Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Rychlík

Theorie der reellen Zahlen im Bolzano's handschriftlichen Nachlasse

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 4, 553–567

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100267`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

THEORIE DER REELLEN ZAHLEN IM BOLZANO'S HANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSE

KAREL RYCHLÍK, Praha.

(Eingelangt am 10. Dezember 1956.)

In dieser Abhandlung referiert der Verfasser über den Versuch von BERNARD BOLZANO die Theorie der reelen Zahlen systematisch zu bearbeiten, der in der Handschrift „Theorie der unendlichen Zahlen-(Größen-) begriffe (ausdrücke)" enthalten ist und einen Teil der ausgedehnten handschriftlichen „Größenlehre" bildet.

Vorwort

Viele Sätze über reelle Zahlen sind in den bisher herausgegebenen Schriften von B. Bolzano enthalten. Es sind dies seine ersten Arbeiten aus der Analysis: Der binomische Lehrsatz ...[1]) und Rein analytischer Beweiss ...[2]) und besonders die Functionenlehre.[3]) Diese erschien lange nach seinem Tode (erst im J. 1930) und enthält Hinweise auf verschiedene Stellen aus seinen bisher nicht herausgegebenen Handschriften. Die vorliegende Arbeit enthält einen Bericht über die Handschrift „Theorie der unendlichen Zahlen-(Größen) begriffe (-ausdrücke)",[4]) in der Bolzano die Theorie der reellen Zahlen systematisch zu bearbeiten versucht. Damit werden viele in der „Functionenlehre" benützten Begriffe erläutert und so erhellt auch der Ursprung vieler dort angeführten Sätze.

---

[1]) *B. Bolzano* [2]. [2]) *B. Bolzano* [3]. [3]) *B. Bolzano* [4].

[4]) Sie bildet einen Teil der ausgedehnten handschriftlichen „Grössenlehre" von *Bernard Bolzano*, welche in der Nationalbibliothek in Wien aufbewahrt wird. Im Archiv der Tschech. Akademie der Wissenschaften befinden sich die von M. JAŠEK besorgten Fotokopien. Die Handschrift stammt ungefähr aus den Jahren 1830—1834. So bestimmt es EDUARD WINTER auf Grund der Briefe, die Bolzano seinen Schülern FESL und PŘÍHONSKÝ geschrieben hat. (S. E. Winter, [11], Kap. V; 12.)

Im Auftrage der ersten Sektion der Tschech. Akademie der Wissenschaften besorge ich die Abschrift der bisher nicht gedruckten Handschriften Bolzano's.

Übersicht der hauptsächlichen Definitionen und Sätze

Unendlicher Zahlen-(Größen-) ausdruck (begriff). (§ 2) **2.**[5])
Meßbare Zahl. (§ 6) **3.**
Unendliche kleine positive und negative Zahl. (§ 19) **7.**
Unendlich große positive und negative Zahl. (§ 24) **8.**
Cantorsche Reihen. (§ 42) **19.**
Gleichgeltende (gleiche) Zahlenausdrücke, ($A = B$). (Definition der Gleichheit der reellen Zahlen.) Wann ist B größer als A ($B > A$) oder A kleiner als B ($A < B$)? (§ 50) **22.**
Die Trichotomie $A = B$, $A < B$, $A < B$. (§ 68) **27.**
Der Satz von Archimedes. (§ 69) **28.**
Die Menge der reellen Zahlen ist überall dicht (pantachisch). (§ 74) **29.**
Die Grundlage der Exhaustionmethode. (§ 87) **34.**
Der Satz von Cauchy-Bolzano .(§ 102) **45.**
Der Satz von Bolzano-Weierstraß. (§ 104) **46.**
Ein Satz, der an den Satz von Dedekind erinnert. (§ 105) **47.**

Bolzano's Theorie der reellen Zahlen

1. Bolzano bemerkt, daß man die rationalen Zahlen durch einen Ausdruck bestimmen kann, in dem endlich viele rationale Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) vorkommen, die auf wirklichen Zahlen (d. h. auf positiven ganzen Zahlen) ausgeführt werden (§ 1)).

Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, wo die Anzahl der rationalen Operationen unendlich wird.

2. Einen Ausdruck, in dem unendlich viele rationale Operationen vorkommen, die auf wirklichen Zahlen angeführt werden, bezeichnet Bolzano als einen *unendlichen Zahlenausdruck*.

Beispiele: $1 + 2 + 3 + \ldots$ in inf.; $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$ in inf.; $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{8})(1 - \frac{1}{16}) \ldots$ in inf. (§ 2).

3. Unter diesen Zahlenausdrücken befinden sich auch solche, S, bei denen man zu einer positiven ganzen Zahl q eine ganze Zahl p bestimmen kann, so daß

$$S = \frac{p}{q} + P_1 \quad \text{und} \quad S = \frac{p+1}{q} - P_2 \tag{1}$$

gilt, wo P_1 und P_2 unendliche Zahlenausdrücke bezeichnen, wobei P_1 nicht negativ und P_2 positiv ist (§ 5).

[5]) D. h. § 2 des Bolzanoschen Manuskriptes, Abschn. 2 dieses Berichtes.

Beispiel:

$$S = a + \frac{b}{1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}},$$

wo a und b ganze rationale Zahlen bedeuten.

Bolzano sagt in diesem Falle (§ 6), daß man den unendlichen Zahlenausdruck S bis auf ein $\frac{1}{q}$ *näherungsweise bestimmen* oder *messen kann.* Den Bruch $\frac{p}{q}$ nennt Bolzano den *messenden Bruch* von S und den Bruch $\frac{p+1}{q}$ den *nächstgrößeren Bruch* von S.

Es kann aber auch der Fall eintreten, daß für S die Gleichungen (1) für jeden beliebigen Wert von q gelten, wenn p geeignet gewählt wird. Dann sagt Bolzano, daß man S *näherungsweise so genau als man nur will bestimmen oder messen* kann. Der Ausdruck S wird dann *meßbar* oder *ermeßlich* genannt, sont *unmeßbar* oder *unermesslich.* Den Ausdruck P_1 nennt Bolzano die *Ergänzung* des messenden Bruches p/q. In dem besonderen Falle, wo P_1 gleich Null ist, so daß $S = p/q$ ist, nennt er den messenden Bruch *voll* oder *vollkommen,* oder das *volle* oder *vollkommene Maß* von S (§ 6).

4. [6]) »Jede Rationalzahl ist eine meßbare Zahl und zwar läßt sich ein volles Maß für sie angeben und umgekehrt jede Zahl, für die sich ein volles Maß angeben läßt, ist eine rationale Zahl.« (§ 7).

5. »Ist A meßbar, so ist auch $-A$ meßbar.« (§ 8.)

6. Es folgen jetzt einige Sätze, die weiter als Hilfsätze benützt werden. (§ 9—17.)

7. Unter den unendlichen Zahlenausdrücken gibt es auch solche, bei denen der messende Bruch für jedes q gleich Null ist. (§ 18.)

Beispiel:

$$S = \frac{1}{1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}}.$$

Die Gleichungen (1) (aus **3**) haben dann die Form

$$S = P_1 = \frac{1}{q} - P_2$$

für jedes positive ganze q. Dann ist nach Bolzano S eine *unendlich kleine* und zwar *positive* (absolute) *Zahl,* $-S$ dagegen eine *unendlich kleine negative Zahl.* Für eine unendlich kleine negative Zahl S gilt also

$$S = -P_1 = -\frac{1}{q} + P_2 \quad (\S\ 19).$$

---

[6]) Die Anführungzeichen von der Gestalt » ... « bezeichnen Zitate aus Bolzano's Handschrift.

8. Es werden jetzt unendlich große Zahlen eingeführt.

»Unter den unendlichen Zahlenbegriffen gibt es auch einige von einer solchen Art, daß sich bei dem versuchten Geschäfte des Messens zu jeden gegebenen q wohl ein p auffinden läßt, daß Einer der beiden Gleichungen

$$S = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2 \tag{1}$$

entspricht, aber keines, das Beiden genüge thut.« (§ 23.)

Beispiel: $1 + 2 + 3 + \ldots$ in inf.

Solche Zahlenausdrücke bezeichnet Bolzano als *unendlich große Zahlen*, und zwar als eine *positive (negative) unendlich große Zahl*, je nachdem die erste (bzw. zweite) von den Gleichungen (1) erfüllt ist. (§ 24.)

9. Eine unendlich große Zahl ist unermeßlich (§ 25), aber nicht umgekehrt. (§ 26.)

Beispiel: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ in inf. ist unermeßlich, aber nicht unendlich groß. Dieser Zahlenausdruck stellt aber keine endliche Zahl dar, noch ist er unendlich klein, so daß es Zahlenausdrücke gibt, die weder endlich, noch unendlich klein, noch unendlich groß sind (§ 27).

10. »Wenn eine Zahl S unendlich groß ist; so bestehet für jede auch noch so große wirkliche Zahl N die Gleichung $S = \pm(N + P)$; und umgekehrt, sooft für jeden auch noch so großen Werth von N die Gleichung $S = \pm(N + P)$ bestehet, ist S unendlich groß.« (§ 28.)

Dabei soll P nicht negativ sein.

11. »Bezeichnet A eine unendlich große, $\frac{m}{n}$ aber irgend eine Rationalzahl, so ist auch $A - \frac{m}{n}$ eine unendlich große Zahl.« (§ 29.)

12. »Wenn ein unendlicher Zahlenausdruck A von einer solchen Beschaffenheit ist, daß der Ausdruck $A - \frac{m}{n}$ für jeden beliebigen positiven oder negativen Werth der Zahlen m und n entweder positiv oder negativ oder Null ist: so ist A entweder unendlich groß oder meßbar.« (§ 30.)

13. Sind E und F zwei unendlich große (kleine) Zahlen von demselben Vorzeichen, so ist auch ihre Summe $E + F$ eine unendlich große (kleine) Zahl von demselben Vorzeichen. (§ 31.) Ähnlich für eine Summe von endlichvielen Summanden. (§ 32.) Der Unterschied von zwei unendlich großen Zahlen kann aber positiv, negativ, oder auch gleich Null sein. (§ 33.)

14. »Wenn eine unendlich kleine, oder auch eine unendlich große Zahl multiplicirt wird mit einer von Null verschiedenen endlichen Zahl, so ist das zum Vorschein kommende Product im ersten Falle unendlich klein, im zweiten unendlich groß und dieß zwar in jeder Ordnung der beiden Factoren.« (§ 34.)

15. Das Produkt von zwei unendlich großen (kleinen) Zahlen ist unendlich groß (bzw. klein). (§ 35.) Das Produkt einer endlichen Anzahl von endlichen Zahlen ist weder unendlich klein noch unendlich groß (§ 36). Auch der Quotient $\frac{A}{B}$, wo A und B endlich, $B \neq 0$ ist, ist weder unendlich klein noch unendlich gross. (§ 37.)

16. »Wenn ein endlicher oder auch unendlicher Zahlenausdruck A meßbar ist: so läßt sich für jede beliebige positive oder negative Rationalzahl $\frac{m}{n}$ bestimmen, ob der Unterschied $A - \frac{m}{n}$ Null oder positiv oder negativ sei; und er ist jederzeit nur Eins von diesen Dreien«. (§ 38.)

17. Sind A und B meßbare Zahlen, so ist auch ihre Summe $A + B$ meßbar. (§ 39.) Ebenso für eine Summe von endlich vielen Summanden. (§ 40.)

18. »Wenn die Summanden $A, B, C, \ldots, L$, deren Anzahl n ist, beziehungsweise die messenden Brüche $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}$ haben, so kann der messende Bruch der Summe $A + B + C + \ldots + L$ nie kleiner als $\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}{q}$ und nie größer als $\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + n - 1}{q}$ sein.« (§ 41.)

19. »Ist eine Zahl A meßbar; so lassen sich jederzeit die beiden Gleichungen ansetzen

$$A = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma}{abc} + \frac{\delta}{abcd} + \cdots + \frac{\mu}{abcd \ldots m} + P_1,$$

$$A = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma}{abc} + \frac{\delta}{abcd} + \cdots + \frac{\mu + 1}{abcd \ldots m} - P_2,$$

worin die Zeichen $a, b, c, d, \ldots, m$ gewisse beliebige wirkliche und absolute Zahlen, die von der zweiten anzufangen, alle > 1 sind, bedeuten; das Zeichen α eine entweder positive oder negative wirkliche Zahl oder auch eine bloße Null, die Zeichen $\beta, \gamma, \delta, \ldots, \mu$ aber insgesannt nur positive wirkliche Zahlen oder Nullen bedeuten, so jedoch, daß jedenfalls $\beta < b, \gamma < c, \delta < d, \ldots, \mu < m$ ist, die Zeichen P_1 und P_2 endlich die schon bekannte Bedeutung haben; das erste nämlich, wenn nicht Null, etwas Positives, das zweite schlechterdings etwas Positives vorstellen sollen. (§ 42.)

20. Sind A und B meßbare Zahlen, so ist auch ihr Produkt AB meßbar. (§ 43.) Ebenso für ein Produkt von endlich vielen Faktoren. (§ 44.)

21. »Wenn zu einer meßbaren Zahl A eine andere J, welche unendlich klein ist, zugefügt oder von derselben abgezogen wird: so stellt auch $A \pm J$ eine solche messbare Zahl dar, welche denselben messenden Bruch wie A hat.«

(§ 45.) »Wenn umgekehrt ein Paar Ausdrücke A und B forwährend einen und denselben messenden Bruch darbieten, so kann der Unterschied $A - B$ nur Eines von Beiden, entweder Null oder unendlich klein sein.« (§ 46.)

22. Erklärung. Von nun an »werde ich ein Paar Zahlenausdrücke A und B (sie mögen endlich oder unendlich sein) einander *gleich* oder *gleichgeltend* nennen und $A = B$ schreiben, sofern nur beide meßbar und bei dem Geschäfte dieses Messens einerlei Zahlen darbieten, in dem Sinne, daß zu jedem beliebigen q immer dasselbe positive oder negative p für A sowohl als für B gehört, das die vier Gleichungen erfüllt:

$$A = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2, \quad B = \frac{p}{q} + P_3 = \frac{p+1}{q} - P_4,$$

worin die Zeichen P_1 und P_3 entweder Nullen, oder gewisse rein positive Ausdrücke, die Zeichen P_2 und P_4 aber immer rein positive Ausdrücke bezeichnen sollen. Ich sage dagegen, B wäre *größer* als A, oder A *kleiner als* B, und schreibe $B > A$ oder $A < B$: so oft der Unterschied $B - A$ positiv und nicht unendlich klein ist.« (§ 50.)

23. »Alle unendlich kleinen Zahlen müssen als gleichgeltend mit Null selbst angesehen werden.« (§ 52.)

24. »Anmerkung. Da die unendlich kleinen Zahlen nicht eben in jedem Betrachte, sondern nur hinsichtlich ihres Verhaltens bei dem Geschäfte des Messens der Null gleich gelten: so dürfte es zweckmäßig sein, dergleichen Zahlen, wenn man sie Null nennt, zur besseren Unterscheidung, bloß relative oder beziehungsweise Null zu nennen; und im Gegensatze von ihnen die Null, deren Begriff wir schon früher kennen gelernt, die absolute Null zu heißen.« (§ 53.)

25. »Wenn die Addenden $A, B, C, \ldots$, deren Menge endlich ist, meßbare Zahlen sind, deren jede nur einen einzigen Werth hat, so ist auch die Summe eine meßbare Zahl, welche auch nur einen einzigen Werth hat.« (§ 54.)

26. Es werden jetzt (§ 55—67) einige Sätze über die Ungleichheit unter den meßbaren Zahlen aufgestellt. Von diesen heben wir hervor:

»Wenn wir bei dem Geschäfte des Messens zweier gegebenen Zahlen A und B einmahl auf einen Nenner q gerathen, für welchen ein (in der Bedeutung des § 6) größeres p zum messenden Bruche der B als der A gehöret: so ist $B > A$.« (§ 67.)

27. »Wenn A und B ein Paar meßbare Zahlen sind: so ist immer Eines aber auch nur Eines von diesen Dreien der Fall, entweder $A = B$ oder $A > B$ oder $A < B$.« (§ 68.)

28. »Wenn A und B ein Paar meßbare und endliche Zahlen sind, welche wir übrigens beide als positiv oder absolut betrachten, so gibt es immer irgend ein vielfaches der Einen, das größer, und irgend einen aliquoten Theil derselben, der kleiner als die andere ist.« (§ 69.)

29. Es wird jetzt die Beziehung „zwischen“ auf die übliche Weise erklärt (§ 70) und einige Sätze aufgestellt. (§ 71—80.) Wir heben hervor den Satz:

»Wenn A und C ein Paar ungleiche meßbare Zahlen sind, so gibt es jederzeit eine dritte meßbare Zahl, die zwischen beiden liegt.« (§ 74.)

Seine unmittelbare Folge ist der Satz:

»Die Menge der meßbaren Zahlen, die zwischen je zwei von einander verschiedenen meßbaren Zahlen liegen, ist unendlich.« (§ 79.)

30. »Wenn die maßbare Zahl M zwischen den meßbaren Zahlen L und R liegt, und A ist irgend eine endliche und positive Zahl: so liegt auch das Product $A \,.\, M$ zwischen den Producten $A \,.\, L$ und $A \,.\, R$.« (§ 80.)

31. Erklärung. »Wenn eine gewisse Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ allen meßbaren Zahlen, die innerhalb der zwei ungleichen L und R liegen, den Zahlen L und R selbst aber nicht zukommt: so sagen wir, $\mathfrak{B}$ *komme allen meßbaren Zahlen von L ausschließlich bis zu R ausschließlich* zu.« Der Sinn der Definitionen, die entstehen, wenn das Wort ausschließlich mutatis mutandis durch einschließlich in einem der Fälle oder in beiden ersetzt wird, ist einleuchtend. »Wenn endlich eine gewisse Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ zwar der Zahl M zukommt, allein es gibt keine noch so kleine meßbare Zahl μ von der Art, daß gesagt werden könnte, die Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ komme allen zwischen $M + \mu$ und $M - \mu$ gelegenen Zahlen zu: so sage ich, die Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ komme der Zahl M *als einer isoliert stehenden* zu.« (§ 81.)

32. Es folgen beinahe selbstverständliche Sätze (§ 82—85), in denen die oben definierten Begriffe vorkommen.

33. »Wenn die Zeichen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ veränderliche meßbare Zahlen bedeuten, die ins Unendliche abnehmen können, wenn ferner die Menge dieser Zahlen endlich und unveränderlich ist: so stellt die algebraische Summe $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \ldots + \Omega_n$ abermals eine Zahl vor, die ins Unendliche abnehmen kann, wenn sie nicht etwa fortwährend $= 0$ ist.« (§ 86.)

34. »Wenn A und B ein Paar meßbare Zahlen bedeuten, die unverändert bleiben, während die meßbaren Zahlen Ω_1 und Ω_2 in das unendliche abnehmen, und es soll fortwährend die Gleichung $A \pm \Omega_1 = B \pm \Omega_2$ bestehen: so muß $A = B$ sein.« (§ 87.)

35. »Der zu dem messenden Bruche $\frac{p}{q}$ einer Zahl A gehörige nächst größere Bruch $\frac{p+1}{q}$ kann durch Vermehrung von q immer noch kleiner gemacht werden, als er schon ist.« (§ 88.)

36. »Bedeutet X eine Zahl, die meßbar und unveränderlich ist, oder sich auch verändert, jedoch nur so, daß sie nach ihrem absoluten Werthe stets kleiner verbleibt, als eine gegebene Rationalzahl, während die meßbare Zahl

Ω nach ihrem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen kann: so sind auch die Produkte $X \,.\, \Omega$ und $\Omega \,.\, X$ Zahlen, die ihrem absoluten Werthe nach in das Unendliche abnehmen können.« (§ 89.)

37. »Wenn A und B ein Paar meßbare und unveränderliche, Ω_1 und Ω_2 aber ein Paar veränderliche Zahlen sind, die ins Unendliche abnehmen können, so ist $(A \pm \Omega_1)(B \pm \Omega_2) = AB + \Omega_3$, wo Ω_3 abermals nur eine meßbare Zahl bedeutet, die ins Unendliche abnehmen kann, wenn sie nicht etwa fortwährend $= 0$ ist.« (§ 92.) Ein ähnlicher Satz gilt auch für ein Produkt einer endlichen Anzahl von Faktoren. (§ 93.)

38. »Der Lehrsatz von der Versetzung der Faktoren, welcher von allen Rationalzahlen gilt, gilt auch von allen meßbaren Zahlen überhaupt.« (§ 94.)

39. »Die im Früheren erwiesene Gleichung für bloße Rationalzahlen, daß nämlich

$$A(B \pm C \pm \ldots) = AB \pm AC \pm \ldots$$

sei, gilt auch für alle meßbaren Zahlen überhaupt; sofern die Menge der Glieder, aus welchen der Multiplicandus $B \pm C \pm \ldots$ zusammengesetzt ist, nur endlich ist.« (§ 96.)

40. »Erklärung. Wenn der Unterschied zwischen den beiden meßbaren Zahlen X und Y nach seinem absoluten Werthe betrachtet in das Unendliche abnehmen kann, so sage ich, daß *sie einander so nahe rücken können, als man nur will.*« (§ 97.)

41. »Sollen zwei meßbare Zahlen X und Y einander so nahe rücken können, als man nur immer will, so muß wenigstens Eine derselben veränderlich sein, und unendlich viele Werthe annehmen können, darunter kein größter ist, wenn diese Zahl die kleinere, und kein kleinster, wenn diese Zahl die größere ist. Soll es aber überdieß eine dritte unveränderliche Zahl A geben, welche fortwährend zwischen den beiden ersteren liegt: so müssen beide veränderlich sein, und unendlich viele Werthe haben, darunter kein größter bei der kleineren und kein kleinster bei der größeren sein darf.« (§ 98.)

42. »Wenn eine unveränderliche Zahl fortwährend zwischen den beiden veränderlichen, aber meßbaren Zahlen X und Y liegt, deren Unterschied $Y - X$ in das Unendliche abnehmen kann, so ist A selbst eine meßbare Zahl.« (§ 99.)

43. »Es gibt nicht zwei voneinander verschiedene, d. h. ungleiche meßbare und unveränderliche Zahlen, die fortwährend innerhalb derselben zweien veränderlichen, aber meßbaren Grenzen liegen, wenn diese aneinander so nahe kommen können, ale mann nur immer will.« (§ 100.)

44. »Wenn der messende Bruch $\frac{p}{q}$ einer Zahl A fortwährend innerhalb der beiden Grenzen X und Y liegt, deren positiver Unterschied $Y - X$ in das

Unendliche abnimmt: so kann höchstens die größere dieser beiden Zahlen, nämlich Y, unveränderlich sein, und dieser muß dann der Zahl A selbst gleichgelten. Sind aber beide Zahlen X und Y veränderlich: so liegt auch die Zahl A selbst fortwährend zwischen beiden.« (§ 101.)

45. »Wenn die unendlich vielen meßbaren Zahlen

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+r}, \ldots$$

die wir als ebenso viele durch die Stellenzahlen $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, n + r, \ldots$ unterschiedenen Glieder einer in das Unendliche fortlaufenden Reihe betrachten können, nach einem solchem Gesetze fortschreiten, daß der Unterschied zwischen dem n^{ten} und $(n + r)^{\text{ten}}$ Gliede dieser Reihe, d. h. $X_{n+r} - X_n$ nach seinem absoluten Werthe betrachtet, so groß man auch die Zahl r annehmen mag, fortwährend kleiner verbleibt als ein gewisser Bruch $\frac{1}{N}$, der selbst so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man nur erst die Zahl n groß genug angenommen hat: so behaupte ich, es gäbe jederzeit eine, aber auch nur eine einzige meßbare Zahl A, von der gesagt werden kann, daß sich die Glieder unserer Reihe ihr in das Unendliche nähern, d. h. daß der Unterschied $A - X_n$ oder $A - X_{n+r}$ bloß durch Vermehrung von n oder r seinem absoluten Werthe nach in das Unendliche abnimmt.« (§ 102.)

46. »Wenn wir von einer gewissen Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ bloß wissen, daß sie nicht allen Werthen einer veränderlichen meßbaren Zahl X, die größer (oder kleiner) wohl aber allen, die kleiner (größer) als eine gewisse U sind, zukomme: so können wir mit Gewißheit behaupten, daß es eine meßbare Zahl A gibt, welche die größte (kleinste) derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle kleineren (größeren) die Beschaffenheit $\mathfrak{B}$ haben: wobei noch unentschieden bleibt, ob der Werth $X = A$ auch selbst diese Beschaffenheit habe.« (§ 104.)

47. »Wenn die veränderliche, aber meßbare Zahl Y fortwährend größer verbleibt, als die veränderliche aber meßbare X; bei jener überdieß kein kleinster, bei dieser kein größter Werth Statt findet: so gibt es jederzeit wenigstens Eine meßbare Zahl A, die fortwährend zwischen den beiden Grenzen X und Y liegt. Wenn ferner der Unterschied $Y - X$ nicht ins Unendliche abnehmen kann; so gibt es solcher zwischen den beiden Grenzen X und Y liegenden meßbaren Zahlen unendlich viele. Wenn aber dieser Unterschied in das Unendliche abnimmt; so gibt es nur eine einzige. Wenn endlich der Unterschied $Y - X$ in das Unendliche abnimmt, und entweder X einen größten, oder Y einen kleinsten Werth hat: so gibt es nicht eine einzige meßbare Zahl, die fortwährend zwischen X und Y läge.« (§ 105.)

48. Die letzten Paragraphen (§ 106—116) beschäftigen sich mit den Brüchen von der Form A/B, wo A und B meßbare Zahlen sind und B überdies nicht unendlich klein oder Null ist.

Anmerkungen

1—26. (§ 1— 67.) Die Begründung der Theorie der reellen Zahlen, wie sie von Bolzano gegeben wird, kann nicht als stichhaltig betrachtet werden. Wie aus Absch. 3 hervorgeht, wird als bekannt vorausgesetzt, was nichtnegative und was positive unendliche Zahlenausdrücke sind. Schon diese Frage ist nicht so einfach zu beantworten. Die Hinfälligkeit der Bolzanoschen Theorie ist aber vielleicht daraus am auffälligsten ersichtlich, wie Bolzano [7] die positiven und negativen unendlich kleinen Zahlen einführt. Mit diesen positiven und negativen unendlich kleinen Zahlen sind aber nicht alle mit Null gleichgeltenden Zahlen erschöpft, wie Bolzano es zu glauben scheint.

Es würde sich also darum handeln, für Bolzanosche Theorie eine solche Deutung zu suchen, daß soviel als möglich von ihr gerettet wird. Diese Möglichkeit bietet die Cantorsche (Cantor-Méraysche) Theorie deer reellen Zahlen dar.[7])

Dabei sollen die Begriffe und Sätze der Cantorschen Theorie auf der linken Seite als Deutung der zugehörigen Begriffe und Sätze der Bolzanoschen Theorie auf der rechten Seite gegeben werden.

Cantorsche Theorie:	*Bolzanosche Theorie*:
unendliche Folge von rationalen Zahlen $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$[8])	unendlicher Zahlenausdruck,
konvergente Folge,	meßbare Zahl,
Nullfolge,	unendlich kleine Zahl,
äquivalente konvergente Folgen.	gleichgeltende meßbare Zahlen.

Man kann dann behaupten:

Die reelle Zahl ist die Klasse der miteinander äquivalenten konvergenten Folgen. Jede konvergente Folge ist „konkrete Darstellung“[9]) einer be-	Die reelle Zahl ist die Klasse der miteinander gleichgeltenden meßbaren Zahlen. Jede meßbare Zahl ist „konkrete Darstellung“ einer be-

[7]) Vergl. hiezu *Bachmann* [1], S. 9, 15, *Stolz* u. *Gmeiner* [10], Abschn. 7a. Im folgenden schließe ich mich der vorzüglichen Darstellung dieser Theorie an, die *Čech* [5] gegeben hat.

[8]) Den Betrachtungen Bolzano's würde vielleicht näherstehen, wenn wir die unendliche Summe $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$ einführten. Diese Summe kann aber unmittelbar auf die Folge $c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3, \ldots$ zurückgeführt werden.

[9]) Wenn bei einer Äquivalenzrelation $\sim$, die in der Menge $\mathfrak{M}$ definiert ist, $\sim (x)$ die Klasse der mit x äquivalenten Elemente aus $\mathfrak{M}$ bedeutet, so wird x als *konkrete Darstellung des abstrakten Begriffes* $\sim (x)$ bezeichnet. S. *Čech* [5], Kap. II, § 2.

stimmten reellen Zahl, die wir mit $\lim a_n$ bezeichnen und Limes der Folge (a_n) nennen werden. Die miteinander äquivalenten Folgen sind konkrete Darstellungen einer und derselben reellen Zahl.

stimmten reellen Zahl. Die gleichgeltenden meßbaren Zahlen sind konkrete Darstellungen einer und derselben reellen Zahl.

Sind α und β zwei reelle Zahlen und ist $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ [also (a_n) und (b_n) konvergent], so sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ konvergent. Wir definieren $\alpha \pm \beta = \lim(a_n \pm b_n)$, $\alpha\beta = \lim(a_n b_n)$. Ist die reelle Zahl $\alpha \neq 0$, so kann man $\alpha = \lim a_n$ setzen, wo $a_n \neq 0$ ist für alle n. α besitzt hinsichtlich der Multiplikation ein Inverses, nämlich $\lim \frac{1}{a_n}$. Man kann zeigen, daß bei der auf solche Weise definierten Addition und Multiplikation die reellen Zahlen einen Körper bilden, der eine wirkliche Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen ist. Dabei wird die konvergente Folge $a, a, a, \ldots$ mit der rationalen Zahl a identifiziert.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren:[10])

Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen von rationalen Zahlen, so sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ konvergent. Wir definieren die Summe $(a_n) + (b_n)$ der Folgen (a_n) und (b_n) durch $(a_n + b_n)$, ihr Produkt $(a_n)(b_n)$ durch $(a_n b_n)$. Wenn man die Addition und Multiplikation in der angegebenen Weise erklärt, dann bilden die konvergenten Folgen von rationalen Zahlen und mutatis mutandis auch die Bolzano'schen meßbaren Zahlen einen Ring $\mathfrak{R}$.

Dann gilt in der Cantorschen Theorie der Satz:

Die Nullfolgen bilden ein Ideal $\mathfrak{J}$ im Ringe $\mathfrak{R}$ der konvergenten Folgen.

Ihm entspricht in der Bolzanoschen Theorie der Satz:

Die unendlich kleinen Zahlen bilden ein Ideal $\mathfrak{J}$ im Ringe $\mathfrak{R}$ der meßbaren Zahlen.

Dann haben wir den Satz: Der Körper der reellen Zahlen ist der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}$.

Die äquivalenten konvergenten Folgen

Die gleichgeltenden meßbaren Zahlen

werden dabei zu Kongruenzklassen (mod $\mathfrak{J}$).

Ich spreche das vorige Ergebnis noch weniger präzis aus, wenigstens für den Fall der Bolzanoschen Theorie: Das Rechnen mit den reellen Zahlen ist nichts anderes als das Rechnen mit den meßbaren Zahlen unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Zahlen. So etwas scheint Bolzano vorzuschweben

[10]) *Van der Waerden* II [10], § 67.

(vgl. z. B. § 51). Aber der Schritt von den meßbaren Zahlen als „konkreter Darstellung" der reellen Zahlen zu dem Abstraktum der reellen Zahlen wird bei Bolzano nie klar genug hervorgehoben. Bolzano scheint die ursprüngliche Bedeutung der Gleichheit für meßbare Zahlen zu verlassen (in der Cantorschen Theorie ist es die Gleichheit der konvergenten Folgen), die neue Definition der Gleichheit im Sinne von Gleichwertigkeit einzuführen und dann die meßbaren Zahlen als gleichbedeutend mit reellen Zahlen zu betrachten.

Um die Anordnung im Körper der reellen Zahlen einzuführen, werden wir zuerst die positiven reellen Zahlen definieren. Dabei soll der positive Zahlenausdruck der Bolzanoschen Theorie so gewählt werden, daß er den ausgeprägt positiven Folgen der Cantorschen Theorie entspricht.[11])

Zur Entwicklung einer reellen Zahl in eine Cantorsche Reihe (§ 42, 19) bedient man sich des sogenannten Cantorschen Algorithmus.[12]) Dieser beruht auf dem Satze:

Ist α eine reelle Zahl, so existiert eine und nur eine ganze Zahl n von der Art, dass $n \leqq \alpha < n + 1$ gilt. Die Zahl n wird der *ganze Teil* der reellen Zahl α genannt und mit $[\alpha]$ (oder mit $E(\alpha)$ bezeichnet).[13])

19. (§ 42.) Cantorsche Reihen. Man kann hier einfach $a = 1$ setzen. Durch Grenzübergang erhält man dann die Darstellung der reellen Zahl durch die sogenannte Cantorsche Reihe.[14]) (Die eindeutige Darstellung einer reellen Zahl durch die Cantorsche Reihe (mit $a = 1$) wird man erhalten, wenn man verlangt, daß in unendlich vielen Fällen $\beta < b - 1$, $\gamma < c - 1$, $\delta < d - 1, \ldots$ gilt. Dies wird aber von Bolzano nicht angeführt.) Als speziellen Fall erhält man die Darstellung der reellen Zahl durch einen g-adischen Bruch (g ganz > 1), (einen dyadischen Bruch für $g = 2$ und einen Dezimalbruch für $g = 10$).

Im weiteren bedient sich Bolzano bei den Beweisen oft der Darstellung der reellen Zahlen durch Cantorsche Reihen. Diese Reihen können aber in meisten Fällen durch g-adische, ja sogar einfach durch dyadische oder Dezimalbrüche ersetzt werden.

29. (§ 74.) Die Menge der reellen Zahlen ist überall dicht (pantachisch), ebenso wie die Menge der rationalen Zahlen.

Nebenbei bemerke ich, daß Bolzano diese Eigenschaft zur Bezifferung neuer Blätter benützt, die er zwischen zwei Blätter der schon bezifferten Hand-

---

[11]) Eine konvergente Folge der rationalen Zahlen (a_n) heisst *ausgeprägt positiv*, wenn man eine solche rationale Zahl $v > 0$ angeben kann, dass die Ungleichheit $a_n > v$ für fast alle n erfüllt ist (s. *Čech* [5], S. 116).

[12]) Vgl. *Perron* [8], § 33.

[13]) S. *Čech* [5], S. 80 und 121.

[14]) Vgl. *Knopp* [7], S. 23, 24, *Perron* [8], § 33. Gelegentlich [19] werde ich (bei $a = 1$) die Zahlen $b, c, d, \ldots$, die Grundzahlen der betreffenden Cantorschen Reihe nennen.

schrift einlegen will, ohne die ganze Handschrift zu umnummerieren. Legt er ein Blatt zwischen die Blätter n und $n + 1$, so bezeichnet er es mit der Nummer $n + \frac{1}{2}$, bei der Einlegung eines weiteren Blattes zwischen die Blätter n und $n + \frac{1}{2}$ (bzw. $n + \frac{1}{2}$ und $n + 1$) bezeichnet er dieses Blatt mit $n + \frac{1}{4}$ (bzw. mit $n + \frac{3}{4}$). (Sollte man zwischen die Blätter n und $n + 1$ drei neue Blätter einlegen, würde man sie mit $n + \frac{1}{4}$, $n + \frac{1}{2}$, $n + \frac{3}{4}$ beziffern. Und ähnlich weiter.) Zur Bezifferung der Blätter werden dabei dyadische Brüche benützt. Zu ähnlichem Zwecke könnte man Dezimalbrüche benützen und allgemein g-adische Brüche mit einer beliebigen Grundzahl g (g eine ganze Zahl > 1) und endlich auch Cantorsche Reihen mit beliegigen Grundzahlen. Auf Cantorschen Reihen beruht eigentlich die „Bezifferung" der eingelegten Blätter mit Buchstaben aus verschiedenen Alphabeten. So kann man zur Bezeichnung der zwischen die Blätter n und $n + 1$ eingelegten Blätter die Zeichen $na, nb, nc, \ldots$ benützten, zur Bezeichnung der Blätter, die z. B. zwischen die Blätter nc und nd eingelegt werden sollen, dann die Zeichen $nc\alpha, nc\beta, nc\gamma, \ldots$ benützen und ähnlich weiter. Bei allen diesen Bezifferungen kommen als Rangnummern auch Brüche vor, und es kann der Fall eintreten, daß dabei Lücken erscheinen, d. h. daß zwischen zwei Brüchen, die wirklich Rangnummern von Blättern sind, ein Bruch aus dem angewandten System liegt, der Rangnummer keines Blatter ist. Das kann man verhüten, wenn man zur Bezifferung eine Cantorsche Reihe mit passend gewählten Grundzahlen wählt.

34. (§ 87.) Dieser Satz bildet die Grundlage der sogenannten *Exhaustionsmethode.*[15])

Die häufige Benützung dieses Satzes gerade in dieser Form als eines Beweisprinzips ist für Bolzano geradezu characteristisch. Dieses Verfahren steht unserem heutigen Rechnen mit Grenzwerten nahe.

38. (§ 94.) Es wird das assoziative Gesetz der Multiplikation gemeint und $A(BC) = (AB)\,C$ bewiesen.

39. (§ 96.) Das distributive Gesetz.

45. (§ 102.) Diese Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Folge wird als Konvergenzprinzip von Cauchy-Bolzano bezeichnet.[16])

Der angeführte Satz kommt bei Bolzano vor schon in der Schrift „Rein analytischer Beweis ..." [3].

46. (§ 104.) Es ist der Satz über das Infinum und Supremum, genannt Satz von Bolzano-Weierstraß.[17])

---

[15]) Vgl. *Knopp* [17], S. 5.

[16]) Vgl. hiezu *Knopp* [7], S. 6, *Perron* [8], § 18, *Jarník* [6], S. 452.

[17]) Vgl. hiezu *Knopp* [6], S. 6, *Perron* [7], § 12 u. 18, *Jarník* [6], S. 453.

Der Satz ist schon erhalten in Bolzano's Abhandlung „Rein analytischer Beweiss ..." [3], wo er auch mit voller Strenge formuliert wird. Der dort angeführte Beweiss ist insofern richtig, wie es möglich war in der Zeit, wo es an einer Begründung der Theorie der reellen Zahlen noch fehlte. Weierstraß hat in seinen Vorlesungen den Beweis von Bolzano in dieser Richtung vervollständigt. Dasselbe Ziel verfolgt hier auch Bolzano. Sein Beweis bedient sich der Entwicklung einer reellen Zahl in eine Cantorische Reihe und könnte leicht zu der jetzt verlangten Strenge ausgefeilt werden.

47. (§ 105.) $X < Y$ soll bedeuten, daß für die Mengen der reellen Zahlen X, Y die Beziehungen $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichheit $x < y$ zur Folge haben. Wenn a eine reelle Zahl ist, so soll ähnlich $X < a$ bezeichnen, daß für die Menge X aus $x \in X$ die Ungleichheit $x < a$ folgt.

Dann kann der Satz so ausgesprochen werden: *Es sei* $X < Y$.

I. *X soll keine größte und Y keine kleinste Zahl enthalten. Dann gibt es eine reelle Zahl a von der Art, daß $X < a < Y$ gilt. Die Zahl a ist eindeutig bestimmt, gerade wenn es beliebig kleine Unterschiede $y - x$ ($x \in X$, $y \in Y$) gibt.*

II. *Entweder soll X eine größte oder Y eine kleinste Zahl enthalten und es soll Unterschiede $y - x$ ($x \in X$, $y \in Y$) geben, die beliebig klein sind. Dann gibt es keine reelle Zahl a von der Art, daß für sie $X < a < Y$ gilt.*[18])

Dieser Satz erinnert an den Satz von Dedekind über die Zuordnung von reellen Zahlen und Schnitten.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Friedrich Bachmann:* Aufbau des Zahlensystems, Enzyklop. d. Mathem. Wiss., 2. Aufl., I. 1,3.

[2] *Bernard Bolzano:* Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag 1816, XVI + 147.

[3] *Bernard Bolzano:* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Abd. d. Königl. Böhm. Ges. d. Wiss. (*3*), *5*, 1817; auch als Faksimile-Druck, Berlin 1894, Mayer & Müller erschienen; Ostwalds Klassiker, Nr. 154, 1905, mit Anm. von *Ph. E. B. Jourdain*; Tschech. Übersetzung von *F. J. Studnička*, Čas. pro pěst. mat. a fys., *11*, 1881, 1—38 (auch als Separatdruck erschienen.)

[4] *Bernard Bolzano:* Functionenlehre (Herausgeg. u. mit. Anm. verseh. von K. *Rychlík*). B. Bolzano's Schriften 1, Prag 1930.

[5] *E. Čech:* Čísla a početní výkony, Praha 1954.

[6] *V. Jarník:* Bernard Bolzano a základy matematické analysy, Zdeňku Nejedlému Čs. Akad. věd 1953, S. 450—458.

---

[19]) Auf diese Stilisierung des Satzes hat mich V. Jarník aufmerksam gemacht.

[7] *K. Knopp:* Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse, Enzyklop. d. mathem. Wiss. 2. Aufl., I 1,4.

[8] *O. Perron:* Irrationalzahlen, 1921.

[9] *O. Stolz* und *J. A. Gemeiner:* Theoretische Arithmetik II. 1. Aufl. 1902, 2. Aufl. 1915.

[10] *B. L.* van der *Waerden:* Moderne Algebra, I, 2. Aufl., 1937.

[11] *Eduard Winter:* Bernard Bolzano und sein Kreis, 1933. (Tschech. Übersetz. von dr. *Z. Kalista*, 1935.)

[12] *Eduard Winter:* Leben und geistige Entwicklung des Sozialethikers und Mathematikers Bernard Bolzano (1781—1848), Halle (Saale), 1949.

Резюме

ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В РУКОПИСНОМ НАСЛЕДСТВЕ БОЛЬЦАНО

КАРЕЛ РЫХЛИК (Karel Rychlík), Прага.

(Поступило в редакцию 10/XII 1956 г.)

Эта статья представляет реферат о попытке Бернарда Больцано разработать теорию действительных чисел, содержащейся в рукописи „*Theorie der unendlichen Zahlen-(Grössen-) begriffe (ausdrücke)*“ и составляющей часть обширной рукописи „*Grössenlehre*“.