Jaroslav Kurzweil; Ivo Vrkoč

Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 254–272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100246

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ТЕОРЕМЫ ПЕРСИДСКОГО О РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil) и ИВО ВРКОЧ (Ivo Vrkoč), Прага.

(Поступило в редакцию 6/VII 1956 г.)

Цель статьи — доказать, что существует непрерывная функция Ляпунова $V(x, t)$, если нулевое решение системы

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

устойчиво (соотв. равномерно устойчиво). В отличие от случая сильной устойчивости, который был исследован в работе [5], непрерывная функция Ляпунова не обязательно существует, если мы предполагаем только то, что функции X_i непрерывны. Если же, однако присоединить некоторое дополнительное условие, то функция Ляпунова существует с производными всех порядков. Дополнительное условие выполняется, в частности, тогда, когда через каждую точку проходит одно и только одно решение.

Систему дифференциальных уравнений мы запишем в векторном виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x)\,, \tag{1}$$

где x, X — векторы $(x_1, \ldots, x_n)$, $(X_1, \ldots, X_n)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Предположим, что X_i определены и непрерывны в области

$$G = E(\|x\| \leqq h,\ t \geqq 0),$$

где h есть положительное число, и что $X(t, 0) \equiv 0$. Припомним некоторые известные определения.

Определение устойчивости. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ системы дифференциальных уравнений (1) назовем устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что все решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений (1), для которых $\|x(0)\| < \delta$, можно продолжить для всех $t \geqq 0$ и $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq 0$.

Определение равномерной устойчивости. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ системы дифференциальных уравнений (1) назовем равномерно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что все решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений (1), для которых $\|x(t_0)\| < \delta$, где $t_0 \geqq 0$, можно продолжить для всех $t \geqq t_0$ и $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$.

Для формулировки теорем Ляпунова и Персидского нам понадобятся еще следующие определения.

Определение 1. Функцию $V(t, x)$, определенную в области G, назовем положительно определенной в области G, если $V(t, 0) \equiv 0$ и если существует непрерывная функция $U_1(x)$, $U_1(x) > 0$ для $0 < \|x\| \leqq h$ такая, что в области G $\quad U_1(x) \leqq V(t, x)$.

Определение 2. О функции $V(t, x)$, определенной в области G, скажем, что она допускает бесконечно малый высший предел в области G, если существует непрерывная функция $U_2(x)$, $U_2(0) = 0$ такая, что в области G $\quad |V(t, x)| \leqq U_2(x)$.

Теперь мы приведем несколько видоизмененную теорему Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в области G, где она удовлетворяет условиям:

1. $V(t, x)$ является положительно определенной в области G.

2. $V(t, x(t))$ — невозрастающая функция от t, если $x(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (1). Тогда решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.

Замечание. Если функция $V(t, x)$ обладает непрерывными частными производными в области G, то условие 2 можно заменить условием

2′) выражение

$$\frac{dV}{dt}(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_n)\, X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

неположительно.

Теорема Ляпунова была обращена Персидским (1) в предположении, что правые части дифференциальных уравнений (1) обладают непрерывными частными производными. Условие равномерной устойчивости определяется в теореме Персидского.

Теорема Персидского. Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в области G, где она удовлетворяет условиям:

1. $V(t, x)$ является положительно определенной в области G.

2. $V(t, x(t))$ — невозрастающая функция от t, если $x(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (1).

3. $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел в области G. Тогда решение $x(t) \equiv 0$ равномерно устойчиво.

Замечание. Если функция $V(t, x)$ обладает непрерывными частными производными в области G, то и тогда условие 2. в теореме Персидского можно заменить условием 2').

Обращением этой теоремы занимались независимо друг от друга Красовский [2] и Курцвейль [3]. Красовский доказал существование функции $V(t, x)$, определенной в области G, в которой она обладает непрерывными частными производными и удовлетворяет условиям теоремы Персидского, в том случае, если решение системы дифференциальных уравнений (1) $x(t) \equiv 0$ равномерно устойчиво и если правые стороны системы дифференциальных уравнений (1) непрерывны и обладают непрерывными и ограниченными частными производными по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Курцвейль обратил теорему Персидского при менее ограничивающих предположениях относительно дифференциальных уравнений (он не предполагал, что частные производные ограничены).

При наиболее слабых предположениях теоремы Ляпунова и Персидского обратил Йошизава [4]. Он указал необходимое и достаточное условие для устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ системы (1) в предположении непрерывности правых частей. Решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво тогда и только тогда, если существует функция $V(t, x)$, определенная в области G, где она удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(t, x)$ является положительно определенной.

2. $V(t, x(t))$ является невозрастающей функцией t, если $x(t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений (1).

3. $V(0, x)$ непрерывна в точке $x \equiv 0$.

В случае обращения теоремы Персидского он показал, что равномерная устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ является необходимым и достаточным условием для существования функции $V(t, x)$, определенной в области G, где она удовлетворяет всем трем предположениям теоремы Персидского. Функция $V(t, x)$, построенная указанным там способом не обязательно непрерывна.

Настоящая статья примыкает к работе Я. Курцвейля: ,,Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения" [5]. Автор там доказывает существование функции $V(t, x)$ с производными всех порядков, которая удовлетворяет условиям второй теоремы Ляпунова в случае сильной устойчивости.

В настоящей статье будет приведен пример дифференциального уравнения с равномерно устойчивым решением, для которого не существует непрерывной функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Персидского. В нашей работе приводятся условия, наложенные на систему дифференциальных уравнений (1) так, чтобы могли существовать непрерывные функции $V(t, x)$, удовлетворяющие предположениям теоремы Ляпунова или Персидского. Оказывается, что для системы (1) существует функция $V^*(t, x)$ со всеми частными производными по $t, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова или Персидского, если существует непрерывная функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям этих же теорем.

Представляется целесообразным расширить область определения дифференциальных уравнений (1) на все полупространство $t \geqq 0$ следующим образом:

Возьмем функции $Y_i(t, x)$, непрерывные во всем полупространстве $t \geqq 0$ и такие, чтобы $Y(t, x) \equiv X(t, x)$ для $\|x\| \leqq h$, $t \geqq 0$, $Y(t, x) \equiv 0$ для $\|x\| \geqq 2h$, $t \geqq 0$. Новая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Y(t, x)\,. \tag{2}$$

Ясно, что решение $x(t) \equiv 0$ новой системы будет устойчивым или неустойчивым смотря по тому, является ли решение $x(t) \equiv 0$ исходной системы устойчивым или неустойчивым. Для обеих систем можно, конечно, воспользоваться одной и той же функцией Ляпунова.

Чтобы иметь возможность привести результаты настоящей статьи, необходимо определить упомянутые условия.

Определение 3. Система дифференциальных уравнений (2) удовлетворяет условию (A), если существует счетная система открытых множеств $G_1 \supset \overline{G}_2 \supset G_2 \supset \overline{G}_3 \supset G_3 \supset \ldots$, выполняющая требования:

1. $G_i \subset F_i = \underset{[t,x]}{\mathrm{E}} (\|x\| < h_i, t > 0)$, где $h_i > 0$, $h_i \to 0$ монотонно для $i \to \infty$. Точку $(t, x_1, \ldots, x_n)$ обозначим короче через (t, x).

2. для любого $i \geqq 1$ и $t \geqq 0$ справедливо: точка

$$(t, 0) \in G_i\,,$$

3. если решение $x(t)$ системы (2) таково, что для $t_0 \geqq 0$ будет $[t_0, x(t_0)] \in$ $\in G_i$, то $[t, x(t)] \in G_i$ для всех $t \geqq t_0$.

Определение 4. Система дифференциальных уравнений (2) удовлетворяет условию (B), если существует счетная система открытых множеств $G_1 \supset$ $\supset \overline{G}_2 \supset G_2 \supset \overline{G}_3 \supset G_3 \supset \ldots$, выполняющая условия 1. и 3. из определения 3 и следующее условие:

2. $G_i \supset R_i = \underset{[t,x]}{\mathrm{E}} [\|x\| < r_i, t \geqq 0]$, где $r_i > 0$.

Обозначение 1. Множество векторных функций $y(t) \equiv [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$, определенных на интервалах $\langle t_0, \infty)$ ($t_0 \geqq 0$ для разных функций могут быть различны), где они непрерывны и обладают непрерывными производными за исключением конечного числа точек, обозначим через C'. Если $\{y(t)\} \in C'$, то символом $\lambda\{y(t)\}$ обозначим крайнюю точку интервала определения функции $y(t)$.

Обозначение 2. Пусть $\psi(t, x)$ — положительная непрерывная функция в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ и $\psi(t, 0) \equiv 0$. Обозначим через $I(\psi)$ множество векторных функций $\{y(t)\} \in C'$ таких, что

$$\int_{\lambda\{y(t)\}}^{\infty} \psi(\tau, y(\tau))\| \dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\| \,\mathrm{d}\tau < 1.$$

Определение 5. Система дифференциальных уравнений (2) выполняет условие (C), если существует положительная непрерывная функция $\psi(t, x)$ в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ так, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\tau \geqq 0$ существует $\delta > 0$ и имеет место неравенство $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0 = \lambda\{y(t)\}$, если

$$\{y(t)\} \in I(\psi),\ |t_0 - \tau| < \delta,\ \|y(t_0)\| < \delta,$$

т. е. если начальная точка векторной функции $y(t)$ не слишком отличается от точки $[\tau, 0, \ldots, 0]$.

Определение 6. Система дифференциальных уравнений (2) выполняет условие (D), если существует положительная непрерывная функция $\psi(t, x)$ в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ так, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $\{y(t)\} \in I(\psi)$, для которой $\|y(t_0)\| < \delta$, где $t_0 = \lambda\{y(t)\}$, имеет место $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$. Ясно, что нулевое решение $x \equiv 0$ устойчиво, если выполняется условие (A) или (C), и равномерно устойчиво, если выполняется условие (B) или (D).

I

Теперь мы уже можем сформулировать результаты настоящей работы в следующем виде:

Теогема 1. *Для того, чтобы для системы* (2) *существовала непрерывная функция* $V(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Ляпунова, необходимо и достаточно, чтобы эта система выполняла условие* (A).

Теорема 2. *Для того, чтобы для системы* (2) *существовала непрерывная функция* $V(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Ляпунова, необходимо и достаточно, чтобы эта система выполняла условие* (C).

Теорема 3. *Для того, чтобы для системы* (2) *существовала непрерывная функция* $V(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Персидского, необходимо и достаточно, чтобы эта система выполняла условие* (B).

Теорема 4. *Для того, чтобы для системы* (2) *существовала непрерывная функция* $V(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Персидского, необходимо и достаточно, чтобы эта система выполняла условие* (D).

Условия (A) и (C), соотв. (B) и (D), равносильны, однако, они отличаются по характеру. Условие (A), соотв. (B), касается только интегралов системы (2) и является очевидно, более сильным, чем требование устойчивости или равномерной устойчивости тривиального решения системы (2). Условие (C), соотв. (D), означает, что тривиальное решение системы (2) ,,устойчиво, соотв. равномерно устойчиво по отношению к множеству $I(\psi)$", а множество $I(\psi)$, очевидно, более богато, чем множество решений системы (2).

Теорема 5. *Если для системы* (1) *существует непрерывная функция* $V(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Ляпунова или Персидского, то существует функция* $V^*(t, x)$, *выполняющая условия теоремы Ляпунова или Персидского и обладающая частными производными всех порядков в области* G.

II

Приступим теперь к доказательствам, введя предварительно еще следующее обозначение. В $(n + 1)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $t, x_1, \ldots, x_n$ определим расстояние между двумя множествами A, B обычным образом

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{(t,x)\in A\\ (\tau,y)\in B}} \sqrt{|t-\tau|^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}\,.$$

Теоремы 1 и 2 вытекают из следующих теорем 6, 7 и 8.

Теорема 6. *Пусть для системы уравнений* (2) *выполняется условие* (A), *тогда выполняется и условие* (C).

Доказательство. Систему множеств G_i можно расширить, присоединив множества

$$G_0 = \underset{(t,x)}{\mathrm{E}}\,[\|x\| < 2h,\, t \geqq 0]\,,\quad G_{-i} = \underset{(t,x)}{\mathrm{E}}\,[\|x\| < (2+i)\,h,\, t \geqq 0]\,,\quad i = 1, 2, 3\,\ldots\,.$$

Возьмем для произвольного i множества $\overline{G}_i \supset G_i \supset \overline{G}_{i+1} \supset G_{i+1}$. Обозначим через S^1_{i+1} множество точек $[t, x]$, для которых t удовлетворяет неравенству $0 \leqq t \leqq 1$ и которые лежат на интегральных кривых системы (2), исходящих из множества

$$G^1_{i+1} = G_{i+1} \cap \underset{(t,x)}{\mathrm{E}}\,[0 \leqq t \leqq 1]\,.$$

Так как интегральные кривые, исходящие из замкнутого множества G^1_{i+1}, ограничены и ровностепенно непрерывны в $0 \leqq t \leqq 1$, то множество S^1_{i+1} замкнуто и $S^1_{i+1} \subset G_i$, $S^1_{i+1} \cap H(G_i) = \emptyset$ ($H(G_i)$ означает границу множества G_i, помимо точек вида $[0, x]$.) Итак, расстояние между множестзами S^1_{i+1} и $H(G_i)$ равно $\alpha^1_{i+1} > 0$.

Лемма 1. *Существует число* $\psi^1_{i+1} > 0$ *так, что для векторных функций* $\{y(t)\} \in C'$, *для которых* $t_0 = \lambda\{y(t)\} \leqq 1$, $[t_0, y(t_0)] \in S^1_{i+1}$ *и*

$$\int_{t_0}^{1} \|\dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\| \, d\tau \leqq \psi^1_{i+1} \tag{3}$$

имеет место неравенство

$$\sup_{t_0 \leqq t \leqq 1} \varrho([t, y(t)], S^1_{i+1}) < \frac{\alpha^1_{i+1}}{2}.$$

Эту лемму докажем от противного. Допустим, что для чисел $\frac{1}{2^j}$, $j = 1, 2, \ldots$ существуют кривые $\{y^j(t)\} \in C'$, удовлетворяющие соотношениям $\int_{t_0}^{1} \|\dot{y}^j(\tau) - Y(\tau, y^j(\tau))\| \, d\tau \leqq \frac{1}{2^j}$, $t_j = \lambda\{y^j(t)\} \leqq 1$, $[t_j, y^j(t_j)] \in S^1_{i+1}$ и что можно найти $\beta > 0$ такое, что $\varrho([\tau_j, y^j(\tau_j)], S^1_{i+1}) > \beta$, где τ_j — некоторые числа из интервалов $\langle t_j, 1\rangle$. Так как

$$\operatorname*{var}_{\langle t_j, 1\rangle} \left(y^j(t) - \int_{t_j}^{t} Y(\tau, y^j(\tau)) \, d\tau\right) \leqq n \int_{t_j}^{1} \|\dot{y}^j(\tau) - Y(\tau, y^j(\tau))\| \, d\tau \leqq n 2^{-j},$$

то

$$\sup_{\langle t_j, 1\rangle} \left\|y^j(t) - y^j(t_j) - \int_{t_j}^{t} Y(\tau, y^j(\tau)) \, d\tau\right\| \leqq n 2^{-j}.$$

Функции $y^j(t)$ расширим на весь интервал $\langle 0, 1\rangle$. Ввиду того, что мы распространили дифференциальные уравнения на все полупространство $t \geqq 0$, наверное существуют решения $u^j(t)$ уравнений (2), определенные на интервале $\langle 0, t_j\rangle$, выполняющие $u^j(t_j) \equiv y^j(t_j)$. Положим $z^j(t) = y^j(t)$ для $t \geqq t_j$, $z^j(t) = u^j(t)$ для $t \leqq t_j$. Наверное будет $\{z^j(t)\} \in C'$, и

$$\sup \left\|z^j(t) - z^j(0) - \int_{0}^{t} Y(\tau, z^j(\tau)) \, d\tau\right\| \leqq n 2^{-j}. \tag{3*}$$

Функции $z^j(0) + \int_0^t Y(\tau, z^j(\tau)) \, d\tau$ являются на интервале $\langle 0, 1\rangle$ равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными (так как $\|z^j(0)\| \leqq \leqq \max[2h, (2 - i) h]$ и $Y(t, x)$ ограничена для $0 \leqq t \leqq 1$), следовательно, можно выделить подпоследовательность (которую обозначим так же), равномерно сходящуюся к некоторой функции $x(t)$, определенной на $\langle 0, 1\rangle$. Из неравенства (3*) следует, что $z^j(t)$ сходятся к $x(t)$ равномерно на $\langle 0, 1\rangle$. Переходя в соотношении (3*) опять к пределу для $j \to \infty$, обнаружим, что $x(t)$ является решением дифференциальных уравнений (2). Из последовательности точек $[t_j y^j(t_j)]$ и $[\tau_j, y^j(\tau_j)]$ опять-таки выделим подпоследовательности так, чтобы они сходились к точкам $[t^*, y^*]$, $[\bar{\tau}, \bar{y}]$.

Так как $[t_j, y^j(t_j)] \in S^1_{i+1}$ и S^1_{i+1} замкнуто, то точка $[t^*, y^*]$ будет также точкой множества S^1_{i+1}, для точек же $[\tau_j, y^j(\tau_j)]$, наоборот, будет

$\varrho([\tau_j, y^j(\tau_j)], S^1_{i+1}) > \beta$, а следовательно и $\varrho([\bar\tau, \bar y], S^1_{i+1}) \geqq \beta > 0$ и точка $[\bar\tau, \bar y]$ не входит в S^1_{i+1}.

Так как $z^j(t)$, а значит и $y^j(t)$, равномерно сходятся к $x(t)$, то $x(t^*) \equiv y^*$, $x(\bar\tau) \equiv \bar y$. Следовательно, решение $x(t)$ системы (2) для $t = t^*$ проходит через точку, принадлежащую S^1_{i+1}, но для $t = \bar\tau$, $t^* < \bar\tau \leqq 1$ проходит через точку, не принадлежащую S^1_{i+1}. Это, однако, невозможно; из определения S^1_{i+1} следует, что если какая-либо точка решения системы (2) входит в S^1_{i+1}, то и следующие точки этого решения входят в S^1_{i+1}, конечно, только для $t \in \langle 0, 1\rangle$. Этим и доказана лемма 1.

Множество всех точек $[1, y(1)]$, где $y(t)$ — векторная функция, удовлетворяющая условиям леммы 1, обозначим через B^1_{i+1}. Имеем $B^1_{i+1} \subset G_i$, $\varrho(B^1_{i+1}, H(G_i)) \geqq \dfrac{\alpha^1_{i+1}}{2}$.

В качестве S^2_{i+1} теперь возьмем множество точек $[t, x]$, для которых t выполняет неравенство $1 \leqq t \leqq 2$ и которые лежат на интегральных кривых системы (2), исходящих из множества $G^2_{i+1} = (\bar G_{i+1} \cap E\,[1 \leqq \leqq t \leqq 2]) \cup \bar B^1_{i+1}$. Множество S^2_{i+1} наверное замкнуто и $S^2_{i+1} \subset G_i$, $S^2_{i+1} \cap \cap H(G_i) = \emptyset$. Расстояние S^2_{i+1} от множества $H(G_i)$ наверное не равно нулю, $\alpha^2_{i+1} > 0$.

По аналогии с леммой 1 можно и здесь взять $\psi^2_{i+1} > 0$ такое, что для векторных функций $\{y(t)\} \in C'$, для которых $1 \leqq t_0 = \lambda\{y(t)\} \leqq 2$, $[t_0, y(t_0)] \in S^2_{i+1}$ и $\int\limits_{t_0}^{2} \|\dot y(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \leqq \psi^2_{i+1}$, имеет место $\sup\limits_{t_0 \leqq t \leqq 2} \varrho([t, y(t)], S^2_{1+i}) < \dfrac{\alpha^2_{i+1}}{2}$.

Если мы уже определили $n - 1$ множеств $S^1_{i+1} \ldots S^{n-1}_{i+1}$, $B^1_{i+1} \ldots B^{n-1}_{i+1}$ и $n - 1$ чисел $\psi^1_{i+1}, \ldots, \psi^{n-1}_{i+1}$, то в качестве S^n_{i+1} возьмем множество всех точек $[t, x]$, для которых t выполняет неравенство $n - 1 \leqq t \leqq n$ и которые лежат на интегральных кривых уравнений (2), исходящих из множества

$$G^n_{i+1} = (\bar G_{i+1} \cap \underset{[t,x]}{\mathrm{E}}[n - 1 \leqq t \leqq n]) \cup B^{n-1}_{i+1}\,.$$

Можно подобрать число $\psi^n_{i+1} > 0$ так, что для векторных функций $\{y(t)\} \in C'$, для которых

$$n - 1 \leqq t_0 = \lambda\{y(t)\} \leqq n,\ [t_0, y(t_0)] \in S^n_{i+1} \text{ и } \int\limits_{t_0}^{n} \|\dot y(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \leqq \psi^n_{i+1},$$

имеет место $\sup\limits_{t_0 \leqq t \leqq n} \varrho([t, y(t)], S^n_{i+1}) < \dfrac{\alpha^n_{i+1}}{2}$, где

$$\alpha^n_{i+1} = \varrho(S^n_{i+1}, H(G_i)) > 0\,. \tag{4}$$

В качестве B^n_{i+1} возьмем множество всех точек $[n, y(n)]$, где $y(t)$ выполняют условия, указанные при выборе числа ψ^n_{i+1}. Ввиду того, что $Y(t, x) \equiv 0$

для $\|x\| \geqq 2h$, можно положить $\psi^n_{-k} = \psi^n_{-1}$ для $k = 2, 3, 4, \ldots$. Для остальных индексов можно подобрать ψ^n_i так, чтобы было $\psi^n_i < \psi^n_j$ для $i > j$.

Теперь мы уже можем построить непрерывную функцию $\psi(t, x)$, определенную в области $t \geqq 0$, $\|x\| \neq 0$ так, чтобы $\psi(t, x) > \dfrac{1}{\psi^n_{i+1}}$, если $[t, x] \in G_i$, $n - 1 \leqq t \leqq n$.

Так как $\psi^n_{-1} = \psi^n_{-2} = \ldots = \psi^n_{-k} = \ldots$, можно еще потребовать, чтобы $\psi(t, x)$ была независимой от x для $\|x\| \geqq 2h$.

Докажем, что система дифференциальных уравнений (2) выполняет условие (C) с функцией $\psi(t, x)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqq 0$. Найдем индекс i так, что $h_i < \varepsilon$ (см. определение множеств F_i). Число $\delta > 0$ выберем так, чтобы точки $[t_1, x] \in G_{i+1}$ для $\|x\| < \delta$, $|t_1 - t_0| < \delta$. Пусть $\{y(t)\} \in I(\psi)$ и $y(t_1) \equiv x$. Предположим, что для какого-либо $T > t_1$ будет $[T, y(T)] \in G_{i-1} - G_i$. Так как $y(t)$ непрерывна, должны существовать t_2 и T_1 так, что $[t_2, y(t_2)] \in G_{i+1}$, $[T_1, y(T_1)] \in G_{i-1} - G_i$ и для $t \in \langle t_2, T_1\rangle$ будет $[t, y(t)] \in G_{i+1} \cup G_i \cup G_{i-1}$, где $t_2 \geqq t_1$, $T_1 \leqq T$. Так как $\{y(t)\} \in I(\psi)$, имеем $\int\limits_{t_2}^{T_1} \psi(\tau, y(\tau))\, \|\dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau < 1$. Ввиду того, что $[t_2, y(t_2)] \in G_{i+1}$, для достаточно малого $s - t_2$ будет

$$\frac{1}{\psi^n_{i+1}} \int\limits_{t_2}^{s} \|\dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \leqq \int\limits_{t_2}^{s} \psi(\tau, y(\tau))\| \, \dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau < 1 \, , \quad (5)$$

где n таково, что $n - 1 \leqq t_2 < n$.

Если бы неравенство (5) не было справедливо для $s = n$, то соотношение $[t, y(t)] \in G_i$ не могло бы быть справедливым для $t_2 \leqq t \leqq n$ и существовало бы такое наименьшее s_0, что $t_2 < s_0 < n$, точка $[s_0, y(s_0)] \in H(G_i)$. Это, однако, невозможно, так как $[t_2, y(t_2)] \in S^n_{i+1}$, $\varrho(S^n_{i+1} H(G_i)) = \alpha^n_{i+1}$ и, согласно (4), (векторную функцию $y(t)$ дополним на интервале $\langle s_0, n\rangle$ решением системы (2) $x(t)$, $x(s_0) \equiv y(s_0)$; для $x(t)$ наверное $\int\limits_{s_0}^{n} \|\dot{x}(\tau) - Y(\tau, x(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau = 0$; к этой новой дополненной векторной функции мы только и применяем (4)), будет $\varrho([s_0, y(s_0)], S^n_{i+1}) < \dfrac{\alpha^n_{i+1}}{2}$. Это противоречит тому, что $[s_0, y(s_0)] \in H(G_i)$, так как $\varrho(H(G_i), S^n_{i+1}) = \alpha^n_{i+1}$. Итак, неравенство (5) справедливо для $s = n$ и, согласно (4), будет $\varrho([t, y(t)], S^n_{i+1}) < \dfrac{\alpha^n_{i+1}}{2}$, следовательно, $[t, y(t)] \in G_i$ для $t_2 \leqq t \leqq n$. В силу определения множества B^n_{i+1} имеем $[n, y(n)] \in B^n_{i+1} \subset S^{n+1}_{i+1}$, значит и в интервале $\langle n, n + 1\rangle$ имеет место $[t, y(t)] \in G_i$. По методу индукции можно доказать, что $[t, y(t)] \in G_i$ для всех $t \geqq t_2$; это, однако, противоречит тому, что $[T_1, y(T_1)] \in G_{i-1} - G_i$ (где $T_1 \geqq t_2$).

Этим самым мы доказали: если $\{y(t)\} \in I(\psi)$ и если $|t_1 - t_0| < \delta$, $\|y(t_1)\| < \delta$, где $t_1 = \lambda\{y(t)\}$, то $[t, y(t)] \in G_i \subset F_i$ для $t \geqq t_1$, то-есть, $\|y(t)\| < h_i < \varepsilon$ для $t \geqq t_1$. Теорема 6 доказана.

В силу определения G_i для $i = \ldots - 1, 0, 1, \ldots$ имеет место

$$\|y(t)\| < \|y(t_0)\| + 2h, \quad \text{где} \quad t_0 = \lambda\{y(t)\}\,, \tag{6}$$

однако, этим неравенством мы воспользуемся несколько позднее.

Замечание. Если $0 < \psi(t, x) < \varphi(t, x)$ — функции, определенные и непрерывные для $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ и если система векторных функций $I(\psi)$ выполняет требования, сформулированные в условии (C), то и $I(\varphi)$ выполняет эти же требования, так как $I(\varphi) \subset I(\psi)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 7. Функцию $f(t, x)$ назовем локально липшицевской в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ если для любой точки $[t, x]$ этой области существуют числа $\delta > 0$, $K > 0$ так, что если $|t - t_1| < \delta$, $\|x - x^1\| < \delta$, $|t - t_2| < \delta$, $\|x - x^2\| < \delta$, то $|f(t_1, x^1) - f(t_2, x^2)| \leqq K(|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |x_i^2 - x_i^1|)$.

Теорема 7. *Если система дифференциальных уравнений выполняет условие* (C), *то существует функция $V(t, x)$, определенная и непрерывная в полупространстве $t \geqq 0$, обладающая следующими свойствами*:

1. $V(t, x)$ *является положительно определенной.*

2. $V(t, x(t))$ — *невозрастающая функция t, если $x(t)$ является решением системы* (2).

3. $V(t, x)$ *является локально липшицевской в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$.*

Доказательство. Возьмем прежде всего функцию $\varphi(t, x)$, определенную и непрерывную в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ так, чтобы она обладала в этой области непрерывными частными производными и чтобы было $\varphi(t, x) \geqq \geqq \max\left(\psi(t, x), \frac{2n}{\|x\|} + 1\right)$ для $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$. Функцию $\psi(t, x)$ мы выбрали независимой от x для $\|x\| \geqq 2h$, значит, и $\varphi(t, x)$ можно выбрать независимой от x для $\|x\| \geqq 2h$ и $\varphi(t, 0) \equiv 0$. Функцию $V(t, x)$ в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ определяем так:

$$V(t, x) = \sup \{(1 - \int_t^\infty \varphi(\tau, y(\tau)) \|\dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\| \, d\tau) \sup_{\tau \geqq t} \|y(\tau)\|\}\,,$$

где $y(\tau)$ пробегает все векторные функции, выполняющие условия $\{y(\tau)\} \in \in I(\varphi)$, $\lambda\{y(\tau)\} = t$, $y(t) \equiv x$ и $V(t, 0) \equiv 0$.

Докажем условие 1 из теоремы 7. Взяв в качестве $y(\tau)$ какое-либо решение $x(\tau)$, проходящее через точку $[t, x]$, имеем $V(t, x) \geqq \sup_{\tau \geqq t} \|x(\tau)\| \geqq \geqq \|x\|$.

Докажем кроме того, что $V(t, x)$ непрерывна в точках $[t_0, 0]$, $t_0 \geqq 0$. По предполагаемому свойству функции $\varphi(t, x)$ для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqq 0$ существует $\delta > 0$ так, что для векторных функций $\{y(\tau)\} \in I(\varphi)$, для которых $\|y(t)\| < \delta$, $|t - t_0| < \delta$, имеет место $\|y(\tau)\| < \varepsilon$ для $\tau \geqq t$. Отсюда легко вытекает $V(t, x) < \varepsilon$ для $\|x\| < \delta$, $|t - t_0| < \delta$.

Доказательство условия 2. Пусть $x(t)$ — решение системы (2) в интервале $\langle t_1, t_2 \rangle$. Любому $\{y(t)\} \in I(\varphi)$ $y(t_2) \equiv x(t_2)$ можно поставить в соответствие $\bar{y}(t)$ следующим образом: $\bar{y}(t) \equiv x(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$; $\bar{y}(t) \equiv y(t)$, $t \geqq t_2$. Ясно, что $\int_{t_1}^{\infty} \varphi(\tau, \bar{y}(\tau)) \| \dot{\bar{y}}(\tau) - Y(\tau, \bar{y}(\tau)) \| \, \mathrm{d}\tau = \int_{t_2}^{\infty} \varphi(\tau, y(\tau)) \| \dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau)) \| \, \mathrm{d}\tau$ и $\sup_{\tau \geqq t_1} \|\bar{y}(\tau)\| \geqq \sup_{\tau \geqq t_2} \|y(\tau)\|$; отсюда

$$V(t_1, x(t_1)) \geqq \sup_{\bar{y}(\tau)} \{(1 - \int_{t_1}^{\infty} \varphi(\tau, \bar{y}(\tau)) \|\dot{\bar{y}}(\tau) - Y(\tau, \bar{y}(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau) \sup_{\tau \geqq t_1} \|y(\tau)\|\} \geqq$$
$$\geqq V(t_2, x(t_2)) \, .$$

Условие 3. Прежде всего докажем еще одну лемму.

Лемма 2. *Для каждой точки $[t_0, x^0]$, $t_0 \geqq 0$, $\|x^0\| > 0$ существуют числа $\delta > 0$, $\eta > 0$ так, что $\|y(t)\| > \eta$ для $t \in \langle t_1, t_0 + 3\delta \rangle$, если $\{y(t)\} \in I(\varphi)$, $\|y(t_1) - x^0\| < \delta$, $|t_1 - t_0| < \delta$.*

Доказательство. Обозначим $M = \sup_{t_0 - 1 \leqq t \leqq t_0 + 1} \|Y(t, x)\|$,

$$\delta = \min \left(\frac{\|x^0\|}{32Mn}, \frac{1}{3}, \frac{\|x^0\|}{8} \right), \quad \eta = \frac{\|x^0\|}{8} \, .$$

Пусть существует $\{y(t)\} \in I(\varphi)$, $\|y(t_1) - x^0\| < \delta$, $|t_1 - t_0| < \delta$, не удовлетворяющая этой теореме, т. е. существует T, $t_1 < T \leqq t_0 + 3\delta$, $\|y(T)\| \leqq \eta$. Возьмем произвольный интервал $\langle t^*, \bar{t} \rangle$, $t_1 \leqq t^* \leqq \bar{t} \leqq t_0 + 3\delta$ так, чтобы $\|y(t^*)\| = \frac{1}{2}\|x^0\|$ и $\|y(\tau)\| \leqq \frac{1}{2}\|x^0\|$ для $t_1 \leqq t^* \leqq \tau \leqq \bar{t} \leqq t_0 + 3\delta$. Так как $\int_{t^*}^{\bar{t}} \varphi(\tau, y(\tau)) \| \dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau)) \| \, \mathrm{d}\tau < 1$ и ввиду того, что $\varphi(\tau, y(\tau)) \geqq \frac{2n}{\|y(\tau)\|} \geqq \geqq \frac{4n}{\|x^0\|}$ для $t^* \leqq \tau \leqq \bar{t}$, будет $\int_{t^*}^{\bar{t}} \|\dot{y}(\tau) - Y(\tau, y(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau < \frac{\|x^0\|}{4n}$. Отсюда $\|y(t) - y(t^*)\| < \frac{\|x^0\|}{4} + 4\delta nM$ для $t^* \leqq t \leqq \bar{t}$ и $\|y(t)\| > \frac{\|x^0\|}{4} - 4\delta nM$, так что ни в каком интервале $\langle t^*, \bar{t} \rangle$ не может быть $\|y(t)\| \leqq \frac{\|x\|}{8}$. Лемма 2 доказана.

Ввиду того, что $\varphi(t, x)$ является для $\|x\| > 2h$ независимой от x, будет $\varphi(t, x) < K$ для

$$\|x\| \geqq \frac{\eta}{2}, \quad t_0 - 1 \leqq t \leqq t_0 + 1 \, . \tag{7}$$

Так как всякие две точки $[t_1, x]$, $[t_2, y]$ из области (7), можно соединить кривой, целиком лежащей в области (7) и имеющей длину не более

$\frac{\pi}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2 + |t_2 - t_1|^2}$ и ввиду того, что $\varphi(t, x)$ обладает в области (7) непрерывными частными производными, существует постоянная L так, что $|\varphi(t_1, x) - \varphi(t_2, y)| < L\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2 + |t_2 - t_1|^2} < L(|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|)$.

Теперь мы приступим к доказательству, что функция $V(t, x)$ является локально липшицевской. Пусть для точки $[t_0, x^0]$ $t_0 \geqq 0$, $\|x^0\| > 0$. Лемма 2 определит нам числа $\delta > 0$, $\eta > 0$. Уменьшая δ, можем достигнуть того, чтобы $\delta \leqq \frac{1}{4}\eta$, $\delta < 1$. Оценим сверху $V(t_1, x) - V(t_2, y)$, если для точек $[t_1, x]$, $[t_2, y]$ будет выполняться $|t_1 - t_0| < \delta$, $|t_2 - t_0| < \delta$, $\|x - x^0\| < \delta$, $\|y - x^0\| < < \delta$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно определить $\{u(\tau)\} \in I(\varphi)$, $u(t_1) \equiv x$ так, что

$$0 < V(t_1, x) - (1 - \int_{t_1}^{\infty}\varphi(\tau, u(\tau))\,\|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau)\sup_{\tau \geqq t_1}\|u(\tau)\| < \varepsilon\,.$$

Положим $v(\tau) = u(\tau)$ для $\tau \geqq t_3$, $t_3 = t_1 + 2|t_2 - t_1|$, $v(\tau) = u\left[t_3 + (t_1 - t_3)\,.\,\frac{\tau - t_3}{t_2 - t_3}\right] + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_2 - t_3}$ для $t_2 \leqq \tau \leqq t_3$. Очевидно, $\{v(\tau)\} \in C'$, $v(t_2) = y$. Докажем, что $\{v(\tau)\} \in I(\varphi)$. Имеем

$$(1 - \int_{t_1}^{\infty}\varphi(\tau, u(\tau))\|\,\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau)\,.\,\sup\|u(\tau)\| - V(t_2, y) \leqq [1 - \int_{t_1}^{\infty}\varphi(\tau, u(\tau))\,\|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau]\sup_{\tau \geqq t_1}\|u(\tau)\| -$$
$$- [1 - \int_{t_2}^{\infty}\varphi(\tau, v(\tau))\,\|\dot{v}(\tau) - Y(\tau, v(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau]\sup_{\tau \geqq t_2}\|v(\tau)\| = \Lambda. \qquad (8)$$

Так как $|\sup_{\langle t_2, \infty\rangle}\|v(\tau)\| - \sup_{\langle t_1, \infty\rangle}\|u(\tau)\|| \leqq \|y - x\|$, то ввиду (6) можно Λ оценить, как

$$\Lambda \leqq \|y - x\|[1 - \int_{t_2}^{\infty}\varphi(\tau, v(\tau))\|\,\dot{v}(\tau) - Y(\tau, v(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau] + |\Delta|\sup_{\tau \geqq t_1}\|u(\tau)\| \leqq$$
$$\leqq \|y - x\| + |\Delta|(\|x^0\| + \delta + 2h) \leqq \|y - x\| + |\Delta|(1 + 2h + \|x^0\|)\,, \qquad (9)$$

ибо $\|u(t_0)\| \leqq \|x^0\| + \delta$, где

$$\Delta = \int_{t_2}^{\infty}\varphi(\tau, v(\tau))\,\|\dot{v}(\tau) - Y(\tau, v(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau - \int_{t_1}^{\infty}\varphi(\tau, u(\tau))\,\|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau)\|\,.\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_{t_3}^{t_3}\varphi(\tau, v(\tau))\,\|\dot{v}(\tau) - Y(\tau, v(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau - \int_{t_1}^{t_3}\varphi(\tau, u(\tau))\|\,\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau.$$

В первом интеграле произведем подстановку $\tau = t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\sigma - t_3}{t_1 - t_3}$.

После этого будем опять писать σ вместо τ, так что интеграл будет равен выражению

$$\int_{t_1}^{t_3} \varphi\left(t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) \cdot \left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u(\tau) + \frac{y - x}{t_1 - t_3}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} - Y\left[t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right]\right\| \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} \mathrm{d}\tau .$$

Выражение Δ можно оценить таким образом:

$$|\Delta| \leqq \int_{t_1}^{t_3} \left|\varphi\left[t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right] - \varphi(\tau, u(\tau))\right| .$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_3} \varphi\left[t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right] .$$

$$. \frac{\|y - x\|}{t_3 - t_1} \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_3} \varphi\left[t_3 + (t_2 - t_3), u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right] . \left\| Y\left[t_3 + (t_2 - t_3) .\right.\right.$$

$$\left.\left. . \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right]\right\| . \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} \mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_3} \varphi\left[t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3},\right.$$

$$\left. u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right] . \|Y(\tau, u(\tau))\| \mathrm{d}\tau .$$

Так как, согласно лемме 2, для $u(\tau)$ имеет место $\|u(\tau)\| \geqq \eta$ $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$ и так как $\|y - x\| < 2\delta \leqq \frac{\eta}{2}$, для $u(\tau) + (y - x)\dfrac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}$ будет

$$\left\|u(\tau) + (y - x)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right\| \geqq \frac{\eta}{2}, \quad t_1 \leqq \tau \leqq t_3 .$$

Второй, третий и четвертый интегралы оценим при помощи выражений $K\|y - x\|$, $KM|t_2 - t_3| \leqq 3KM|t_2 - t_1|$ и $KM|t_3 - t_1| = 2KM|t_2 - t_1|$. При оценке первого интеграла воспользуемся тем, что $\varphi(t, x)$ является липшицевской в области (7) и что

$$\{u(\tau)\} \in I(\varphi) , \quad \varphi(t, x) \geqq 1 .$$

Первый интеграл оценим при помощи выражения

$$L\left[\left|t_3 + (t_2 - t_3)\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} - \tau\right| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|\frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right] \leqq L[|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|] .$$

Итак,

$$|\Delta| \leqq K\|y - x\| + 3KM|t_2 - t_1| + 2KM|t_2 - t_1| + L|t_2 - t_1| + L\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \leqq$$

$$\leqq (5KM + 2L + K)[|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|] \leqq 2(n + 1)\delta S , \qquad (10)$$

где $S = 5KM + 2L + K$:

Ввиду того, что $V(t_0, x^0) \geqq \|x^0\|$, для $\varepsilon \leqq \frac{\|x^0\|}{2}$ должно быть

$$(1 - \int_{t_1}^{\infty} \varphi(\tau, u(\tau)) \|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\| \, d\tau) \sup_{\tau \geqq t_1} \|u(\tau)\| \geqq \frac{\|x^0\|}{2},$$

так как мы выбрали $u(\tau)$ так, чтобы разность между $V(t, x)$ и этим последним выражением была меньше ε; ввиду (6),

$$\int_{t_1}^{\infty} \varphi(\tau, u(\tau)) \|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\| \, d\tau \leqq 1 - \frac{\|x^0\|}{4h + 2\|x^0\|}. \tag{11}$$

Если для $\delta > 0$ мы дополнительно потребуем выполнение условия $\delta < \frac{\|x^0\|}{(n+1) S(8h + 4\|x^0\|)}$, то ввиду неравенств (10), (11) будет $\int_{t_2}^{\infty} \varphi(\tau, v(\tau)) \cdot \|\dot{v}(\tau) - Y(\tau, v(\tau))\| \, d\tau < 1$; это значит, что $\{v(\tau)\} \in I(\varphi)$. Ввиду (8), (9), (10)

$$(1 - \int_{t_1}^{\infty} \varphi(\tau, u(\tau)) \|\dot{u}(\tau) - Y(\tau, u(\tau))\| \, d\tau) \sup_{\tau \geqq t_1} \|u(\tau)\| - V(t_2, y) \leqq$$

$$\leqq \|y - x\| + (\|x^0\| + 2h + 1) S(|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|) \leqq$$

$$\leqq [1 + S(\|x^0\| + 2h + 1)](|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|).$$

Так как первое выражение в левой части этого уравнения отличается от $V(t_1, x)$ не более чем на ε, то

$$V(t_1, x) - V(t_2, y) \leqq [1 + S(\|x^0\| + 2h + 1)](|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|).$$

Таким же способом можно оценить

$$V(t_2, y) - V(t_1, x) \leqq [1 + S(\|x^0\| + 2h + 1)](|t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|).$$

Этим доказано, что функция $V(t, x)$ является локально липшицевской в области $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$.

Теорема 8. *Если для системы дифференциальных уравнений* (2) *существует функция* $V(t, x)$, *определенная и непрерывная в полупространстве* $t \geqq 0$ *и если она является положительно определенной и невозрастающей вдоль интегральных кривых системы* (2), *то эта система* (2) *выполняет условие* (A).

Доказательство. Положим $G_i = \underset{(t,x)}{\mathrm{E}} [V(t, x) < c_i]$, где $c_1 > c_2 > \ldots > c_n > \ldots$, $c_n > 0$, $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$. Если c_1 достаточно мало, то

$$G_i \subset \underset{(t,x)}{\mathrm{E}} [U(x) < c_i] \subset F_i = \underset{(t,x)}{\mathrm{E}} [\|x\| < h_i, t \geqq 0],$$

где $U(x) \leqq V(x, t)$.

Так как $U(x)$ непрерывна $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ для $\|x\| > 0$, можно выбрать h_i так, чтобы образованная ими монотонная последовательность стремилась к нулю. Нетрудно убедиться в том, что $G_1 \supset \overline{G}_2 \supset G_2 \supset \ldots$ и что каждая интегральная кривая, начинающаяся в G_i, останется для всех последующих t в G_i. Теорема 8 доказана и, как мы уже заметили, из теорем 6, 7, 8 следуют теоремы 1 и 2.

Теоремы 3 и 4 доказываются подобным же образом, как теоремы 1 и 2. С этой целью мы сформулируем теоремы 9, 10 и 11.

Теорема 9. *Пусть нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (2) *выполняет условие* (B). *Тогда оно выполняет и условие* (D).

Для системы множеств G_i, определенных условием (B), построим функцию $\psi(t, x)$ по построению доказательства теоремы 6. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем индекс i так, чтобы $h_i < \varepsilon$, и положим $\delta = r_{i+1}$. Если $\|y(t_0)\| < \delta = r_{i+1}$, то $[t_0, y(t_0)] \in G_{i+1}$ и, значит, векторная функция $y(t)$, начинающаяся в этой точке и принадлежащая $I(\psi)$, должна быть всегда внутри G_i; итак, $\|y(t)\| < h_i < \varepsilon$ для всех $t \geqq t_0$. Однако, ввиду определения (6), это означает, что система (2) выполняет условие (D).

Теорема 10. *Если система дифференциальных уравнений* (2) *выполняет условие* (D), *то существует функция* $V(t, x)$, *определенная и непрерывная в полупространстве* $t \geqq 0$, *выполняющая следующие условия*:

1. $V(t, x)$ *является положительно определенной*;

2. $V(t, x)$ *допускает бесконечно малый высший предел*;

3. $V(t, x(t))$ *является невозрастающей функцией* t, *если* $x(t)$ *представляет собой решение системы* (2);

4. $V(t, x)$ *является локально липшицевской в области* $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$.

Функцию $V(t, x)$ построим тем же способом, как и при доказательстве теоремы 7. Система (2) выполняет теперь условие (D). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что для $\{y(t)\} \in I(\varphi)$, для которых $\|y(t_0)\| < \delta$, имеет место $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$. Отсюда, ввиду определения функции $V(t, x)$, следует $V(t, x) < \varepsilon$ для $\|x\| < \delta$. Из этого неравенства вытекает свойство 2.

Теорема 11. *Если для системы дифференциальных уравнений* (2) *существует непрерывная функция* $V(t, x)$, *определенная в полупространстве* $t \geqq 0$, *которая является положительно определенной, допускает бесконечно малый высший предел и не возрастает вдоль интегральных кривых, то система* (2) *удовлетворяет условию* (B).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.

Теорема 5 вытекает из следующей теоремы:

Теорема 12. *Если для системы дифференциальных уравнений (2) существует непрерывная функция $V(t, x)$, определенная в полупространстве $t \geqq 0$, обладающая следующими свойствами:*

1. $V(t, x)$ *является положительно определенной;*

2. $V(t, x)$ — *невозрастающая вдоль интегральных кривых системы* (2) *функция;*

3. $V(t, x)$ — *локально липшицевская в области* $t \geqq 0$, $\|x\| > 0$ *функция; то существует функция* $V^*(t, x)$, *непрерывная для* $t \geqq 0$, $x \in E_n$ *и удовлетворяющая условиям:*

1. $V^*(t, x)$ *является положительно определенной;*

2. $V^*(t, x(t))$ *не возрастает вдоль интегральных кривых системы* (2);

3. *в полупространстве* $t > 0$ *существуют частные производные любого порядка от функции* $V^*(t, x)$ *по* $t, x_1, \ldots, x_n$.

Если функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел, то и функция $V^*(t, x)$ допускает такой предел.

Функция $V_2(x, t) = V(t, x) \dfrac{1 + t}{2 + t}$ удовлетворяет всем требованиям, наложенным на функцию $V_2(x, t)$ в теореме об аппроксимации[1]) (теорема 3), приведенной в работе Я. Курцвейля [5]. Поэтому теорема 12 непосредственно следует из теорем 3 и 4, доказанных в работе [5].

III

В введении мы упоминали о том, что существует уравнение с равномерно устойчивым решением, для которого не существует непрерывной функции Ляпунова. Теперь мы приведем дифференциальное уравнение с равномерно устойчивым решением $x(t) \equiv 0$, которое не будет выполнять условие (B):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x).$$

Определение функции $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sqrt{1 - (2^{n+2}x - 3)^2} \text{ для } \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \leqq x \leqq \frac{1}{2^n},$$

где n — целые числа,

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+2}} [1 - (2^{n+2}x - 3)^2]^{\frac{3}{2}} \text{ для } \frac{1}{2^{n+1}} \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}.$$

---

[1]) В частности, выполняется условие (3,01) из цитированной теоремы об аппроксимации, так как

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \inf \frac{V_2(t - \Delta t, x(t - \Delta t)) - V_2(t, x(t))}{\Delta t} \geqq V(t, x) \left(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1 + t}{2 + t} \right) = V(t, x) \frac{1}{(2 + t)^2}.$$

Решение этого уравнения можно разделить на три части

(1) $x(t) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} \frac{t-c}{\sqrt{1+(t-c)^2}}$ для $t \leqq c$;

(2) $x(t) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} \sin(t-c)$ для $c \leqq t \leqq c + \frac{\pi}{2}$;

(3) $x(t) = \frac{1}{2^n}$ для $t \geqq c + \frac{\pi}{2}$,

где c — произвольная постоянная.

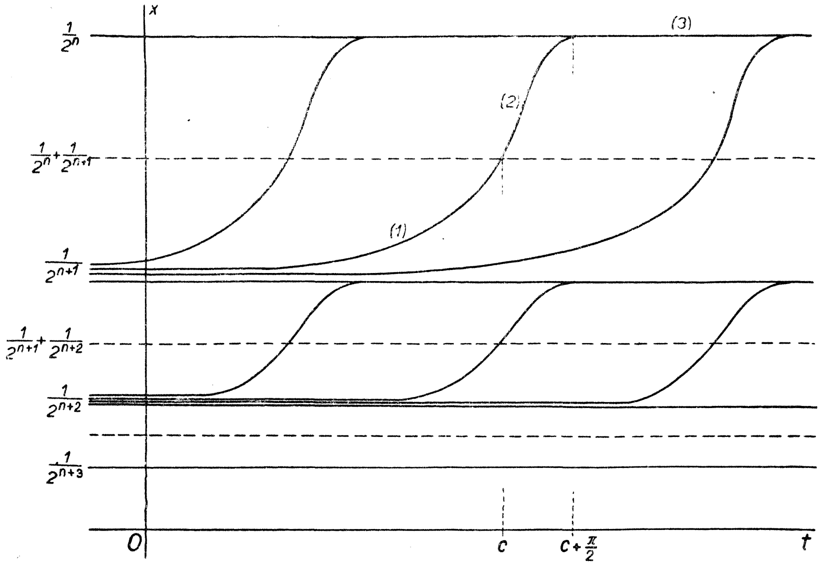

Рис. 1.

Кроме того, уравнение обладает еще системой особых решений $x(t) = \frac{1}{2^n}$. (Вид интегральных кривых показан на рис. 1.) Пусть $[T, y]$ — какая-либо точка из G_i. Решение $x(t)$, проходящее через эту точку, должно и для всех $t \geqq T$ лежать в G_i. Из вида решения следует, что для некоторого значения t, которое мы обозначим через t_n, будет $x(t_n) = \frac{1}{2^n}$. Так как G_i открыто, существует окрестность точки $[t_n, x(t_n)]$, лежащая в G_i; из этой окрестности мы выберем точку $[t_n, x_n]$ так, чтобы $x_n > \frac{1}{2^n}$, и проведем через точку $[t_n, x_n]$ решение $x_n(t)$. Решение $x_n(t)$ для некоторого значения t, которое обозначим через t_{n-1}, примет значение $x_n(t_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}}$. После

n шагов получим точку $[t_0, x_1(t_0)] \in G_i$, для которой $x_1(t_0) = 1$, однако, между тем должно быть

$$G_i \subset F_i = \underset{(t,x)}{\mathrm{E}} [|x| < h_i, t \geqq 0] , \quad \lim_{i \to \infty} h_i = 0 .$$

В этом примере однозначная зависимость интегралов от начальных условий не имеет места.

Замечание. Если имеет место однозначная зависимость интегралов от начальных условий, то в случае устойчивости в качестве G_i можно взять множество всех точек интегральных кривых, начальные точки которых принадлежат множеству $\underset{(0,x)}{\mathrm{E}} \left(\|x\| < \dfrac{1}{2^i} \right)$.

В случае равномерной устойчивости в качестве G_i можно взять множество всех точек интегральных кривых, начальные точки которых принадлежат множеству $\underset{(t,x)}{\mathrm{E}} \left[\|x\| < \dfrac{1}{2^i}, \ t \geqq 0 \right]$. Из теорем 1, 5 или 3, 5 следует существование функции $V(t, x)$, определенной в полупространстве $t \geqq 0$, где она является положительно определенной, не возрастает вдоль интегральных кривых, обладает частными производными любого порядка и допускает бесконечно малый высший предел, если система равномерно устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Персидский К. П.:* Об одной теореме Ляпунова. ДАН, XIV, *9* (1937).

[2] *Курцвейль Я.:* К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чех. матем. журнал, Т. *5* (*80*), 1955, 382—398.

[3] *Красовский Н. Н.:* Об обращении теоремы К. П. Персидского о равномерной устойчивости. ПММ 1955, *19*, № 3, 273—278.

[4] *Yoshizava T.:* On the stability of solutions of a system of differential equations. Memoirs of the College of science Univ. of Kyoto XXIX, No 1, 1955, 27—33 Serie A math.

[5] *Курцвейль Я.:* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чех. матем. журнал, Т. *6* (*81*), 1956, № 2, 217—259, № 4, 455—484.

THE CONVERSE THEOREMS OF LYAPUNOV AND PERSIDSKIJ CONCERNING THE STABILITY OF MOTION

JAROSLAV KURZWEIL and IVO VRKOČ, Praha.

(Received July 6, 1956.)

Let us consider the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) , \tag{1}$$

where $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$, $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ and $X(t, x)$ is defined for $\|x\| < h$ $(h > 0)$, vector-valued and continuous, $X(t, 0) = 0$. Let us recall that the trivial solution $x(t) \equiv 0$ of (1) is called stable if to every $\varepsilon > 0$ there exists such a $\delta > 0$ that $\|x(t)\| < \varepsilon$ $(t \geqq 0)$ for every solution $x(t)$ of (1) satisfying $\|x(0)\| < \delta$. A (real-valued) function $V(t, x)$ is called positive definite if $V(t, 0) = 0$ $(t \geqq 0)$, $V(t, x) \geqq U(x)$ with $U(x)$ continuous, $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ for $0 < \|x\| \leqq h$.

According to the well known theorem of LYAPUNOV the trivial solution of of (1) is stable if there exists such a *continuous* function $V(t, x)$ that

I. $V(t, x)$ is positive definite,

II. $V(t, x(t))$ is nonincreasing for every solution $x(t)$ of (1).

In the paper [1] K. P. PERSIDSKIJ proved the converse under the additional assumption that there exist continuous partial derivatives $\dfrac{\partial X}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. On the other hand T. YOSHIZAWA proved that the trivial solution of (1) is stable if and only if there exists a function $V(t, x)$ which is *continuous at* $t = 0$, $x = 0$ and satisfies I, II.

The aim of this paper is to characterise such class of differential equations that to each of them there exists a *continuous* function $V(t, x)$ satisfying I, II. The main results are the following theorems:

Theorem 1. *There exists a continuous function $V(t, x)$ satisfying I, II if and only if there exists such a sequence of open subsets $G_j \subset E_{n+1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ that*

1. $G_j \supset \bar{G}_{j+1}$,
2. *if $(t, x) \in G_j$, then $\|x\| < h_j$, $h_j \to 0$ monotonously with $j \to \infty$,*
3. *$(t, 0) \in G_j$ for $t \geqq 0$,*
4. *if $x(t)$ is a solution of (1) and if $(t_0, x(t_0)) \in G_j$, then $(t, x(t)) \in G_j$ for $t \geqq t_0$.*

Theorem 5. *If there exists a continuous function $V(t, x)$ satisfying I, II, then there exists a function $V^*(t, x)$ which satisfies I, II and has continuous partial derivatives of all orders.*

Further we show that a continuous function $V(t, x)$ satisfying I, II exists if and only if to every $\varepsilon > 0$ and $t_0 \geqq 0$ there exists such a $\delta > 0$ that $\|y(t)\| < \varepsilon$ where $y(t)$ is defined for $t \geqq t_0$, $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\|$ is small (in a sense which we do not describe precisely here) and $\|y(t_0)\| < \delta$. Analogous results hold in the case of the *uniform stability*.