Jaroslav Kurzweil; Zdeněk Vorel

О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 4, 568–583

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100268

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ и ЗДЕНЕК ВОРЕЛ (Jaroslav Kurzweil, Zdeněk Vorel), Прага.

(Поступило в редакцию 22/XII 1956 г.)

В предлагаемой работе обобщено утверждение, доказанное М. А. Красносельским и С. Г. Крейном.

1. Будем изучать дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, \lambda)\,, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_m$, $X = (X_1, \ldots, X_m) \in E_m$. Пусть выполняются следующие условия:

А. Функция $X(t, x, \lambda)$ определена для $x \in D$, где D — открытое подмножество пространства E_m, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — множество чисел, содержащее предельную точку λ_0. Для $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$ функция $X(t, x, \lambda)$ является измеримой в t и, кроме того, существует функция $m(t, \lambda)$, интегрируемая по Лебегу на $[0, T]$, $\|X(t, x, \lambda)\| \leqq m(t, \lambda)$ для $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times D \times \Lambda$. Для $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$ функция $X(t, x, \lambda)$ непрерывна по x. Следовательно, при постоянном λ выполнены условия Каратеодори, гарантирующие существование решения уравнения (1).[1])

Б. Существует неубывающая функция $\psi(\delta)$, определенная для $0 < \delta \leqq d$, $d > 0$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \psi(\delta) = 0$, и интегрируемая по Лебегу функция $\chi(t) \geqq 1$, $\int_0^T \chi(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ так, что $\|X(t, x_1, \lambda) - X(t, x_2, \lambda)\| \leqq \psi(\|x_1 - x_2\|)\,\chi(t)$ для $x_1, x_2 \in D$, $\|x_1 - x_2\| \leqq d$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$.

В. Существует решение $x(t, \lambda_0)$ уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$ определенное для $t \in [0, T]$, и справедливо утверждение: если функция $v(t)$ является решением уравнения (1) для $\lambda = \lambda_0$ на интервале $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, $v(0) = x(0, \lambda_0)$, то $v(t) = x(t, \lambda_0)$ для $t \in [0, T_1]$.

[1]) См. [3], гл. VIII, § 8 или [4], гл. 2, отдел 1.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t X(\tau, x, \lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t X(\tau, x, \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

равномерно относительно t, x. *Тогда к каждому* $\eta > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *так, что для каждого решения* $x(t, \lambda)$ *уравнения* (1), *определенного на* $[0, T]$ *и удовлетворяющего условиям* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x(0, \lambda) - x(0, \lambda_0)\| < \delta$, *справедливо неравенство* $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \eta$ *для* $t \in [0, T]$.[2])

Аналогичную теорему доказали Красносельский и Крейн в работе [1]. Они не ставили того условия, что сходимость в (2) является равномерной, но предполагали, что $X(t, x, \lambda)$ является для $\lambda \in \Lambda$, $t \in [0, T]$ системой равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций переменного x и что открытое множество D является ограниченным. Можно легко проверить, что теорема 1 обобщает результат Красносельского и Крейна. Заметим еще, что теорема 1 послужила толчком к изучению непрерывной зависимости решения от параметра с другой точки зрения, что и проводится в работе [2].

В леммах 1—3 предполагается, что выполнено (2).

Лемма 1. *Пусть* $\tilde{x}(t)$ — *кусочно-постоянная функция, определенная на инретвале* $[0, T]$, $\tilde{x}(t) = c_i \in D$ *для* $\tau_{i-1} \leqq t < \tau_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, $x(T) = c_k \in D$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{3}$$

равномерно относительно t.

Доказательство. Очевидно $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\tau_{i-1}}^t X(\tau, c_i, \lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_{i-1}}^t X(\tau, c_i, \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau$ равномерно для $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, откуда непосредственно вытекает (3).

Лемма 2. *Пусть* $y(t, \lambda)$ — *система непрерывных функций переменного* t, $y(t, \lambda) \in D$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\max_{0\leqq t\leqq T}\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| = 0\,.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t X(\tau, y(\tau, \lambda)\, \lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

равномерно для $t \in [0, T]$.

---

[2]) Предположение, что Λ — числовое множество, не является существенным; Λ может быть произвольным множеством. В этом случае мы предположили бы, что на множестве Λ определена функция переменного λ, которую обозначим символом $|\lambda - \lambda_0|$, причем $|\lambda_0 - \lambda_0| = 0$, $|\lambda - \lambda_0| > 0$ при $\lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda$. Например, $\lambda_n \to \lambda_0$, при $n \to \infty$ значит, что последовательность чисел $|\lambda_n - \lambda_0|$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство. К любому $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что $\psi(\delta) \cdot \int_0^T \chi(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{6}$. Пусть $\tilde{x}(t)$ означает кусочно-постоянную функцию, для которой

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{x}(t) - y(t, \lambda_0)\| < \delta .$$

Пусть $U(\lambda_0)$ — окрестность точки λ_0 такая, что для $\lambda \in U(\lambda_0)$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \delta ,$$

$$\|\int_0^t [X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda) - X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda_0)]\,\mathrm{d}\tau\| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{4}$$

Из условий леммы 2 и из леммы 1 следует, что окрестность $U(\lambda_0)$ существует. Для $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливы неравенства:

$$\int_0^t \|X(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda) - X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda\|\,\mathrm{d}\tau \leqq \psi(\delta) \int_0^T \chi(t)\,\mathrm{d}\tau < \frac{\varepsilon}{6} ,$$

$$\int_0^t \|X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda) - X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda)\|\,\mathrm{d}\tau \leqq \psi(\delta) \int_0^T \chi(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{6} ,$$

$$\int_0^t \|X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda_0) - X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\|\,\mathrm{d}\tau \leqq \psi(\delta) \int_0^T \chi(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{6} .$$

Отсюда и из (4) получаем

$$\|\int_0^t X(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau\| < \varepsilon .$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\lambda_n \to \lambda_0$ для $n \to \infty$, $\lambda_n \in \Lambda$ и пусть функции $x(t, \lambda_n)$ являются решениями уравнения* (1), *определенными на* $[0, T_n]$, $0 < T_n \leqq T$, $\|x(0, \lambda_n)\| < K$. *Тогда $x(t, \lambda_n)$ есть последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций.*

Доказательство. Для $t_1, t_2 \in [0, T_n]$, $t_1 < t_2$

$$x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) = \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, x(\tau, \lambda_n), \lambda_n)\,\mathrm{d}\tau .$$

Отсюда

$$x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) = \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n)\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \{X(\tau, x(\tau, \lambda_n), \lambda_n) - X(\tau, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n)\}\,\mathrm{d}\tau ,$$

$$\|x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\| \leqq \|\int_{t_1}^{t_2} X(\tau, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n)\,\mathrm{d}\tau\| +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \|X(\tau, x(\tau, \lambda_n), \lambda_n) - X(\tau, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n)\|\,\mathrm{d}\tau . \tag{5}$$

Ввиду (2) существует неубывающая функция $A(\delta)$, определенная для достаточно малых положительных δ, $\lim_{\delta\to 0} A(\delta) = 0$, такая, что

$$\int_{t_1}^{t_2} X(\tau, u, \lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, u, \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau + R(t_1, t_2, u, \lambda)\,,$$
$$u \in D\,, \quad \|R\| \leqq A(|\lambda - \lambda_0|)\,.$$

Потому что $\|X(t, u, \lambda_0)\| \leqq m(t, \lambda_0)$, будет также $\int_{t_1}^{t_2} \|X(t, u, \lambda_0)\|\,\mathrm{d}t \leqq c(t_2 - t_1)$ где $c(\delta)$ — неубывающая при $\delta > 0$ функция, $\lim_{\delta\to 0} c(\delta) = 0$. Отсюда получаем

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2} X(\tau, u, \lambda)\,\mathrm{d}\tau\right\| \leqq A(|\lambda - \lambda_0|) + c(t_2 - t_1)\,. \tag{6}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqq d$. Нам надо доказать, что существует $N(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ так, что $t_1, t_2 \in [0, T_n]$, $0 < t_2 - t_1 < \delta(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$ (7)
влечет за собой $\|x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\| < \varepsilon$.

Возьмем такое N, чтобы для $n > N$ было

$$A(|\lambda_n - \lambda_0|) < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, далее, $\delta > 0$ такое, что (8)

$$c(\delta) < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \nu(\delta)\,\psi(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

где $\nu(\delta)$ — неубывающая функция, $\lim_{\delta\to 0} \nu(\delta) = 0$, $\nu(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) \geqq \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \chi(t)\,\mathrm{d}t$, для $0 \leqq \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \leqq T$.

Предположим, что справедливо (7) и что $\|x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\| \geqq \varepsilon$; это приведет нас к противоречию. Из непрерывности вытекает, что существует t_3 $(t_1 < t_3 \leqq t_2)$ такое, что $\|x(t_3, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\| = \varepsilon$, но $\|x(\tau, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\| < \varepsilon$ для $t_1 \leqq \tau < t_3$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_3} \|X(\tau, x(\tau, \lambda_n), \lambda_n) - X(\tau, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n)\|\,\mathrm{d}\tau \leqq$$
$$\leqq \int_{t_1}^{t_3} \chi(t)\,\psi(\|x(\tau, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n)\|\,\mathrm{d}\tau \leqq \psi(\varepsilon)\,\nu(\delta)\,. \tag{9}$$

Неравенства (5) и (6), где вместо t_2 следует писать t_3, вместе с неравенствами (8), (9), ведут к противоречию:

$$\varepsilon \leqq A(|\lambda_n - \lambda_0|) + c(\delta) + \psi(\varepsilon)\,\nu(\delta) < \varepsilon\,.$$

Этим доказано, что функции $x(t, \lambda_n)$ равностепенно непрерывны. Равномерная ограниченность функций $x(t, \lambda_n)$ выводится легко из равностепенной непрерывности.

Доказательство теоремы 1. Потому что любая последовательность решений $x(t, \lambda_n)$, $\lambda_n \to \lambda_0$ образует, согласно лемме 3, систему равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций, можно, согласно лемме Асколи, из этой последовательности выделить равномерно сходящуюся последовательность. Докажем еще, что каждая равномерно сходящаяся последовательность функций $x(t, \lambda_n)$, $\lambda_n \to \lambda_0$ сходится к $x(t, \lambda_0)$. Обозначим $\lim\limits_{\lambda_n \to \lambda_0} x(t, \lambda_n) = y(t)$. Существует $T_0 \in (0, T]$ так, что $y(t) \in D$ при $t \in [0, T_0]$. Следовательно, можем воспользоваться леммой 2, откуда $y(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x(t, \lambda_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \{x(0, \lambda_n) + \int\limits_0^t X(\tau, x(\tau, \lambda_n), \lambda_n)\, \mathrm{d}\tau\} = x(0, \lambda_0) + \int\limits_0^t X(\tau, y(\tau), \lambda_0)\, \mathrm{d}\tau$ для $t \in [0, T_0]$. Это значит, что функция $y(t)$ является решением уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$ и при начальном условии $y(0) = x(0, \lambda_0)$. Из однозначности решения $x(t, \lambda_0)$ следует затем, что $y(t) = x(t, \lambda_0)$ для $t \in [0, T_0]$. Теперь уже легко завершить доказательство теоремы 1.

В теореме 1 мы предполагали, что рассматриваемые решения $x(t, \lambda)$ определены на интервале $[0, T]$. В следующей теореме показано, что это условие выполнено, если выполняются остальные предположения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_0^t X(\tau, x, \lambda)\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t X(\tau, x, \lambda_0)\, \mathrm{d}\tau$ *равномерно относительно* t *и* x.

К любому $\varepsilon > 0$ *можно подобрать* $\delta > 0$ *такое, что справедливо утверждение: как только функция* $z(t)$, *определенная на интервале* $[0, T_1]$, $0 \leqq T_1 \leqq T$, *удовлетворяет уравнению* (1) *при фиксированном* λ, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x(0, \lambda_0) - z(0)\| < \delta$, *то существует функция* $u(t)$ *определенная для* $0 \leqq t \leqq T$ *и удовлетворяющая уравнению* (1) *при том же самом* λ, $u(t) = z(t)$ *для* $0 \leqq t \leqq T_1$, $\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ *для* $0 \leqq t \leqq T$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы из $t \in [0, T]$, $\|x - x(t, \lambda_0)\| \leqq \varepsilon_0$ вытекало $x \in D$. Допустим, что теорема несправедлива. Но в таком случае существует $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, последовательность $\lambda_i \to \lambda_0$ и решения $z_i(t)$ уравнения (1) для $\lambda = \lambda_i$,

$$\|z_i(0) - x(0, \lambda_0)\| \to 0\,, \quad \|z_i(0) - x(0, \lambda_0)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

такие, что их невозможно расширить на интервал $[0, T]$, соблюдая условие $\|z_i(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$. Следовательно, существуют T_i $(0 < T_i < T)$ так, что

$$\|z_i(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon \quad \text{для} \quad 0 \leqq t < T_i\,, \tag{11}$$

$$\|z_i(T_i) - x(T_i, \lambda_0)\| = \varepsilon\,. \tag{12}$$

Перейдя к выделенной последовательности, можем добится существования $\lim\limits_{i\to\infty} T_i = T_0$ $(0 \leqq T_0 \leqq T)$. По лемме 3 функции $z_i(t)$ образуют систему равностепенно непрерывнах и равномерно ограниченных функций; конечно, для каждого $z_i(t)$ мы должны взять соответствующий интервал $[0, T_i]$. Из (10), (12) и из равностепенной непрерывности функции $z_i(t)$ следует, что существует число $c > 0$ такое, что $T_i \geqq c$ для всех i, значит $0 < T_0 \leqq T$. Выберем $\delta > 0$, $\delta < T$ так, чтобы из $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq T$, $t_2 - t_1 < \delta$ следовало $\|x(t_2, \lambda_0) - x(t_1, \lambda_0)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ а из $i = 1, 2, \ldots$, $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq T_i$, $t_2 - t_1 < \delta$ опять $\|z_i(t_2) - z_i(t_1)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Для $i > i_0$ имеем $T_0 - \frac{\delta}{2} < T_i < T_0 + \frac{\delta}{2}$ и, следовательно, по теореме 1 (примененной к интервалу $\left[0, T_0 - \frac{\delta}{2}\right]$) для $i > i_1$

$$\left\| z_i\left(T_0 - \frac{\delta}{2}\right) - x\left(T_0 - \frac{\delta}{2}, \lambda_0\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и далее

$$\left\| z_i(T_i) - z_i\left(T_0 - \frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left\| x\left(T_0 - \frac{\delta}{2}, \lambda_0\right) - x(T_i, \lambda_0)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда $\|z_i(T_i) - x(T_i, \lambda_0)\| < \varepsilon$, что противоречит (12).

2. В дальнейшем нам будет очень полезной следующая

Лемма 4. *Пусть $a > 0$; пусть n—натуральное число, пусть $\zeta(t)$ —непрерывная и неубывающая в $[0, a]$ функция, $\zeta(0) = 0$, $\zeta(t) > 0$ для $0 < t \leqq a$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и функция $\chi(\varepsilon) > 0$, определенная на $(0, \varepsilon_0]$, с пределом $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \chi(\varepsilon) = 0$, обладающая следующим свойством:*

Если $q(t) = q_0 t^{n-1} + q_1 t^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$ — полином, степень которого $< n$, с коэффициентами $q_i \in E_m$ и если

$$\|q(t)\| < \varepsilon + t^{n-1}\zeta(t) \tag{13}$$

для $0 < t \leqq a$, то $\|q_i\| < \chi(\varepsilon)$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon_0 = a^{n-1}\zeta(a)$ и подберем $t_1 \in (0, a]$ так, чтобы $((n-1)\,t_1)^{n-1}\,\zeta((n-1)\,t_1) = \varepsilon$. Коэффициенты q_i вычислим по уравнениям

$$q_0(jt_1)^{n-1} + q_1(jt_1)^{n-2} + \ldots + q_{n-2}jt_1 + q_{n-1} = r_j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Как видно из (13), векторы r_j удовлетворяют неравенству

$$\|r_j\| \leqq 2((n-1)\,t_1)^{n-1}\,\zeta((n-1)\,t_1). \tag{15}$$

Из уравнения (14) следует

$$q_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{ij} r_j. \tag{16}$$

Легко установить, что $\Delta = \tilde{\Delta} \cdot t_1^{n(n-1)\cdot\frac{1}{2}}$, $\Delta_{ij} = \tilde{\Delta}_{ij} t_1^{\gamma_{ij}}$, где $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}_{ij}$ — постоянные и

$$\gamma_{ij} \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) .$$

Отсюда, из соотношений (16), (15) и из выбора числа t_1 следует, что $\|q_i\| \leqq$ $\leqq k\zeta((n-1)\,t_1)$.

Теперь будем заниматься векторным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = X(t, x, \lambda) . \tag{17}$$

Предположим опять-таки, что функция $X(t, x, \lambda)$ удовлетворяет условиям (А), (Б) из отдела 1 с той только разницей, что открытое множество D предположим ограниченным и d будет означать диаметр множества D. При постоянном λ выполнены, очевидно, условия Каратеодори для существования решения уравнения (17).

Об уравнении (17) предположим еще следующее: на интервале $[0, T]$ существует решение $x(t, \lambda_0)$ уравнения (17) для значения $\lambda = \lambda_0$ и, если функция $v(t)$ является решением уравнения (17) для $\lambda = \lambda_0$ на интервале $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, $v^{(i)}(0) = x^{(i)}(0, \lambda_0)$, $i = 0, \ldots, n-1$, то $v(t) = x(t, \lambda_0)$ для $t \in [0, T_1]$.

Чтобы и об уравнении (17) доказать теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, введем следующее обозначение: функция $X(t, x, \lambda)$ удовлетворяет условию (Г), если для каждого $\lambda \in \Lambda$, $x \in D$ существуют векторы $\alpha_0(0, x, \lambda)$, $\alpha_1(0, x, \lambda), \ldots, \alpha_{n-1}(0, x, \lambda)$ так, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, x, \lambda)}{i!} t^i \right\} = \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\,\mathrm{d}\sigma \tag{18}$$

равномерно относительно $x \in D$, $t \in [0, T]$.

Замечание 1. Пусть C — пространство Банаха, элементами которого являются функции $y(t)$, определенные и непрерывные для $t \in [0, T]$, значения которых лежат в E_m с обычной нормой, и пусть C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ есть фактор-пространство пространства C и пространства полиномов, степень которых не превышает i. Элементами пространства C_i являются, следовательно, классы непрерывных функций, отличающихся друг от друга полиномом, степень которого самое больше равна i. Условие (18) значит, что класс в пространстве C_{n-1}, содержащий функцию

$\int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\mathrm{d}\sigma$, сходится в C_{n-1} к классу, содержащему функцию

$\int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\,\mathrm{d}\sigma$, если λ стремится к λ_0. Потому что

$$\int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{t_1}^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \int_0^{t_1} \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma$$

есть полином в t, степень которого не выше $n-1$ при фиксированных x, λ, условие (18) равносильно следующему условию:

Для каждого $\lambda \in \Lambda$, $t_1 \in [0, T]$, $x \in D$ существуют векторы $\alpha_0(t_1, x, \lambda)$, $\alpha_1(t_1, x, \lambda), \ldots, \alpha_{n-1}(t_1, x, \lambda)$ так, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ \int_{t_1}^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, x, \lambda)}{i!} (t-t_1)^i \right\} =$$
$$= \int_{t_1}^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{19}$$

причем сходимость является равномерной относительно $x \in D$, t_1, $t \in [0, T]$.

Опираясь на лемму 4, докажем следующую лемму:

Лемма 5. *Пусть функция* $X(t, x, \lambda)$ *удовлетворяет условию* (Г). *Тогда* $\alpha_i(\tau, x_1, \lambda) - \alpha_i(\tau, x_2, \lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \lambda_0$ *равномерно относительно* x_1, $x_2 \in D$, $\tau \in [0, T]$.

Доказательство. В силу предположения (Б) о функции $X(t, x, \lambda)$ будет

$$\left\| \int_\tau^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x_2, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma - \int_\tau^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x_1, \lambda)\,\mathrm{d}\sigma \right\| \leqq$$
$$\leqq \psi(\alpha) \left| \int_\tau^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} \chi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right| \leqq \psi(d)\,.\,|t-\tau|^{n-1}\,.\left| \int_\tau^t \chi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right| \leqq$$
$$\leqq |t-\tau|^{n-1}\,.\,\tfrac{1}{2}\zeta(|t-\tau|)\,,$$

где $\zeta(|t-\tau|) \to 0$ при $|t-\tau| \to 0$.

Из этого неравенства (которым воспользуемся два раза — для λ и для λ_0) и из уравнения (19) вытекает

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_i(\tau, x_2, \lambda) - \alpha_i(\tau, x_1, \lambda)] \frac{(t-\tau)^i}{i!} \right\| \leqq |t-\tau|^{n-1} \zeta(|t-\tau|) + 2A(\lambda)\,,$$

где $A(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$. Доказательство закончим при помощи леммы 4 $\Big($положим $a = \frac{T}{2}$, при $\tau \leqq \frac{T}{2}$ в качестве переменной, выступающей в лемме 4, берем $t - \tau$, а при $\tau > \frac{T}{2}$ в качестве переменной берем $\tau - t\Big)$.

Замечание 2. Из леммы 5 следует, что можем, не умаляя общности, векторы $\alpha_i(\tau, x, \lambda)$ считать независимыми от x. Поэтому будем в дальнейшем писать только $\alpha_i(\tau, \lambda)$.

После всех этих предварительных рассуждений можем дать формулировку теоремы, аналогичной теореме 1. Потому что доказательства похожи на доказательства отдела 1, приведем подробнее только те места, где наблюдается основательное различие.

Теорема 3. *Пусть функция $X(t, x, \lambda)$ удовлетворяет условию* (Г). *Тогда к любому $\eta > 0$ найдется $\delta > 0$ так, что каждое решение $x(t, \lambda)$ уравнения* (17) *со значением λ, определенное на интервале $[0, T]$ и удовлетворяющее условию $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x^{(i)}(0, \lambda) - x^{(i)}(0, \lambda_0) + \alpha_i(0, \lambda)\| < \delta$, $i = 0, \ldots, n-1$, выполняет также неравенство $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \eta$.*

Замечание 3. Если в (19) положить $t = t_1$, будет $\alpha_0(t_1, \lambda) \to 0$ равномерно относительно $t_1 \in [0, T]$ (см. замечание 2). Не умаляя общности, можем предполагать $\alpha_0(t_1, \lambda) = 0$. Этим объяснено то обстоятельство, что в теореме 1 не встречаемся с вектором $\alpha_0(0, \lambda)$.

Доказательство теоремы 3 основано на леммах подобно тому, как и доказательство теоремы 1.

Лемма 6.

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x, \lambda)\, \mathrm{d}\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\alpha_i(\sigma_1, \lambda)}{i!}(t-\sigma_1)^i - \frac{\alpha_i(\sigma_2, \lambda)}{i!}(t-\sigma_2)^i\right] \to$$

$$\to \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x, \lambda_0)\, \mathrm{d}\tau$$

при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно относительно σ_1, σ_2, $t \in [0, T]$, $x \in D$.

Лемма 6 вытекает непосредственно из соотношения (19) в замечании 1.

Лемма 7. *Пусть функция $\tilde{x}(t)$ кусочно-постоянна на интервале $[0, T]$, $\tilde{x}(t) = c_i \in D$ при $\tau_{i-1} \leqq t < \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\tilde{x}(\tau_k) = c_k \in D$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \tau_k = \tau$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left\{ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda)\, \mathrm{d}\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda) \cdot t^i}{i!} \right\} =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, \tilde{x}(\tau), \lambda_0)\, \mathrm{d}\tau$$

равномерно при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть $\tau_l \leqq t \leqq \tau_{l+1}$. В силу соотношения (19)

$$\int_{\tau_l}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, c_{l+1}, \lambda)\, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(\tau_l, \lambda)}{i!} (t-\tau_l)^i \to$$

$$\to \int_{\tau_l}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, c_{l+1}, \lambda_0)\, d\tau \tag{20}$$

при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно относительно t. По лемме 6

$$\int_{-1}^{\tau_j} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, c_j, \lambda)\, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{[\alpha_i(\tau_{j-1}, \lambda)}{i!} (t-\tau_{j-1})^i - \frac{\alpha_i(\tau_j, \lambda)}{i!} (t-\tau_j)^i\right] \to$$

$$\to \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, c_j, \lambda_0)\, d\tau \tag{21}$$

при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно относительно t, $j = 1, 2, \ldots, l$. Сложив соотношения (20) и (21), закончим доказательство леммы 7.

Лемма 8. *Пусть $y(t, \lambda)$ — система непрерывных функций, определенных на интервале $[0, T]$, $y(t, \lambda) \in D$, и удовлетворяющих условию*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \max_{0 \leqq t \leqq T} \|y(t,\lambda) - y(t, \lambda_0)\| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda)}{i!} t^i\right] =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\, d\tau$$

равномерно относительно t.

Доказательство проводится аналогичным способом, как доказательство леммы 2.

Лемма 9. *Пусть $\lambda_k \neq \lambda_0$, $\lambda_k \in \Lambda$ и пусть $x(t, \lambda_k)$ — решения уравнения (17), определенные на интервалах $[0, T_k]$, $0 < T_k \leqq T$, и пусть выполняются условия $\|x^{(j)}(0, \lambda_k) + \alpha_i(0, \lambda_k)\| \leqq K_1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда функции $x(t, \lambda_k)$ образуют последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций.*

Доказательство. Для $t_1, t_2 \in [0, T_k]$ будет

$$x(t_2, \lambda_k) - x(t_1, \lambda_k) = \int_0^{t_2} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k)\, d\tau -$$

$$- \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k)\, d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0, \lambda_k)}{i!} (t_2^i - t_1^i) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} [X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k) - X(\tau, x(t_1, \lambda_k), \lambda_k)] \, d\tau +$$

$$+ \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x(t_1, \lambda_k), \lambda_k) \, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, \lambda_k)}{i!} (t_2 - t_1)^i \right\} +$$

$$+ \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1} - (t_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} [X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k) - X(\tau, y, \lambda_k)] \, d\tau +$$

$$+ \left\{ \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1} - (t_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda_k) \, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda_k)}{i!} (t_2^i - t_1^i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, \lambda_k)}{i!} (t_2 - t_1)^i \right\} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0, \lambda_k) + \alpha_i(0, \lambda_k)}{i!} (t_2^i - t_1^i) , \tag{22}$$

где y — произвольная точка D.

Оценим сначала члены последней суммы начиная с второго и пятым кончая. Пусть $|t_2 - t_1| < 1$. В силу (19) и в силу замечания 2

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, x(t, \lambda_k), \lambda_k) \, d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, \lambda_k)}{i!} (t_2 - t_1)^i \right\| \leqq$$

$$\leqq A_2(\lambda_k) + c(|t_2 - t_1|) , \tag{23}$$

где $A_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$ и $c(\eta)$ имеет то же значение, как в доказательстве леммы 3. Потому что $\|X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k) - X(\tau, y, \lambda_k)\| \leqq \chi(\tau) \, \psi(d)$, существует постоянная K_2 такая, что

$$\left\| \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1} - (t_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} [X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k) - X(\tau, y, \lambda_k)] \, d\tau \right\| \leqq K_2 |t_2 - t_1| . \tag{24}$$

Если уравнение (18) при $t = t_1$ вычесть из того же уравнения при $t = t_2$, получим

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda) \, d\tau + \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1} - (t_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda) \, d\tau - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda)}{i!} (t_2^i - t_1^i) \right\} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1}}{(n-1)} X(\tau, y, \lambda_0) \, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - \tau)^{n-1} - (t_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda_0) \, d\tau$$

равномерно относительно $t_1, t_2 \in [0, T]$. Если теперь из этого вычесть (19) (положив $t = t_2$), получим

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left\{ \int_0^{t_1} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}-(t_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda)\,\mathrm{d}\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda)}{i!} (t_2^i - t_1^i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, \lambda)}{i!} (t_2 - t_1)^i \right\} = \int_0^{t_1} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}-(t_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau$$

равномерно относительно $t_1, t_2 \in [0, T]$. Очевидно,

$$\left\| \int_0^{t_1} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}-(t_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqq K_3|t_2 - t_1|\,,$$

где K_3 — достаточно большая постоянная. Таким образом получаем оценку

$$\left\| \int_0^{t_1} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}-(t_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} X(\tau, y, \lambda)\,\mathrm{d}\tau - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, \lambda)}{i!} (t_2^i - t_1^i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, \lambda)}{i!} (t_2 - t_1)^i \right\| \leqq K_3|t_2 - t_1| + A_3(\lambda)\,, \tag{25}$$

где $A_3(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Наконец,

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0, \lambda_k) + \alpha_i(0, \lambda_k)}{i!} (t_2^i - t_1^i) \right\| \leqq K_4|t_2 - t_1|\,, \quad K_4 > 0\,. \tag{26}$$

Из уравнений (22) и из оценок (23)—(26) вытекает неравенство

$$\|x(t_2, \lambda_k) - x(t_1, \lambda_k)\| \leqq \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} [X(\tau, x(\tau, \lambda_k), \lambda_k) - \right.$$

$$\left. - X(\tau, x(t_1, \lambda_k), \lambda_k)]\,\mathrm{d}\tau \right\| + c_2(|t_2 - t_1|) + A_4(\lambda_k)\,, \tag{27}$$

где $c_2(\eta) = c(\eta) + (K_2 + K_3 + K_4)\,\eta$, $A_4(\lambda) = A_2(\lambda) + A_3(\lambda)$.

Теперь докажем, что $x(t, \lambda_k)$ представляет собой последовательность равностепенно непрерывных функций. Пусть $\varepsilon > 0$; подберем δ, $0 < \delta < 1$, так, чтобы было $\nu(\delta)\,\psi(\varepsilon) + c_2(\delta) < \frac{1}{2}\varepsilon$, где ν означает то же, что в доказательстве леммы 3. Пусть k_0 настолько большое, что $A_4(\lambda_k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $k \geqq k_0$. Остается доказать, что $\|x(t_2, \lambda_k) - x(t_1, \lambda_k)\| < \varepsilon$, если только $k > k_0$, $0 \leqq$

$\leqq t_1 < t_2 \leqq T_k$, $t_2 - t_1 < \delta$. Это докажем от противного. Если последнее неравенство несправедливо для некоторых t_1, t_2, k (удовлетворяющих остальным условиям), то найдется число t_3, $t_1 < t_3 \leqq t_2$ такое, что $\|x(t, \lambda_k) - x(t_1, \lambda_k)\| < \varepsilon$ при $t_1 \leqq t < t_3$ а $\|x(t_3, \lambda_k) - x(t_1, \lambda_k)\| = \varepsilon$. Если в неравенстве (27) подставить t_3 вместо t_2, придем к противоречию $\varepsilon \leqq \nu(\delta)\, \psi(\varepsilon) + c_2(\delta) + A_4(\lambda_k) < \varepsilon$. Лемма 9 этим доказана.

Доказательство теоремы 3 теперь уже ничем не отличается от доказательства теоремы 1. Применение теоремы 3 затруднительно вследствие ограничительного условия, что все решения $x(t, \lambda)$ определены на фиксированном интервале. Этот недостаток устранен в теореме 4, которую можно доказать аналогичным способом, как теорему 2.

Теорема 4. *Пусть функция $X(t, x, \lambda)$ удовлетворяет условию* (Г). *К любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что справедливо утверждение: Если только функция $z(t)$, определенная на интервале $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, удовлетворяет уравнению* (17) *при фиксированном λ, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ и условиям*

$$\|z^{(i)}(0) - x^{(i)}(0, \lambda_0) + \alpha_i(0, \lambda)\| < \delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

то существует функция $u(t)$, определенная для $0 \leqq t \leqq T$ и удовлетворяющая уравнению (17) *при том же самом λ, $u(t) = z(t)$ при $0 \leqq t \leqq T_1$, $\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ при $0 \leqq t \leqq T$.*

Пример. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция вещественного аргумента x, $0 \leqq \alpha < 2$. Тогда уравнение

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \cos \frac{t}{\lambda} + f(x) \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{для} \quad \lambda \neq 0\,, \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{для} \quad \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

выполняет требования теоремы 4 (при $\alpha_i(0, \lambda) = 0$, $i = 0, 1$); следовательно, решения $x(t, \lambda)$ уравнения (28), удовлетворяющие условию $x(0, \lambda) = \dot{x}(0, \lambda) = 0$, стремятся к нулю равномерно на каждом замкнутом интервале.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Красносельский, С. Г. Крейн:* О принципе усреднения в нелинейной механике, Успехи математических наук, *10: 3* (1955), 147—152.

[2] *J. Kurzweil:* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, Czechoslovac Mathematical Journal, *7* (*82*), 1957, 418—449.

[3] *G. Sansone:* Equazioni differenziali nel campo reale, Bologna 1948.

[4] *E. A. Coddington, N. Levinson:* Theory of Ordinary Differential Equations, 1955.

Summary

CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A PARAMETER

JAROSLAV KURZWEIL and ZDENĚK VOREL, Praha.

(Received December 22, 1956.)

In this paper a generalization of the standard theorem on continuous dependence on a parameter is contained.

Let us consider the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x, \lambda) \tag{1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_m$, $X = (X_1, \ldots, X_m) \in E_m$.

Let the following assumptions be fulfilled:

A. $X(t, x, \lambda)$ is defined for $x \in D$, where D is an open subset of E_m, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, Λ is a set of numbers containing the limiting point λ_0. For $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$, $X(t, x, \lambda)$ is Lebesgue-measurable in t and there exists a function $m(t, \lambda)$, which is Lebesgue-integrable on $[0, T]$, $\|X(t, x, \lambda)\| \leqq m(t, \lambda)$ for $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times D \times \Lambda$. For $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$, $X(t, x, \lambda)$ is continuous in x. Consequently, if λ is fixed, Caracthodory's conditions for existence of solution of equation (1) are fulfilled.

B. There exists a non-decreasing function $\psi(\delta)$ defined for $0 < \delta \leqq d$, $d > 0$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \psi(\delta) = 0$ and a Lebesgue-integrable function $\chi(t) \geqq 1$, $\int_0^T \chi(t)\, \mathrm{d}t < \infty$, such that $\|X(t, x_1, \lambda) - X(t, x_2, \lambda)\| \leqq \psi(\|x_1 - x_2\|)\, \chi(t)$ for $x_1, x_2, \in D$, $\|x_1 - x_2\| \leqq d$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$.

C. There exists a solution $x(t, \lambda_0)$ of the equation (1) with $\lambda = \lambda_0$ for $t \in [0, T]$ with the following property: If $v(t)$ is a solution of equation (1) for $\lambda = \lambda_0$ on the interval $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, $v(0) = x(0, \lambda_0)$, then $v(t) = x(t, \lambda_0)$ for $t \in [0, T_1]$.

The following theorem is true:

Theorem 2. *Let* $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x, \lambda)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t X(\tau, x, \lambda_0)\, \mathrm{d}\tau$ *uniformly with respect to* t *and* x. *Then for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a* $\delta > 0$ *with the following property: If the function* $z(t)$ *is defined on* $[0, T_1]$, $0 \leqq T_1 \leqq T$, *and if it satisfies equation* (1) *with a fixed* λ, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x(0, \lambda_0) - z(0)\| < \delta$, *then there exists a function* $u(t)$ *defined for* $0 \leqq t \leqq T$, *satisfying equation* (1) *with the same* λ, $u(t) = z(t)$ *for* $0 \leqq t \leqq T_1$, $\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ *for* $0 \leqq t \leqq T$.

If equation (1) is of a special type, it is possible to prove a theorem analogous to theorem 2 under more general conditions.

We will assume that the right hand side of the vector equation

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = X(t, x, \lambda) \tag{17}$$

fulfils the conditions (A), (B) with the slight change that the open set D is bounded and d means the diameter of the set D. λ being fixed Carathéodory's conditions for existence of solution of equation (17) are evidently fulfilled. We suppose further that on the interval $[0, T]$ there exists the solution $x(t, \lambda_0)$ of equation (17) with $\lambda = \lambda_0$ and if $v(t)$ is a solution of (17) for $\lambda = \lambda_0$ on the interval $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, $v^{(i)}(0) = x^{(i)}(0, \lambda_0)$, $i = 0, \ldots, n - 1$, then $v(t) = x(t, \lambda_0)$ for $t \in [0, T_1]$.

We define: Function $X(t, x, \lambda)$ fulfils condition (D), if for every $\lambda \in \Lambda$, $x \in D$ there exist vectors $\alpha_0(0, x, \lambda)$, $\alpha_1(0, x, \lambda)$, $\ldots$, $\alpha_n(0, x, \lambda)$ such that

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ \int_0^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(0, x, \lambda)}{i!} t^i \right\} = \int_0^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\, \mathrm{d}\sigma \tag{18}$$

uniformly with respect to $x \in D$, $t \in [0, T]$. Because

$$\int_0^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma - \int_{t_1}^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma =$$
$$= \int_0^{t_1} \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma$$

is a polynomial in t of degree not exceeding $n - 1$ with x, λ fixed, condition (18) is equivalent to the following condition:

For every $t_1 \in [0, T]$, $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$ there exist vectors $\alpha_0(t_1, x, \lambda)$, $\alpha_1(t_1, x, \lambda)$, $\ldots$ $\ldots$, $\alpha_{n-1}(t_1, x, \lambda)$ such that

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\{ \int_{t_1}^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, \mathrm{d}\sigma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i(t_1, x, \lambda)}{i!} (t - t_1)^i \right\} =$$
$$= \int_{t_1}^t \frac{(t - \sigma)^{n-1}}{(n - 1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\, \mathrm{d}\sigma \tag{19}$$

uniformly with respect to $x \in D$, $t_1, t \in [0, T]$.

Lemma 5. *Let the function $X(t, x, \lambda)$ fulfil condition* (D). *Then $\alpha_i(\tau, x_1, \lambda) - \alpha_i(\tau, x_2, \lambda) \to 0$ for $\lambda \to \lambda_0$ uniformly with respect to $x_1, x_2 \in D$, $\tau \in [0, T]$.*

Theorem 4. *Let the function $X(t, x, \lambda)$ fulfil condition* (D). *For every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ with the following property:*

If a function $z(t)$ is defined on $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, if it satisfies equation (17) *with a fixed λ, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ and conditions $\|z^{(i)}(0) - x^{(i)}(0, \lambda_0) + \alpha_i(0, \lambda)\| < \delta$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, then there exists a function $u(t)$ defined for $t \in [0, T]$ satisfying equation* (17) *with the same λ, $u(t) = z(t)$ for $0 \leqq t \leqq T_1$, $\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ for $0 \leqq t \leqq T$.*

Example. Let $f(x)$ be a continuous function of real variable x, $0 \leqq \alpha < 2$. Then the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\lambda^\alpha} \cos \frac{t}{\lambda} + f(x) \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{for} \quad \lambda \neq 0 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \text{for} \quad \lambda = 0$$

fulfils the assumptions of theorem 4 (with $\alpha_i(0, \lambda) = 0$, $i = 0, 1$) and, consequently, the solutions $x(t, \lambda)$ of equation (28) satisfying the condition $x(0, \lambda) = \dot{x}(0, \lambda) = 0$ tend to zero uniformly on every closed interval.