.

Definition. *Ein Element x der l-Gruppe G nennt man eine Spitze des Elementes a, $0 < a \in G$, wenn x ein minimales Element in G mit den Eigenschaften $a \geqq x > 0$, $(a - x)\, \delta\, x$, ist.*

(Einen Zusammenhang mit diesem Begriffe findet man in [2] XIV § 12 Ex. 2a, b und [5].)

Das Element $x > 0$, $x \in G$, heisst eine Spitze, wenn es eine Spitze eines Elementes $a > 0$, $a \in G$, ist.

Hilfssatz 17. *Je zwei verschiedene Spitzen eines Elementes $a \in G$, $a > 0$, sind disjunktiv.*

Beweis. Für die Spitze x eines Elementes a gilt $(a - x) \wedge x = 0$; daher ist $(a - x) \vee x = a - x + x = a$ (siehe Hilfssatz 3). Es seien $x, y, x \neq y$, zwei Spitzen des Elementes a. Bezeichnen wir $a - x = x'$, $a - y = y'$; dann gilt $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = a$, $y \wedge y' = 0$, $y \vee y' = a$ und weiter $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = 0$, $x' \vee y' = (a - x) \vee (a - y) = a + [(-x) \vee (-y)] = a - (x \wedge y)$. Daher ist $[a - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) = 0$, $a \geqq x \wedge y \geqq 0$. Ist $x \wedge y > 0$, dann führen die Relationen $x \geqq x \wedge y$, $y \geqq x \wedge y$ und die Minimalität der Spitzen x, y auf die Gleichungen $x = x \wedge y = y$, was in Widerspruch mit der Voraussetzung $x \neq y$ ist. Also ist $x \wedge y = 0$. Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 18. *Jede Spitze ist ihre einzige Spitze (d. h. ist x eine Spitze, dann ist x eine Spitze des Elements x und kein y, $y \neq x$, ist eine Spitze des Elements x).*

Beweis. x sei eine Spitze eines Elementes $a > 0$; y sei eine Spitze des Elementes x. Es gilt $a \geqq x \geqq y > 0$. Für $x' = a - x$ gilt $x' \wedge x = 0$, $x' \vee x = a$; für $y' = x - y$ gilt $y' \wedge y = 0$, $y' \vee y = x$. Also ist $0 \leqq (x' \vee y') \wedge y = (x' \wedge y) \vee (y' \wedge y) \leqq (x' \wedge x) \vee (y' \wedge y) = 0$, $(x' \vee y') \vee y = x' \vee (y' \vee y) = x' \vee x = a$. Daher gilt $(x' \vee y') \wedge y = 0$, $(x' \vee y') \vee y = a$. Nach Hilfssatz 3 gilt $a = (x' \vee y') \vee y = (x' \vee y') + y$, also ist $x' \vee y' = a - y$. Daher ist $(a - y) \wedge y = 0$. Daraus, dass x eine Spitze des Elementes a ist und $x \geqq y > 0$, $(a - y) \wedge y = 0$ gilt, folgt $x = y$.

Satz 1. *Eine l-Gruppe ist dann und nur dann einfach geordnet, wenn jedes ihrer Elemente > 0 eine Spitze ist.*

Beweis. Ist eine l-Gruppe G einfach geordnet, dann ist offenbar jedes ihrer Elemente > 0 eine Spitze.

Jedes Element der l-Gruppe sei eine Spitze. G sei nicht einfach geordnet. Dann existiert ein Element $a \in G$, $a \parallel 0$. Dann ist $|a| > 0$, $a_+ > 0$, $-a_- > 0$. Es gilt $|a| = a_+ - a_- = -a_- + a_+$, also ist $(|a| - a_+) \wedge a_+ = 0$ (Hilfssatz 4) und weiter $|a| \geqq a_+$. Nach der Voraussetzung ist $|a|$ eine Spitze. Nach Hilfssatz 18 ist $|a|$ die einzige Spitze des Elementes $|a|$. Aus der Minimalität der Spitze und aus dem Vorhergehenden folgt dann $a_+ = |a|$, also gilt $a_- = 0 = a \wedge 0$; daher ist $a \geqq 0$, was in Widerspruch ist. Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 19. *G sei eine l-Gruppe, $\{x^\varrho\}$ eine Menge je zwei disjunktiver Spitzen; es existiere $x = \bigvee_\varrho x^\varrho$. Dann ist die Menge aller Spitzen von x identisch mit $\{x^\varrho\}$.*

Beweis. Es seien die Bedingungen des Satzes erfüllt. Es sei $x = \bigvee_\varrho x^\varrho$. Wir zeigen, dass die Menge aller Spitzen von x gleich $\{x^\varrho\}$ ist. Es sei $x^\sigma \in \{x^\varrho\}$. Wir wollen zeigen, dass x^σ eine Spitze des Elementes x ist. Es gilt nämlich $x \geqq x^\sigma > 0$. Weiter ist (nach Hilfssatz 1) $x - x^\sigma = (\bigvee_\varrho x^\varrho) - x^\sigma = \bigvee_\varrho (x^\varrho - x^\sigma)$. Dabei ist $x^\varrho \wedge x^\sigma = 0$ für alle $\varrho \neq \sigma$, also gilt (nach Hilfssatz 3) $x^\varrho \vee x^\sigma = x^\varrho + x^\sigma$ und daher gilt $(x^\varrho - x^\sigma) \vee 0 = x^\varrho$ (für alle $\varrho \neq \sigma$). Ein Element des Systems $\{x^\varrho - x^\sigma\}$ ist gleich Null und zwar für $\varrho = \sigma$. Also ist $x - x^\sigma = \bigvee_\varrho (x^\varrho - x^\sigma) = \bigvee_{\varrho \neq \sigma} [(x^\varrho - x^\sigma) \vee 0] = \bigvee_{\varrho \neq \sigma} x^\varrho$. Daher gilt (nach Hilfssatz 1) $(x - x^\sigma) \wedge x^\sigma = (\bigvee_{\varrho \neq \sigma} x^\varrho) \wedge x^\sigma = \bigvee_{\varrho \neq \sigma} (x^\varrho \wedge x^\sigma) = 0$.

Wir wollen voraussetzen, dass für das Element $a \in G$ die Relationen $x \geqq x^\sigma \geqq a > 0$, $(x - a) \wedge a = 0$ gelten. Dann ist $0 = [(\bigvee_\varrho x^\varrho) - a] \wedge a = [\bigvee_\varrho (x^\varrho - a)] \wedge a = \bigvee_\varrho [(x^\varrho - a) \wedge a]$. Da $(x^\sigma - a) \wedge a \geqq 0$ ist, muss $(x^\sigma - a) \wedge a = 0$ gelten. Nach Hilfssatz 13 ist jede Spitze ihre einzige eigene Spitze. Daher ist $x^\sigma = a$. Also ist x^σ wirklich eine Spitze von x.

Es sei nun $y > 0$ eine Spitze des Elementes x; also ist $x \geqq y > 0$. Ist $y \neq x^\varrho$ für alle ϱ, dann ist nach Hilfssatz 17 $y \, \delta \, x^\varrho$ für alle ϱ, also gilt $y \wedge y^\varrho = 0$ für alle ϱ. Da $x \geqq y > 0$ ist, so ist $0 < y = y \wedge x = y \wedge \bigvee_\varrho x^\varrho = \bigvee_\varrho (y \wedge x^\varrho) = 0$, was in Widerspruch ist. Also gilt $y = x^\varrho$ für ein ϱ. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Hilfssatz 20. *Eine l-Gruppe G sei eine vollständig subdirekte Summe eines Systems $\{G_\nu\}$ einfach geordneter Gruppen. Dann gilt:*

1. *Das Element x ist dann und nur dann eine Spitze von a, $0 < a \equiv \{..a_\nu..\} \in G$, wenn für einen Index ν, für das $a_\nu > 0$ gilt, die ν-te Komponente des Elementes x gleich a_ν ist und alle anderen gleich Null sind.*

2. *Es sei $0 < a \in G$. Die Menge aller Spitzen in G des Elementes a ist dieselbe wie die Menge aller Spitzen in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$ des Elementes a.*

3. *Die Menge aller Spitzen in G ist dieselbe wie die Menge aller Spitzen in $\mathfrak{G}$.*

4. *Jedes Element (> 0) in G ist eindeutig durch die Menge aller seiner Spitzen bestimmt; es ist gleich dem Supremum dieser Menge.*

Beweis. 1. Es soll bewiesen werden, dass jedes Element aus G, dessen eine Komponente > 0 und alle anderen gleich Null sind, also jedes Element von der Form $\{..0, x_\mu, 0..\}$ ist, wo $0 < x_\mu \in G_\mu$ für ein μ gilt, eine Spitze in G und dass umgekehrt jede Spitze in G von dieser Form ist. Es sei $\{..0, x_\mu, 0..\} \equiv x$, $0 < x_\mu \in G_\mu$ für ein μ. Da $G \supset \overline{G}_\nu$ für alle ν ist, so liegt x in G. x ist offenbar eine Spitze des Elementes x.

Es sei nun $x \equiv \{..x_\nu..\}$ eine Spitze des Elementes a, $0 < a \equiv \{..a_\nu..\}$. Dann ist $a_\nu \geqq x_\nu$ für alle ν und weiter $(a - x) \wedge x = 0$, also ist $(a_\nu - x_\nu) \wedge x_\nu = 0$ für alle ν, also ist $a_\nu - x_\nu = 0$ für bestimmte ν und $x_\nu = 0$ für die übrigbleibenden ν. Es existiert ein solches μ, dass $x_\mu > 0$ ist (im umgekehrten Fall wäre $x = 0$), also gilt $a_\mu - x_\mu = 0$, also ist $a_\mu = x_\mu$ (> 0). Für das Element $z \equiv \{..0, a_\mu, 0..\}$ gilt $0 < z \leqq x$ und dabei ist $(a - z)\ \delta\ z$, da die μ-te Komponente des Elementes $a - z$ gleich Null ist und alle anderen Komponenten des Elementes z gleich Null sind. Aus der Minimalität des Elementes x folgt $x = z$. Dadurch ist die Behauptung über die Form der Spitzen bewiesen. Gleichzeitig sind alle Spitzen des Elementes a, $0 < a \equiv \{..a_\nu..\} \in G$, bestimmt und die Behauptung 1 vollständig bewiesen.

2 und 3. Die l-Gruppen G und $\mathfrak{G}$ sind vollständig subdirekte Summen des Systems $\{G_\nu\}$ einfach geordneter Gruppen. Gemäss dem Teil 1 dieses Satzes ist jede Spitze in G und in $\mathfrak{G}$ ein Element von der Form $x \equiv \{..0, x_\mu, 0..\}$, wo $0 < x_\mu \in G_\mu$ gilt. Umgekehrt ist jedes Element von dieser Form eine Spitze seiner selbst in $\mathfrak{G}$ und solange als $x \in G$ ist, ist es auch eine Spitze von x in G. Es gilt aber $G \supset \overline{G}_\mu$ für alle μ, also ist immer $x \in G$. So ist die Behauptung 2 und gleichzeitig die Behauptung 3 bewiesen.

4. Aus Behauptung 1 ist offenbar, dass jedes Element $a \in \mathfrak{G}$ $a > 0$, das Supremum der Menge aller seiner Spitzen in $\mathfrak{G}$ ist. Es sei nun $a \in G$, $a > 0$. Nach 2 ist die Menge M aller seiner Spitzen in G dieselbe wie die Menge aller seiner Spitzen in $\mathfrak{G}$, also ist $a = \bigvee_{x \in M} x$; das Supremum $\bigvee$ bezieht sich auf den Verband $\mathfrak{G}$; da jedoch $a \in G$ ist, so ist das auf den Unterverband G bezogene Supremum der Menge M notwendig gleich $\bigvee_{x \in M} x$; a ist nämlich das kleinste Element in $\mathfrak{G}$, das alle $x \in M$ umfasst; ist $b \in G$, $b \geqq x$ für alle $x \in M$, dann ist $b \geqq \bigvee_{x \in M} x$, also ist $b \geqq a$. Daher ist $a = \sup_{x \in M} x$ bezüglich G.

Satz 2. *Auf einer l-Gruppe $G \neq (0)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen.*

2. *In G gilt:*
   - a) *Jedes Element $a \in G$, $a > 0$, hat eine Spitze;*
   - b) *ist $x \geqq y > 0$ und x eine Spitze, so ist y eine Spitze;*
   - c) *ist y eine Spitze, $a \geqq y$, dann existiert eine Spitze des Elementes a, die y umfasst.*

3. *In G existiert ein in G vollständiges System je zwei disjunktiver einfach geordneter direkter Faktoren.*

4. *Jede von Null verschiedene Komponente in G enthält einen minimalen direkten Faktor in G.*

Anmerkung. *Ist die Bedingung 4 erfüllt, so ist G eine vollständig subdirekte Summe eines gewissen Systems minimaler direkter Faktoren in G.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Wir wollen $1 \Rightarrow 2$ beweisen. Ist G eine vollständig subdirekte Summe eines Systems $\{G_\nu\}$ einfach geordneter Gruppen, $0 < a \equiv \{..a_\nu..\} \in G$, dann gilt $a_\nu \geqq 0$ für alle ν und es existiert ein μ, so dass $a_\mu > 0$ ist. Dann ist $x \equiv \{..0, a_\mu, 0..\}$ nach Hilfssatz 20 (1) eine Spitze des Elementes a. Also ist der Teil a) der Bedingung 2 erfüllt. Ist x eine Spitze, dann hat es nach Hilfssatz 20 (1) die Form $\{..0, x_\mu, 0..\}$, wo $x_\mu > 0$ gilt. Ist $x \geqq y > 0$, $y \equiv \{..y_\nu..\}$, dann gilt $y_\nu = 0$ für $\nu \neq \mu$, $x_\mu \geqq y_\mu > 0$. Nach Hilfssatz 20 (1) ist y eine Spitze seiner selbst. So ist auch der Teil b) der Bedingung 2 bestätigt. Ist $y \equiv \{..0, y_\mu, 0..\}$ eine Spitze, $a \equiv \{..a_\nu..\} \geqq \{..0, y_\mu, 0..\}$, dann ist die Spitze $x \equiv \{..0, a_\mu, 0..\}$ offenbar eine Spitze von a und es gilt $x \geqq y$. Dadurch ist die Eigenschaft c) der Bedingung 2 bestätigt.

Wir beweisen $2 \Rightarrow 3$. In G sei die Bedingung 2 gültig. Zuerst beweisen wir folgende Hilfsbehauptungen:

(α) *Untereinander unvergleichbare Spitzen sind disjunktiv.*

(β) *Sind x, y Spitzen, $x \parallel y$, $z \geqq x \vee y$, dann ist z keine Spitze.*

(γ) *Zwei maximale Ketten von Spitzen haben kein Element gemeinsam.*[6])

(δ) *Für jede zwei verschiedenen maximalen Ketten H_μ, H_ν von Spitzen gilt $H_\mu \,\delta\, H_\nu$.*

Beweis. (α) x, y seien Spitzen, $x \parallel y$. Entgegen der Behauptung des Satzes setzen wir voraus, dass $x \wedge y > 0$ ist. Ist $[x - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) = 0$, dann gilt — da das Element x die einzige Spitze seiner selbst ist — $x = x \wedge y$, also ist $x \leqq y$ in Widerspruch mit der Voraussetzung. Also entweder ist $x \wedge y = 0$ und die Behauptung ist bewiesen oder es gilt $a = [x - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) > 0$. Analog ist $b = [y - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) > 0$. Es gilt $a \wedge b = [x - (x \wedge y)] \wedge \wedge [y - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) = [(x \wedge y) - (x \wedge y)] \wedge (x \wedge y) = 0$. Nach Voraussetzung b) der Bedingung 2 sind a, b Spitzen und weiter ist $a \,\delta\, b$. Nach Hilfssatz 19 sind die Elemente a, b Spitzen das Elementes $a \vee b$; dabei ist $a \neq a \vee b \neq b$, da $a \parallel b$ ist. Weiter ist $0 < a \vee b \leqq x \wedge y \leqq x$; also ist $a \vee b$ eine Spitze; das Element $a \vee b$ hat also nach Hilfssatz 18 eine einzige Spitze, und zwar das Element $a \vee b$, während vorhin die Spitzen a, b des Elementes $a \vee b$ bestimmt wurden Daraus folgt der Widerspruch. Also gilt $x \wedge y = 0$.

(β) $x \vee y$ sei gegen die Behauptung des Satzes eine Spitze; nach (α) ist $x \,\delta\, y$, also ist $x \wedge y = 0$; nach Hilfssatz 19 hat $x \vee y$ Spitzen x, y. Nach Hilfssatz 18 ist $x \vee y$ die einzige Spitze des Elementes $x \vee y$, also gilt $y = x \vee y = x$. Daher ist $x = y$, was wieder in Widerspruch ist. Also ist $x \vee y$ keine Spitze. Wenn z, für

[6]) Die Menge aller Ketten von Spitzen ist durch die mengen-theoretische Inklusion teilweise geordnet. Unter den maximalen Ketten von Spitzen versteht man maximale Elemente dieser teilweise geordneten Menge.

das $z \geqq x \vee y$ gilt, eine Spitze wäre, dann würde aus der Eigenschaft b) der Bedingung 2 hervorgehen, dass $x \vee y$ auch eine Spitze ist. Das ist wieder in Widerspruch und daher ist z keine Spitze.

(γ) H_μ, H_ν seien zwei verschiedene maximale Ketten von Spitzen und es sei $c \in H_\mu \cap H_\nu$. Dann folgt aus der Maximalität der Ketten H_μ, H_ν und aus ihrer Verschiedenheit die Existenz solcher Spitzen x, y, dass $x \parallel y$, $x \in H_\mu$, $y \in H_\nu$ gilt. Wenn nämlich jedes $y \in H_\nu$ vergleichbar mit allen $x \in H_\mu$ wäre, dann würde aus der Maximalität des H_μ $y \in H_\mu$, $H_\nu \subset H_\mu$ folgen. Aus der Maximalität des H_ν folgt dann $H_\mu = H_\nu$, was einen Widerspruch gibt. Es gilt entweder $x, y \geqq c$ oder $c \geqq x, y$. Wenn nämlich $x \geqq c \geqq y$ wäre, dann wäre $x \geqq y$, was einen Widerspruch mit der Voraussetzung $x \parallel y$ ergibt. Zu einem ähnlichen Widerspruch würden wir aus der Voraussetzung $x \leqq c \leqq y$ kommen.

Ist $x, y \geqq c$, dann ist $x \wedge y \geqq c$ (> 0); das ist aber in Widerspruch mit (α). Ist $c \geqq x, y$, dann ist $c \geqq x \vee y$; da jedoch c eine Spitze ist, so sind wir zu einem Widerspruch mit (β) gelangt. Also gilt $H_\mu \cap H_\nu = \emptyset$.

(δ) Wählen wir ein $x \in H_\mu$ und ein $y \in H_\nu$ ($H_\mu \neq H_\nu$). Dann ist $x \parallel y$. Ist nämlich umgekehrt z. B. $x \geqq y$, dann gilt $H_\varrho \neq H_\mu$ für eine beliebige maximale, die Punkte x und y enthaltende Kette H_ϱ von Spitzen (da $y \in H_\varrho$, $y \bar{\in} H_\mu$) und $x \in H_\varrho \cap H_\mu$, was wieder einen Widerspruch mit (γ) ergibt. Also ist für ein beliebiges $x \in H_\mu$ und ein beliebiges $y \in H_\nu$ ($H_\mu \neq H_\nu$) $x \parallel y$, demnach ist nach (α) $x \,\delta\, y$. Daraus folgt $H_\mu \,\delta\, H_\nu$.

Wir fahren im Beweise der Implikation $2 \Rightarrow 3$ fort. Wir bezeichnen mit G_ν die kleinste der die Menge H_ν enthaltenden Komponenten in G, d. h. $G_\nu = H_\nu''$. Es ist klar, dass $G_\nu \,\delta\, G_\mu$ für $\mu \neq \nu$ gilt. (Es gilt nämlich: $H_\mu' \supset H_\nu \Rightarrow G_\mu = H_\mu'' \subset H_\nu' \Rightarrow G_\mu \cap H_\nu'' = (0) \Rightarrow G_\mu \,\delta\, G_\nu$.)

Wir zeigen nun, dass $\bigsqcup G_\nu = G$ gilt. Ist $\bigsqcup G_\nu \neq G$, so existiert ein $b \neq 0$, so dass $b \,\delta\, G_\nu$ für alle ν gilt. Daraus $|b| \,\delta\, G_\nu$ für alle ν. Ist x eine Spitze von $|b|$, dann ist $|b| \geqq x > 0$. Aus der Konvexität des disjunktiven Komplementes $(\bigsqcup G_\nu)'$ der Komponente $\bigsqcup G_\nu$ folgt, dass $x \in (\bigsqcup G_\nu)'$ ist [weil $|b| \in (\bigsqcup G_\nu)'$ gilt]. Es gilt jedoch $x \in G_\nu$ für ein ν, also ist $x \in \bigsqcup G_\nu$. Daraus folgt $x \in (\bigsqcup G_\nu)' \cap (\bigsqcup G_\nu) = (0)$, also ist $x = 0$. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt, dass $\bigsqcup G_\nu = G$ ist.

Wir beweisen, dass jedes G_ν einfach geordnet ist. Umgekehrt sei irgendein G_ν nicht einfach geordnet. Gemäss Hilfssatz 11 existieren in G_ν disjunktive echte Komponenten K, L; wählen wir ein beliebiges a, $0 < a \in K$, und ein beliebiges b, $0 < b \in L$. Es gilt $a \,\delta\, b$, also ist $a \wedge b = 0$. Jede Spitze x des Elementes a liegt in G_ν, da $a \geqq x > 0$ und G_ν konvex ist. Also ist $x \in H_\nu$. Analog muss jede Spitze y des Elementes b in H_ν liegen. Also ist $x \geqq y$ oder $y \geqq x$. Es sei z. B. $x \geqq y$. Dann gilt $a \geqq x \geqq y > 0$, $b \geqq y \Rightarrow 0 = a \wedge b \geqq y > 0$, was einen Widerspruch ergibt. Also ist jedes G_ν einfach geordnet.

Es soll gezeigt werden, dass jedes G_ν ein direkter Faktor in G ist.

Wählen wir ein festes ν. Bezeichnen wir $G'_\nu = \bigsqcup_{\mu \neq \nu} G_\mu$. G_ν und G'_ν sind komplementäre Komponenten in G (da $\bigsqcup G_\nu = G$ ist). Wir wollen die folgenden Hilfssätze beweisen:

(ε) *Ist* $0 \leqq b \in G$, $c \in H_\nu$, $b \wedge c = 0$, *dann ist* $b \in G'_\nu$.

(ζ) *Ist* $0 < b \in G$, $c \in H_\nu$, $b \wedge c = t > 0$, *dann ist* $t \in H_\nu$.

Beweis (ε). Setzen wir voraus, dass das disjunktive Komplement Q der Menge $\{b\}$ die Komponente G_ν nicht umfasst. Dann ist $0 \neq c \in Q \cap G_\nu \neq G_\nu$. $Q \cap G_\nu$ (als der Durchschnitt zweier Komponenten in G) ist eine Komponente in G und also ist G_ν nach Hilfssatz 10 nicht einfach geordnet, was einen Widerspruch ergibt. Also enthält das disjunktive Komplement der Menge $\{b\}$ die Komponente G_ν und daraus folgt $b \in G'_\nu$.

(ζ) Es gilt: $c \geqq b \wedge c = t > 0$, c ist eine Spitze $\Rightarrow$ gemäss der in der Bedingung 2 aufgestellten Forderung b) ist t eine Spitze. Wenn $t \in H_\mu$ für $\mu \neq \nu$ wäre, dann wäre $t \wedge c = 0$, weil $t \in H_\mu$, $c \in H_\nu$, $H_\mu\ \delta\ H_\nu$ ist. Da $c \geqq t$ ist, so wäre $t = 0$, was einen Widerspruch gibt. Also ist $t \in H_\nu$. So sind beide Hilfssätze bewiesen.

Wählen wir ein beliebiges $a \in G$, $0 \leqq a$. Für ein $y \in H_\nu$ sei entweder (i) $a \wedge y = z > 0$ oder (ii) $a \wedge y = 0$. Fall (i): nach (ζ) gilt $z \in H_\nu$. Weiter ist $(a - z) \wedge (y - z) = 0$. Dabei gilt $y \geqq y - z \geqq 0$. Ist (i_1): $y - z > 0$, dann ist nach (ζ) $y - z \in H_\nu$ [in (ζ) setzen wir $c = y$, $b = y - z$]. Daraus und aus der Gleichung $(a - z) \wedge (y - z) = 0$ folgt nach (ε) $a - z \in G'_\nu$ [in (ε) setzen wir $a - z = b$, $y - z = c$]. Daraus folgt $a \in G'_\nu + z \subset G'_\nu + G_\nu = G_\nu + G'_\nu$. Ist ($\mathrm{i}_2$): $y - z = 0$, dann ist $y = z = a \wedge y$, also gilt $a \geqq y$. Nach der Voraussetzung c) der Bedingung 2 existiert in G eine solche Spitze x des Elementes a, dass $a \geqq x \geqq y$ ist. Wenn $x \in H_\mu$, $\mu \neq \nu$ wäre, dann müsste $y = x \wedge y = 0$ gelten [es gilt nämlich: $H_\mu\ \delta\ H_\nu$, $x \in H_\mu$, $y \in H_\nu \Rightarrow x \wedge y = 0$]. Das ist ein Widerspruch. Also ist $x \in H_\nu$. Weil x eine Spitze des Elementes a ist, so gilt $(a - x) \wedge x = 0$. Nach (ε) gilt $a - x \in G'_\nu$ [in (ε) setzen wir $a - x = b$, $x = c$], also gilt $a \in G'_\nu + x \subset G'_\nu + G_\nu = G_\nu + G'_\nu$.

Fall (ii): $a \wedge y = 0$. Nach (ε) gilt $a \in G'_\nu$ [in (ε) setzen wir $a = b$, $y = c$]. Daher ist $a \in G_\nu + G'_\nu$. Also gilt immer $a \in G_\nu + G'_\nu$. Ist $a \in G$, dann gilt $0 \leqq a_+ \in G$, $0 \leqq -a_- \in G$, also ist $a_+, a_- \in G_\nu + G'_\nu$ und daher $a = a_+ + a_- \in G_\nu + G'_\nu$. Schliesslich ist $G = G_\nu + G'_\nu$.

Daraus folgt, dass G_ν (und auch G'_ν) ein Normalteiler in G ist. Wie man leicht erkennt, ist G_ν ein direkter Faktor in G.

Dadurch ist $2 \Rightarrow 3$ bewiesen.

Wir beweisen $3 \Rightarrow 4$. $\{G_\nu\}$ sei ein in G vollständiges System von je zwei disjunktiven einfach geordneten, von Null verschiedenen direkten Faktoren. G_ν ist ein minimaler direkter Faktor in G, wie aus Hilfssatz 10 und daraus, dass ein direkter Faktor eine Komponente ist, folgt.

K sei nun eine beliebige von Null ve schiedene Komponente in G. Für ein beliebiges ν gilt $K \supset G_\nu$ oder $K \cap G_\nu = (0)$. Der verbleibende Fall, nämlich $G_\nu \supsetneqq K \cap G_\nu \neq (0)$, ist durch Hilfssatz 10 (beziehungsweise durch die Minimalität von G_ν) ausgeschlossen. Wenn für alle ν $K \cap G_\nu = (0)$ gelten würde, dann wäre $K \,\delta\, G_\nu$ für alle ν, also wäre $K \,\delta\, \bigsqcup G_\nu$ und daher $K \,\delta\, G$, $K = (0)$, was einen Widerspruch ergibt. Daraus folgt die Existenz eines solchen μ, dass $K \supset G_\mu$ gilt. Dadurch ist $3 \Rightarrow 4$ bewiesen.

Wir beweisen $4 \Rightarrow 1$. In G existiert eine von Null verschiedene Komponente, denn $G \neq (0)$. In dieser Komponente existiert ein minimaler direkter Faktor G_1 der l-Gruppe G. G_1 ist einfach geordnet; anders müsste darin eine Komponente L in G, $(0) \neq L \subsetneqq G_1$ (nach Hilfssatz 10) existieren und in derselben ein minimaler direkter Faktor in G, der selbstverständlich ein echter Teil von G_1 wäre. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt, dass G_1 einfach geordnet ist.

Konstruieren wir folgendermassen eine (eventuell transfinite) Folge von je zwei disjunktiven einfach geordneten direkten Faktoren G_ν in G: sind alle G_μ für $\mu < \nu$ schon konstruiert, dann ist das disjunktive Komplement $(\bigsqcup\limits_{\mu<\nu} G_\mu)'$ der Komponente $\bigsqcup\limits_{\mu<\nu} G_\mu$ entweder einfach geordnet oder es existiert darin ein in G minimaler direkter Faktor G_ν. Im ersten Fall bezeichnen wir mit $G_\nu = (\bigsqcup\limits_{\mu<\nu} G_\mu)'$ und dann ist $\bigsqcup\limits_{\mu\leqq\nu} G_\mu = G$, also ist $\{G_\mu\}$, $\mu \leqq \nu$, ein in G vollständiges System je zwei disjunktiver einfach geordneter direkter Faktoren. Im zweiten Fall existiert in $(\bigsqcup\limits_{\mu<\nu} G_\mu)'$ ein minimaler direkter Faktor G_ν in G und dieser ist nach dem vorher Gesagten einfach geordnet. Dadurch ist ein in G vollständiges System je zwei disjunktiver einfach geordneter Faktoren $\{G_\nu\}$ konstruiert.

Wir zeigen, dass G isomorph mit einer l-Untergruppe der vollständigen direkten Summe $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$ des Systems $\{G_\nu\}$ ist. Definieren wir folgendermassen eine Abbildung ϑ der l-Gruppe G in $\mathfrak{G}$: ist $x \in G$, x_ν die Projektion des Elementes x in G_ν, dann ist $x\vartheta = \{..x_\nu..\} \in \mathfrak{G}$, wo $\{..x_\nu..\}$ das System der Projektionen des Elementes x in die einzelnen G_ν ist. ϑ ist offenbar eine homomorphe Abbildung (der Gruppe und des Verbandes) G auf eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ (nach Hilfssatz 12). Wir zeigen, dass ϑ eineindeutig ist. Vor allem ist der Kern der Abbildung ϑ (d. h. die Menge aller Urbilder in G der Null in $\mathfrak{G}$) ein l-Ideal L in G. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in L_+$ und ein beliebiges Element $x_\nu \in G_\nu^+$. Dann ist $x_\nu \wedge a \in L \cap G_\nu$, weil L und G_ν konvex in G sind. Es ist also $(x_\nu \wedge a)\,\vartheta = \{..0..\}$. Aber das einzige Element aus G_ν, das in der Abbildung ϑ auf die Null in $\mathfrak{G}$ abgebildet wird, ist die Null. Also ist $x_\nu \wedge a = 0$ und daher gilt

$a \,\delta\, x_\nu$, $a \,\delta\, G_\nu^+$. Daraus folgt weiter $a \,\delta\, G_\nu$, $a \,\delta \bigsqcup G_\nu$ (siehe Seite 25). Also gilt $a \,\delta\, G$ und daher $a = 0$. Also ist ϑ eineindeutig. Die Isotonie der Abbildung ϑ^{-1} ist offensichtlich. Dadurch ist bewiesen, dass G mit einer l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ isomorph ist.

Wir beweisen noch, dass $G\vartheta \supset \overline{G}_\nu$ für alle ν gilt. Da je zwei Faktoren G_ν disjunktiv sind, ist $G_\nu\vartheta$ die Menge aller Elemente der Gestalt $\{..0, x_\nu, 0..\}$, wo $x_\nu \in G_\nu$ ist. Also ist $G\vartheta \supset G_\nu\vartheta = \overline{G}_\nu$.

Dadurch ist bewiesen, dass G eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist und der Beweis der Implikation $4 \Rightarrow 1$ ist erbracht. Beachten wir, dass hiedurch auch die Anmerkung zu Satz 2 bestätigt wird.

Satz 3. *Die folgenden Bedingungen sind auf einer vollständigen l-Gruppe G äquivalent:*

1. *Zu jedem $a \in G$, $a > 0$, existiert eine Spitze.*
2. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems vollständiger einfach geordneter Gruppen.*

Beweis. Es sei $G \neq (0)$. Wir wollen $1 \Rightarrow 2$ beweisen. K sei eine von Null verschiedene Komponente in G. Wählen wir $0 < a \in K$. Zu dem Elemente a existiert eine Spitze x, $a \geqq x > 0$. Daher ist $x \in K$. Die kleinste x enthaltende Komponente L in G ist ein Teil von K. L ist ein direkter Faktor in G (Hilfssatz 5). Wir zeigen, dass L einfach geordnet ist. Wäre L nicht einfach geordnet, so existierte in L ein komplementäres Paar von echten Komponenten A, B, die (nach Hilfssatz 8) Komponenten auch in G und daher auch (nach Hilfssatz 5) direkte Faktoren in G und also — da $L = A \sqcup B = A + B$ gilt — komplementäre direkte Faktoren in L wären. Es gilt $x \bar{\in} A \cup B$, weil L die kleinste x enthaltende Komponente in G ist. Nach Hilfssatz 12 gilt $x = x'' + x'$, wo $0 < x'' \in B$, $0 < x' \in A$, $x > x'$, $x'' \,\delta\, x'$ ist. Weil $(a - x) \,\delta\, x$ ist, gilt auch $(a - x) \,\delta\, x'$, also ist $(a - x + x'') \,\delta\, x'$ (nach Hilfssatz 2). Daraus folgt $a = a - x + x = (a - x + x'') + x'$, $(a - x') \,\delta\, x'$, $a \geqq x > x' > 0$. Daraus folgt aber, dass x keine Spitze des Elementes a ist, was einen Widerspruch ergibt. Also ist L einfach geordnet, und daher ist L ein minimaler direkter Faktor in G. Nach Satz 2 ist G eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$. Daraus folgt $G \supset \overline{G}_\nu$ für alle ν. Nach Hilfssatz 15 ist $\overline{G}_\nu$ eine Komponente in G, nach Hilfssatz 6 ist $\overline{G}_\nu$ eine regelmässige l-Untergruppe in G und also ist $\overline{G}_\nu$ eine vollständige einfach geordnete Gruppe.

Die Implikation $2 \Rightarrow 1$ folgt unmittelbar aus Satz 2.

Der Fall $G = (0)$ ist evident.

3

Nach Hilfssatz 14 ist jede Komponente der vollständigen direkten Summe $\mathfrak{G}$ einfach geordneter Gruppen ein direkter Faktor in $\mathfrak{G}$. In den vollständig subdirekten Summen muss diese Eigenschaft nicht erfüllt sein. Mit dieser Frage werden wir uns in diesem Absatz und in den Beispielen des folgenden Absatzes beschäftigen.

Definition. *Eine l-Untergruppe G der l-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist halbkonvex in $\mathfrak{G}$, wenn die Projektion der Gruppe G in den beliebigen direkten Faktor in $\mathfrak{G}$ ein Teil von G ist. (Bezüglich $\mathfrak{G}$ machen wir keine Voraussetzungen.)*

Satz 4. *Eine l-Gruppe G sei eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, $\nu \in \Lambda$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *G ist eine l-Gruppe, in welcher jede Komponente ein direkter Faktor ist.*
2. *G ist halbkonvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$.*
3. *Der Verband der direkten Faktoren in G ist ein abgeschlossener Unterverband in dem Verbande der Komponenten in G.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Nach Hilfssatz 14 kann man ein beliebiges komplementäres Komponentenpaar in $\mathfrak{G}$ in der Form von $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$, $M \subset \Lambda$, schreiben. Nach Hilfssatz 15 ist $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $J' = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ ein komplementäres Komponentenpaar in G und daher nach der Voraussetzung ein komplementäres Paar der direkten Faktoren in G. Wählen wir $x \equiv \{..x_\nu..\} \in G$. Die Projektion des Elementes x in den direkten Faktor $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ in $\mathfrak{G}$ ist offenbar ein Element $y \equiv \equiv \{..y_\nu..\}$, für das $y_\nu = x_\nu$ für $\nu \in M$ und $y_\nu = 0$ für $\nu \bar{\in} M$ ist. Die Projektion des Elementes x in den direkten Faktor $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ in $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit y'. Wie bekannt, gilt $x = y + y'$, und wenn $x = \bar{y} + \bar{y}'$ gilt, wo $\bar{y} \in \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $\bar{y}' \in \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ ist, dann gilt $y = \bar{y}$, $y' = \bar{y}'$.

Wir wollen $\bar{y}$ resp. $\bar{y}'$ die Projektion des Elementes x in den direkten Faktor J resp. J' in G bezeichnen. Es gilt $x = \bar{y} + \bar{y}'$, $\bar{y} \in G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$, $y' \in G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$. Daher ist $\bar{y} = y$, $\bar{y}' = y'$. Also ist $y \in G$. G ist also halbkonvex in $\mathfrak{G}$. Der Beweis $1 \Rightarrow 2$ ist erbracht.

$2 \Rightarrow 1$. G sei halbkonvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$. Eine beliebige Komponente in G ist von der Form $J = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ und ihr disjunktives Komplement in G ist $J' = = G \cap \overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$ (Hilfssatz 15). J und J' sind offenbar l-Ideale in G, $J \cap J' = (0)$. Wir zeigen noch, dass $J + J' = G$ gilt. Es sei $x \in G$; bezeichnen wir mit y resp. y' die Projektion (in $\mathfrak{G}$) des Elementes x in das $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \in M} G_\nu}$ resp. in das $\overline{\tilde{\sum}_{\nu \bar{\in} M} G_\nu}$. Es gilt

$x = y + y'$. Nach der Voraussetzung ist $y \in G$, $y' \in G$, also ist $y \in J$, $y' \in J'$ und $x = y + y'$. Daher ist $J + J' = G$. Also sind J und J' komplementäre direkte Faktoren in G.

$3 \Rightarrow 1$. Nehmen wir an, die Bedingung 3 sei erfüllt. Wir zeigen, dass jedes $\overline{G}_\nu$ ein direkter Faktor in G ist. Nach Hilfssatz 14 ist $\overline{G}_\nu$ für alle ν eine minimale Komponente in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$. Nach Hilfssatz 15 ist $G \cap \overline{G}_\nu = G_\nu$ (für alle ν) eine minimale Komponente in G. Nach Satz 2 (die Äquivalenz zwischen den Bedingungen 1 und 4) ist $\overline{G}_\nu$ für ein beliebiges ν ein direkter Faktor in G.

$L \neq (0)$ sei eine Komponente in G. Nach Hilfssatz 7 existiert in $\mathfrak{G}$ eine solche Komponente $\mathscr{L}$, dass $L = \mathscr{L} \cap G$ gilt. $\mathscr{L}$ ist nach Hilfssatz 14 von der Form $\mathscr{L} = \overline{\tilde{\sum\limits_{\mu \in M}} G_\mu}$, also ist $\mathscr{L} = \bigsqcup\limits_{\mu \in M} \overline{G}_\mu$. Daher gilt $L = G \cap \bigsqcup\limits_{\mu \in M} \overline{G}_\mu$. Bezeichnen wir $L_1 = \bigsqcup\limits_{\mu \in M}{}' G_\mu$. ($\bigsqcup$ resp. $\bigsqcup'$ bedeutet das Supremum in der Booleschen Algebra der Komponenten in $\mathfrak{G}$ resp. in G.) Wir beweisen, dass $L_1 = L$ ist. Nach Hilfssatz 7 ist $L_1 = G \cap \overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in N}} G_\nu}$, wo $N \subset A$ ist. Weil $L_1 \supset \overline{G}_\mu$ für $\mu \in M$ gilt, so ist $N \supset M$. Also ist $L_1 = G \cap \overline{\tilde{\sum\limits_{\nu \in N}} G_\nu} \supset G \cap \overline{\tilde{\sum\limits_{\mu \in M}} G_\mu} = L$. L ist weiter eine Komponente in G, die $\overline{G}_\mu$ für $\mu \in M$ enthält und L_1 die kleinste Komponente in G mit dieser Eigenschaft; also ist $L_1 \subset L$. Daher gilt $L = L_1 = \bigsqcup\limits_{\mu \in M}{}' G_\mu$.

L ist also das Supremum eines Systems von Komponenten in G und jede dieser Komponenten ist ein direkter Faktor in G; da der Unterverband der direkten Faktoren in G abgeschlossen in dem Verband von Komponenten in G ist, so ist L ein direkter Faktor in G. Dadurch ist $3 \Rightarrow 1$ bewiesen.

$1 \Rightarrow 3$. $\{L_\varrho\}$ sei ein System von direkten Faktoren in G. Dann ist $\bigsqcup' L_\varrho$ eine Komponente in G und also ein direkter Faktor in G. Daraus folgt 3.

Dadurch ist der Satz 4 bewiesen.

Anmerkung 1. *Die folgenden Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent*:

1. *G ist eine l-Gruppe, in welcher jede Komponente ein direkter Faktor ist.*
2. *Die Summe jedes komplementären Komponentenpaares in G ist gleich G.*
3. *Der Verband von Komponenten in G ist ein Unterverband des Verbandes der l-Ideale in G.*
4. *G ist halbkonvex in einer l-Gruppe, in welcher jede Komponente ein direkter Faktor ist.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Wenn 1 gilt, dann ist jedes komplementäre Komponentenpaar in G ein komplementäres Paar der direkten Faktoren in G. Daraus folgt 2.

$2 \Rightarrow 3$. In G sei 2 erfüllt. Aus der Vertauschbarkeit der komplementären Komponenten in G (Hilfssatz 3) folgt, dass jede Komponente in G ein l-Ideal in G ist. Also ist der Verband der Komponenten in G ein Teil des Verbandes der l-Ideale in G. J, K seien zwei beliebige Komponenten (und also l-Ideale) in G. Aus der Distributivität in dem Verbande der l-Ideale folgt $(J + K) \cap \cap (J' \cap K') = (J \cap J' \cap K') + (K \cap J' \cap K') = (0)$, $(J + K) + (J' \cap K') = = (J + K + J') \cap (J + K + K') = G$. Die Summe zweier Komponenten in G ist also ein direkter Faktor in G und daher eine Komponente; daraus folgt, dass der Verband der Komponenten ein Unterverband des Verbandes der l-Ideale ist.

$3 \Rightarrow 1$. Ist der Verband der Komponenten ein Unterverband des Verbandes der l-Ideale, dann ist die Summe zweier komplementären Komponenten gleich ihrem Supremum, also gleich G. Daraus folgt, dass jede Komponente in G ein direkter Faktor in G ist.

$1 \Rightarrow 4$. Ist die Bedingung 1 erfüllt, dann ist G halbkonvex in einer l-Gruppe verlangter Art, nämlich in G.

$4 \Rightarrow 1$. G sei halbkonvex in einer l-Gruppe $\mathfrak{G}$, in der jede Komponente ein direkter Faktor ist. L_1, L_2 sei ein komplementäres Komponentenpaar in G. Nach Hilfssatz 7 existiert ein komplementäres Komponentenpaar $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ in $\mathfrak{G}$, so dass $L_1 = \mathscr{L}_1 \cap G$, $L_2 = \mathscr{L}_2 \cap G$ gilt. $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_2$ sind nach der Voraussetzung komplementäre direkte Faktoren in $\mathfrak{G}$. Die Projektion G_i der l-Gruppe G in den direkten Faktor $\mathscr{L}_i$ ist ein Teil von $\mathscr{L}_i$ und nach der Voraussetzung (die Halbkonvexität) auch ein Teil von G, also $G_i \subset \mathscr{L}_i \cap G = L_i$. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in G$; dann ist $a = a_1 + a_2$, wo a_i die Projektion des Elementes a in den direkten Faktor $\mathscr{L}_i$ ist; also ist $a_i \in G_i \subset L_i$. Daher gilt $L_1 + L_2 = G$. Weil weiter $L_1 \cap L_2 = (0)$ ist und L_1, L_2 elementenweise vertauschbar sind (die Disjunktivität), sind L_1, L_2 direkte Faktoren in G.

Anmerkung 2. *Ist die l-Untergruppe G einer l-Gruppe $\mathfrak{G}$ konvex in $\mathfrak{G}$, dann ist sie halbkonvex in $\mathfrak{G}$. Die Umkehrung muss nicht gelten.*

Beweis. Eine l-Untergruppe G einer l-Gruppe $\mathfrak{G}$ sei konvex in $\mathfrak{G}$. K sei ein beliebiger direkter Faktor in $\mathfrak{G}$. Es sei $a \in G_+$; dann gilt für die Projektion x des Elementes a in K, $a \geqq x \geqq 0$ (nach Hilfssatz 12). Weil G konvex in $\mathfrak{G}$ ist, gilt $x \in G$. Ein beliebiges Element $b \in G$ ist die Differenz zweier positiver Elemente aus G, $b = b_+ - (-b_-)$ und für die Projektion y resp. y' resp. y'' des Elementes b resp. b_+ resp. $-b_-$ in K gilt (nach Hilfssatz 12) $y = y' - y''$; weil y', $y'' \in G$ gilt, so ist $y \in G$, also ist G halbkonvex in $\mathfrak{G}$.

Beispiel II, Absatz 4 beweist, dass die in der Anmerkung 2 aufgestellte Behauptung im Allgemeinen nicht umgekehrt werden kann.

Anmerkung 3. *Beachten wir die ersichtliche Tatsache, dass die vollständige direkte Summe $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$ resp. die direkte Summe $\mathfrak{H} = \sum G_\nu$ eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, eine halbkonvexe l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist.*

4

Dieser Abschnitt enthält eine Reihe von Beispielen der l-Gruppen, die einige den Bedingungen erfüllen, welche in den vorhergehenden Absätzen behandelt wurden.

Wir geben Beispiele einer vollständig subdirekten Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ an,

1. die konvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, aber weder gleich $\mathfrak{G}$ noch gleich $\mathfrak{H} = \dot{\sum} G_\nu$ ist (Beispiel I);
2. die halbkonvex in $\mathfrak{G}$, aber nicht konvex in $\mathfrak{G}$ ist (Beispiel II);
3. die in keiner l-Gruppe, deren jede Komponente ein direkter Faktor ist, und also nicht einmal in $\mathfrak{G}$ halbkonvex ist (Beispiel III);
4. die weder die vollständige direkte noch die direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist (Beispiel III).

Wir geben ein Beispiel einer l-Gruppe an, die eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist,

5. die keine vollständig subdirekte Summe dieses Systems einfach geordneter Gruppen ist, aber die eine vollständig subdirekte (durchaus eine direkte) Summe eines anderen Systems einfach geordneter Gruppen ist (Beispiel IV);
6. die aber keine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist (Beispiel V).

Weiter geben wir ein Beispiel einer l-Gruppe an,

7. die keine l-Untergruppe der vollständigen direkten Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist (Beispiel VI).

Es wird eine l-Gruppe angegeben,

8. die die Eigenschaften a), c) aus der Bedingung 2 des Satzes 2, aber nicht die Eigenschaft b) hat (Beispiel V);
9. die die Eigenschaften b), c) aus der Bedingung 2 des Satzes 2, aber nicht die Eigenschaft a) hat (Beispiel VII).

Die Frage, ob die Eigenschaft c) der Bedingung 2 der Satzes 2 eine Folgerung der vorhergenden ist oder nicht, bleibt offen.

Wir geben ein Beispiel einer subdirekten Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen an,

10. in welcher keine Spitze existiert (Beispiel VII).
11. Wir wollen darauf aufmerksam machen, dass auf Grund der Anmerkung 3 in den Beispielen I, II, III solche vollständig subdirekte Summen von Systemen einfach geordneten Gruppen $\{G_\nu\}$ konstruiert sind, die von $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$ und von $\mathfrak{H} = \dot{\sum} G_\nu$ verschieden sind.

1\. — Beispiel I. *Es existiert eine l-Gruppe, die eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist, die konvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, aber weder gleich $\mathfrak{G}$ noch gleich $\mathfrak{H} = \dot{\sum} G_\nu$ ist.*

Beweis. $\{G_\nu\}$ sei ein System einfach geordneter Gruppen, die Mächtigkeit der Menge von Indizes ν sei $\geqq \aleph_1$. Bezeichnen wir mit G die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, die höchstens $\aleph_0$ von Null verschiedene Komponenten haben. Man erkennt leicht, dass G eine konvexe l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist, dass $\mathfrak{G} \neq G \neq \neq \mathfrak{H}$ und dass G eine vollständig subdirekte Summe des Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist. Bis auf die Konvexität von G in $\mathfrak{G}$ sind alle Behauptungen evident. Die Konvexität: Es sei $a \in G$, $x \in \mathfrak{G}$, $|a| \geqq |x|$; dann gilt $|a| \geqq |x| \geqq x_+ \geqq 0$. Das Element $|a|$ hat höchstens $\aleph_0$ von Null verschiedene Komponenten; dann hat $|x|$ und auch x_+ dieselbe Eigenschaft. Also hat $x = x_+ + x_- = x_+ - |x| + x_+$ auch höchstens $\aleph_0$ von Null verschiedene Komponenten, daher ist $x \in G$. Dadurch ist die Konvexität bestätigt.

2. — Beispiel II. *Es existiert eine l-Gruppe, die eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist, die halbkonvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, aber nicht konvex in $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis. G_n sei (für ein beliebiges natürliches n) die additive einfach geordnete Gruppe der ganzen Zahlen. Bezeichnen wir $\mathfrak{G} = \tilde{\sum}_n G_n$. Wir definieren G als die Menge aller Elemente $x \in \mathfrak{G}$, die nur auf einer endlichen Zahl der Stellen ungerade Zahlen haben. Es ist klar, dass G eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist, da $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$, $x \vee 0 \in G$. Weil weiter $G \supset \bar{G}_n$ für alle n ist, so ist G eine vollständig subdirekte Summe des Systems $\{G_n\}$. Wir beweisen, dass G halbkonvex in $\mathfrak{G}$ ist. Wählen wir einen direkten Faktor in $\mathfrak{G}$, z. B. $J = \tilde{\sum}_{m \in M} G_m$ (wo M ein Teil der Menge der natürlichen Zahlen ist — siehe Hilfssatz 14). Die Projektion y eines beliebigen Elementes $x \in G$ in J hat einige der Komponenten mit den zugehörigen Komponenten des Elementes x gleich, die übrigbleibenden gleich Null. Also ist $y \in G$. Daher ist G halbkonvex in $\mathfrak{G}$. Wir zeigen noch, dass G nicht konvex in $\mathfrak{G}$ ist. Wählen wir ein Element a in $\mathfrak{G}$, das auf unendlich vielen Stellen ungerade Zahlen > 0 und auf den übrigen beliebige Zahlen $\geqq 0$ hat, $a \equiv \{..a_n..\}$. Dann gilt für das Element $b \equiv \{..a_n + e_n..\}$, wo $e_n = 0$ oder $= 1$ gewählt ist und zwar so, dass nur eine endliche Zahl von Komponenten ungerade Zahlen sind: $b \geqq a \geqq 0$, $b \in G$ und dagegen $a \bar{\in} G$. Also ist G nicht konvex in $\mathfrak{G}$.

3. — Beispiel III. *Es existiert eine l-Gruppe, die eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist, die aber in keiner l-Gruppe, von der jede Komponente ein direkter Faktor ist, und also auch nicht in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, halbkonvex ist.*

Beweis. $\{G_\nu\}$ sei ein System einfach geordneter Gruppen; die Mächtigkeit der Menge von Indizes ν sei $\aleph_1$. Es sei $\mathfrak{H} = \sum G_\nu$, $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, x ein solches Element aus $\mathfrak{G}$, deren alle Komponenten > 0 sind. Bezeichnen wir $G = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (kx + \mathfrak{H})$ (k durchläuft alle ganze Zahlen). Wir beweisen, dass G eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$ ist. Es seien $y, z \in G$; dann gilt $y = k_1 x + a$, $z = k_2 x + b$, wo k_1, k_2 ganze zahlen sind und $a, b \in \mathfrak{H}$. Es gilt $y - z = (k_1 - k_2)\, x + c$, wo $c \in \mathfrak{H}$ ist, weil $\mathfrak{H}$ offenbar ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist. Ist weiter $k_1 > 0$, dann hat das Element $y \vee 0$ bis auf eine endliche Zahl dieselben Komponenten wie das Element $k_1 x$, also ist $y \vee 0 = k_1 x + d$, wo $d \in \mathfrak{H}$; ist $k_1 \leqq 0$, dann ist offenbar $y \vee 0 \in \mathfrak{H}$. Also gilt $y \vee 0 \in G$ in beiden Fällen. Daher ist G eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$. G ist eine vollständig subdirekte Summe des Systems $\{G_\nu\}$, denn $G \supset \mathfrak{H}$. Beachten wir noch, dass in G kein Element existiert, das genau $\aleph_0$ von Null verschiedene Komponenten hat. Wir zeigen, dass G nicht halbkonvex in $\mathfrak{G}$ ist. M sei eine Menge von Indizes und sie habe die Mächtigkeit $\aleph_0$. Nach Hilfssatz 14 ist $J = \overline{\tilde{\sum_{\nu \in M}}} G_\nu$ ein direkter Faktor in $\mathfrak{G}$. Die Projektion x' des vorher definierten Elementes $x \in G$ in J hat $\aleph_0$ von Null verschiedene Komponenten, die übrigen sind gleich Null. Wie oben gesagt wurde, liegt kein solches Element in G. Also ist G nicht halbkonvex in $\mathfrak{G}$.

Die l-Gruppe G ist keine halbkonvexe l-Untergruppe in einer l-Gruppe, deren jede Komponente ein direkter Faktor ist. G sei umgekehrt eine halbkonvexe l-Untergruppe einer solchen l-Gruppe. Gemäss Anmerkung 1 ist G eine l-Gruppe, in welcher jede Komponente ein direkter Faktor ist. Weil sie eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist, so ist sie nach Satz 4 halbkonvex in $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, was einen Widerspruch ergibt. Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

4. — *Die l-Gruppe G Beispiel III ist weder die vollständige direkte noch die direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen.*

Beweis. $\{H_\mu\}$ sei ein System einfach geordneter Gruppen; es sei $\mathfrak{A} = \tilde{\sum} H_\mu$, $\mathfrak{B} = \sum H_\mu$. Es sei $H = \mathfrak{A}$ oder $H = \mathfrak{B}$. G sei isomorph mit H. In beiden Fällen ist H nach Anmerkung 3 konex in $\mathfrak{A}$, also ist sie nach Anmerkung 2 halbkonvex in $\mathfrak{A}$ und nach Satz 4 ist H eine solche l-Gruppe, in welcher jede Komponente eine direkter Faktor ist, was in Widerspruch mit der Anmerkung 1 (die Äquivalenz $1 \Leftrightarrow 4$) ist, wie gerade aus der vorhergehenden Behauptung 3 (Beispiel III) folgt.

5. — Beispiel IV. *Es existiert eine l-Gruppe, die eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist, die keine vollständig subdirekte Summe dieses Systems ist, die aber eine vollständig subdirekte (durchaus eine direkte) Summe eines anderen Systems einfach geordneter Gruppen ist.*

Beweis. Es sei G_k ($k = 1, 2, 3$) die additive einfach geordnete Gruppe der reellen Zahlen; $\mathfrak{G} = \sum G_k$. G sei die l-Untergruppe aller Elemente aus $\mathfrak{G}$ von der Form $\{x, y, y\}$, wo x, y beliebige reelle Zahlen sind. G ist offenbar eine subdirekte Summe des Systems $\{G_k\}$, $k = 1, 2, 3$, aber diese ist keine vollständig subdirekte Summe des Systems (weil $G \supset \bar{G}_k$ für $k = 2, 3$ nicht gilt). Sie ist aber isomorph mit der direkten Summe der einfach geordneten Gruppen G_1 und G_2.

6. — Beispiel V. *Es existiert eine l-Gruppe, die eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist, die aber keine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist.*

Beweis. G_k, $k = 1, 2, 3$, seien einfach geordnete Gruppen. Bilden wir die direkte Summe des Systems $\{G_k\}_1^3$ der Gruppen und definieren darauf eine teilweise Ordnung nach der Vorschrift: ist $a_k, b_k \in G_k$, dann ist $(a_1, a_2, a_3) \leqq \leqq (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1 < b_1$ oder $a_1 = b_1$, $a_i \leqq b_i$ $(i = 2, 3)$.

Die Gruppe mit dieser teilweisen Ordnung wird zu einer l-Gruppe (siehe [2] XIV § 1 Th. 1 und Th. 2):

$$(a_1, a_2, a_3) \geqq 0\,, \quad (b_1, b_2, b_3) \geqq 0 \Rightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \geqq 0\,;$$

ist nämlich $a_1 > 0$ oder $b_1 > 0$, dann ist $a_1 + b_1 > 0$. Ist $a_1 = 0 = b_1$, dann gilt $a_2 \geqq 0$, $a_3 \geqq 0$, $b_2 \geqq 0$, $b_3 \geqq 0$, also ist $a_1 + b_1 = 0$, $a_2 + b_2 \geqq 0$, $a_3 + + b_3 \geqq 0$, wie zu beweisen war. Weiter ist $(a_1, a_2, a_3) \geqq 0 \Rightarrow (c_1, c_2, c_3) + + (a_1, a_2, a_3) - (c_1, c_2, c_3) \geqq 0$; ist nämlich $c_1 + a_1 - c_1 > 0$, dann ist die Behauptung bewiesen; ist $c_1 + a_1 - c_1 = 0$, dann ist $a_1 = 0$, also gilt $a_2 \geqq 0$, $a_3 \geqq 0$; daher ist $c_2 + a_2 - c_2 \geqq 0$, $c_3 + a_3 - c_3 \geqq 0$. Daraus folgt, dass G eine teilweise geordnete Gruppe ist.

Man erkennt leicht, dass $(c_1, c_2, c_3) \vee (0, 0, 0) = (c_1, c_2, c_3)$ ist, für $c_1 > 0$, $= (0, c_2 \vee 0, c_3 \vee 0)$ ist, für $c_1 \leqq 0$.

Bezeichnen wir weiter mit $\overline{G}_2$ die Menge aller Elemente von der Form $(0, a_2, 0)$, wo $a_2 \in G$ ist; analog für $\overline{G}_3$. $\overline{G}_2$ und $\overline{G}_3$ bilden das einzige komplementäre Paar der echten Komponenten in G. $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ sind l-Ideale, sie sind aber keine direkten Faktoren, weil $\overline{G}_2 + \overline{G}_3 \neq G$ ist. In G sind also nur unechte direkte Faktoren.[7])

G ist also nach Hilfssatz 13 eine subdirekte Summe des Systems einfach geordneter Gruppen $\{G/\overline{G}_2, G/\overline{G}_3\}$; $\overline{G}_i$ $(i = 2, 3)$ ist nämlich ein solches l-Ideal in G, dass die l-Faktorgruppe $G/\overline{G}_i$ einfach geordnet ist und $\overline{G}_2 \cap \overline{G}_3 = (0)$ ist.

Wenn G eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen wäre, dann würde (nach Satz 2) ein minimaler direkter Faktor in G unter jeder von Null verschiedenen Komponente in G existieren, was auf G nicht der Fall ist.

Beweis, dass $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ zwei komplementäre Komponenten sind. Aus der Definition der Anordnung folgt:

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \begin{cases} (a_1, a_2, a_3), \text{ wenn } a_1 > 0\,, \\ (0, |a_2|, |a_3|), \text{ wenn } a_1 = 0\,, \\ (-a_1, -a_2, -a_3), \text{ wenn } a_1 < 0 \text{ ist}\,. \end{cases}$$

[7]) Sind alle G abelsche einfach geordnete Gruppen, so ist G auch abelsch. Die l-Gruppe G ist nicht vollständig auch in dem Falle, dass alle G_k vollständige einfach geordnete Gruppen sind. (Das kann leicht direkt bewiesen werden oder es ergibt sich daraus, dass auf einer vollständigen l-Gruppe jede Komponente eine direkter Faktor ist, was auf G nicht gilt.) In beiden Fällen ändert sich nichts auf dem Systeme der Komponenten und der direkten Faktoren in G.

Wählen wir $b_2 \in G_2$, $b_2 \neq 0$ fest; dann ist $|(0, b_2, 0)| = (0, |b_2|, 0)$, also gilt

$$|(a_1, a_2, a_3)| \wedge (0, |b_2|, 0) = \begin{cases} (0, |b_2|, 0), \text{ wenn } a_1 \gtrless 0\,, \\ (0, |a_2| \wedge |b_2|, 0), \text{ wenn } a_1 = 0\,. \end{cases}$$

Daher gilt $(a_1, a_2, a_3)\ \delta\ (0, b_2, 0)$ dann und nur dann, wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \in G$ beliebig sind, d. h. das disjunktive Komplement des Elementes $(0, b_2, 0)$ und auch der ganzen Menge $\overline{G}_2$ ist $\overline{G}_3$. Analog beweist man, dass das disjunktive Komplement der Menge $\overline{G}_3$ die Menge $\overline{G}_2$ ist. Also ist $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ ein komplementäres Komponentenpaar in G.

Beweis, dass $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ die zwei einzigen echten Komponenten in G sind. K sei eine beliebige echte Komponente in G. Dann ist $K \cap \overline{G}_2 \neq (0)$ oder $K \cap \overline{G}_3 \neq (0)$ (im umgekehrten Fall wäre $K\ \delta\ \overline{G}_2$, $K\ \delta\ \overline{G}_3$ und also $K\ \delta\ (\overline{G}_2 \sqcup \overline{G}_3)$; daher gilt $K\ \delta\ G$, d. h. $K = (0)$ — was einen Widerspruch ergibt). Es sei $(0) \neq K \cap \overline{G}_2 = K_1$; dann existiert ein $b_2 \in G_2$, so dass $0 \neq (0, b_2, 0) \in K_1$ ist. Wie gezeigt wurde, ist das disjunktive Komplement des Elementes $(0, b_2, 0)$ gleich $\overline{G}_3$; also ist $\overline{G}_2$ die kleinste das Element $(0, b_2, 0)$ enthaltende Komponente in G; also muss $K_1 \supset \overline{G}_2$ sein; daher gilt $K \cap \overline{G}_2 \supset \overline{G}_2$, also ist $K \supset \overline{G}_2$. Ist $K \cap \overline{G}_3 = (0)$, dann gilt $K\ \delta\ \overline{G}_3$ und also $K \subset \overline{G}_2$, d. h. $K = \overline{G}_2$. Ist $K \cap \overline{G}_3 \neq (0)$, dann — analog zu dem vorhergehenden — ist $K \supset \overline{G}_3$, also gilt $K \supset \overline{G}_2 \sqcup \overline{G}_3 = G$, was einen Widerspruch ergibt. Daraus folgt $K = \overline{G}_3$.

Wenn wir $K \cap \overline{G}_3 \neq (0)$ vorausgesetzt hätten, dann wäre $K = \overline{G}_3$. $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ sind also die einzigen echten Komponenten in G.

Wir beweisen, dass $G/\overline{G}_2$ einfach geordnet ist. Es sei $A \in G/\overline{G}_2$. Dann ist A die Menge der Elemente (a_1, a_2, a_3), wo a_2 ein beliebiges Element aus G_2 ist. Ist $a_1 > 0$, dann ist $(a_1, a_2, a_3) > 0$, also auch $A > \overline{G}_2$ ($\overline{G}_2$ ist die Null der l-Faktorgruppe $G/\overline{G}_2$). Ist $a_1 = 0$, $a_3 \geqq 0$, dann ist $(0, |a_2|, a_3) \geqq 0$, also auch $A \geqq \overline{G}_2$. Ist $a_1 = 0$, $a_3 < 0$, dann gilt $-(0, -|a_2|, a_3) = (0, |a_2|, -a_3) > 0$, also auch $-A > \overline{G}_2$. Ist $a_1 < 0$, dann gilt $-(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3) > 0$, also auch $-A > \overline{G}_2$. Ein beliebiges Element $A \in G/\overline{G}_2$ ist also stets vergleichbar mit der Null der l-Faktorgruppe $G/\overline{G}_2$. Analog beweist man, dass $G/\overline{G}_3$ einfach geordnet ist.

7. — Beispiel VI. *Es existiert eine l-Gruppe, die keine l-Untergruppe einer vollständigen direkten Summe von einem Systeme einfach geordneter Gruppen und also keine subdirekte Summe irgendeines Systems einfach geordneter Gruppen ist.*

Beweis. G sei die Gruppe, die durch drei Erzeugende a, b, c und durch die definierenden Relationen $a + b = b + a$, $a + c = c + b$, $b + c = c + a$ gegeben ist. Die Menge G_+ der positiven Elemente sei aus allen Elementen von der Form $ma + nb + pc$, wo $p > 0$, oder $p = 0$, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ ist, zusammengesetzt. G wird zu einer l-Gruppe. Diese l-Gruppe führt G. Birkhoff ([1] Ex. 9 Seite 303; siehe auch [9] Anm. 4) als Beispiel einer l-Gruppe ein, die eine Komponente enthält, welche kein l-Ideal ist. Das disjunktive Komplement des Elementes a ist nämlich kein Normalteiler, da $a \,\delta\, b$ ist; aber dabei ist $a \,\bar{\delta}\, (c + + b - c)$, denn $c + b - c = a \neq 0$.

Beweis, dass $a \,\delta\, b$ gilt. Es ist $a > 0$, $b > 0$; es sei $a \wedge b = ma + nb + pc$ ($\geqq 0$); da $ma + nb + pc \leqq a$ ist, gilt $p \leqq 0$; weil $a \wedge b \geqq 0$ ist, gilt $p \geqq 0$; daher gilt $p = 0$. Daraus folgt $(1 - m)\, a - nb \geqq 0$; also ist $m \leqq 1$, $n \leqq 0$. Analog folgt aus der Relation $ma + nb + pc \leqq b$: $n \leqq 1$, $m \leqq 0$. Also ist $p = 0$, $m \leqq 0$, $n \leqq 0$. Weil aber $a \wedge b \geqq 0$ gilt, ist $m \geqq 0$, $n \geqq 0$, also ist $m = 0$, $n = 0$. Daher folgt $a \wedge b = 0$. Also gilt $a \,\delta\, b$.

Wenn G eine l-Untergruppe der vollständigen direkten Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ wäre, $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, würde zu jeder Komponente K in G (nach Hilfssatz 7) eine Komponente $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}$ so existieren, dass $\mathfrak{K} \cap G = K$ gelten würde. Nach Hilfssatz 14 ist aber $\mathfrak{K}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$, so dass K ein l-Ideal in G sein muss, was einen Widerspruch ergibt.

8. — *Beispiel einer l-Gruppe, welche die Eigenschaften a), c) der Bedingung 2 des Satzes 2, aber nicht die Eigenschaft b) hat.*

Beweis. Eine solche l-Gruppe ist die l-Gruppe Beispiel V und die l-Gruppe Beispiel VI. Wir beweisen dies an Hand der ersten derselben. (Sie ist sogar eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen.) Das Element $(a_1, a_2, a_3) > 0$ hat im Falle $a_1 > 0$ eine Spitze (a_1, a_2, a_3); im Falle $a_1 = 0$ ist dasjenige der Elemente $(0, a_2, 0)$, $(0, 0, a_3)$, welches > 0 ist, eine Spitze von (a_1, a_2, a_3). (Es gilt $a_2 \geqq 0$, $a_3 \geqq 0$; dabei ist mindestens eine Ungleichung scharf.) Die Eigenschaft c) ist offenbar auch erfüllt. Nicht erfüllt ist die Eigenschaft b), denn unter dem Elemente (a_1, a_2, a_3) für $a_1 > 0$ — das eine Spitze ist — liegt ein beliebiges Element von der Form $(0, b_2, b_3)$, wo $b_2 > 0$, $b_3 > 0$ ist, welches keine Spitze ist.

Beweis der Behauptungen. Wir konstruieren die Menge aller Spitzen in G. Es sei

$$a \equiv (a_1, a_2, a_3) \geqq b \equiv (b_1, b_2, b_3) > 0\,, \tag{*}$$

$$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \wedge (b_1, b_2, b_3) \equiv (a - b) \wedge b = 0\,. \tag{**}$$

Aus der Ungleichung (*) folgt: $b_1 > 0$ oder $b_1 = 0$, $b_2 > 0$, $b_3 \geqq 0$ oder $b_1 = 0$, $b_2 \geqq 0$, $b_3 > 0$. Aus der Bedingung (**) folgt:

1. Ist $a_1 - b_1 > b_1$, dann ist $a - b > b$, also ist $b = 0$, was in Widerspruch mit (*) ist.

2. Ist $a_1 - b_1 < b_1$, dann ist $a - b < b$, also ist $0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3$; daher ist $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Aus der Relation $a_1 - b_1 < b_1$ folgt $0 < a_1$.

3. Ist $a_1 - b_1 = b_1$, dann ist $0 = b_1 = a_1 - b_1$, also ist $a_1 = b_1 = 0$ und weiter gilt $(a_2 - b_2) \wedge b_2 = 0$, $(a_3 - b_3) \wedge b_3 = 0$. Daraus folgt $a_2 = b_2$ oder $b_2 = 0$ und gleichzeitig $a_3 = b_3$ oder $b_3 = 0$.

Im Falle 3 treten also folgende Möglichkeiten ein: $a_1 = 0 = b_1$ und gleichzeitig eine der folgenden Eventualitäten:

a*) $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$,
b*) $b_2 = 0$, $a_3 = b_3$,
c*) $a_2 = b_2$, $b_3 = 0$,
d*) $b_2 = 0$, $b_3 = 0$; dieser letzte Fall widerspricht aber der Bedingung (*).

Es sei $a_1 > 0$. Dann tritt der Fall 2 ein; in diesem Fall ist a das einzige Element b, für das (*) und (**) gilt.

Es sei $a_1 = 0$. Dann tritt der Fall 3 ein. Tritt die Möglichkeit a*) ein, und ist $b_2 = 0$ oder $b_3 = 0$, so ist dieser Fall übereinstimmend mit dem b*) oder c*). Gesetzt, es würde die Eventualität a*) eintreten und dabei $a_2 = b_2 > 0$, $a_3 = b_3 > 0$ sein; dann wäre das Element $(0, a_2, a_3) = (0, b_2, b_3)$ kein minimales Element mit den Eigenschaften (*), (**), weil das Element $(0, 0, a_3)$ oder das Element $(0, a_2, 0)$ unter dem Elemente $(0, a_2, a_3)$ liegen würde und die Bedingungen (*), (**) erfüllt wären. Also kann das Element $(0, b_2, b_3)$ nur im Falle b*) oder c*) eine Spitze sein. Aber dann ist es offenbar eine Spitze des Elementes $(0, a_2, a_3)$. [Im Falle b*) ist $b_3 > 0$, im Falle c*) ist $b_2 > 0$.]

Die Menge aller Spitzen in G ist daher die Menge aller Elemente, für welche (a_1, a_2, a_3), $a_1 > 0$ oder $(0, b_2, 0)$, $b_2 > 0$ oder $(0, 0, b_3)$, $b_3 > 0$ gilt.

Es ist bewiesen, dass jedes Element $0 < a \in G$ eine Spitze hat; die Eigenschaft a) der Bedingung 2 Satz 2 ist erfüllt. Es soll die Eigenschaft c) bewiesen werden. Es sei $y \in G$ eine Spitze, es sei $a \geqq y$. Ist $a \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $a_1 > 0$, dann ist a eine Spitze des Elementes a, $a \geqq y$. Ist $a_1 = 0$, dann gilt für $y \equiv \equiv (y_1, y_2, y_3)$ $y_1 = 0$ und gleichzeitig $a_2 \geqq y_2 > 0$, $a_3 \geqq y_3 = 0$ oder $a_2 \geqq y_2 = = 0$, $a_3 \geqq y_3 > 0$. Dann ist das Element $b \equiv (0, a_2, 0)$ oder $c \equiv (0, 0, a_3)$ eine Spitze des Elementes a und dabei ist $b \geqq y$ oder $c \geqq y$. Die Eigenschaft c) ist bestätigt.

Die Eigenschaft b) der Bedingung 2 Satz 2 ist auf G nicht erfüllt.

Es sei nämlich $a \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $a_1 > 0$. Dann gilt für ein beliebiges Element $b \equiv (0, b_2, b_3)$, wo $b_2 > 0$, $b_3 > 0$: $a \geqq b > 0$; dabei ist a eine Spitze, doch b ist keine Spitze.

Analog ist die Situation auf der l-Gruppe Beispiel VI.

9. — Beispiel VII. *Es existiert eine l-Gruppe, die die Eigenschaften b), c) der Bedingung 2 des Satzes* 2, *aber nicht die Eigenschaft a) hat.*

Beweis. G sei die Menge aller reellen Funktionen auf dem Intervall $I = = (0, 1)$, die von links stetig auf I sind und von rechts mit Ausnahme von endlich vielen Punkten. Die Addition und die teilweise Anordnung in G ist auf natürliche Weise gegeben. G ist offenbar eine l-Gruppe. Kein Element in G hat eine Spitze, also gilt die Bedingung a) nicht; dann sind selbstverständlich die Eigenschaften b), c) erfüllt.

Es sei $f \in G$, $f > 0$. Wir zeigen, dass f keine Spitze in G hat. Für ein $g \in G$ sei $f \geqq g > 0$, $(f - g) \wedge g = 0$. N resp. Q sei die Menge aller $x \in I$, für die $g(x) = 0$ resp. $g(x)$ von rechts unstetig ist. $N \cup Q$ ist in I abgeschlossene Menge, also ist $R = I - (N \cup Q)$ in I offen. Es ist $R \neq \emptyset$. Im umgekehrten Fall wäre $I = N \cup Q$ und daher nur für eine endliche Anzahl von Punkten $g(x) \neq 0$. Da $g \neq 0$ gilt, so existiert ein $x_0 \in Q$, so dass $g(x_0) \neq 0$ ist und eine Umgebung U des Punktes x_0 so existiert, dass $g(x) = 0$ ist für alle $x \in U$, $x \neq x_0$. Das ist aber in Widerspruch mit der Stetigkeit von links in x_0 der Funktion $g(x)$. Also ist $R \neq \emptyset$. Es existiert daher eine absteigende Folge $\{S_n\}_1^\infty$ von links offener und von rechts abgeschlossener Intervalle, so dass $R \underset{\neq}{\supseteq} S_1 \underset{\neq}{\supseteq} S_2 \underset{\neq}{\supseteq} S_3 \underset{\neq}{\supseteq} \ldots \underset{\neq}{\supseteq} S_n \underset{\neq}{\supseteq} \ldots$ gilt. Definieren wir folgenderweise die Funktionen $g_n(x)$: $x \in S_n \Rightarrow g_n(x) = g(x)$; $x \bar{\in} S_n \Rightarrow g_n(x) = 0$. Dann ist offenbar $g_n \in G$, $f \geqq g > g_n > g_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und weiter $(f - g_n) \wedge g_n = 0$. Also hat f in G keine Spitze.

10. — *Es existiert eine l-Gruppe, die eine subdirekte Summe einfach geordneter Grupen ist und in der keine Spitze existiert.*

Beweis. Die l-Gruppe Beispiel VII hat diese Eigenschaft: Mit Rücksicht auf 9 bleibt zu beweisen, dass G eine subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen ist. Ordnen wir jeder Zahl $x \in (0, 1)$ die additive einfach geordnete Gruppe G_x reeller Zahlen zu. Dann ist G offenbar eine subdirekte Summe des Systems $\{G_x\}$, $x \in (0, 1)$, einfach geordneter Gruppen.

5

In diesem Absatz werden vollständige direkte und direkte Summen einfach geordneter Gruppen behandelt.

Satz 5. *Auf einer l-Gruppe G sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *G ist die vollständige direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$;*

2. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ und für jede unendliche Menge $\{x^\varrho\}$ je zwei disjunktiver positiver Elemente aus G existiert in G das Element $\bigvee x^\varrho$;*

3. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ und zu jeder nichtleeren Menge M je zweier disjunktiver Spitzen in G existiert ein Element in G, das die Menge aller seiner Spitzen gleich der Menge M hat.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Eine l-Gruppe G, die die vollständige direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ ist, ist offenbar auch eine vollständig subdirekte Summe dieses Systems. Wir zeigen, dass G die zweite Eigenschaft aus 2 erfüllt.

$\{x^\varrho\}$ sei ein System je zwei disjunktiver, positiver Elemente in G. Wählen wir ein $x^\varrho \in \{x^\varrho\}$. Dem Elemente x^ϱ ordnen wir folgendermassen den Teil A_ϱ der

Menge N der Indizes zu: $\nu \in A_\varrho \Leftrightarrow$ die ν-te Komponente des Elementes x^ϱ ist von Null verschieden.

Ist $x^\varrho, x^\sigma \in \{x^\varrho\}$, $x^\varrho \,\delta\, x^\sigma$, dann gilt $A_\varrho \cap A_\sigma = \emptyset$ (G_ν sind einfach geordnet). Daraus folgt, dass $x = \bigvee x^\varrho$ existiert (für $\nu \in A_\varrho$ ist die ν-te Komponente des Elementes x gleich der ν-ten Komponente des Elementes x^ϱ; ist $\nu \in N - \bigcup A_\varrho$, dann ist die ν-te Komponente des Elementes x gleich Null). Dadurch ist bewiesen, dass G die verlangte Eigenschaft erfüllt.

$2 \Rightarrow 3$. Es sei die Bedingung 2 erfüllt und $\{x^\varrho\}$ sei ein System je zwei disjunktiver Spitzen in G. Nach der Voraussetzung existiert in G das Element $x = \bigvee x^\varrho$. Nach Hilfssatz 19 ist die Menge aller Spitzen des Elementes x gleich der Menge $\{x^\varrho\}$.

$3 \Rightarrow 1$. G erfülle die Bedingung 3. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in \mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$, $a > 0$. Die Menge Q aller Spitzen in $\mathfrak{G}$ des Elementes a ist nach Hilfssatz 17 die Menge von je zwei disjunktiven Elementen und nach Hilfssatz 20 (3) ist Q ein Teil der Menge aller Spitzen in G. Also existiert nach der Voraussetzung ein Element b in G, für das die Menge Q die Menge aller seiner Spitzen in G ist. Wenn wir den Hilfssatz 20 (2) benützen, stellen wir fest, dass das Element $b \in \mathfrak{G}$ die Menge aller Spitzen in $\mathfrak{G}$ gleich Q hat. Aus Hilfssatz 20 (4) folgt dann $a = b \in G$. Also liegt in G ein beliebiges positives Element aus $\mathfrak{G}$. Ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$ ist aber die Differenz zweier positiver Elemente, also ist $\mathfrak{G} = G$. Der Beweis des Satzes 5 ist erbracht.

Satz 6. *Eine l-Gruppe ist dann und nur dann aie vollständige direkte Summe eines Systems vollständiger einfach geordneter Gruppen, wenn folgende Bedingungen gelten:*

a) *G ist eine vollständige l-Gruppe;*

b) *zu jedem $a \in G$, $a > 0$, existiert in G eine Spitze;*

c) *jede Menge von je zwei disjunktiven Spitzen ist in G beschränkt.*

Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen. G sei die vollständige direkte Summe eines Systems vollständiger einfach geordneter Gruppen; dann gilt offenbar a); die Gültigkeit von b) folgt aus Satz 2 und die Richtigkeit von c) ist durch Satz 5 und zwar durch die Implikation $1 \Rightarrow 3$ bestätigt.

Die Bedingung ist hinreichend. Nach Satz 3 ist G eine vollständig subdirekte Summe eines Systems vollständiger einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$. Zu jeder Menge Q je zwei disjunktiver Spitzen in G existiert das Supremum x in G. Nach Hilfssatz 20 (1) ist die Menge aller Spitzen des Elementes x gleich der Menge Q. Daher ist G nach Satz 5, Implikation $3 \Rightarrow 1$ die vollständige direkte Summe des Systems $\{G_\nu\}$ vollständiger einfach geordneter Gruppen.

Satz 7. *Auf einer l-Gruppe G sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *G ist die direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$.*

2. *Die Vereinigung einer beliebigen Kette von Komponenten in G ist ein direkter Faktor in G.*

3. *Die Summe eines beliebigen Systems von Komponenten in G ist eine Komponente in G.*

4. *Der Verband der Komponenten in G ist ein abgeschlossencr Unterverband des Verbandes von l-Idealen in G.*

5. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems $\{G_\nu\}$ einfach geordneter Gruppen und für keine unendliche Menge $\{x^\varrho\}$ je zwei disjunktiver positiver Elemente existiert in G das Element $\bigvee x^\varrho$.*

6. *G ist eine vollständig subdirekte Summe eines Systems $\{G_\nu\}$ einfach geordneter Gruppen und jedes Element (> 0) aus G hat in G nur endlich viele Spitzen.*

Beweis. Die Äquivalenz der Bedingungen 1, 2 und 3 wurde im Satz 2 aus [9] bewiesen.

$3 \Rightarrow 4$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{J}$) den Verband von Komponenten (von l-Idealen) in G. Gilt 3 in G, dann ist nach Anmerkung 1 ($2 \Rightarrow 3$) $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{J}$. Ist $\{K_\mu\}$ ein beliebiges System von Komponenten in G, dann folgt aus der Eigenschaft 3 $\bigsqcup K_\mu = \sum K_\mu$, so dass das Supremum des Systems $\{K_\mu\}$ dasselbe in dem Verbande $\mathfrak{K}$ wie im Verbande $\mathfrak{J}$ ist. Dadurch ist $3 \Rightarrow 4$ bewiesen.

$4 \Rightarrow 3$. Hat G die Eigenschaft 4, dann ist die Summe von einem beliebigen System der Komponenten in G gleich dem Supremum dieses Systems (in dem Verbande $\mathfrak{K}$), also ist es eine Komponente in G. Daraus folgt 3.

$5 \Rightarrow 1$. Eine l-Gruppe G sei eine vollständig subdirekte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ und für keine unendliche Menge je zwei disjunktiver positiver Elemente in G existiere das Supremum dieser Menge. Dann ist $G \supset \overline{G}_\nu$ für alle ν, also gilt $G \supset \dot{\sum} G_\nu$. Wenn in G ein Element $x = \{..x_\nu..\} \in \tilde{\sum} G_\nu = \mathfrak{G}$ existieren würde, das unendlich viele Komponenten $\neq 0$ hätte, dann wäre auch $|x| \in G$ und $|x|$ hätte unendlich viele von Null verschiedene Komponenten. Zu jedem ν, für das $x_\nu \neq 0$ ist, konstruieren wir das Element $x^\nu = \{..0, |x_\nu|, 0..\} \in \overline{G}_\nu \subset G$ (dessen ν-te Komponente gleich der ν-ten Komponente des Elementes $|x|$ ist und auf dessen übrigen Stellen lauter Nullen stehen). Wir bekommen eine unendliche Menge $\{x^\nu\}$ von je zwei disjunktiven Spitzen in G des Elementes $|x|$, für die nach Hilfssatz 20(4) $|x| = \bigvee x^\nu$ gilt. Das ist aber in Widerspruch mit der Voraussetzung. Also ist $G = \dot{\sum} G_\nu$. Daraus folgt $5 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 6$. G sei die direkte Summe eines Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$, $G = \dot{\sum} G_\nu$. Dann ist G eine vollständig subdirekte Summe des Systems $\{G_\nu\}$. Jedes Element > 0 aus G hat nur eine endliche Zahl der von Null verschiedenen Komponenten, also hat es nach Hilfssatz 20 (1) nur eine endliche Anzahl von Spitzen. Daher ist $1 \Rightarrow 6$ bewiesen.

$6 \Rightarrow 5$. $\{y^\varrho\}$ sei eine unendliche Menge von je zwei disjunktiven positiven Elementen in G, für die $\bigvee y^\varrho$ existiert. Bezeichnen wir mit Y_ϱ die Menge aller

Spitzen des Elementes y^ϱ. Nach Hilfssatz 20(4) ist $y^\varrho = \bigvee_{y \in Y_\varrho} y$ und nach Hilfssatz 17 ist Y_ϱ die Menge je zwei disjunktiver Elemente. Weil $y^\varrho \, \delta \, y^\sigma$ für $\varrho \neq \sigma$ gilt, ist jede Spitze des Elementes y^ϱ disjunktiv mit jeder Spitze des Elementes y^σ (für die Spitze a^ϱ resp. a^σ des Elementes y^ϱ resp. y^σ gilt $y^\varrho \geqq a^\varrho > 0$ resp. $y^\sigma \geqq a^\sigma > 0$, also ist $y^\varrho \wedge y^\sigma = 0 \Rightarrow a^\varrho \wedge a^\sigma = 0$). Daraus folgt, dass $Y = \bigcup Y_\varrho$ eine unendliche Menge von je zwei disjunktiven Spitzen in G ist und es gilt $x = \bigvee_\varrho \bigvee_{y \in Y_\varrho} y = \bigvee_{y \in Y} y$. Nach Hilfssatz 19 ist Y die Menge aller Spitzen des Elementes $x \in G$. Dieser Widerspruch mit der Bedingung 6 beweist, dass 5 in G erfüllt ist.

Anmerkung 4. Die Forderung der Abgeschlossenheit des Unterverbandes in der Bedingung 4 Satz 7 ist wesentlich. Als Beispiel führen wir die vollständige direkte Summe $G = \tilde{\sum} G_\nu$ eines unendlichen Systems einfach geordneter Gruppen $\{G_\nu\}$ an. Das l-Ideal $\overline{G}_\nu$ in G ist nach Hilfssatz 14 eine Komponente in G und das System $\{\overline{G}_\nu\}$ der Komponenten ist vollständig in G. Die Summe dieses Systems von Komponenten ist offenbar nicht gleich G, also ist die Bedingung 4 in G nicht erfüllt. In der l-Gruppe G ist aber jede Komponente ein direkter Faktor (siehe Hilfssatz 14) und also ist nach Anmerkung 1 der Verband der Komponenten in G ein Unterverband des Verbandes von l-Idealen in G.

Satz 8. *Folgende Bedingungen sind auf einer l-Gruppe G äquivalent:*

1. *G ist die direkte Summe eines Systems vollständiger einfach geordneter Gruppen;*
2. a) *G ist eine vollständige l-Gruppe;*
   b) *zu jedem $a \in G$, $a > 0$, existiert eine Spitze in G;*
   c) *jede unendliche Menge je zwei disjunktiver Spitzen ist unbeschränkt.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Offenbar gilt $1 \Rightarrow 2$a). Nach Satz 2 gilt auch 2b). Wenn $\{x^\nu\}$ eine beschränkte unendliche Menge je zwei disjunktiver Spitzen gegen die Behauptung 2c) wäre, dann wäre $\bigvee x^\nu$ ein solches Element in G, das unendlich viele von Null verschiedene Komponenten hätte. Aus diesem Widerspruch folgt 2c).

$2 \Rightarrow 1$. Aus Satz 3 folgt, dass G eine vollständig subdirekte Summe vollständiger einfach geordneter Gruppen ist. Aus 2c) folgt, dass jedes Element > 0 nur endlich viele Spitzen hat. Also erfüllt G die Bedingung 6 des Satzes 7. Daraus folgt $2 \Rightarrow 1$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff:* Lattice ordered groups, Annals of Math. *43* (1942), 298—331.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, rev. ed., New York, 1948.

[3] *G. Birkhoff:* Subdirect unions in universal algebra, Bull. Am. Math. Soc. *50* (1944), 764—768.

[4] *A. H. Clifford:* Partially ordered abelian groups, Annals Math. *41* (1940), 465—475.

[5] *K. Iwasawa:* On the structure of conditionally complete lattice-groups, Jap. J. Math. *18* (1943), 777—789.

[6] *Л. В. Канторович, В. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГТТИ, Москва, 1950.

[7] *Л. В. Канторович, В. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, Успехи мат. наук VI, *3* (1951), 31—98.

[8] *P. Lorenzen:* Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, Math. Zeitschr. *45* (1939), 523—553.

[9] *Ф. Шик:* К теории структурно упорядоченных групп, Чехосл. мат. журнал *6* (*81*), (1956), 1—25.

[10] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Мат. сборник *20* (1947), 145—178.

Резюме

О СУММАХ ПРОСТО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ФРАНТИШЕК ШИК (František Šik), Брно

(Поступило в редакцию 9/VI 1956 г.)

В работе исследуются прежде всего необходимые и достаточные условия для того, чтобы l-группа G была суммой некоторого рода системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$. Разбираются следующие типы сумм: прямая, полная прямая и вполне полупрямая (первый и второй из этих типов мы обозначаем, соответственно, через $\dot{\sum} G_\nu$ и $\tilde{\sum} G_\nu$; их элементы обозначаем через $\{\ldots, x_\nu, \ldots\}$, где $x_\nu \in G_\nu$). Первые два понятия приняты в литературе. Вполне полупрямая сумма системы G есть такая полупрямая сумма этой системы, для которой $G \supset \overline{G}_\nu$ для всех ν, где $\overline{G}_\nu$ — множество всех элементов вида $\{\ldots, 0, x_\nu, 0, \ldots\}$, все составляющие которых, за исключением ν-й, равны нулю.

Два элемента $x, y \in G$ дизъюнктны, $x \,\delta\, y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Множества $A, B \subset G$ называются дизъюнктными, если для любого $x \in A$ и для любого $y \in B$ $x \,\delta\, y$. Обозначение: $A \,\delta\, B$. Множество A называется компонентой, если существует множество $B \subset G$ такое, что A является множеством всех элементов из G, дизъюнктных с каждым элементом множества B. Система всех компонент в G образует полную алгебру Буля, в которой нижняя грань $\bigwedge K_\nu$ системы компонент $\{K_\nu\}$ представляет собой пересечение системы, а G является наибольшим элементом этой булевой алгебры. Система компонент $\{K_\nu\}$ называется полной в G, если $\bigvee K_\nu = G$.

Элемент x l-группы G назовем острием элемента a, $0 < a \in G$, если x — минимальный элемент в G со свойством $a \geqq x > 0$, $(a - x)\, \delta\, x$.

Теорема 1. *l-группа является просто упорядоченной в том и только в том случае, если каждый ее элемент > 0 есть острие.*

Теорема 2. *На l-группе G следующие условия являются эквивалентными:*

(1) *G есть вполне полупрямая сумма системы просто упорядоченных групп;*

(2) *в G имеет место следующее:*

а) *каждый элемент $a \in G$, $a > 0$, имеет острие;*

б) *если $x \geqq y > 0$ и если x — острие, то и y — острие;*

в) *если y — острие, $a \geqq y$, то над y существует острие элемента a.*

(3) *В G существует система попарно дизъюнктных просто упорядоченных прямых факторов, полная в G.*

(4) *Каждая ненулевая компонента содержит минимальный прямой фактор в G.*

l-подгруппа H l-группы G называется полувыпуклой в G, если проекция группы H в произвольный прямой фактор в G является частью H.

Теорема 4. *Пусть l-группа G — вполне полупрямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$. Следующие условия на G эквивалентны:*

(1) *Каждая компонента в G является прямым фактором в G.*

(2) *G полувыпукла в $\mathfrak{G} = \tilde{\sum} G_\nu$.*

(3) *Структура прямых факторов в G является замкнутой подструктурой в структуре компонент в G.*

Теорема 5. *На l-группе G следующие условия являются эквивалентными:*

(1) *G — полная прямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$;*

(2) *G — вполне полупрямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$, и для любого бесконечного множества $\{x^\varrho\}$ попарно дизъюнктных положительных элементов из G существует в G выражение $\bigvee x^\varrho$;*

(3) *G — вполне подпрямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$ и для каждого непустого множества попарно дизъюнктных острий, в G существует элемент, для которого это множество является системой всех его острий.*

Теорема 7. *На l-группе G следующие условия являются эквивалентными:*

(1) *G — прямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$;*

(2) *Соединение любой цепи компонент в G является прямым фактором в G;*

(3) *Сумма любой системы компонент в G является компонентой в G;*

(4) *Структура компонент в G является замкнутой подструктурой в структуре l-идеалов в G;*

(5) *G — вполне полупрямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$, и ни для какого бесконечного множества $\{x_\nu^0\}$ попарно дизъюнктных положительных элементов из G, не существует в G выражения $\bigvee x_\nu$;*

(6) *G — вполне полупрямая сумма системы просто упорядоченных групп $\{G_\nu\}$, и каждый элемент > 0 из G обладает конечным количеством острий.*

В параграфе 4 приводится ряд примеров l-групп, которые подтверждают или опровергают возможность соединения различных свойств на одной и той же l-группе, а именно, свойств, связанных с понятиями выпуклости, полувыпуклости, острия и полупрямой суммы.