Alois Apfelbeck

Mathematische Theorie der Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 3, 374–412

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100256

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

MATHEMATISCHE THEORIE DER TORSIONS-UND BIEGUNGSSCHWINGUNGEN ANISOTROPER STÄBE

ALOIS APFELBECK, Praha.

(Eingelangt am 18. September 1956.)

Diese Arbeit knüpft an eine Abhandlung von E. KAMKE [3] an. Es wird ein System von partiellen Differentialgleichungen (1,1) mit den Anfangsbedingungen (1,2) und den Randbedingungen (1,3) untersucht. Zuerst wird ein Eindeutigkeitssatz bewiesen. Weiter befasst sich der Verfasser mit der Existenz von Eigenwerten und Eigenpaaren der Randwertaufgabe (3,4), (3,5) und beweist endlich, dass das System der Eigenpaare vollständiges Teilsystem im System der Randpaare bildet.

1. Formulation des Problems

In der theoretischen Physik werden die Transversalschwingungen von Stäben und Platten unabhängig von den Torsionsschwingungen der Stäbe untersucht. Bei anisotropen Stoffen muss man aber diese beiden Schwingungen gemeinsam untersuchen.

Es sei ein anisotroper Zylinderstab von der Länge l vorgelegt, dessen Durchmesser im Vergleich zu seiner Länge l sehr klein ist. Das entsprechende System von Schwingungsgleichungen findet man bei W. VOIGT [5]. Dieses System besteht aus drei Differentialgleichungen für drei unbekannte Funktionen. Der lineare Elastizitätsmodul s_{35} ist praktisch sehr klein. Man kann deshalb in erster Annäherung $s_{35} = 0$ setzen. Dadurch wird das ursprüngliche System im wesentlichen auf ein System von nur zwei Differentialgleichungen für zwei unbekannte Funktionen reduziert. Dieses System werden wir im Weiteren näher untersuchen.

Im Falle eines beiderseits freien Stabes erhält man nach kurzer Rechnung folgendes System:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \alpha \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^3 n}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} &= \gamma \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \delta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1,1)$$

Unsere Aufgabe ist nun Lösungen dieses Systems aufzusuchen, die erstens den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) &= \varphi(x)\,, \quad n(x,0) = \mu(x)\,, \\ v_t(x,0) &= \psi(x)\,, \quad n_t(x,0) = \nu(x) \end{aligned}\right\} \tag{1,2}$$

und zweitens den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \beta\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{für } x = 0, t \geqq 0 \text{ und } x = l,\ t \geqq 0) \tag{1,3}$$

genügen.

Dabei ist die Funktion $v(x, t)$ bzw. $n(x, t)$ der transversalen Biegungsabweichung bzw. der Torsionsabweichung proportional. Mit $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ sind reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen bezeichnet; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind reelle Konstanten, die von der Beschaffenheit des Stabes abhängen und für welche die Relationen

$$\alpha < 0\,, \quad \delta < 0\,, \quad \beta\gamma < 0\,, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma < 0 \tag{1,4}$$

bestehen.

Um ein praktisch anwendbares Resultat zu erhalten, muss man folgende Aufgaben lösen:

1. Die Eindeutigkeit der Lösung von (1,1) bis (1,3) beweisen.

2. Die Eigenwerte und Eigenschwingungen des vorgelegten Systems auffinden.

3. Es sind Bedingungen für die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ anzugeben, durch welche die Lösbarkeit von (1,1) bis (1,3) sichergestellt wird.

2. Eindeutigkeitssatz

In diesem Abschnitt wird ein Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Systems (1,1) bis (1,3) bewiesen.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz 1. *Die Funktionen $v(x, t)$, $n(x, t)$ verschwinden identisch im Bereich $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$, falls für die reellen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Beziehungen* (1,4) *bestehen, die Funktionen $v(x, t)$, $n(x, t)$ dem System* (1,1) *mit verschwindenden Anfangsbedingungen und den Randbedingungen* (1,3) *genügen, und ausserdem die partiellen Ableitungen v_x, n_x, v_t, n_t, v_{xt}, n_{xt}, v_{x^2}, n_{x^2}, v_{t^2}, n_{t^2}, v_{x^2t}, v_{x^3}, n_{x^3}, v_{x^4} im Bereich $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ vorhanden und stetig sind.*

Beweis. Wir setzen

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^2 - \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\Delta}{\alpha}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right\} dx\,.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen erhalten wir für die Ableitung

$$F'(t) = \int_0^l \left\{\frac{\partial n}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\Delta}{\alpha}\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial x\,\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{\beta}\left(\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial n}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2 n}{\partial x\,\partial t}\right)\right\} dx\,.$$

Nach teilweiser Integration erhält man

$$\frac{\Delta}{\alpha}\int_0^l \frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial x\,\partial t}\,dx = \frac{\Delta}{\alpha}\left[\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial n}{\partial t}\right]_0^l - \frac{\Delta}{\alpha}\int_0^l \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,.$$

Weiter benützen wir die Randbedingungen $\left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$ und gelangen schliesslich zu der Identität

$$F'(t) = \int_0^l \left\{\frac{\partial n}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{\alpha}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right) - \frac{\gamma}{\beta}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial n}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2 n}{\partial x\,\partial t}\right)\right]\right\} dx\,.$$

Ähnlich berechnen wir

$$\frac{\gamma}{\beta}\int_0^l \left(\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial n}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2 n}{\partial x\,\partial t}\right) dx =$$
$$= \frac{\gamma}{\beta}\int_0^l \left(\alpha\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \beta\frac{\partial^3 n}{\partial x^3}\right)\frac{\partial v}{\partial t}\,dx - \frac{\gamma}{\alpha}\int_0^l \left(\alpha\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \beta\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,.$$

Diese Resultate liefern endlich die Beziehung

$$F'(t) = \int_0^l \left\{\frac{\partial n}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \delta\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right) - \frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \beta\frac{\partial^3 n}{\partial x^3}\right)\right\} dx \equiv 0\,.$$

Für alle nichtnegativen t gilt also $F'(t) \equiv 0$, woraus $F(t) = \text{konst} = F(0) = 0$ folgt.

Aus den gemachten Voraussetzungen folgen weiter die Beziehungen

$$\frac{\partial n}{\partial t} \equiv 0 \,, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0 \,, \quad \frac{\partial n}{\partial x} \equiv 0 \,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial n}{\partial x} \equiv 0 \,,$$

d. h.

$$n(x, t) = k_1 \,, \quad v(x, t) = k_2 x + k_3 \tag{2,1}$$

für alle $x \in \langle 0, l \rangle$ und $t \geqq 0$. Nach Voraussetzung ist aber $n(x, 0) \equiv v(x, 0) \equiv 0$. Dies und (2,1) liefert sofort die zu beweisenden Identitäten $n(x, t) \equiv 0$, $v(x, t) \equiv \equiv 0$.

Satz 1. *Die reellen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sollen wieder den Bedingungen* (1,4) *genügen. Dann gibt es höchstens ein Paar reeller Funktionen $v(x, t)$, $n(x, t)$, welche den folgenden Bedingungen genügen:*

a) *im Bereich* $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ *sind die partiellen Ableitungen* $v_x, n_x, v_t, n_t, v_{xt}, n_{xt}, v_{x^2}, n_{x^2}, v_{t^2}, n_{t^2}, v_{x^2t}, v_{x^3}, n_{x^3}, v_{x^4}$ *vorhanden und stetig;*

b) *sie genügen dem System* (1,1), *den Randbedingungen* (1,3) *und reellen Anfangsbedingungen* (1,2) *(d. h. wir setzen voraus, dass die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ reel sind).*

Beweis. Wir setzen

$$v(x, t) = v^*(x, t) + iv^{**}(x, t) \,, \quad n(x, t) = n^*(x, t) + in^{**}(x, t)$$

(die Funktionen v^*, v^{**}, n^*, n^{**} sind reel). Da es sich um lineare Differentialgleichungen, lineare Randbedingungen und reelle Anfangsbedingungen handelt, genügen die Funktionen v^{**}, n^{**} allen Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Es gilt also

$$v^{**}(x, t) \equiv 0 \,, \quad n^{**}(x, t) \equiv 0 \,.$$

Die Funktionen $v(x, t)$, $n(x, t)$ sind deshalb reel.

Wir setzen nun voraus, dass es zwei verschiedene Funktionenpaare $(v_1(x, t), n_1(x, t))$, $(v_2(x, t), n_2(x, t))$ gibt, die den Voraussetzungen des Satzes 1 genügen. Dann genügen aber die Funktionen

$$V(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t) \,, \quad N(x, t) = n_1(x, t) - n_2(x, t)$$

den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Es gilt also $V(x, t) \equiv N(x, t) \equiv 0$, d. h. $v_1(x, t) \equiv v_2(x, t)$, $n_1(x, t) \equiv n_2(x, t)$, was sichtlich ein Widerspruch ist. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

3. Das Problem als Eigenwertaufgabe

Im § 2 wurde die Eindeutigkeit der Lösung des Systems (1,1) mit den Nebenbedingungen (1,2), (1,3) und (1,4) bewiesen. Es handelt sich jetzt um die Konstruktion der Funktionen $v(x, t)$, $n(x, t)$. Man kann dazu verschiedene

Methoden benützen. Nur muss man, je nach der benützten Methode verschiedene Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ machen.

Für unser Problem ist die Methode von Fourier wohl am bequemsten. Wir werden deshalb die Eigenwerte des Systems (1,1) mit den Randbedingungen (1,3) untersuchen. Zunächst liegt also folgende Aufgabe vor:

Es ist eine Lösung $v(x, t)$, $n(x, t)$ des Systems (1,1) *aufzustellen, welche erstens den Randbedingungen* (1,3) *genügt und welche zweitens in der Form*

$$v(x, t) = V(x) \,.\, T_1(t) \,, \quad n(x, t) = N(x) \,.\, T_2(t) \tag{3,1}$$

geschrieben werden kann, wobei $V(x), N(x)$ bzw. $T_1(t), T_2(t)$ Funktionen nur einer Veränderlichen x, bzw. t sind.

Wenn wir (3,1), (1,1) und (1,3) beachten, beweisen wir ohne Schwierigkeit die Identitäten

$$T_1(t) \equiv T_2(t) \equiv T(t) \tag{3,2}$$

und die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{\alpha V^{(4)}(x) + \beta N'''(x)}{V(x)} = -\lambda \,, \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{\gamma V'''(x) + \delta N''(x)}{N(x)} = -\lambda \,; \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

λ ist eine konstante Grösse, die weder von x, noch von t abhängt. Aus (3,2), (3,3) und (1,3) erhält man nun das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha V^{(4)}(x) + \beta N'''(x) &= -\lambda V(x) \\ \gamma V'''(x) + \delta N''(x) &= -\lambda N(x) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq l) \tag{3,4}$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha V'''(0) + \beta N''(0) = \alpha V'''(l) + \beta N''(l) = 0 \,, \\ V''(0) = V''(l) = N'(0) = N'(l) = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{3,5}$$

Wir suchen also eine nichttriviale Lösung $(V(x), N(x))$ des Systems (3,4) die den Randbedingungen (3,5) genügt.

Wir führen jetzt folgende Definitionen ein:

Definition 1. *Das Funktionenpaar $(V(x), N(x))$ werden wir ein Randpaar nennen, falls die Funktionen $V(x)$, $N(x)$ folgende Eigenschaften besitzen:*

1. *im abgeschlossenen Intervall $\langle 0, l \rangle$ sind die Ableitungen $V^{(7)}(x)$, $N^{(6)}(x)$ vorhanden und stetig;*
2. *sie genügen den Randbedingungen* (3,5);
3. *die Identitäten $V(x) \equiv 0$, $N(x) \equiv 0$ gelten nicht gleichzeitig.*

Definition 2. *Die Zahlen λ, für die das System* (3,4) *mit den Randbedingungen* (3,5) *eine nichttriviale Lösung $(V(x), N(x))$ besitzt, nennen wir Eigenwerte. Die*

Lösung $(V(x), N(x))$, *welche einem Eigenwert* λ *entspricht, wird ein Eigenpaar genannt.*

Offenbar ist jedes Eigenpaar ein Randpaar.

Mit diesen Definitionen stellen wir den folgenden Hilfssatz auf.

Hilfssatz 2. *Falls die Funktionenpaare* $(V_1(x), N_1(x))$, $(V_2(x), N_2(x))$ *den Randbedingungen* (3,5) *genügen, gilt*

$$\int_0^l \{(\alpha V_1^{(4)} + \beta N_1''')\,\gamma V_2 - (\alpha V_2^{(4)} + \beta N_2''')\,\gamma V_1 - (\gamma V_1''' + \delta N_1'')\,\beta N_2 + \\ + (\gamma V_2''' + \delta N_2'')\,\beta N_1\}\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{3,6}$$

Diese Relation erhält man leicht durch teilweise Integration und Beachtung der Randbedingungen (3,5).

Satz 2. *Die Eigenwerte der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *können nur reel sein.*

Beweis. $\lambda \neq 0$ sei ein Eigenwert, $(V(x), N(x))$ das entsprechende Eigenpaar. Wenn man die Linearität von (3,4) und (3,5) beachtet und wenn man die konjugierten Zahlen und Funktionen mit einem Strich bezeichnet, sieht man sofort, dass $\bar{\lambda}$ auch ein Eigenwert ist, welchem das Eigenpaar $(\bar{V}(x), \bar{N}(x))$ entspricht. Nach Hilfssatz 2 gilt also

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^l (\gamma V\bar{V} - \beta N\bar{N})\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{3,7}$$

Da das Integral in (3,7) wegen $\beta\gamma < 0$ nicht verschwindet, muss $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ sein. λ ist also reel.

Bisher wissen wir nicht, ob die Funktionen $V(x)$, $N(x)$ reel sind. Unsere Randwertaufgabe ist aber linear und die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ sind reel; die Realteile $V_1(x)$, $N_1(x)$ sowie die Imaginärteile $V_2(x)$, $N_2(x)$ der Funktionen

$$V(x) = V_1(x) + iV_2(x)\,, \quad N(x) = N_1(x) + iN_2(x)$$

genügen deshalb auch der Randwertaufgabe (3,4), (3,5). Wir können also ohne weiteres voraussetzen, dass die Funktionen $V(x)$, $N(x)$ reel sind.

Satz 3. *Es gibt keine negativen Eigenwerte der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5).

Dem speziellen Eigenwert $\lambda = 0$ *entsprechen die Eigenpaare* $(0, 1)$, $(1,0)$, $(l - 2x, 0)$.

Beweis. Wir führen in das positive Integral

$$\int_0^l \left(V^2 - \frac{\beta}{\gamma} N^2\right) \mathrm{d}x > 0$$

eine Substitution nach (3,4) ein und integrieren danach teilweise. Mit Benutzung von (3,5) erhalten wir

$$\lambda \int_0^l \left(V^2 - \frac{\beta}{\gamma} N^2\right) \mathrm{d}x = -\int_0^l (-\lambda V)\, V\, \mathrm{d}x + \frac{\beta}{\gamma} \int_0^l (-\lambda N)\, N\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^l (\alpha V^{(4)} + \beta N''')\, V\, \mathrm{d}x + \frac{\beta}{\gamma} \int_0^l (\gamma V''' + \delta N'')\, N\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^l \left(\alpha V''^2 + 2\beta V'' N' + \frac{\beta\delta}{\gamma} N'^2\right) \mathrm{d}x\,.$$

Der letzte Integrand ist in den Veränderlichen $V''(x) = \xi$, $N'(x) = \eta$ eine quadratische Form mit negativer Diskriminante

$$\beta^2 - \frac{\alpha\beta\delta}{\gamma} = -\frac{\beta}{\gamma} \varDelta < 0\,.$$

Da α negativ ist, schliesst man sofort, dass dieser Integrand eine positivdefinite quadratische Form darstellt. Es gilt also

$$\lambda \int_0^l \left(V^2 - \frac{\beta}{\gamma} N^2\right) \mathrm{d}x \geqq 0\,,$$

woraus $\lambda \geqq 0$ folgt.

Der zweite Teil des Satzes ist evident.

Aus diesem Beweis folgt, dass man den Eigenwert aus dem entsprechenden Eigenpaar nach der Formel

$$\lambda = -\frac{\int_0^l (\alpha\gamma V''^2 + 2\beta\gamma V'' N' + \beta\delta N'^2)\, \mathrm{d}x}{\int_0^l (\gamma V^2 - \beta N^2)\, \mathrm{d}x} \tag{3,8}$$

berechnet.

Ähnlich wie in [1] bezeichnen wir für ein beliebiges Randpaar $(U(x), M(x))$ den Ausdruck

$$R[U, M] = -\frac{\int_0^l (\alpha\gamma U''^2 + 2\beta\gamma U'' M' + \beta\delta M'^2)\, \mathrm{d}x}{\int_0^l (\gamma U^2 - \beta M^2)\, \mathrm{d}x} \tag{3,9}$$

als den verallgemeinerten Rayleighschen Quotienten unserer Randwertaufgabe.

4. Eigenwerte und Eigenpaare

Definition 3. *Die Funktionenpaare* $(V_i(x), N_i(x))$ $(1 \leqq i \leqq k)$ *nennt man* ~~*linear*~~ *abhängig, falls es komplexe Zahlen* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *gibt, die nicht gleichzeitig verschwinden, so* ~~*dass*~~

$$\sum_{i=1}^{k} c_i V_i(x) \equiv 0\,, \quad \sum_{i=1}^{k} c_i N_i(x) \equiv 0$$

gilt. Andernfalls nennt man die Funktionenpaare $(V_i(x), N_i(x))$ $(1 \leqq i \leqq k)$ *linear unabhängig.*

Definition 4. *Die Funktionenpaare* $(V_i(x), N_i(x))$, $(V_j(x), N_j(x))$ *nennen wir orthogonal, falls die Beziehung*

$$\int_0^l (\gamma V_i V_j - \beta N_i N_j)\, \mathrm{d}x = 0$$

besteht.

Hilfssatz 3. *λ sei eine positive Zahl. Weiter setzen wir voraus, dass die Funktionen $g(x), h(x)$ im abgeschlossenen Intervall $\langle 0, l \rangle$ stetige Ableitungen $g'''(x)$, $h^{(4)}(x)$ besitzen. Dann gilt:*

1. *Es gibt eine von λ unabhängige Funktion $H_0(x)$, für welche die Ableitung $H_0^{(7)}(x)$ im Intervall $\langle 0, l \rangle$ stetig ist und welche den Randbedingungen*

$$\left.\begin{aligned} H_0(0) = H_0(l) = H_0'(0) = H_0'(l) = H_0'''(0) = H_0'''(l) = 0\,; \\ H_0''(0) = \frac{\alpha}{\Delta} h(0)\,; \quad H_0''(l) = \frac{\alpha}{\Delta} h(l)\,; \\ H_0^{(5)}(0) = \frac{\alpha h'''(0) - \gamma g''(0)}{\Delta}\,; \quad H_0^{(5)}(l) = \frac{\alpha h'''(l) - \gamma g''(l)}{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{4,1}$$

genügt.

2. *Das System*

$$\alpha V^{(4)} + \gamma N''' = -\lambda V + g\,, \quad \gamma V''' + \delta N'' = -\lambda N + h\,, \quad N = H + H_0$$
$$(\text{für } 0 \leqq x \leqq l) \tag{4,2}$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha V'''(0) + \beta N''(0) = \alpha V'''(l) + \beta N''(l) = V''(0) = V''(l) = N'(0) = N'(l) = 0 \tag{4.3}$$

ist mit dem System

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H^{(6)} + \alpha\lambda H^{(4)} + \delta\lambda H'' + \lambda^2 H = \\ &= \alpha h^{(4)} - \gamma g''' + \lambda h - (\Delta H_0^{(6)} + \alpha\lambda H_0^{(4)} + \delta\lambda H_0'' + \lambda^2 H_0)\,, \\ &N = H + H_0\,, \\ &V = \frac{1}{\gamma\lambda}(\Delta N''' + \alpha\lambda N' + \gamma g - \alpha h') \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq l) \tag{4,4}$$

und den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} H'(0) = H'(l) = \Delta H''(0) + \alpha\lambda H(0) = \Delta H''(l) + \alpha\lambda H(l) = 0\,, \\ \Delta H^{(5)}(0) + \alpha\lambda H'''(0) = \Delta H^{(5)}(l) + \alpha\lambda H'''(l) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4{,}5)$$

äquivalent.

Beweis. Um die erste Behauptung des Satzes zu beweisen, genügt es die Funktion $H_0(x)$ einem Polynom 9. Grades gleichzusetzen, dessen Koeffizienten nach (4,1) gewählt sind.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten und aus den Voraussetzungen des Satzes.

Unser nächstes Ziel ist die Form der Eigenpaare zu untersuchen. Wir müssen zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

1. $\lambda_0 = 0$ ist ein Eigenwert. Aus (3,8) folgt dann, dass $V''(x) \equiv N'(x) \equiv 0$, d. h. es muss $V(x) \equiv ax + b$, $N(x) \equiv c$ sein.

Zu dem Eigenwert $\lambda_0 = 0$ gibt es also genau drei zueinander orthogonale linear unabhängige Eigenpaare, z. B.

$$(0,\,1)\,,\quad (1,\,0)\,,\quad (l - 2x,\,0)\,.$$

2. λ sei ein beliebiger positiver Eigenwert. Im Hilfssatz 3 setzen wir nun $g(x) \equiv h(x) \equiv H_0(x) \equiv 0$, d. h. $N(x) \equiv H(x)$. Nach diesem Hilfssatz ist die Randwertaufgabe (3,4), (3,5) mit dem System

$$\Delta N^{(6)} + \alpha\lambda N^{(4)} + \delta\lambda N'' + \lambda^2 N = 0 \quad (\text{für } 0 \leq x \leq l)\,, \quad (4{,}4')$$

$$\left.\begin{aligned} N'(0) = \Delta N''(0) + \alpha\lambda N(0) = \Delta N^{(5)}(0) + \alpha\lambda N'''(0) = 0\,, \\ N'(l) = \Delta N''(l) + \alpha\lambda N(l) = \Delta N^{(5)}(l) + \alpha\lambda N'''(l) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4{,}5')$$

äquivalent.

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (4,4′) ist dann

$$\Delta\xi^6 + \alpha\lambda\xi^4 + \delta\lambda\xi^2 + \lambda^2 = 0\,. \quad (4{,}6)$$

Wir setzen $\xi^2 = \eta$ und erhalten die Gleichung dritten Grades

$$\Delta\eta^3 + \alpha\lambda\eta^2 + \delta\lambda\eta + \lambda^2 = 0\,. \quad (4{,}7)$$

Mit $D_1(\lambda)$ bezeichnen wir die Diskriminante dieser Gleichung und mit η_1, η_2, η_3 ihre Nullstellen. Bekanntlich ist dann

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta}\,;\ \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 = \frac{\delta\lambda}{\Delta}\,;\ \eta_1\eta_2\eta_3 = -\frac{\lambda^2}{\Delta}\,; \\ D_1(\lambda) = -4\left(\frac{\delta\lambda}{\Delta} - \frac{\alpha^2\lambda^2}{3\Delta^2}\right)^3 - 27\left(\frac{\lambda^2}{\Delta} - \frac{\alpha\delta\lambda^2}{3\Delta^2} - \frac{2}{27}\cdot\frac{\alpha^3\lambda^3}{\Delta^3}\right)^2 = \frac{\lambda^3}{\Delta^4}f(\lambda)\,, \end{aligned}\right\} \quad (4{,}8)$$

wo wir zur Abkürzung

$$f(\lambda) = -4\alpha^3\lambda^2 + (\alpha^2\delta^2 + 18\alpha\delta\Delta - 27\Delta^2)\,\lambda - 4\Delta\delta^3 \quad (4{,}9)$$

gesetzt haben.

Weiter setzen wir $\beta\gamma = \vartheta \,.\, \alpha\delta$. Aus den gemachten Voraussetzungen über die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta$ folgt, dass ϑ zwischen Null und Eins liegt. Für die Diskriminante D_2 der quadratischen Gleichung $f(\lambda) = 0$ erhält man leicht

$$D_2 = \alpha^4\delta^4 .\, \vartheta(9\vartheta - 8)^3 \,.$$

D_2 ist negativ, falls $0 < \vartheta < \frac{8}{9}$ ist; wegen $-4\alpha^3 > 0$ ist in diesem Falle $f(\lambda)$ positiv für alle reellen Zahlen λ.

Ist aber $\frac{8}{9} \leqq \vartheta < 1$, hat man $f(\lambda) = -4\alpha^3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, wobei $\lambda_{1,2} = = \frac{\delta^3}{-8\alpha}\,(27\vartheta^2 - 36\vartheta + 8 \pm \sqrt{\vartheta(9\vartheta - 8)^3}\,)$. Wir setzen $g(\vartheta) = 27\vartheta^2 - 36\vartheta + + 8$. Falls $\vartheta \geqq \frac{8}{9}$, erhält man $g'(\vartheta) = 18(3\vartheta - 2) \geqq 12$; die Funktion $g(\vartheta)$ ist also im halbgeschlossenen Intervall $\left\langle \frac{8}{9}, 1 \right)$ zunehmend und deshalb gilt $-\frac{8}{3} \leqq g(\vartheta) < -1$ für $\frac{8}{9} \leqq \vartheta < 1$. Nach diesen Ungleichheiten sind beide Ausdrücke $27\vartheta^2 - 36\vartheta + 8 \pm \sqrt{\vartheta(9\vartheta - 8)^3}$ negativ und da $\frac{\delta^3}{-8\alpha} > 0$ ist, sieht man leicht, dass die Zahlen λ_1, λ_2 negativ sind.

Für positive λ sind also die letzten zwei Faktoren in

$$f(\lambda) = -4\alpha^3(\lambda - \lambda_1)\,.\,(\lambda - \lambda_2)$$

positiv, also ist auch $f(\lambda)$ *positiv.*

Nach (4,8) ist also die Diskriminante $D_1(\lambda)$ der Gleichung (4,7) positiv für alle positive λ. Hieraus folgert man, dass die Nullstellen der Gleichung (4,7) reel und paarweise verschieden sind. Wegen (4,8) ist auch

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} < 0\,, \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3 = -\frac{\lambda^2}{\Delta} > 0\,.$$

Diese Ungleichheiten sind aber nur dann erfüllt, wenn eine Nullstelle der Gleichung (4,7) positiv und die übrigen negativ sind.

Man kann also

$$\eta_1 = \sigma_1^2\,, \quad \eta_2 = -\sigma_2^2\,, \quad \eta_3 = -\sigma_3^2 \quad (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0;\ \sigma_i \neq \sigma_j \text{ für } i \neq j) \tag{4,10}$$

schreiben. Offensichtlich gilt $\sigma_2 \neq \sigma_3$. Wegen (4,8) und $\beta\gamma < 0$ gilt aber auch $\sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_1 \neq \sigma_3$.

Für positive λ kann man das allgemeine Integral der Differentialgleichung (4,4') in der Form

$$\begin{aligned} N(x) = a_1 \cosh \sigma_1 x + a_3 \cos \sigma_2 x + a_5 \cos \sigma_3 x + \\ + a_2 \sinh \sigma_1 x + a_4 \sin \sigma_2 x + a_6 \sin \sigma_3 x \end{aligned} \tag{4,11}$$

schreiben.

Nach den Randbedingungen (4,5') müssen die Zahlen a_i ($1 \leqq i \leqq 6$) dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1 a_2 + \sigma_2 a_4 + \sigma_3 a_6 = 0\,,\\
&(\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda)\,a_1 - (\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda)\,a_3 - (\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda)\,a_5 = 0\,,\\
&(\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3)\,a_2 + (\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3)\,a_4 + (\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3)\,a_6 = 0\,,\\
&\sigma_1(a_1 \sinh \sigma_1 l + a_2 \cosh \sigma_1 l) - \sigma_2(a_3 \sin \sigma_2 l - a_4 \cos \sigma_2 l) -\\
&\quad - \sigma_3(a_5 \sin \sigma_3 l - a_6 \cos \sigma_3 l) = 0\,,\\
&(\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda)(a_1 \cosh \sigma_1 l + a_2 \sinh \sigma_1 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda)(a_3 \cos \sigma_2 l + a_4 \sin \sigma_2 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda)(a_5 \cos \sigma_3 l + a_6 \sin \sigma_3 l) = 0\,,\\
&(\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3)(a_1 \sinh \sigma_1 l + a_2 \cosh \sigma_1 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3)(a_3 \sin \sigma_2 l - a_4 \cos \sigma_2 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3)(a_5 \sin \sigma_3 l - a_6 \cos \sigma_3 l) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4,12}$$

genügen. Die Determinante dieses Systems ist

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix}
0 & \sigma_1 & 0 & \sigma_2 & 0 & \sigma_3\\
\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda & 0 & -(\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda) & 0 & -(\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda) & 0\\
0 & \Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3 & 0 & \Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3 & 0 & \Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3\\
\sigma_1 \sinh \sigma_1 l & \sigma_1 \cosh \sigma_1 l & -\sigma_2 \sin \sigma_2 l & \sigma_2 \cos \sigma_2 l & -\sigma_3 \sin \sigma_3 l & \sigma_3 \cos \sigma_3 l\\
(\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda) \cosh \sigma_1 l & (\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda) \sinh \sigma_1 l & -(\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda) \cos \sigma_2 l & -(\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda) \sin \sigma_2 l & -(\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda) \cos \sigma_3 l & -(\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda) \sin \sigma_3 l\\
(\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3) \sinh \sigma_1 l & (\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3) \cosh \sigma_1 l & -(\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3) \sin \sigma_2 l & (\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3) \cos \sigma_2 l & -(\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3) \sin \sigma_3 l & (\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3) \cos \sigma_3 l
\end{vmatrix}. \tag{4,13}$$

Wenn man (4,7), (4,8), (4,10) beachtet, erhält man für (4,13) die Formel

$$\left.\begin{aligned}
D(\lambda) = \Delta^3\lambda^2\Big[&-\frac{\beta\gamma\lambda^3}{\Delta^4}(\alpha^2\lambda - 3\delta\Delta) \sinh \sigma_1 l \sin \sigma_2 l \sin \sigma_3 l +\\
&+ 2\sigma_1\sigma_2(\eta_3^2 - \eta_1^2)(\eta_3^2 - \eta_2^2)(1 - \cosh \sigma_1 l \cos \sigma_2 l) \sin \sigma_3 l +\\
&+ 2\sigma_1\sigma_3(\eta_2^2 - \eta_1^2)(\eta_2^2 - \eta_3^2)(1 - \cosh \sigma_1 l \cos \sigma_3 l) \sin \sigma_2 l +\\
&+ 2\sigma_2\sigma_3(\eta_1^2 - \eta_2^2)(\eta_1^2 - \eta_3^2)(1 - \cos \sigma_2 l \cos \sigma_3 l) \sinh \sigma_1 l\Big]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4,14}$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer nichttrivialen Lösung von (4,12) *ist das Bestehen der Gleichung*

$$D(\lambda) = 0\,. \tag{4,15}$$

Wir erhalten so eine Bedingung für die Eigenwerte. Zugleich sind wir imstande die entsprechenden Eigenpaare zu konstruieren.

Deshalb werden wir uns in den folgenden Abschnitten mit der Lösbarkeit der transzendenten Gleichung (4,15) beschäftigen.

5. Die Orthogonalität der Eigenpaare

Hilfssatz 4. *λ_k sei ein positiver Eigenwert. Die zugehörigen Eigenpaare $(V_1(x), N_1(x))$, $(V_2(x), N_2(x))$ sind dann und nur dann linear abhängig, falls die Funktionen $N_1(x)$, $N_2(x)$ linear abhängig sind.*

Der Beweis folgt sofort aus der Definition 3.

Hilfssatz 5. *Zu jedem positiven Eigenwert λ_k der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenpaare, die man orthogonal wählen kann.*

Beweis. λ_k sei wieder ein positiver Eigenwert. Wir müssen beweisen, dass für $\lambda = \lambda_k$ die Determinante (4,13) wenigstens den Rang vier besitzt. Würden nämlich alle ihre Subdeterminanten vierter Ordnung verschwinden, so würden auch die Subdeterminanten, welche man aus der Determinante (4,13) durch das Wegstreichen der vierten und fünften Zeile und der dritten und fünften Spalte, oder der fünften und sechsten Zeile und der dritten und fünften Spalte, erhält, verschwinden. Dies führt aber zu der Gleichung $\cosh \sigma_1 l = \cos \sigma_2 l$, welche mit der Beziehung $\lambda_k > 0$ im Widerspruch steht. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Die linear unabhängigen Eigenpaare $(V_1(x), N_1(x))$, $(V_2(x), N_2(x))$ mögen einem positiven Eigenwert λ_k entsprechen. Im Falle, dass das Integral $\int\limits_0^l (\gamma V_1(x)\, V_2(x) - \beta N_1(x)\, N_2(x))\, dx$ nicht verschwindet (d. h. dass die Eigenpaare $(V_1(x), N_1(x))$, $(V_2(x), N_2(x))$ nicht orthogonal sind), konstruieren wir das Eigenpaar $(V_2^*(x),\ N_2^*(x)) = (cV_1(x) + V_2(x),\ cN_1(x) + N_2(x))$ mit

$$c = -\frac{\int\limits_0^l (\gamma V_1(x)\, V_2(x) - \beta N_1(x)\, N_2(x))\, dx}{\int\limits_0^l (\gamma V_1^2(x) - \beta N_1^2(x))\, dx}.$$

Man sieht gleich, dass die Eigenpaare $(V_1(x), N_1(x))$, $(V_2^*(x), N_2^*(x))$ linear unabhängig und zueinander orthogonal sind. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen.

Satz 4. *Unter der Voraussetzung, das $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ Eigenwerte der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *sind, kann man alle, diesen Eigenwerten entsprechende, Eigenpaare $(V_i(x), N_i(x))$ $(0 \leqq i \leqq s)$ paarweise zueinander orthogonal wählen, d. h. dass für $i \neq j$ die Relationen*

$$\int\limits_0^l (\gamma V_i(x)\, V_j(x) - \beta N_i(x)\, N_j(x))\, dx = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, s)$$

bestehen.

Beweis. Für $\lambda_0 = 0$ sind die entsprechenden Eigenpaare (0, 1), (1, 0), $(l - 2x, 0)$ linear unabhängig und paarweise orthogonal. Dem positiven Eigenwert λ_k entsprechende Eigenpaare kann man nach Hilfssatz 5 zueinander orthogonal wählen (vorausgesetzt, dass zwei Eigenpaare vorhanden sind).

Für zwei Eigenpaare $(V_m(x), N_m(x))$, $(V_p(x), N_p(x))$, die zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_k \neq \lambda_r$ entsprechen, erhalten wir unter Benutzung von Hilfssatz 2 und der Beziehung (3,4) die Gleichheit

$$(\lambda_k - \lambda_r) \int_0^l (\gamma V_m(x)\, V_p(x) - \beta N_m(x)\, N_p(x))\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

welche zu beweisen war.

6. Die Greensche Funktion und ihre Eigenschaften

Um eine Lösung der Randwertaufgabe (4,2), (4,3) zu finden, genügt es nach Hilfssatz 3 die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta H^{(6)} + \alpha\lambda H^{(4)} + \delta\lambda H'' + \lambda^2 H &= \alpha h^{(4)} - \gamma g''' + \lambda h - \\ &- (\Delta H_0^{(6)} + \alpha\lambda H_0^{(4)} + \delta\lambda H_0'' + \lambda^2 H_0)\,, \end{aligned} \tag{6,1}$$

$$\left.\begin{aligned} H'(0) = \Delta H''(0) + \alpha\lambda H(0) = \Delta H^{(5)}(0) + \alpha\lambda H'''(0) = 0\,, \\ H'(l) = \Delta H''(l) + \alpha\lambda H(l) = \Delta H^{(5)}(l) + \alpha\lambda H'''(l) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

zu lösen. Es ist bequem dazu die Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ zu benützen.

Die *Greensche Funktion* $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ wird durch folgende Bedingungen definiert:

1. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ *verschwindet nicht identisch;*

2. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ *und ihre partielle Ableitungen* $\dfrac{\partial^k \Gamma}{\partial x^k}$ $(1 \leqq k \leqq 4)$ *sind im Bereich* $0 \leqq x; \xi \leqq l$ *stetige Funktionen beider Veränderlichen* x, ξ;

3. *die fünfte partielle Ableitung* $\dfrac{\partial^5 \Gamma}{\partial x^5}$ *besitzt in jedem Punkt der Diagonale* $x = \xi$ *einen endlichen Sprung,*

$$\lim_{x \to \xi+} \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial x^5} - \lim_{x \to \xi-} \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial x^5} = \frac{1}{\Delta}\,;$$

in allen übrigen Punkten des Bereichs $0 \leqq x; \xi \leqq l$ *ist die Ableitung* $\dfrac{\partial^5 \Gamma}{\partial x^5}$ *stetig;*

4. *für* $x \neq \xi$ *genügt* $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ *in der Veränderlichen* x *der homogenen Differentialgleichung*

$$\Delta z^{(6)} + \alpha\lambda z^{(4)} + \delta\lambda z'' + \lambda^2 z = 0 \tag{6,3}$$

und den Randbedingungen (6,2).

Bekanntlich liefert die Formel

$$H(x, \lambda) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, \lambda)\{\alpha h^{(4)}(\xi) - \gamma g'''(\xi) + \lambda h(\xi) - \tag{6,4}$$
$$- (\Delta H_0^{(6)}(\xi) + \alpha\lambda H_0^{(4)}(\xi) + \delta\lambda H_0''(\xi) + \lambda^2 H_0(\xi))\}\, d\xi$$

die Lösung der Randwertaufgabe (6,1), (6,2).

Hilfssatz 6. *Die positive Zahl λ sei kein Eigenwert der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5). *Dann gibt es genau eine Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$, welche reel ist, den Bedingungen* 1 *bis* 4 *genügt und welche man in der Form*

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{K(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)} + sg(x - \xi)\, K^*(x, \xi, \lambda) \tag{6,5}$$

schreiben kann. Dabei ist $K(x, \xi, \lambda)$ eine im Bereich $0 \leqq x; \xi \leqq l$, $\lambda \geqq 0$ stetige Funktion der drei Veränderlichen x, ξ, λ und

$$K^*(x, \xi, \lambda) = \frac{A_1(x, \xi, \lambda)}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)}, \tag{6,6}$$

$$A_1(x, \xi, \lambda) = (\eta_2 - \eta_3)\frac{\sinh \sigma_1(x - \xi)}{\sigma_1} + (\eta_3 - \eta_1)\frac{\sin \sigma_2(x - \xi)}{\sigma_2} +$$
$$+ (\eta_1 - \eta_2)\frac{\sin \sigma_3(x - \xi)}{\sigma_3}.$$

Für einen beliebigen nichtnegativen Eigenwert λ_k kann man

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=-\omega'_k}^{\infty} q_{ki}(x, \xi)(\lambda - \lambda_k)^i, \tag{6,7}$$

schreiben, wobei ω'_k eine passende natürliche Zahl ist, die Funktionen $q_{ki}(x, \xi)$ $(-\omega'_k \leqq i < 0)$ im Bereich $0 \leqq x; \xi \leqq l$ beliebig oft differentierbar sind und die Reihe (6,7) *in einem gewissen Bereich $0 < |\lambda - \lambda_k| < r_k^*$ absolut konvergiert.*

Beweis. Wenn wir im Hilfssatz 3 $g(x) \equiv h(x) \equiv H_0(x) \equiv 0$ setzen, sehen wir, dass die Randwertaufgaben (3,4), (3,5) und (6,1), (6,2) dieselben Eigenwerte besitzen.

Die positive Zahl λ sei kein Eigenwert der Randwertaufgabe (3,4), (3,5). Nach (4,6), (4,7) und (4,10) bestimmen wir die positiven Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und konstruieren ein Hauptsystem von Integralen der Differentialgleichung (6,3):

$$\left.\begin{aligned} z_1(x, \lambda) &= \cosh \sigma_1 x\,; \quad z_3(x, \lambda) = \cos \sigma_2 x\,; \quad z_5(x, \lambda) = \cos \sigma_3 x\,; \\ z_2(x, \lambda) &= \sinh \sigma_1 x\,; \quad z_4(x, \lambda) = \sin \sigma_2 x\,; \quad z_6(x, \lambda) = \sin \sigma_3 x\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,8}$$

Nach Bedingung 4 kann man für alle $x \neq \xi$

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=1}^{6} [a_i(\xi. \lambda) + \mathrm{sg}(x - \xi)\, b_i(\xi, \lambda)]\, z_i(x, \lambda) \tag{6,9}$$

schreiben.

Damit die Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ noch den Bedingungen 2 und 3 genügt, muss

$$\sum_{i=1}^{6} b_i(\xi, \lambda)\, z_i^{(k)}(\xi, \lambda) = 0 \quad (0 \leqq k \leqq 4)\,, \quad \sum_{i=1}^{6} b_i(\xi, \lambda)\, z_i^{(5)}(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\Delta} \tag{6,10}$$

gelten. Daraus erhält man für die Funktionen $b_i(\xi, \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
b_1(\xi, \lambda) &= -\frac{\sinh \sigma_1\xi}{2\Delta(\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_1)\,\sigma_1}, & b_2(\xi, \lambda) &= \frac{\cosh \sigma_1 \xi}{2\Delta(\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_1)\,\sigma_1},\\
b_3(\xi, \lambda) &= -\frac{\sin \sigma_2\xi}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)\,\sigma_2}, & b_4(\xi, \lambda) &= \frac{\cos \sigma_2\xi}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)\,\sigma_2},\\
b_5(\xi, \lambda) &= -\frac{\sin \sigma_3\xi}{2\Delta(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)\,\sigma_3}, & b_6(\xi, \lambda) &= \frac{\cos \sigma_3\xi}{2\Delta(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)\,\sigma_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{6,11}$$

In (6,9) setzen wir nun nach (6,8), (6,11) ein, beachten noch die Randbedingungen (6,2) und erhalten schliesslich für die Funktionen $a_i = a_i(\xi.\ \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1 a_2 + \sigma_2 a_4 + \sigma_3 a_6 = B_1(\xi, \lambda)\,,\\
&(\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda)\, a_1 - (\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda)\, a_3 - (\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda)\, a_5 = B_2(\xi, \lambda)\,,\\
&(\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3)\, a_2 + (\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3)\, a_4 + (\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3)\, a_6 = B_3(\xi, \lambda),\\
&\sigma_1(a_1 \sinh \sigma_1 l + a_2 \cosh \sigma_1 l) - \sigma_2(a_3 \sin \sigma_2 l - a_4 \cos \sigma_2 l) -\\
&\quad - \sigma_3(a_5 \sin \sigma_3 l - a_6 \cos \sigma_3 l) = B_4(\xi\ \lambda)\,,\\
&(\Delta\sigma_1^2 + \alpha\lambda)(a_1 \cosh \sigma_1 l + a_2 \sinh \sigma_1 l) -\\
&- (\Delta\sigma_2^2 - \alpha\lambda)\,(a_3 \cos \sigma_2 l + a_4 \sin \sigma_2 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_3^2 - \alpha\lambda)(a_5 \cos \sigma_3 l - a_6 \sin \sigma_3 l) = B_5(\xi, \lambda)\,,\\
&(\Delta\sigma_1^5 + \alpha\lambda\sigma_1^3)(a_1 \sinh \sigma_1 l + a_2 \cosh \sigma_1 l) -\\
&- (\Delta\sigma_2^5 - \alpha\lambda\sigma_2^3)\,(a_3 \sin \sigma_2 l - a_4 \cos \sigma_2 l) -\\
&\quad - (\Delta\sigma_3^5 - \alpha\lambda\sigma_3^3)(a_5 \sin \sigma_3 l - a_6 \cos \sigma_3 l) = B_6(\xi, \lambda)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{6,12}$$

wobei nach (6,11)

$$\left.\begin{aligned}
&B_1(\xi, \lambda) = -\frac{(\eta_2 - \eta_3)\cosh \sigma_1\xi + (\eta_3 - \eta_1)\cos \sigma_2\xi + (\eta_1 - \eta_2)\cos \sigma_3\xi}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_1)}\\
&B_2(\xi, \lambda) = \frac{A_2(\xi, \lambda)}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_1)},\\
&A_2(\xi, \lambda) = (\Delta\eta_1 + \alpha\lambda)(\eta_2 - \eta_3)\frac{\sinh \sigma_1\xi}{\sigma_1} +\\
&\quad + (\Delta\eta_2 + \alpha\lambda)(\eta_3 - \eta_1)\frac{\sin \sigma_2\xi}{\sigma_2} + (\Delta\eta_3 + \alpha\lambda)(\eta_1 - \eta_2)\frac{\sin \sigma_3\xi}{\sigma_3},\\
&B_3(\xi, \lambda) = -\frac{A_3(\xi, \lambda)}{2\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_1)},\\
&A_3(\xi, \lambda) = (\Delta\eta_1^2 + \alpha\lambda\eta_1)(\eta_2 - \eta_3)\cosh \sigma_1\xi +\\
&\quad + (\Delta\eta_2^2 + \alpha\lambda\eta_2)(\eta_3 - \eta_1)\cos \sigma_2\xi + (\Delta\eta_3^2 + \alpha\lambda\eta_3)(\eta_1 - \eta_2)\cos \sigma_3\xi\,,\\
&B_4(\xi, \lambda) = -B_1(l - \xi, \lambda)\,,\ B_5(\xi, \lambda) = B_2(l - \xi, \lambda)\,,\ B_6(\xi, \lambda) = -B_3(l - \xi, \lambda)
\end{aligned}\right\} \tag{6,13}$$

ist.

Die Determinante des Gleichungssystems (6,12) ist aber gerade die Determinante $D(\lambda)$, welche durch (4,13) bzw. (4,14) bestimmt ist. Da λ kein Eigenwert ist, verschwindet $D(\lambda)$ nicht. Das Gleichungssystem (6,12) besitzt also genau eine Lösung $a_i(\xi, \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$, durch welche die Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ eindeutig bestimmt wird. Die Funktionen $a_i(\xi, \lambda)$, $b_i(\xi, \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ sind offenbar reel, deshalb ist auch $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, ξ, λ.

Weiter setzen wir $K(x, \xi, \lambda) = D(\lambda) \sum_{i=1}^{6} a_i(\xi, \lambda)\, z_i(x, \lambda)$ und $K^*(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=1}^{6} b_i(\xi, \lambda)\, z_i(x, \lambda)$; nach (6,8), (6,9), (6,11), (6,13) erhalten wir die Beziehungen (6,5), (6,6).

Im folgenden Teil des Beweises werden wir voraussetzen, dass λ auch eine komplexe Grösse sein kann.

Mit Ausnahme der Werte $\lambda_0^* = 0$, $\lambda_{1,2}^* = -\frac{\delta^2}{8\alpha}\left(27\vartheta^2 - 36\vartheta + 8 \pm \sqrt{\vartheta(9\vartheta - 8)^3}\right)$ ist die Diskriminante $D_1(\lambda)$ der Gleichung (4,7) von Null verschieden. In diesem Fall besitzt also diese Gleichung nur einfache Nullstellen. Die Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, welche nun auch komplex sein können, sind dann paarweise verschieden und von Null verschieden. (6,8) ist also wieder ein Hauptsystem von Integralen der Differentialgleichung (6,3). Man kann deshalb das eben benützte Verfahren auch für die zulässigen komplexen Grössen $\lambda \neq \lambda_{0,1,2}^*$ benützen.

Für jede zulässige Zahl λ und die ihr entsprechenden Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Reihen

$$\left.\begin{aligned}
\cosh \sigma_1\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}\,\eta_1^k\,, & \sinh \sigma_1\tau &= \sigma_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\eta_1^k\,,\\
\cos \sigma_2\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}\,\eta_2^k\,, & \sin \sigma_2\tau &= \sigma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\eta_2^k\,,\\
\cos \sigma_3\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}\,\eta_3^k\,, & \sin \sigma_3\tau &= \sigma_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\eta_3^k
\end{aligned}\right\} \qquad (6,14)$$

absolut konvergent. Dabei wurde mit τ eine beliebige reelle Zahl bezeichnet. Durch Addition und Multiplikation zweier oder mehrerer dieser Reihen gelangt man wieder zu absolut konvergenten Reihen.

Wir untersuchen nun die Determinante $D(\lambda)$ etwas näher. Aus der zweiten, vierten und sechsten Spalte heben wir der Reihe nach die Faktoren $\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ heraus. Nach (4,8) und (4,10) ist $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{-\Delta}}$. Die Determinante $D(\lambda)$ ist also das $\frac{\lambda}{\sqrt{-\Delta}}$ — Vielfache einer Determinante, die nach Einsetzen von (6,14) eine symmetrische Funktion in den Veränderlichen η_1, η_2, η_3 darstellt. Wir berechnen die eben genannte Determinante weiter und sehen, dass sie gleich der Summe einer absolut konvergenten Reihe ist, welche in jedem Glied ganze nichtnegative Potenzen der Zahlen η_1, η_2, η_3 enthält. Offensichtlich kann man die Glieder dieser Reihe beliebig gruppieren. Wir machen dies nun so, dass in jeder Gruppe nur alle die Glieder vorkommen, die in der Form $a_{m_1,m_2,m_3}\,\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}\eta_3^{m_3}$ mit fester Summe $m_1 + m_2 + m_3$ geschrieben werden können. Man überzeugt sich sofort, dass die Summe der Glieder jeder dieser Gruppen wieder eine symmetrische Funktion in Veränderlichen η_1, η_2, η_3 darstellt und kann also durch die elementarsymmetrischen Funktionen (4,8) ausgedrückt werden. Aus all diesem folgt, dass $D(\lambda)$ durch die Potenzreihe

$$D(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{0i}\lambda^{\omega_0'+i} \tag{6,15}$$

dargestellt werden kann, wobei ω_0' eine gewisse nichtnegative ganze Zahl ist. Die Potenzreihe (6,15) konvergiert absolut für alle komplexe λ. Falls wir noch $D(\lambda_j^*) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{0i}\lambda_j^{*\omega_0'+i}$ setzen, stellt die Determinante $D(\lambda)$ eine ganze transzendente Funktion in der Veränderlichen λ dar.

Wir berechnen weiter den Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{D(\lambda)}{\lambda^6}$. Dieser Grenzwert ist sicher vorhanden und gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}}\dfrac{D(\lambda)}{\lambda^6}$.

Für positive λ hat man aber nach (4,8)

$$\begin{aligned} 0 < \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2 - 2(\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3) &= \\ = \frac{\alpha^2\lambda^2}{\Delta^2} - 2\,\frac{\delta\lambda}{\Delta}\,, \end{aligned}$$

woraus die Relationen

$$\eta_i = O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\lambda \to 0+)\,, \quad i = 1, 2, 3$$

folgen. Durch das Verfahren, das bei der Herleitung der Formel (6,15) benützt wurde, gelangen wir schliesslich zu der Relation

$$D(\lambda) = -\frac{\delta^3 l^5}{3\sqrt{-\Delta}}\,\lambda^6 + O(\lambda^{\frac{13}{2}}) \quad (\lambda \to 0+)\,,$$

welche die Beziehung

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}}\frac{D(\lambda)}{\lambda^6} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{D(\lambda)}{\lambda^6} = -\frac{\delta^3 l^5}{3\sqrt{-\Delta}} \tag{6,16}$$

nach sich zieht. Wir erhalten also:

$$\omega_0' = 6\,, \quad d_{00} = -\frac{\delta^3 l^5}{3\sqrt{-\Delta}}\,. \tag{6,17}$$

λ sei wieder eine zulässige komplexe Zahl. Nach einer kurzen Zwischenrechnung erhalten wir für jede nichtnegative ganze Zahl k die Beziehung

$$\begin{aligned}(\eta_2 - \eta_3)\, \eta_1^k + (\eta_3 - \eta_1)\, \eta_2^k + (\eta_1 - \eta_2)\, \eta_3^k = \\ = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)\, f_k(\lambda)\,;\end{aligned} \tag{6,18}$$

im Falle $k = 0$ oder $k = 1$ ist $f_k(\lambda) \equiv 0$; für alle übrigen k ist $f_k(\lambda)$ ein Polynom.

Durch Einsetzen nach (6,14), (6,18) in (6,6), (6,13) gelangt man mit ähnlichem Verfahren, wie beim Ableiten von (6,15), zu den Darstellungen

$$K^*(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{0i}(x, \xi)\, \lambda^i\,, \tag{6,19}$$

$$B_j(\xi, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ji}(\xi)\, \lambda^i \quad (1 \leqq j \leqq 6)\,; \tag{6,20}$$

$g_{0i}(x, \xi)$, $b_{ji}(\xi)$ sind beliebig oft differentierbare Funktionen.

Schliesslich gelangt man leicht noch zu der Gleichheit

$$K(x, \xi, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & \cosh \sigma_1 x & \sinh \sigma_1 x & \cos \sigma_2 x & \sin \sigma_2 x & \cos \sigma_3 x & \sin \sigma_3 x \\ B_1(\xi, \lambda) & 0 & \sigma_1 & 0 & \sigma_2 & 0 & \sigma_3 \\ B_2(\xi, \lambda) & \Delta\eta_1 + \alpha\lambda & 0 & \Delta\eta_2 + \alpha\lambda & 0 & \Delta\eta_3 + \alpha\lambda & 0 \\ B_3(\xi, \lambda) & 0 & \sigma_1(\Delta\eta_1^2 + \alpha\lambda\eta_1) & 0 & \sigma_2(\Delta\eta_2^2 + \alpha\lambda\eta_2) & 0 & \sigma_3(\Delta\eta_3^2 + \alpha\lambda\eta_3) \\ B_4(\xi, \lambda) & \sigma_1 \sinh \sigma_1 l & \sigma_1 \cosh \sigma_1 l & -\sigma_2 \sin \sigma_2 l & \sigma_2 \cos \sigma_2 l & -\sigma_3 \sin \sigma_3 l & \sigma_3 \cos \sigma_3 l \\ B_5(\xi, \lambda) & (\Delta\eta_1 + \alpha\lambda) \cosh \sigma_1 l & (\Delta\eta_1 + \alpha\lambda) \sinh \sigma_1 l & (\Delta\eta_2 + \alpha\lambda) \cos \sigma_2 l & (\Delta\eta_2 + \alpha\lambda) \sin \sigma_2 l & (\Delta\eta_3 + \alpha\lambda) \cos \sigma_3 l & (\Delta\eta_3 + \alpha\lambda) \sin \sigma_3 l \\ B_6(\xi, \lambda) & (\Delta\eta_1^2 + \alpha\lambda\eta_1)\, \sigma_1 \sinh \sigma_1 l & (\Delta\eta_1^2 + \alpha\lambda\eta_1)\, \sigma_1 \cosh \sigma_1 l & -(\Delta\eta_2^2 + \alpha\lambda\eta_2)\, \sigma_2 \sin \sigma_2 l & (\Delta\eta_2^2 + \alpha\lambda\eta_2)\, \sigma_2 \cos \sigma_2 l & -(\Delta\eta_3^2 + \alpha\lambda\eta_3)\, \sigma_3 \sin \sigma_3 l & (\Delta\eta_3^2 + \alpha\lambda\eta_3)\, \sigma_3 \cos \sigma_3 l \end{vmatrix}. \tag{6,21}$$

Ein ganz analoger Gedankengang wie bei der Herleitung von (6,15) liefert

$$K(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{0i}(x, \xi)\, \lambda^i\,, \tag{6,22}$$

wobei $h_{0i}(x, \xi)$ wieder beliebig oft differentierbare Funktionen sind.

Selbstverständlich konvergieren die Reihen (6,19), (6,20), (6,21) auch für die ausgeschlossenen Werte $\lambda = \lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$. Diese Potenzreihen liefern also ganze transzendente Funktionen der Veränderlichen λ.

Mit λ_k sei wieder ein Eigenwert bezeichnet. Die Funktionen $D(\lambda)$, $K(x, \xi, \lambda)$, $K^*(x, \xi, \lambda)$ kann man in Potenzreihen

$$D(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{ki}(\lambda - \lambda)^{i+\omega'_k}, \tag{6,23}$$

$$K(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{ki}(x, \xi)(\lambda - \lambda_k)^i, \tag{6,24}$$

$$K^*(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki}(x, \xi)(\lambda - \lambda_k)^i \tag{6,25}$$

entwickeln, die wiederum für alle komplexe λ absolut konvergieren. Dabei ist ω'_k eine natürliche Zahl und $h_{ki}(x, \xi)$, $g_{ki}(x, \xi)$ beliebig oft differentierbare Funktionen.

Die Funktion $\dfrac{K(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)}$ kann man in Laurentsche Reihen

$$\frac{K(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{i=-\omega'_k}^{-1} q_{ki}(x, \xi)(\lambda - \lambda_k)^i + \sum_{i=0}^{\infty} q^*_{ki}(x, \xi)(\lambda - \lambda_k)^i$$

entwickeln, die in einem gewissen Bereich $0 < |\lambda - \lambda_k| < r_k^*$ absolut konvergent sind. Hierbei sind die Funktionen $q_{ki}(x, \xi)$ $(-\omega'_k \leqq i < 0)$ beliebig oft differentierbar. Dies, verbunden mit (6,5) und (6,25), liefert (6,7). Damit ist der Hilfssatz 6 vollständig bewiesen.

Nebenbei haben wir noch folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 7. *Die Determinante $D(\lambda)$ ist eine identisch nicht verschwindende ganze transzendente Funktion der komplexen Veränderlichen λ.*

Bekanntlich bilden die Nullstellen dieser Funktion eine höchstens abzählbare Menge, die keinen endlichen Häufungspunkt besitzt.

Hilfssatz 8. *Die positive Zahl λ sei kein Eigenwert der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5). *Dann besitzt die Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ noch die weiteren Eigenschaften:*

1. *für $x \neq \xi$ genügt $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ in der Veränderlichen ξ der Differentialgleichung*

$$\Delta \frac{\partial^6 \Gamma}{\partial \xi^6} + \alpha\lambda \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial \xi^4} + \delta\lambda \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \Gamma = 0\,; \tag{6,26}$$

2. *die Ableitungen $\dfrac{\partial^k \Gamma}{\partial \xi^k}$ $(1 \leqq k \leqq 4)$ sind im Bereich $0 \leqq x; \xi \leqq l$ stetig;*

3. *die fünfte partielle Ableitung* $\frac{\partial^5 \Gamma}{\partial \xi^5}$ *besitzt in jedem Punkt der Diagonale* $x = \xi$ *einen endlichen Sprung,*

$$\lim_{x \to \xi +} \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial \xi^5} - \lim_{x \to \xi -} \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial \xi^5} = -\frac{1}{\Delta};$$

in allen übrigen Punkten des Bereichs $0 \leqq x;\ \xi \leqq l$ *ist die Ableitung* $\frac{\partial^5 \Gamma}{\partial \xi^5}$ *stetig;*

4. *für* $\xi = 0$ *und* $\xi = l$ *gilt:* $\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial \xi^5} = 0$;

5. *falls* $r + s$ *eine gerade Zahl oder* $r + s \leqq 4$ *ist, ist die Ableitung* $\frac{\partial^{r+s} \Gamma}{\partial x^r \partial \xi^s}$ *im Bereich* $0 \leqq x;\ \xi \leqq l$ *stetig oder besitzt hier nur hebbare Unstetigkeiten;*

6. *falls* $r + s$ *eine ungerade Zahl und* $r + s > 4$ *ist, gilt*

$$\lim_{x \to \xi +} \frac{\partial^{r+s} \Gamma}{\partial x^r\, \partial \xi^s} - \lim_{x \to \xi -} \frac{\partial^{r+s} \Gamma}{\partial x^r\, \partial \xi^s} =$$

$$= (-1)^s \frac{(\eta_2 - \eta_3)\, \eta_1^{\frac{r+s-1}{2}} + (\eta_3 - \eta_1)\, \eta_2^{\frac{r+s-1}{2}} + (\eta_1 - \eta_2)\, \eta_3^{\frac{r+s-1}{2}}}{\Delta(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3)}. \quad (6,27)$$

Beweis. Die Eigenschaft 1 folgt aus (6,5) und aus der Tatsache, dass mit den Funktionen $B_i(\xi, \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ auch die Funktionen $K(x, \xi, \lambda)$, $\mathrm{sg}(x - \xi) \,.\, K^*(x, \xi, \lambda)$ in der Veränderlichen ξ der Differentialgleichung (6,26) genügen.

Die zweite bzw. dritte Eigenschaft ist eine Folge der fünften bzw. sechsten.

Da $D(\lambda)$ nicht verschwindet und die Funktionen $K(x, \xi, \lambda)$, $K^*(x, \xi, \lambda)$ beliebig oft differentierbar sind, folgt aus (6,5)

$$\lim_{x \to \xi +} \frac{\partial^{r+s} \Gamma}{\partial x^r\, \partial \xi^s} - \lim_{x \to \xi -} \frac{\partial^{r+s} \Gamma}{\partial x^r\, \partial \xi^s} = 2 \lim_{x \to \xi} \frac{\partial^{r+s} K^*}{\partial x^r\, \partial \xi^s}.$$

Wenn wir hier nach (6,6) einsetzen und die Ableitung mit dem angegebenen Grenzübergang berechnen, sehen wir, dass $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ auch die Eigenschaften 5 und 6 besitzt.

Die Eigenschaft 4 beweisen wir leicht durch Benutzung der Relationen (6,5), (6,6), (6,21).

Hilfssatz 9. *Die positive Zahl* λ *sei kein Eigenwert. Mit* $g(x)$ *und* $h(x)$ *bezeichnen wir beliebige Funktionen der Veränderlichen* x*, die im Bereich* $0 \leqq x \leqq l$

die stetigen Ableitungen $g'''(x)$ und $h^{(4)}(x)$ besitzen. Dann kann man die Lösung $(V(x, \lambda), N(x, \lambda))$ der Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{l}\alpha V^{(4)} + \beta N''' = -\lambda V + g \\ \gamma V''' + \delta N'' = -\lambda N + h\end{array}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq l)\,, \\ \alpha V'''(0) + \beta N''(0) = \alpha V'''(l) + \beta N''(l) = V''(0) = V''(l) = N'(0) = \\ = N'(l) = 0\end{array}\right\} \tag{6,28}$$

durch diese Formeln

$$\left.\begin{array}{l} V(x, \lambda) = \dfrac{\alpha}{\gamma\lambda}\displaystyle\int\limits_0^l \left(\Delta \frac{\partial^7 \Gamma}{\partial x^3\, \partial \xi^4} + \alpha\lambda \frac{\partial^5 \Gamma}{\partial x\, \partial \xi^4}\right) h(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^l \left(\Delta \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial x^3} + \alpha\lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right) h(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \\ \qquad + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^l \left(\Delta \frac{\partial^6 \Gamma}{\partial x^3\, \partial \xi^3} + \alpha\lambda \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial x\, \partial \xi^3}\right) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \\ N(x, \lambda) = \gamma \displaystyle\int\limits_0^l \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \xi^3}\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int\limits_0^l \left(\alpha \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial \xi^4} + \lambda\Gamma\right) h(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{array}\right\} \tag{6,29}$$

berechnen.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 konstruieren wir die Funktion $H_0(x)$ und befassen uns mit der Randwertaufgabe (6,1), (6,2), welche nach Hilfssatz 3 mit (6,28) äquivalent ist. Die Lösung $H(x, \lambda)$ dieser Randwertaufgabe erhält man aus (6,4) durch teilweise Integration und Benutzung des Hilfssatzes 8:

$$H(x, \lambda) = \gamma \int\limits_0^l \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \xi^3}\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int\limits_0^l \left(\alpha \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial \xi^4} + \lambda\Gamma\right) h(\xi)\, \mathrm{d}\xi - H_0(x)\,.$$

Wenn wir noch die zweite und dritte Gleichung in (4,4) beachten und nochmals den Hilfssatz 8 benützen, erhalten wir die zu beweisenden Relationen (6,29).

Hilfssatz 10. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 9 und der weiteren Voraussetzung, dass das Funktionenpaar $(g(x), h(x))$*[1] *zu den Eigenpaaren* (0, 1), (1, 0), $(l - 2x, 0)$ *orthogonal ist, gilt:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\lambda \to 0+} V(x, \lambda) = \dfrac{\delta}{\Delta}\displaystyle\int\limits_0^x \frac{(x - \xi)^3}{3!}\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \frac{\beta}{\Delta}\int\limits_0^x \frac{(x - \xi)^2}{2}\, h(\xi)\, \mathrm{d}\xi + ax + b\,, \\ \lim\limits_{\lambda \to 0+} N(x, \lambda) = -\dfrac{\gamma}{\Delta}\displaystyle\int\limits_0^x \frac{(x - \xi)^2}{2}\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \frac{\alpha}{\Delta}\int\limits_0^x (x - \xi)\, h(\xi)\, \mathrm{d}\xi + c\,, \end{array}\right\} \tag{6,30}$$

[1]) Das Funktionenpaar $(g(x), h(x))$ braucht *kein Randpaar* zu sein.

wobei die Konstanten a, b, c durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\Delta l^3}\int_0^l \left[\delta\left(\frac{(l-\xi)^5}{10} - \frac{l(l-\xi)^4}{4}\right) g(\xi) - \beta\left(\frac{(l-\xi)^4}{2} - l(l-\xi)^3\right) h(\xi)\right] \mathrm{d}\xi\,, \\
b &= \frac{1}{\Delta l^3}\int_0^l \left[-\,\delta\left(\frac{l(l-\xi)^5}{20} - \frac{l^2(l-\xi)^4}{12}\right) g(\xi) + \right. \\
&\quad \left. + \,\beta\left(\frac{l(l-\xi)^4}{4} - \frac{l^2(l-\xi)^3}{3}\right) h(\xi)\right] \mathrm{d}\xi\,, \\
c &= \frac{1}{\Delta l}\int_0^l \left[\gamma\,\frac{(l-\xi)^3}{6}\, g(\xi) - \alpha\,\frac{(l-\xi)^2}{2}\, h(\xi)\right] \mathrm{d}\xi
\end{aligned}\right\} \tag{6,31}$$

bestimmt sind.

Beweis. Durch Beachtung von (6,29) und ganz ähnliche Grenzübergänge, wie bei der Berechnung des Grenzwertes (6,16), denen in (6,29) die Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ und ihre Ableitungen unterworfen wurden, erhalten wir nach einer längeren, aber nicht komplizierten Rechnung, die zu beweisenden Formeln (6,30) und (6,31).

7. Die adjungierte Randwertaufgabe. Weitere Eigenschaften der Greenschen Funktion

Im weiteren führen wir der Abkürzung wegen den linearen Differentialoperator

$$L[u, \lambda] \equiv \Delta u^{(6)} + \alpha\lambda u^{(4)} + \delta\lambda u'' + \lambda^2 u \tag{7,1}$$

ein.

Definition 5. *Die Randwertaufgaben* (6,1), (6,2) *und*

$$L[N, \lambda] = \Psi(x, \lambda)\,, \tag{7,2}$$

$$N'(0) = N'(l) = N''(0) = N''(l) = N^{(5)}(0) = N^{(5)}(l) = 0 \tag{7,3}$$

nennt man adjungiert.

Falls wir in (7,2) $\Psi(x, \lambda) \equiv 0$ setzen, sind wir wieder vor die Aufgabe gestellt, eine nichttriviale Lösung der Randwertaufgabe (7,2), (7,3) aufzusuchen. Dies führt selbstverständlich wieder zu dem Eigenwertproblem dieser Randwertaufgabe.

Mit $\tilde{\Gamma}(x, \xi, \lambda)$ bezeichnen wir nun die Greensche Funktion, die der adjungierten Randwertaufgabe (7,2), (7,3) entspricht. Sie wird durch ein ganz ähnliches Verfahren wie bei der Randwertaufgabe (6,1), (6,2) konstruiert.

Hilfssatz 11. *$\Gamma(x, \xi, \lambda)$ bzw. $\tilde{\Gamma}(x, \xi, \lambda)$ sei die Greensche Funktion der Randwertaufgabe* (6,1), (6,2) *bzw.* (7,2), (7,3). *Dann:*

1. $\tilde{\Gamma}(x, \xi, \lambda) \equiv \Gamma(\xi, x, \lambda)$;

2. *beide Randwertaufgaben besitzen dieselben Eingenwerte;*

3. *die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen $\tilde{N}_{ki}(x)$ der Randwertaufgabe* (7,2), (7,3), *welche dem positiven Eigenwert λ_k entsprechen, ist gleich der Anzahl von linear unabhängigen, demselben Eigenwert λ_k entsprechenden Eigenpaaren der Randwertaufgabe* (6,1), (6,2);

4. *die Eigenfunktionen $\tilde{N}_{ki}(x)$ der Randwertaufgabe* (7,2), (7,3) *und die Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ der Randwertaufgabe* (6,1), (6,2), *welche demselben positiven Eigenwert λ_k entsprechen, sind miteinander durch die Gleichung*

$$\tilde{N}_{ki}(x) = \alpha V'_{ki}(x) + \beta N_{ki}(x) \tag{7,4}$$

verbunden. Dabei ist die lineare Unabhängigkeit der Eigenfunktionen $\tilde{N}_{ki}(x)$ eine Folge der linearen Unabhängigkeit der entsprechenden Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$.

Beweis. Die erste und zweite Behauptung des Satzes folgt sofort aus Hilfssatz 8, wenn man die Grössen x, ξ miteinander vertauscht.

Da die Anzahl der linear unabhängigen Eigenpaare der Randwertaufgabe (6,1), (6,2) genauso wie die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen der Randwertaufgabe (7,2), (7,3) durch den Rang der entsprechenden Determinante $D(\lambda_k)$ bestimmt wird, folgt die dritte Behauptung des Satzes aus den ersten zwei, schon bewiesenen Behauptungen, und aus (6,5).

Um noch die Behauptung 4 zu beweisen, überzeugt man sich am besten direkt, dass die durch (7,4) bestimmten Eigenfunktionen $\tilde{N}_{ki}(x)$ der Differentialgleichung $L[\tilde{N}_{ki}; \lambda_k] = 0$ und den Randbedingungen (7,3) genügen. Die lineare Unabhängigkeit der Eigenfunktionen $\tilde{N}_{ki}(x)$ folgt aus (7,4) und (4,4), (4,5), wo $g(x) \equiv h(x) \equiv H_0(x) \equiv 0$ gesetzt wurde.

Hilfssatz 12. *λ_k sei ein positiver Eigenwert der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5); *ω_k sei die Anzahl der linear unabhängigen, diesem Eigenwert entsprechenden, Eigenpaare. Dann ist λ_k eine ω_k-fache Nullstelle der ganzen transzendenten Funktion $D(\lambda)$.*

Beweis. Es ist bequem die folgenden Bezeichnungen einzuführen: $z_i(x, \lambda)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ ist ein beliebiges Hauptsystem von Integralen der Differentialgleichung $L[z, \lambda] = 0$;

$$y_i(x, \lambda) = \frac{1}{\gamma\lambda}(\Delta z_i''''(x, \lambda) + \alpha\lambda z_i'(x, \lambda)) \quad (1 \leqq i \leqq 6)\,;$$

$$\mathfrak{A}(x, \lambda) = (y(x, \lambda), z(x, \lambda))\,; \quad \mathfrak{A}_i(x, \lambda) = (y_i(x, \lambda), z_i(x, \lambda)) \quad (1 \leqq i \leqq 6)\,,$$

$$\mathfrak{A}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{6} a_i \mathfrak{A}_i(x, \lambda) = (\sum_{i=1}^{6} a_i y_i(x, \lambda)\,, \sum_{i=1}^{6} a_i z_i(x, \lambda))\,;$$

$$L_1(\mathfrak{A}) = z'(0, \lambda)\,, \quad L_2(\mathfrak{A}) = \alpha y'''(0, \lambda) + \beta z''(0, \lambda)\,, \quad L_3(\mathfrak{A}) = y''(0, \lambda)\,,$$

$$L_4(\mathfrak{A}) = z'(l, \lambda)\,, \quad L_5(\mathfrak{A}) = \alpha y'''(l, \lambda) + \beta z''(l, \lambda)\,, \quad L_6(\mathfrak{A}) = y''(l, \lambda)\,.$$

Damit erhalten die Randbedingungen (3,5) die Form:

$$L_i(\mathfrak{A}) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq 6)\,.$$

Nach dieser Bezeichnungsweise verläuft nun der Beweis ganz ähnlich, wie bei E. Kamke [3], Seite 242—244.

Wir führen jetzt noch die folgende Bezeichnungsweise ein, welche wir mit Ausnahme von Hilfssatz 13 in allen weiteren Ausführungen beibehalten werden:

ω_k sei die Anzahl der linear unabhängigen Eigenpaare, die dem nichtnegativen Eigenwert λ_k entsprechen. Diese Eigenpaare, welche man nach Hilfssatz 5 und Satz 4 orthogonal wählen kann, werden mit $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k)$ bezeichnet. Überdies setzen wir noch voraus, dass die Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ so gewählt sind, dass die Formeln

$$\int_0^l (\gamma V_{ki} V_{mj} - \beta N_{ki} N_{mj})\,\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} \gamma \text{ für } k = m \text{ und } i = j \\ 0 \text{ für } k \neq m \text{ oder } i \neq j \end{Bmatrix}; \tag{7,5}$$

gelten. Bei festem k bezeichnen wir noch mit $(V_k(x), N_k(x))$ ein Eigenpaar, das als lineare Kombination der Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k)$ dargestellt werden kann:

$$(V_k(x), N_k(x)) = \sum_{i=1}^{\omega_k} c_i (V_{ki}(x), N_{ki}(x)) = (\sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} V_{ki}(x), \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} N_{ki}(x))\,. \tag{7,6}$$

Satz 5. *Für jeden positiven Eigenwert λ_k der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *besteht die Gleichung*

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} \sum_{i=1}^{\omega_k} N_{ki}(x)\,\tilde{N}_{ki}(\xi) + \Gamma_k^*(x, \xi, \lambda)\,. \tag{7,7}$$

Für $\lambda_0 = 0$ gilt

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 l} - \frac{\alpha l}{2\Delta\lambda}\left[\frac{x^2(l-x)^2}{l^4} - \frac{1}{30}\right] + \Gamma_0^*(x, \xi, \lambda)\,. \tag{7,8}$$

Dabei ist jede Funktion $\Gamma_k^*(x, \xi, \lambda)$ $(k \geqq 0)$ in der Veränderlichen λ regulär in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes λ_k.

Der Beweis verläuft wieder ganz analog, wie bei E. Kamke [3], Seite 244—250. Man muss nur die Hilfssätze 2, 5, 9, 12 beachten und die eben eingeführte Bezeichnungsweise benützen.

8. Existenzsatz für die Eigenwerte und Eigenpaare

Im Hilfssatz 13 wird die Bezeichnungsweise der Formeln (7,5), (7,6) ausnahmsweise nicht benützt.

Hilfssatz 13. *Sei $(V_i(x), N_i(x))$ $(1 \leqq i \leqq k)$ ein System von k beliebigen voneinander linear unabhängigen Eigenpaaren; weiter sei $(U(x), M(x))$ ein beliegiges Randpaar, das zu allen diesen Eigenpaaren orthogonal ist, d. h. für welches die Relationen $\int_0^l (\gamma U V_i - \beta M N_i)\,\mathrm{d}x = 0$ $(1 \leqq i \leqq k)$ bestehen. Mit c bezeichnen wir weiter eine beliebige reelle Zahl. Endlich setzen wir noch voraus, dass wenigstens eine der Relationen*

$$\alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) - cU(x) \not\equiv 0\,; \quad \gamma U'''(x) + \delta M''(x) - cM(x) \not\equiv 0$$

gilt.

Dann gibt es mindestens ein Randpaar $(V(x), N(x))$, für das die Relationen

$$\int_0^l (\gamma V V_i - \beta N N_i)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (1 \leqq i \leqq k) \tag{8,1}$$

und

$$\int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''')\,\gamma V - (\gamma U''' + \delta M'')\,\beta N]\,\mathrm{d}x \neq c\int_0^l (\gamma U V - \beta M N)\,\mathrm{d}x \tag{8,2}$$

gleichzeitig bestehen.

Beweis. Falls $\alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) - cU(x) \not\equiv 0$ ist, gibt es im Interval $\langle 0, l\rangle$ mindestens eine Zahl x_0, für die $\alpha U^{(4)}(x_0) + \beta M'''(x_0) - cU(x_0) \neq 0$ gilt. Also in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes x_0 besitzt die stetige Funktion $\alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) - cU(x)$ ein festes Vorzeichen. Mit I bezeichnen wir den Durchschnitt dieser Umgebung mit dem Intervall $\langle 0, l\rangle$. Wir konstruieren nun eine Funktion $U_0(x)$, welche im Intervall $\langle 0, l\rangle$ eine stetige siebente Ableitung $U_0^{(7)}(x)$ besitzt, den Randbedingungen $U_0'''(0) = U_0'''(l) = U_0''(0) = U_0''(l) = 0$ genügt und im Intervall I nur positive werte annimmt und sonst verschwindet. Wir setzen noch $M_0(x) \equiv 0$. Das Funktionenpaar $(U_0(x), M_0(x))$ ist offensichtlich ein Randpaar und es gilt

$$S = \int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''' - cU)\,\gamma U_0 - (\gamma U''' + \delta M'' - cM)\,\beta M_0]\,\mathrm{d}x = \tag{8,3}$$

$$= \int_0^l (\alpha U^{(4)} + \beta M''' - cU)\,\gamma U_0\,\mathrm{d}x = \int_I (\alpha U^{(4)} + \beta M''' - cU)\,\gamma U_0\,\mathrm{d}x \neq 0\,.$$

Ist aber $\alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) - cU(x) \equiv 0$, muss es mindestens eine Zahl $x_0 \in \langle 0, l\rangle$ geben, für welche der Ausdruck $\gamma U'''(x_0) + \delta M''(x_0) - cM(x_0)$ nicht verschwindet. Ähnlich wie im vorigen Falle können wir ein Intervall I und eine Funktion $M_0(x)$ so wählen, dass sie für $0 \leqq x \leqq l$ eine stetige sechste Ableitung $M_0^{(6)}(x)$ besitzt, den Randbedingungen $M_0''(0) = M_0''(l) = M_0'(0) =$

$= M_0'(l) = 0$ genügt und im Intervall I nur positive Werte annimmt, aber sonst verschwindet. Wir setzen nun $U_0(x) \equiv 0$; $(U_0(x), M_0(x))$ ist wieder ein Randpaar, für das (8,3) gilt:

$$S = \int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''' - cU)\,\gamma U_0 - (\gamma U''' + \delta M'' - cM)\,\beta M_0]\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\beta \int_0^l (\gamma U''' + \delta M'' - cM)\,M_0\,\mathrm{d}x = -\beta \int_I (\gamma U''' + \delta M'' - cM)\,M_0\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

In beiden Fällen setzen wir

$$(V(x), N(x)) = (U_0(x), M_0(x)) + \sum_{i=1}^k c_i(V_i(x), N_i(x))\,,$$

wobei

$$c_i = -\frac{\int_0^l (\gamma U_0 V_i - \beta M_0 N_i)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l (\gamma V_i^2 - \beta M_i^2)\,\mathrm{d}x} \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

ist. Man sieht leicht, dass das Funktionenpaar $(V(x), N(x))$ ein Randpaar ist, welches den Relationen (8,1) genügt. Wegen den Voraussetzungen und (3,6) ist aber

$$\int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''' - cU)\,\gamma V - (\gamma U''' + \delta M'' - cM)\,\beta N]\,\mathrm{d}x =$$

$$= S + \sum_{i=0}^k c_i \{\int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''')\,\gamma V_i - (\gamma U''' + \delta M'')\,\beta N_i]\,\mathrm{d}x -$$

$$- c\int_0^l (\gamma U V_i - \beta M N_i)\,\mathrm{d}x\} =$$

$$= S + \sum_{i=1}^k c_i \int_0^l [(\alpha V_i^{(4)} + \beta N_i''')\,\gamma U - (\gamma V_i''' + \delta N_i'')\,\beta M]\,\mathrm{d}x =$$

$$= S - \sum_{i=0}^k c_i \lambda_i \int_0^l (\gamma U V_i - \beta M N_i)\,\mathrm{d}x = S \neq 0\,.$$

Damit ist alles bewiesen.

Im weiteren wird wieder die Bezeichnung des vorigen Paragraphen benützt und wir werden voraussetzen, dass die Eigenpaare und Eigenfunktionen (falls sie vorhanden sind) den Relationen (7,5) genügen. Das triviale Funktionenpaar (0, 0) werden wir in den weiteren Untersuchungen ausschliessen.

Nach Hilfssatz 7 kann man die vorhandenen Eigenwerte der Randwertaufgabe (3,4), (3,5) in eine zunehmende Folge

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

so anordnen, dass in jedem offenen Intervall $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ $(j \geqq 1)$ kein Eigenwert liegt.

Ist ein positiver Eigenwert λ_k bekannt, können wir leicht den Rang der Determinante (4,13) feststellen und die zugehörigen linear unabhängigen Eigenpaare aufstellen.

Definition 6. *Die Eigenwerte* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ *der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *seien so angeordnet, dass jedes offene Intervall* $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ *keinen Eigenwert enthält. Es sei weiter* $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;$ $0 \leqq k \leqq n)$ *das System aller Eigenpaare, die diesen Eigenwerten entsprechen und den Relationen* (7,5) *genügen.*

Wir sagen nun, dass das Randpaar $(U(x), M(x))$ *der Menge* $\mathfrak{G}_{n+1}$ *angehört, falls alle Relationen*

$$\int_0^l (\gamma U V_{ki} - \beta M N_{ki})\, dx = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n) \tag{8,4}$$

erfüllt sind. $\mathfrak{G}_0$ *ist speziell die Menge aller Randpaare. Offenbar gilt* $\mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset$ $\supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_{n+1}$.

Hilfssatz 14. *Für die Eigenpaare* $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)$ *seien die Relationen* (7,5) *erfüllt. Dann gibt es mindestens ein Randpaar* $(U^*(x),$ $M^*(x))$, *welches mit den Eigenpaaren* $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)$ *ein linear unabhängiges System bildet.*

Beweis. Es sei $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}(V_{ki}(x), N_{ki}(x)) \equiv (0, 0)$. Nach der Definition 3 muss also

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} V_{ki}(x) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} N_{ki}(x) \equiv 0$$

sein. Aus diesen Identitäten folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}(\gamma V_{ki}(x)\, V_{rs}(x) - \beta N_{ki}(x)\, N_{rs}(x)) \equiv 0 \quad (1 \leqq s \leqq \omega_r;\ 0 \leqq r \leqq n)\,.$$

Diese Beziehungen liefern nach der Benutzung von (7,5) sofort $c_{rs} = 0$ $(1 \leqq$ $\leqq s \leqq \omega_r;\ 0 \leqq r \leqq n)$. Die Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq$ $\leqq n)$ sind also linear unabhängig.

Wir bezeichnen jetzt diese Eigenpaare mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_h$. Da $\omega_0 = 3$ und $1 \leqq \omega_k \leqq 2$ für $k \geqq 1$, ist auch $n + 3 \leqq h \leqq 2n + 3$.

Für jede natürliche Zahl m ist aber $\mathfrak{B}_m \equiv ([x(l - x)]^{m+3}, 0)$ ein Randpaar. Wir sehen leicht ein, dass die Randpaare $\mathfrak{B}_i$ $(1 \leqq i \leqq h + 1)$ wieder voneinander linear unabhängig sind.

Um den Hilfssatz 14 zu beweisen, genügt es ein Randpaar anzugeben, das nicht als lineare Kombination der Eigenpaare $\mathfrak{A}_i$ $(1 \leqq i \leqq h)$ dargestellt werden kann.

Wir setzen voraus, dass so ein Randpaar nicht vorhanden ist. Dann gibt es sicher Grössen $c_i^{(m)}$ $(1 \leqq i; m \leqq h)$, so dass

$$\sum_{i=1}^{h} c_i^{(m)} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_m \quad (1 \leqq m \leqq h)$$

und

$$\sum_{i=1}^{h} |c_i^{(m)}| > 0 \quad (1 \leqq m \leqq h)$$

besteht. Da die Randpaare $\mathfrak{B}_m$ $(1 \leqq m \leqq h)$ linear unabhängig sind, ist die Determinante Det $|c_i^{(m)}|$ gewiss von Null verschieden. Deshalb kann man jedes Eigenpaar $\mathfrak{A}_i$ $(1 \leqq i \leqq h)$ als lineare Kombination der Randpaare $\mathfrak{B}_m$ $(1 \leqq \leqq m \leqq h)$ darstellen. Nach Voraussetzung gilt aber

$$\mathfrak{B}_{h+1} = \sum_{i=1}^{h} c_i^{(h+1)} \mathfrak{A}_i \,; \quad \sum_{i=1}^{h} |c_i^{(h+1)}| > 0 \,.$$

$\mathfrak{B}_{h+1}$ ist also auch als lineare Kombination der Randpaare $\mathfrak{B}_m$ $(1 \leqq m \leqq h)$ darstellbar. Die Randpaare $\mathfrak{B}_m$ $(1 \leqq m \leqq h + 1)$ sind deswegen linear abhängig. Dies ist aber ein Widerspruch mit der Konstruktion der Randpaare $\mathfrak{B}_m$. Damit ist der Hilfssatz 14 bewiesen.

Satz 6. *Jede der Mengen* $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 0)$ *ist nicht leer. Der Eigenwert* λ_n *wird durch die Relation*

$$\lambda_n = \min_{(U,M)\in\mathfrak{S}_n} R[U, M] \quad (n \geqq 0) \tag{8,5}$$

berechnet. Ausserdem gilt immer $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

B e w e i s. Den Satz werden wir durch Induktion beweisen. Falls $n = 0$, gehört das Funktionenpaar $(1, 0)$ der Menge $\mathfrak{S}_0$ an; offenbar gilt dann auch $R[1, 0] = 0$. In diesem Fall ist also der Satz richtig.

Der Satz sei schon für $n \geqq 0$ bewiesen. Unter dieser Voraussetzung beweisen wir den Satz für $n + 1$.

Wie vorausgesetzt, sind uns schon alle Eigenwerte λ_k $(0 \leqq k \leqq n)$ bekannt, die den Eigenwert λ_n nicht überschreiten. Wir konstruieren weiter alle, diesen Eigenwerten entsprechende, linear unabhängige Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k; 0 \leqq k \leqq n)$. Nach Definition 6 kann man nun entscheiden, ob ein gegebenes Randpaar $(U(x), M(x))$ der Menge $\mathfrak{S}_{n+1}$ angehört oder nicht.

Der Hilfssatz 14 sichert die Existenz eines Randpaares $(U^*(x), M^*(x))$, welches man nicht als lineare Kombination der Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k; 0 \leqq k \leqq n)$ darstellen kann.

Wir setzen

$$(U(x), M(x)) \equiv (U^*(x), M^*(x)) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}(V_{ki}(x), N_{ki}(x)) \,,$$

wobei

$$c_{ki} = -\int_0^l \left(U^* V_{ki} - \frac{\beta}{\gamma} M^* N_{ki}\right) \mathrm{d}x \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)$$

ist. $(U(x), M(x))$ ist offenbar ein Randpaar, das die Relationen (8,4) erfüllt und deswegen der Menge $\mathfrak{G}_{n+1}$ angehört. $\mathfrak{G}_{n+1}$ ist also nicht leer.

Sei $(U(x), M(x)) \in \mathfrak{G}_{n+1}$ und $R = R[U, M]$. Wegen $\mathfrak{G}_{n+1} \subset \mathfrak{G}_n$, gehört $(U(x), M(x))$ auch der Menge $\mathfrak{G}_n$ an. Deshalb ist

$$R \geqq \lambda_n\,. \tag{8,6}$$

Die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ werden nun durch die Gleichungen

$$g(x) = \alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) + RU(x)\,,\quad h(x) = \gamma U'''(y) + \delta M''(x) + RM(x) \tag{8,7}$$

erklärt.

1. Sei $g(x) \equiv h(x) \equiv 0$. Da $(U(x), M(x)) \not\equiv (0, 0)$ ist, ist $(U(x), M(x))$ ein Eigenpaar und R ein Eigenwert. Wäre $R = \lambda_n$, so hätte man $(U(x), M(x)) \equiv \equiv \sum_{i=1}^{\omega_n} c_i(V_{ni}(x), N_{ni}(x))$. Beachtet man noch, dass die Integrale $\int_0^l (\gamma U V_{ni} - \beta M N_{ni})\,\mathrm{d}x$ $(1 \leqq i \leqq \omega_n)$ wegen $(U(x), M(x)) \in \mathfrak{G}_{n+1}$ sämtlich verschwinden, erhält man sofort die Gleichungen $c_i \int_0^l (\gamma V_{ni}^2 - \beta N_{ni}^2)\,\mathrm{d}x = \gamma c_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq \omega_n)$. Beide Funktionen $U(x)$, $M(x)$ verschwinden also gleichzeitig. Dies ist aber ein Widerspruch. Es muss deshalb $R > \lambda_n$ sein. R ist also ein Eigenwert, der grösser als λ_n ist. Im eben untersuchten Falle ist der Satz bewiesen.

2. Falls $(g(x), h(x)) \not\equiv (0, 0)$, muss mindestens eine der Relationen

$$\alpha U^{(4)}(x) + \beta M'''(x) + RU(x) \not\equiv 0\,;\quad \gamma U'''(x) + \delta M''(x) + RM(x) \not\equiv 0$$

gelten. Nach dem Hilfssatz 13 gibt es dann ein Randpaar $(V(x), N(x))$, für welches die Beziehungen

$$\int_0^l (\gamma V V_{ki} - \beta N N_{ki})\,\mathrm{d}x = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)\,, \tag{8,8}$$

$$S = \int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''' + RU)\,\gamma V - (\gamma U''' + \delta M'' + RM)\,\beta N]\,\mathrm{d}x \neq 0 \tag{8,9}$$

gleichzeitig bestehen.

Aus (8,8) folgt, dass das Randpaar $(V(x), N(x))$ der Menge $\mathfrak{G}_{n+1}$ angehört und deshalb $R[V, N] \geqq \lambda_n$ ist. Für eine beliebige reelle Zahl ϑ ist aber das Funktionenpaar $(U(x) + \vartheta V(x), M(x) + \vartheta N(x))$ ein Randpaar, das wieder in $\mathfrak{G}_{n+1}$ liegt. Für den Rayleighschen Quotienten $R_1 = R[U + \vartheta V, M + \vartheta N]$ dieses Randpaares gilt also sicher $R_1 \geqq \lambda_n$.

Wir zeigen nun, dass $R = R[U, M] > \lambda_n$ gilt. Nach (8,6) ist immer $R \geqq \lambda_n$. Wäre $R = \lambda_n$, so müssten nach (3,9) die Rayleighschen Quotienten R, R_1 und $R[V, N]$ die Beziehungen

$$\lambda_n = R = -\frac{\int_0^l (\alpha\gamma U''^2 + 2\beta\gamma U''M' + \beta\delta M'^2)\, dx}{\int_0^l (\gamma U^2 - \beta M^2)\, dx},$$

$$\lambda_n \leqq R_1 =$$

$$= -\frac{\int_0^l [\alpha\gamma(U'' + \vartheta V'')^2 + 2\beta\gamma(U'' + \vartheta V'')(M' + \vartheta N') + \beta\delta(M' + \vartheta N')^2]\, dx}{\int_0^l [\gamma(U + \vartheta V)^2 - \beta(M + \vartheta N)^2]\, dx},$$

$$\lambda_n \leqq R[V, N] = -\frac{\int_0^l (\alpha\gamma V''^2 + 2\beta\gamma V''N' + \beta\delta N'^2)\, dx}{\int_0^l (\gamma V^2 - \beta N^2)\, dx}$$

erfüllen. Hieraus und aus (8,9) erhält man leicht

$$2\vartheta\lambda_n \int_0^l \left(UV - \frac{\beta}{\gamma} MN\right) dx + \vartheta^2\lambda_n \int_0^l \left(V^2 - \frac{\beta}{\gamma} N^2\right) dx \leqq$$

$$\leqq -\frac{2\vartheta}{\gamma} \int_0^l [(\alpha U^{(4)} + \beta M''')\gamma V - (\gamma U''' + \delta M'')\beta N]\, dx -$$

$$-\vartheta^2 \int_0^l \left(\alpha V''^2 + 2\beta V''N' + \frac{\beta\delta}{\gamma} N'^2\right) dx,$$

d. h.

$$0 \neq \frac{2\vartheta}{\gamma} S \leqq \vartheta^2(\Delta[V, N] - \lambda c) \int_0^l \left(V^2 - \frac{\beta}{\gamma} N^2\right) dx. \tag{8,10}$$

Diese Ungleichheit gilt für eine willkürliche reelle Zahl $\vartheta \neq 0$. Deswegen kann man ϑ so wählen, dass $\frac{2\vartheta S}{\gamma} > 0$ ist. Wenn man nun (8,10) durch $|\vartheta| > 0$ dividiert und ϑ so gegen Null konvergieren lässt, dass immer der Quotient $\frac{2\vartheta S}{\gamma}$ positiv ist, erhält man offensichtlich einen Widerspruch: $0 < 2\left|\frac{S}{\gamma}\right| \leqq 0$.

Die Voraussetzung, dass $R = \lambda_n$ ist, ist also falsch. Deshalb folgt aus (8,6)

$$R[U, M] = R > \lambda_n \,. \tag{8,11}$$

Diese Eigenschaft besitzt jedes Randpaar, das der Menge $\mathfrak{S}_{n+1}$ angehört.

Weiter muss man beweisen, dass das halbabgeschlossene Intervall $(\lambda_n, R\rangle$ mindestens einen Eigenwert enthält.

Die stetigen Funktionen $g(x)$, $h(x)$ seien durch die Formeln (8,7) erklärt. Wir werden nun das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} \alpha V^{(4)}(x, \lambda) + \beta N'''(x, \lambda) &= -\lambda V(x, \lambda) + g(x)\,, \\ \gamma V'''(x, \lambda) + \delta N''(x, \lambda) &= -\lambda N(x, \lambda) + h(x)\,, \\ \alpha V'''(0, \lambda) + \beta N''(0, \lambda) = \alpha V'''(l, \lambda) + \beta N''(l, \lambda) &= V''(0, \lambda) = \\ = V''(l, \lambda) = N'(0, \lambda) &= N'(l, \lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8,12}$$

mit $\lambda_n < \lambda \leqq R$ lösen.

Wäre im Intervall $(\lambda_n, R\rangle$ kein Eigenwert vorhanden, so hätte dieses Randwertproblem nach dem Hilfssatz 9 genau eine Lösung $(V(x, \lambda), N(x, \lambda))$ für jede Zahl λ, $\lambda_n < \lambda \leqq R$, die durch Formeln (6,29) erklärt ist. Wegen der Stetigkeit der Greenschen Funktion $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ und ihrer, in den Formeln (6,29) auftretenden, Ableitungen, sind beide Funktionen $V(x, \lambda)$, $N(x, \lambda)$ in der Veränderlichen λ stetig im Intervall $\lambda_n < \lambda \leqq R$. Aus (8,12) und (8,7) folgt speziell

$$V(x, R) \equiv U(x)\,; \quad N(x, R) \equiv M(x)\,. \tag{8,13}$$

Durch Benutzung von (8,7), (8,12) und Hilfssatz 2 erhält man weiter

$$\int_0^l (\gamma g V_{ki} - \beta h N_{ki})\, \mathrm{d}x = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)\,, \tag{8,14}$$

$$(\lambda - \lambda_k)\int_0^l (\gamma V V_{ki} - \beta N N_{ki})\, \mathrm{d}x = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k \leqq n)\,. \tag{8,15}$$

Aus (8,15) folgt aber für $\lambda > \lambda_n \geqq \lambda_k$ $(0 \leqq k \leqq n)$, dass $(V(x, \lambda), N(x, \lambda))$ der Menge $\mathfrak{S}_{n+1}$ angehört. Wegen (8,11) muss also $R[V(x, \lambda), N(x, \lambda)] > \lambda_n$ sein.

Da für $n = 0$ das Funktionenpaar $(g(x), h(x))$ nach (8,14) orthogonal zu den Eigenpaaren (0, 1), (1, 0), $(l - 2x, 0)$ ist, sind nach Hilfssatz 10 die Grenzfunktionen $V(x, 0) = \lim\limits_{\lambda \to 0+} V(x, \lambda)$ und $N(x, 0) = \lim\limits_{\lambda \to 0+} N(x, \lambda)$ vorhanden und beschränkt.

Weiter sei n eine natürliche Zahl (d. h. $\lambda_n > 0$). Nach (7,7) ist

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{\gamma\lambda_n(\lambda - \lambda_n)} \sum_{i=1}^{\omega_n} N_{ni}(x)\,\tilde{N}_{ni}(\xi) + \Gamma_n^*(x, \xi, \lambda)\,.$$

Durch Benutzung des Hilfssatzes 9 erhält man leicht für die Lösungsfunktionen $V(x, \lambda)$, $N(x, \lambda)$ der Randwertaufgabe (8,12) die Formeln

$$V(x, \lambda) = V^*(x, \lambda) - \frac{1}{\gamma\lambda\lambda_n} \sum_{i=1}^{\omega_n} (\Delta N'''_{ni}(x) + \alpha\lambda N'_{ni}(x)) \int_0^l \tilde{N}_{ni}(\xi)\, h(\xi)\, \mathrm{d}\xi ,$$

$$N(x, \lambda) = N^*(x, \lambda) - \frac{1}{\gamma\lambda_n} \sum_{i=1}^{\omega_n} N_{ni}(x) \int_0^l \tilde{N}_{ni}(\xi)\, h(\xi)\, \mathrm{d}\xi .$$

Dabei sind die Funktionen $V^*(x, \lambda)$, $N^*(x, \lambda)$ im Punkte $\lambda = \lambda_n$ stetig. Die Grenzfunktionen $V(x, \lambda_n) = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n +} V(x, \lambda)$, $N(x, \lambda_n) = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n +} N(x, \lambda)$ sind wieder beschränkt und bilden offenbar ein Randpaar $(V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n))$, das dem System von Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha V^{(4)}(x, \lambda_n) + \beta N'''(x, \lambda_n) &= -\lambda_n V(x, \lambda_n) + g(x) , \\ \gamma V'''(x, \lambda_n) + \delta N''(x, \lambda_n) &= -\lambda_n N(x, \lambda_n) + h(x) \end{aligned}\right\} \tag{8,16}$$

genügt.

$V(x, \lambda)$, $N(x, \lambda)$ sind also im Intervall $\lambda_n \leqq \lambda \leqq R$ stetige Funktionen des Parameters λ.

Aus (8,14) und (8,16) folgt, dass für jede ganze Zahl $k < n$

$$(\lambda_n - \lambda_k)\int_0^l (\gamma V(x, \lambda_n)\, V_{ki}(x) - \beta N(x, \lambda_n)\, N_{ki}(x))\, \mathrm{d}x = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ 0 \leqq k < n)$$

gilt.

$(V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)$ $(n \geqq 0)$ gehört also immer der Menge $\mathfrak{S}_n$ an und deshalb ist

$$R[V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)] \geqq \lambda_n . \tag{8,17}$$

Wäre $R[V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)] = \lambda_n$, so könnte $(V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n))$ wegen (8,11) nicht im $\mathfrak{S}_{n+1}$ liegen. Wie setzen nun

$$(V^*(x), N^*(x)) \equiv (V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)) + \sum_{i=1}^{\omega_n} c_i(V_{ni}(x), N_{ni}(x)) , \tag{8,18}$$

wobei

$$c_i = -\int_0^l \left(V V_{ni} - \frac{\beta}{\gamma} N N_{ni}\right) \mathrm{d}x \quad (1 \leqq i \leqq \omega_n)$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass $(V^*(x)\,, N^*(x))$ wieder ein Randpaar ist welches der Menge $\mathfrak{S}_{n+1}$ angehört.

Nach einer längeren, aber einfachen Rechnung erhält man

$$-\int_0^l (\alpha\gamma V^{*''2} + 2\beta\gamma V^{*''} N^{*'} + \beta\delta N^{*'2})\, \mathrm{d}x = \lambda_n\Big(\int_0^l (\gamma V^2 - \beta N^2)\, \mathrm{d}x - \gamma \sum_{i=1}^{\omega_n} c_i^2\Big) ,$$

$$\int_0^l (\gamma V^{*2} - \beta N^{*2})\, \mathrm{d}x = \int_0^l (\gamma V^2 - \beta N^2)\, \mathrm{d}x - \gamma \sum_{i=1}^{\omega_n} c_i^2 \neq 0 ;$$

hieraus folgt sofort für den Rayleighschen Quotienten des Randpaares $(V^*(x), N^*(x))$ die Relation $R[V^*, N^*] = \lambda_n$, welche mit der Beziehung $(V^*(x), N^*(x)) \in \mathfrak{S}_{n+1}$ im Widerspruch steht. Es muss also

$$R[V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)] > \lambda_n \tag{8,19}$$

sein.

Wir konstruieren noch eine Hilfsfunktion

$$\varrho(\lambda) = -\int_0^l \left[g(x)\, V(x, \lambda) - \frac{\beta}{\gamma}\, h(x)\, N(x, \lambda)\right] \mathrm{d}x\,. \tag{8,20}$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen $V(x, \lambda)$, $N(x, \lambda)$ folgt sofort, dass die Funktion $\varrho(\lambda)$ im Intervall $\langle \lambda_n, R \rangle$ stetig ist.

Sei $\lambda \neq \lambda^*$, $\lambda_n \leqq \lambda \leqq R$, $\lambda_n \leqq \lambda^* \leqq R$. Die Funktionenpaare $(V(x, \lambda), N(x, \lambda))$, $(V(x, \lambda^*), N(x, \lambda^*))$ sind offenbar Randpaare und nach (8,12) oder (8,16) und Hilfssatz 2 erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\varrho(\lambda^*) - \varrho(\lambda) = \int_0^l [(\alpha V^{(4)}(x, \lambda^*) + \beta N'''(x, \lambda^*) + \lambda^* V(x, \lambda^*))\, V(x, \lambda) - \\
- (\gamma V'''(x, \lambda^*) + \delta N''(x, \lambda^*) + \lambda^* N(x, \lambda^*))\, \frac{\beta}{\gamma}\, N(x, \lambda) - \\
- (\alpha V^{(4)}(x, \lambda) + \beta N'''(x, \lambda) + \lambda V(x, \lambda))\, V(x, \lambda^*) + \\
+ (\gamma V'''(x, \lambda) + \delta N''(x, \lambda) + \lambda N(x, \lambda))\, \frac{\beta}{\gamma}\, N(x, \lambda^*)]\, \mathrm{d}x = \\
= (\lambda^* - \lambda) \int_0^l \left(V(x, \lambda)\, V(x, \lambda^*) - \frac{\beta}{\gamma}\, N(x, \lambda)\, N(x, \lambda^*)\right) \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung berechnen wir nun die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\lambda} = \lim_{\lambda^* \to \lambda} \frac{\varrho(\lambda^*) - \varrho(\lambda)}{\lambda^* - \lambda} = \int_0^l \left(V^2(x, \lambda) - \frac{\beta}{\gamma}\, N^2(x, \lambda)\right) \mathrm{d}x > 0\,.$$

$\varrho(\lambda_n)$ ist positiv. Dies folgt sofort aus (8,16), (3,9) und (8,19):

$$\begin{aligned}
\varrho(\lambda_n) = -\int_0^l \Big[(\alpha V^{(4)}(x, \lambda_n) + \beta N'''(x, \lambda_n) + \lambda_n V(x, \lambda_n))\, V(x, \lambda_n) - \\
- \frac{\beta}{\gamma}\, (\gamma V'''(x, \lambda_n) + \delta N''(x, \lambda_n) + \lambda_n N(x, \lambda_n))\, N(x, \lambda_n)\Big]\, \mathrm{d}x = \\
= (R[V(x, \lambda_n), N(x, \lambda_n)] - \lambda_n) \int_0^l \left(V^2(x, \lambda_n) - \frac{\beta}{\gamma}\, N^2(x, \lambda_n)\right) \mathrm{d}x > 0\,.
\end{aligned}$$

Durch ähnliche Rechnung erhalten wir nach (8,13) und (3,9):

$$\varrho(R) = -\int_0^l \left(gU - \frac{\beta}{\gamma} hM\right) dx = -\int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U''M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2\right) dx -$$

$$- R\int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma} M^2\right) dx = 0 .$$

Aus diesen Ausführungen folgt nun, dass die Funktion $\varrho(\lambda)$ im abgeschlossenen Intervall $\langle \lambda_n, R \rangle$ stetig und zunehmend ist. Dies steht aber zu $\varrho(\lambda_n) > 0$ und $\varrho(R) = 0$ im Widerspruch. Die Voraussetzung, dass im Intervall $(\lambda_n, R\rangle$ kein Eigenwert liegt, ist also falsch; deswegen gibt es in diesem Intervall mindenstens einen Eigenwert. Den kleinsten unter ihnen bezeichnen wir mit λ_{n+1}. Offensichtlich gilt $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

Wir vergleichen nun die Resultate unter 1 und 2 und sehen, dass es immer einen Eigenwert λ_{n+1} gibt, der grösser als λ_n ist. Ausserdem gilt für jedes Randpaar $(U(x), M(x))$, das in der Menge $\mathfrak{G}_{n+1}$ liegt, die Relation $\lambda_{n+1} \leqq R[U, M]$. Für den Eigenwert λ_{n+1} hat man deshalb die Ungleichung

$$\lambda_{n+1} \leqq \inf_{(U,M)\in\mathfrak{G}_{n+1}} R[U, M] .$$

Wir sind aber imstande die dem schon sicher bekannten Eigenwert λ_{n+1} entsprechenden, linear unabhängigen Eigenpaare zu konstruieren. Die Rayleighschen Quotienten, welche diesen Eigenpaaren entsprechen, sind sämtlich gleich λ_{n+1}. Überdies folgt aus Satz 4, dass jedes dieser Eigenpaare der Menge $\mathfrak{G}_{n+1}$ angehört. Es gilt also

$$\lambda_{n+1} = \min_{(U,M)\in\mathfrak{G}_{n+1}} R[U, M] .$$

Damit ist der Satz 6 in allen seinen Teilen bewiesen.

Die vorangehenden Resultate erlauben uns dem Wortlaut des Satzes 6 eine etwas handlichere Form zu geben:

Satz 7. *Die Eigenwerte der Randwertaufgabe* (3,4), (3,5) *bilden eine zunehmende Folge* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Jedem positiven Eigenwert entspricht ein oder höchstens zwei voneinander linear unabhängige Eigenpaare.

Für jedes Randpaar $(U(x), M(x))$ *aus* $\mathfrak{G}_n$ *gilt* $R[U, M] \geqq \lambda_n$.

9. Die Vollständigkeit des Systems der Eigenpaare

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Frage, ob man ein willkürlich gegebenes Randpaar $(U(x), M(x))$ nach Eigenpaaren $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$

$(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ „entwickeln" kann, d. h. ob man für die Funktionen $U(x)$, $M(x)$ die Darstellungen

$$U(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\omega_k} a_{ki} V_{ki}(x)\,, \quad M(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\omega_k} a_{ki} N_{ki}(x)\,, \tag{9,1}$$

oder kürzer

$$(U(x),\, M(x)) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\omega_k} a_{ki}(V_{ki}(x)\,, N_{ki}(x)) \tag{9,2}$$

auffinden kann. Mit a_{ki} $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ sind hierbei passend gewählte Konstanten bezeichnet.

Definition 7. *Die Zahlen*

$$c_{ki} = \int_0^l \left(U V_{ki} - \frac{\beta}{\gamma} M N_{ki} \right) \mathrm{d}x \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0) \tag{9,3}$$

nennt man Fourier-Koeffizienten des Randpaares $(U(x),\, M(x))$.

Satz 8. $(U(x),\, M(x))$ *sei ein beliebiges Randpaar,* c_{ki} $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ *die ihm entsprechenden Fourier-Koeffizienten. Dann sind die Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}^2$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}^2$ *konvergent und es bestehen die Relationen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}^2 = \int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma} M^2 \right) \mathrm{d}x \tag{9,4}$$

(Parsvalsche Gleichung),

$$0 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}^2 \leqq - \int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U'' M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2 \right) \mathrm{d}x \tag{9,5}$$

(Besselsche Ungleichung).

B e w e i s. Wir setzen

$$(P_{n+1}(x),\, Q_{n+1}(x)) \equiv (U(x),\, M(x)) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}(V_{ki}(x),\, N_{ki}(x))\,,$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} P_{n+1}(x) &\equiv U(x) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} V_{ki}(x)\,, \\ Q_{n+1}(x) &\equiv M(x) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki} N_{ki}(x)\,; \end{aligned} \right\} \tag{9,6}$$

n ist dabei eine beliebige nichtnegative ganze Zahl.

Das Funktionenpaar $(P_{n+1}(x),\, Q_{n+1}(x))$ ist offenbar ein Randpaar, das der Menge $\mathfrak{S}_{n+1}$ angehört. Nach Satz 7 ist also

$$R[P_{n+1},\, Q_{n+1}] \geqq \lambda_{n+1}\,. \tag{9,7}$$

Deshalb gilt für die ganzen Zahlen k, i, $1 \leqq i \leqq \omega_k$; $0 \leqq k \leqq n$

$$-\int_0^l \left[\alpha P''_{n+1} V''_{ki} + \beta(P''_{n+1} N'_{ki} + Q'_{n+1} V''_{ki}) + \frac{\beta\delta}{\gamma} Q'_{n+i} N'_{ki}\right] dx =$$

$$= -\int_0^l \left[(\alpha V^{(4)}_{ki} + \beta N'''_{ki}) P_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} (\gamma V'''_{ki} + \delta N''_{ki}) Q_{n+1}\right] dx =$$

$$= \lambda_k \int_0^l \left(P_{n+1} V_{ki} - \frac{\beta}{\gamma} Q_{n+1} N_{ki}\right) dx = 0 . \tag{9,8}$$

Wir gehen von der Definition (3,9) aus, benützen die Relationen (7,5), (9,6), (9,8) und erhalten so durch teilweise Integration

$$R[U, M] \int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma} M^2\right) dx =$$

$$= R\,[P_{n+1}, Q_{n+1}] \int_0^l \left(P^2_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} Q^2_{n+1}\right) dx + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{\omega_k} c^2_{ki} .$$

Dies liefert aber sofort für $n \geqq 0$ die Beziehungen

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{\omega_k} c^2_{ki} \leqq -\int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U'' M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2\right) dx ,$$

$$R[P_{n+1}, Q_{n+1}] \int_0^l \left(P^2_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} Q^2_{n+1}\right) dx \leqq -\int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U'' M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2\right) dx .$$

Durch einen Grenzübergang für $n \to \infty$ in der ersten dieser Beziehungen erhält man (9,5); die zweite zusammen mit (9,7) liefert dann

$$0 \leqq \lambda_{n+1} \int_0^l \left(P^2_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} Q^2_{n+1}\right) dx \leqq -\int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U'' M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2\right) dx . \tag{9,9}$$

Ähnlich berechnen wir

$$\int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma} M^2\right) dx = \int_0^l \left(P^2_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} Q^2_{n+1}\right) dx + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\omega_k} c^2_{ki} . \tag{9,10}$$

Aus (9,9) folgt wegen $\lambda_{n+1} > 0$

$$0 \leqq \int_0^l \left(P^2_{n+1} - \frac{\beta}{\gamma} Q^2_{n+1}\right) dx \leqq -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \int_0^l \left(\alpha U''^2 + 2\beta U'' M' + \frac{\beta\delta}{\gamma} M'^2\right) dx . \tag{9,11}$$

Die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l \left(P_{n+1}^2 - \frac{\beta}{\gamma}\, Q_{n+1}^2\right) dx = 0$$

ist also eine Folge der Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ und (9,11). Deshalb erhält man die zu beweisende Relation (9,4) aus (9,10) durch einen Grenzübergang für $n \to \infty$.

Satz 9. *$(U(x), M(x))$ bzw. $(U^*(x), M^*(x))$ sei ein willkürliches Randpaar; c_{ki} bzw. c_{ki}^* $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ seien die entsprechenden Fourier-Koeffizienten. Dann gilt die Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}c_{ki}^* = \int_0^l \left(UU^* - \frac{\beta}{\gamma}\, MM^*\right) dx \tag{9,12}$$

(verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung).

Beweis. Das Funktionenpaar $(U(x) + U^*(x),\ M(x) + M^*(x))$ ist offensichtlich ein Randpaar, dessen Fourier-Koeffizienten durch die Formeln

$$\int_0^l \left[(U + U^*)\, V_{ki} - \frac{\beta}{\gamma}\,(M + M^*)\, N_{ki}\right] dx = c_{ki} + c_{ki}^* \quad (1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$$

berechnet werden. Nach (9,4) gilt aber

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\omega_k} (c_{ki} + c_{ki}^*)^2 = \int_0^l \left[(U + U^*)^2 - \frac{\beta}{\gamma}\,(M + M^*)^2\right] dx\,;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\omega_k} c_{ki}^2 = \int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma}\, M^2\right) dx\,; \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\omega_k} c_{ki}^{*2} = \int_0^l \left(U^{*2} - \frac{\beta}{\gamma}\, M^{*2}\right) dx\,,$$

woraus (9,12) folgt.

Satz 10. *Die Eigenpaare $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ bilden ein vollständiges Teilsystem im System der Randpaare.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es kein Randpaar gibt, welches zu allen Eigenpaaren $(V_{ki}(x), N_{ki}(x))$ $(1 \leqq i \leqq \omega_k;\ k \geqq 0)$ orthogonal wäre. Wenn es ein solches Randpaar, z. B. $(U(x), M(x))$, gäbe, würden alle seine Fourier-Koeffizienten verschwinden. Aus (9,4) folgt dann die Beziehung $\int_0^l \left(U^2 - \frac{\beta}{\gamma} M^2\right) dx = 0$, welche die Identitäten $U(x) \equiv M(x) \equiv 0$ zur Folge hat. Deshalb ist $(U(x), M(x))$ kein Randpaar. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

*

Das am Anfang dieser Arbeit aufgestellte Problem ist damit bei weitem noch nicht vollständig gelöst. Dazu müsste man nämlich einen Existenzsatz über die Lösung von (1,1) bis (1,3) beweisen. Es ist naheliegend dazu die Reihen (9,1), (9,2) eingehend zu untersuchen. Insbesondere wäre es nötig die Frage der Konvergenz und gliedweisen Differenzierbarkeit dieser Reihen zu beantworten.

LITERATUR

[1] *L. Collatz:* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig, 1949.

[2] *R. Courant-D. Hilbert:* Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 1, Berlin 1931.

[3] *E. Kamke:* Mathematische Zeitschrift *46* (1940), 231—286, Berlin.

[4] *Дж. Сансоне,* Обыкновенные дифференциальные уравнения, I, II, Moskva, 1953.

[5] *W. Voigt:* Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig und Berlin, 1910.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

АЛОИС АПФЕЛЬБЕК (Alois Apfelbeck), Прага.

(Поступило в редакцию 18/IX 1956 г.)

В предлагаемой работе автор занимается изучением системы дифференциальных уравнений в частных производных (1,1) с присоединенными начальными условиями (1,2) и краевыми условиями (1,3). Притом постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяют условиям (1,4). На основании свойств функции $F(t)$, построенной в лемме 2, доказывается единственность решения системы (1,1)—(1,3).

В следующей части работы автор изучает проблему собственных значений и функциональных пар для краевой проблемы (3,4), (3,5). Определяется понятие собственного значения, собственной пары и краевой пары. Из соотношения (3,6), справедливого для любых двух краевых пар, выводится, что собственные значения λ краевой задачи (3,4), (3,5) вещественны и неотрицательны.

На основании соотношения (3,6) определяется кроме того обобщенный квоциент Рэлеи (3,9) для произвольной краевой пары и вводится понятие ортогональных пар (определение (4)).

Далее показано, что множество собственных значений или конечно или счетно и что оно не содержит в конечной области точек сгущения. Итак,

поскольку существуют собственные значения, их можно расположить в возрастающей последовательности. $\lambda_0 = 0$ есть собственное значение, которому соответствуют три независимые собственные пары. Для каждого положительного собственного значения тогда существует или одна или две независимые собственные пары, допускающие построение. Притом все собственные пары можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональны.

В §§ 6 и 7 строится функция Грина и изучаются ее свойства, при помощи которых далее решается проблема собственных значений. Определение 6 вводит множество $\mathfrak{S}_n$ некоторых краевых пар, и в теореме 6 доказывается, что ни одно из этих множеств не пусто и что имеют место соотношения (8,5). Отсюда следует, что существует счетное и только счетное множество собственных значений λ_n и что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. (8,5) выражает т. наз. минимальное свойство n-го собственного значения.

Наконец определяются обобщенные коэффициенты Фурье (9,3) для каждой краевой пары и доказывается, что эти коэффициенты удовлетворяют известному равенству Парсеваля (9,4) и неравенству Бесселя (9,5). Отсюда следует, что система всех собственных пар является полной по отношению к множество всех краевых пар.