

Miloš Zlámal

Über die erste Randwertaufgabe für eine singularär perturbierte elliptische Differentialgleichung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 3, 413–417

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100257>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE ERSTE RANDWERTAUFGABE
FÜR EINE SINGULÄR PERTURBIERTE ELLIPTISCHE
DIFFERENTIALGLEICHUNG

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt am 15. X. 1956.)

Es wird die erste Randwertaufgabe für die Gleichung
 $-a(x, \varepsilon) \Delta u + u = F(x, \varepsilon)$ untersucht, wo $a(x, \varepsilon)$ eine
positive Funktion des Punktes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist und
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a(x, \varepsilon) = 0$ gilt.

Es sei \mathcal{G} ein beschränktes Gebiet im n -dimensionalen Euklidischen Raume
 E_n und Δu der n -dimensionale Laplacesche Differentialausdruck. MORGEN-
STERN hat in [1] ausser anderem bewiesen (siehe Satz 4), dass die Lösungen
der Randwertaufgabe

$$-\varepsilon \Delta u + u = 0, \quad [u] = f^1) \quad (1)$$

bei $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathcal{G} gleichmässig gegen
Null streben. Zu dieser Behauptung führen wir zuerst einen kurzen elementaren
Beweis ein. Dabei erhalten wir eine effektive Abschätzung für die Schnellig-
keit der Konvergenz. Dann werden wir uns mit einem allgemeineren Fall
beschäftigen, nämlich mit der Randwertaufgabe

$$-a(x, \varepsilon) \Delta u + u = F(x, \varepsilon), \quad [u] = f(\varepsilon). \quad (2)$$

Hinsichtlich des Gebietes \mathcal{G} setzen wir voraus, dass es bechränkt ist und
dass die erste Randwertaufgabe für alle stetigen Randwerte lösbar ist. H sei
seine Grenze und wenn $\bar{\mathcal{D}}$ den gewählten abgeschlossenen Teilbereich von \mathcal{G} be-
deutet, $\varrho > 0$ sei die Entfernung $\bar{\mathcal{D}}$ von H . x bedeute den Punkt (x_1, x_2, \dots, x_n)
in E_n und $u(x, \varepsilon)$ eine Lösung von (1).

Es sei jetzt $M_0 = \max |f|$. Weil die Lösungen der Gleichung (1) in \mathcal{G} weder
den kleinsten negativen noch den grössten positiven Wert annehmen, so ist

$$|u(x, \varepsilon)| \leq M_0. \quad (3)$$

¹⁾ $[u]$ bedeutet immer die Randwerte.

Wir benutzen die Mittelwertgleichung, wobei $x \in \bar{\mathfrak{D}}$ der Mittelpunkt und ϱ der Radius der Kugel Ω ist, so dass das Innere der Kugel Ω immer in \mathfrak{G} liegt. Es gilt (siehe [2], S. 261, Formel (40)):

$$u(x, \varepsilon) = \frac{\left(\frac{i\varrho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{i\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u \, d\Omega, \quad (4)$$

wo $J_\nu(z)$ die ν^{te} Besselsche Funktion ist. Daraus und aus (3) erhalten wir

$$|u(x, \varepsilon)| \leq M_0 \frac{\left(\frac{i\varrho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{i\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}. \quad (5)$$

Aus (5) folgt $u(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{D}}$ bei $\varepsilon \rightarrow 0 +$.

Richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Randwertaufgabe (2). Es seien $a(x, \varepsilon)$, $F(x, \varepsilon)$ und $F_0(x)$ für $x \in \bar{\mathfrak{G}}$ und $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ definiert und $a(x, \varepsilon)$ sei in $\bar{\mathfrak{G}}$ einmal und $F_0(x)$ zweimal stetig differenzierbar; $f(\varepsilon)$ sei stetig auf H . Dann gilt der folgende

Satz. *Es sei $a(x, \varepsilon) > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} a(x, \varepsilon) = 0$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x, \varepsilon) = F_0(x)$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{G}}$ und $f(\varepsilon)$ gleichmässig beschränkt auf H . Es existieren die (wie bekannt eindeutig bestimmten) Lösungen $u(x, \varepsilon)$ von (2), und zwar bei jeder Wahl der rechten Seite F und der Randwerte f . Dann streben $u(x, \varepsilon)$ bei $\varepsilon \rightarrow 0 +$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G} gleichmässig gegen $F_0(x)$.*

Beweis. Setzen wir $z = u - F_0$. Wir erhalten

$$-a(x, \varepsilon) \Delta z + z = G(x, \varepsilon), \quad [z] = g(\varepsilon),$$

wo $G(x, \varepsilon) = F(x, \varepsilon) - F_0(x) + a(x, \varepsilon) \cdot \Delta F_0(x) \rightarrow 0$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{G}}$ und $g(\varepsilon) = f(\varepsilon) - [F_0]$ gleichmässig beschränkt auf H ist, $|g(\varepsilon)| \leq M_0$. Es seien $z_1(x, \varepsilon)$ und $z_2(x, \varepsilon)$ die Lösungen der Randwertaufgaben

$$-a(x, \varepsilon) \Delta z_1 + z_1 = 0, \quad [z_1] = g(\varepsilon), \quad (6)$$

$$-a(x, \varepsilon) \Delta z_2 + z_2 = G(x, \varepsilon), \quad [z_2] = 0, \quad (7)$$

so dass $z = z_1 + z_2$. Wir beweisen: a) $z_1(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G} ; b) $z_2(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ gleichmässig in $\bar{\mathfrak{G}}$.

a)²⁾ Man kann $g(\varepsilon) \geq 0$ voraussetzen. Denn wenn \bar{z}_1 und \bar{z}_2 die Lösungen von $-a(x, \varepsilon) \Delta z_1 + z_1 = 0$ bedeuten, wobei

$$[\bar{z}_1] = \frac{1}{2}(\max|g(\varepsilon)| + g(\varepsilon)) \quad \text{und} \quad [\bar{z}_2] = \frac{1}{2}(\max|g(\varepsilon)| - g(\varepsilon)),$$

dann ist $z_1 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

²⁾ Mein ursprünglicher Beweis war ein wenig komplizierter. Die Vereinfachung verdanke ich dem Herrn J. NEČAS.

Die Lösung $z_1(x, \varepsilon)$ nimmt wieder nicht den kleinsten negativen und den grössten positiven Wert in \mathfrak{G} an und darum

$$0 \leq z_1(x, \varepsilon) \leq M_0. \quad (8)$$

Es sei $\bar{\mathfrak{K}}_1$ eine beliebige ganz in \mathfrak{G} liegende Kugel und $\bar{\mathfrak{K}}$ die konzentrische mit dem halben Radius. Es bedeute $z_0(x, \varepsilon)$ die Lösung von $\Delta z_0 = 0$, die auf $\bar{\mathfrak{K}}_1$ dieselben Randwerte wie $z_1(x, \varepsilon)$ annimmt. Nach dem Prinzip von Maximum und mit Rücksicht auf (8) gilt $0 \leq z_0(x, \varepsilon) \leq M_0$.

Nun schreiben wir (6) folgendermassen:

$$\Delta z_1 = \frac{1}{a(x, \varepsilon)} z_1. \quad (9)$$

Dann ist

$$z_1(x, \varepsilon) = z_0(x, \varepsilon) - \int_{\bar{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} d\xi, \quad (10)$$

wo $K(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Laplaceschen Differentialausdruckes bedeutet. Weil $z_1(x, \varepsilon) \geq 0$ und $0 \leq z_0(x, \varepsilon) \leq M_0$ gilt, folgt aus (10)

$$\int_{\bar{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} d\xi \leq M_0. \quad (11)$$

$K(x, \xi)$ nimmt als eine Funktion von ξ auf $\bar{\mathfrak{K}}$ ein positives Minimum k_0 an und darum

$$\int_{\bar{\mathfrak{K}}_1} K(x, \xi) \frac{z_1(\xi, \varepsilon)}{a(\xi, \varepsilon)} d\xi \geq \frac{k_0}{\max_{\varepsilon \in \mathfrak{G}} a(\xi, \varepsilon)} \int_{\bar{\mathfrak{K}}_1} z_1(\xi, \varepsilon) d\xi,$$

so dass aus (11) folgt

$$\int_{\bar{\mathfrak{K}}_1} z_1(\xi, \varepsilon) d\xi \leq \frac{M(\varepsilon)}{k_0} M_0, \quad (12)$$

wo $M(\varepsilon) = \max a(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ und k_0 nur von dem Radius der Kugel $\bar{\mathfrak{K}}$ abhängt.

Jetzt genügt es den Kunstgriff von Morgenstern zu benutzen. Nach (8) und (9) ist nämlich $z_1(x, \varepsilon)$ eine subharmonische Funktion. Deshalb folgt aus (12) auf Grund der Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen, dass $z_1(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G} bei $\varepsilon \rightarrow 0$ +.

b) Was die Behauptung $z_2(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ gleichmässig in \mathfrak{G} betrifft, folgt sie unmittelbar aus der Abschätzung

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leq \max_{x \in \mathfrak{G}} |G(x, \varepsilon)|, \quad (13)$$

die wieder eine Folge der bekannten Maximum- und Minimumeigenschaften der Lösungen von (7) ist.

Бemerkung. (13) gibt eine effektive Abschätzung für die Schnelligkeit der Konvergenz. Ist speziell $a(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon$ und $F(x, \varepsilon) = F_0(x)$, dann ist $G(x, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Delta F_0$, so dass

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leq \varepsilon \cdot \max |\Delta F_0|.$$

Für $z_1(x, \varepsilon)$ gilt die Abschätzung (5), wo $|f(\varepsilon) - [\Delta F_0]| \leq M_0$ und ρ die Entfernung \mathfrak{D} von H ist. Dabei

$$u(x, \varepsilon) = F_0(x) + z_1(x, \varepsilon) + z_2(x, \varepsilon).$$

LITERATUR

- [1] *D. Morgenstern*: Singuläre Störungstheorie partieller Differentialgleichungen, Journ. of Rat. Mech. and Anal., vol. 5 (1956), 203—216.
 [2] *R. Courant* und *D. Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik II, Berlin, Springer, 1937.

Резюме

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 15/X 1956 г.)

Пусть \mathfrak{G} — ограниченная, связная и открытая область в E_n , пусть Δu обозначает n -мерный оператор Лапласа и x — точку (x_1, \dots, x_n) в E_n . Пусть функции $a(x, \varepsilon)$, $F(x, \varepsilon)$ и $F_0(x)$ определены для $x \in \mathfrak{G}$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, первые две обладают непрерывными частными производными первого порядка, а $F_0(x)$ — второго порядка, $a(x, \varepsilon) > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} a(x, \varepsilon) = 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x, \varepsilon) = 0$ равномерно в \mathfrak{G} . Кроме того, пусть $f(\varepsilon)$ — непрерывная функция на границе H области \mathfrak{G} . При этих условиях доказано, что решения $u(x, \varepsilon)$ краевой задачи

$$-a(x, \varepsilon) \Delta u + u = F(x, \varepsilon), \quad [u] = f(\varepsilon)$$

сходятся в каждой замкнутой части области \mathfrak{G} равномерно к $F_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Доказательство дает одновременно эффективную оценку быстроты сходимости. Так напр., в частном случае $a(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon$ и $F(x, \varepsilon) = F_0(x)$ имеет место

$$u(x, \varepsilon) = F_0(x) + z_1(x, \varepsilon) + z_2(x, \varepsilon),$$

причем во всей \mathfrak{G}

$$|z_2(x, \varepsilon)| \leq \varepsilon \max |\Delta F_0|$$

и в каждой замкнутой части $\bar{\mathfrak{D}}$ области \mathfrak{G}

$$|z_1(x, \varepsilon)| \leq M_0 \frac{\left(\frac{i\rho}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)},$$

где $\rho > 0$ есть расстояние $\bar{\mathfrak{D}}$ от H , $M_0 \geq |f(\varepsilon) - [\Delta F_0]|$ и $J_\nu(z)$ — Бесселева функция порядка ν .