Josef Král; Jan Mařík

Der Greensche Satz

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 235–247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100244

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

DER GREENSCHE SATZ

JOSEF KRÁL und JAN MAŘÍK, Praha.

(Eingelangt 26. II. 1956.)

In diesem Artikel wird unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen P, Q die Formel

$$\int_K P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) . \operatorname{ind}_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

bewiesen, wo K eine beliebige geschlossene rektifizierbare Kurve, $\operatorname{ind}_K z$ den Index des Punktes z in bezug auf K und G die Menge $E[z;\operatorname{ind}_K z \neq 0]$ bedeutet.

1. Es sei $f = \varphi + i\psi$ (φ, ψ reell) eine komplexe im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion. Wir nennen f *von beschränkter Variation*, wenn die beiden Funktionen φ, ψ von beschränkter Variation sind. Die Menge aller in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktionen von beschränkter Variation bezeichnen wir mit $V(a, b)$. Wenn jetzt $F = \Phi + i\Psi$ (Φ, Ψ reell) eine komplexe in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion ist, so setzen wir

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}f(t) = \int_a^b F\,\mathrm{d}f = \int_a^b \Phi\,\mathrm{d}\varphi - \int_a^b \Psi\,\mathrm{d}\psi + i\left(\int_a^b \Phi\,\mathrm{d}\psi + \int_a^b \Psi\,\mathrm{d}\varphi\right).$$

Es gilt die Beziehung

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} F(t_{n,j})\,\Delta_{n,j}\,, \tag{1}$$

wo

$$t_{n,j} = a + j\,\frac{b-a}{n}\;(j = 0, 1, \ldots, n),\;\Delta_{n,j} = f(t_{n,j}) - f(t_{n,j-1})\;(j = 1, \ldots, n);$$

hat f ausserdem eine stetige Ableitung, so ist

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}f(t) = \int_a^b F(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

Beim konstanten f hat man also $\int_a^b F\,\mathrm{d}f = 0$.

Wenn $f_1, f_2 \in V(a, b)$, so gilt $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in V(a, b)$ und

$$\int_a^b F \,\mathrm{d}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \int_a^b F \,\mathrm{d}f_1 + \alpha_2 \int_a^b F \,\mathrm{d}f_2$$

für je zwei komplexe Zahlen α_1, α_2; insbesondere hat man

$$\int_a^b F \,\mathrm{d}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2) = \alpha_1 \int_a^b F \,\mathrm{d}f_1 \,. \tag{3}$$

Ist $f \in V(a, b)$ und $F_1, F_2, \ldots$ eine gleichmässig in $\langle a, b\rangle$ konvergente Folge von stetigen Funktionen, so haben wir

$$\int_a^b F_n \,\mathrm{d}f \to \int_a^b F \,\mathrm{d}f \,,$$

wo $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ ist.

Wenn weiter $f \in V(a, b)$ und F eine komplexe auf der Menge $f(\langle a, b\rangle)$ stetige Funktion ist, dann ist auch $F(f(t))$ eine komplexe in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion und wir setzen

$$\int_f F \,\mathrm{d}x = \int_a^b F(f(t)) \,\mathrm{d}\varphi(t) \,, \quad \int_f F \,\mathrm{d}y = \int_a^b F(f(t)) \,\mathrm{d}\psi(t) \,,$$

$$\int_f F \,\mathrm{d}z = \int_a^b F(f(t)) \,\mathrm{d}f(t)$$

(wo $f = \varphi + i\psi$, φ, ψ reell). Es ist $\int_f F \,\mathrm{d}z = \int_f F \,\mathrm{d}x + i \int_f F \,\mathrm{d}y$. Statt $\int_f F_1 \,\mathrm{d}x + \int_f F_2 \,\mathrm{d}y$ schreiben wir kürzer $\int_f F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y$.

Wenn $f \in V(a, b)$, $g \in V(c, d)$, $f(b) = g(c)$ ist, dann verstehen wir unter

$$f \cup g$$

die folgendermassen in $\langle a, b + d - c\rangle$ definierte komplexe Funktion h:

$$h(t) = f(t) \,, \quad \text{wenn} \quad a \leqq t \leqq b \,,$$
$$h(t) = g(t + c - b) \,, \quad \text{wenn} \quad b \leqq t \leqq b + d - c \,.$$

Es ist $h \in V(\alpha, \beta)$, wo $\alpha = a$, $\beta = b + d - c$, und $f(\langle a, b\rangle) \cup g(\langle c, d\rangle) = h(\langle \alpha, \beta\rangle)$. Wenn jetzt F eine komplexe auf der Menge $h(\langle \alpha, \beta\rangle)$ stetige Funktion ist, so haben wir

$$\int_{f \cup g} F \,\mathrm{d}x = \int_f F \,\mathrm{d}x + \int_g F \,\mathrm{d}x \,, \quad \int_{f \cup g} F \,\mathrm{d}y = \int_f \ldots + \int_g \ldots \,,$$

$$\int_{f \cup g} F \,\mathrm{d}z = \int_f \ldots + \int_g \ldots \,.$$

Es ist klar, was

$$f_1 \cup \ldots \cup f_n$$

bedeutet, wenn $f_j \in V(a_j, b_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ und $f_j(b_j) = f_{j+1}(a_{j+1})$ $(j = 1, \ldots, n - 1)$ ist.

Jedem $f \in V(a, b)$ können wir die Funktion

$$\tilde{f}(t) = f(-t) \quad (-b \leqq t \leqq -a) \tag{4}$$

zuordnen; es ist $\tilde{f} \in V(-b, -a)$, $\tilde{f}(\langle -b, -a\rangle) = f(\langle a, b\rangle)$ und

$$\int_{\tilde{f}} F \,\mathrm{d}x = -\int_f F \,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{\tilde{f}} F \,\mathrm{d}y = -\int_f \ldots\,, \quad \int_{\tilde{f}} F \,\mathrm{d}z = -\int_f \ldots$$

für jede komplexe auf der Menge $f(\langle a, b\rangle)$ stetige Funktion F.

Wir beweisen noch die elementare Abschätzung

$$\left|\prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k) - 1\right| \leqq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right) - 1 \tag{5}$$

($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige komplexe Zahlen). Setzen wir nämlich

$$\sigma_r = \sum_{1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqq n} \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_r} \quad (r = 1, \ldots, n)\,,$$

so gilt

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k) - 1 = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n\,;$$

weiter haben wir offensichtlich

$$|\sigma_r| \leqq \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right)^r.$$

Daraus folgt leicht die Ungleichung (5).

2. *Es sei $f \in V(a, b)$. Wenn die komplexe Zahl c nicht der Menge $f(\langle a, b\rangle)$ angehört, dann besteht die Gleichheit*

$$\exp\left(\int_f \frac{\mathrm{d}z}{z - c}\right) = \frac{f(b) - c}{f(a) - c}\,. \tag{6}$$

Beweis. Nach (1) gilt

$$\int_f \frac{\mathrm{d}z}{z - c} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{z_j^n - c}\,,$$

wo $z_j^n = f\left(a + j\,\dfrac{b - a}{n}\right)$. Es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - c| \geqq \delta$$

für jedes $t \in \langle a, b\rangle$. Da f von beschränkter Variation ist, kann man eine Konstante W so bestimmen, dass

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j^n - z_{j-1}^n| < W$$

für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f gilt

$$\max_{1 \leqq j \leqq n} |z_j^n - z_{j-1}^n| = M_n \to 0\,.$$

Wenn wir noch die Funktion g mittels der Vorschrift

$$e^z(1 - z) = 1 + z^2 g(z) \quad (g(0) = -\tfrac{1}{2})$$

definieren, so ist g für alle z (auch für $z = 0$) stetig und es gilt

$$\frac{f(a) - c}{f(b) - c} \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{z_j^n - c}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{z_{j-1}^n - c}{z_j^n - c} \cdot \exp\left(\frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{z_j^n - c}\right) = \prod_{j=1}^{n} (1 + (v_j^n)^2 \cdot g(v_j^n)), \text{ wo } v_j^n = \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{z_j^n - c}.$$

Aus den Ungleichungen $|v_j^n| \leqq \frac{|z_j^n - z_{j-1}^n|}{\delta} \leqq \frac{M_n}{\delta}$ folgt, dass die Menge sämtlicher v_j^n beschränkt ist. Es existiert also eine positive Zahl Δ mit der Eigenschaft, dass $|g(v_j^n)| < \Delta$ für alle n, j ist. Wir haben daher $s_n = \sum_{j=1}^{n} |v_j^n|^2 \cdot |g(v_j^n)| \leqq$ $\leqq \sum_{j=1}^{n} \frac{|z_j^n - z_{j-1}^n|}{\delta} \cdot \frac{M_n}{\delta} \cdot \Delta \leqq \frac{M_n \Delta W}{\delta^2} \to 0$ und

$$\frac{f(a) - c}{f(b) - c} \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{z_j^n - c}\right) = \prod_{j=1}^{n} (1 + (v_j^n)^2 \cdot g(v_j^n)) = 1 + \Theta_n, \tag{7}$$

wo (wegen (5)) $|\Theta_n| \leqq e^{s_n} - 1 \to 0$. Durch Limesübergang folgt nun aus (7) die Beziehung (6); damit ist der Satz bewiesen.

3. Bezeichnung. Die Gesamtheit aller Funktionen $f \in V(a, b)$, für welche $f(a) = f(b)$ ist, bezeichnen wir mit $V_0(a, b)$. Es sei ferner E_2 die Menge aller (endlichen) komplexen Zahlen.

4. *Sei $f \in V_0(a, b)$. Wir setzen*

$$\operatorname{ind}_f \zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{\mathrm{d}z}{z - \zeta} \tag{8}$$

für jedes $\zeta \in E_2 - f(\langle a, b \rangle)$. Dann nimmt die Funktion ind_f nur ganzzahlige Werte an und ist konstant auf jeder Komponente der Menge $E_2 - f(\langle a, b \rangle)$; wenn $|\zeta|$ genügend gross ist, so gilt $\operatorname{ind}_f \zeta = 0$.

Es sei weiter α reell, z_0 komplex, $w(z) = e^{i\alpha} z + z_0$ $(z \in E_2)$, $f^*(t) = w(f(t))$ $(t \in \langle a, b \rangle)$. Dann ist $f^* \in V_0(a, b)$ und

$$\operatorname{ind}_{f^*} w(\zeta) = \operatorname{ind}_f \zeta \tag{9}$$

für jedes $\zeta \in E_2 - f(\langle a, b \rangle)$.

Beweis. Wegen (6) hat man

$$\exp\left(\int_f \frac{\mathrm{d}z}{z - \zeta}\right) = \frac{f(b) - \zeta}{f(a) - \zeta} = 1$$

für jedes $\zeta \in E_2 - f(\langle a, b\rangle)$; die Zahl $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_f \frac{dz}{z-\zeta}$ ist also ganz. Wenn $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \in E_2 - f(\langle a, b\rangle)$ und $\zeta_n \to \zeta$ (resp. $|\zeta_n| \to \infty$) ist, dann gilt

$$\frac{1}{f(t)-\zeta_n} \to \frac{1}{f(t)-\zeta} \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{f(t)-\zeta_n} \to 0\right)$$

gleichmässig für $t \in \langle a, b\rangle$, so dass $\operatorname{ind}_f \zeta_n \to \operatorname{ind}_f \zeta$ (resp. $\operatorname{ind}_f \zeta_n \to 0$) ist. Daraus ergibt sich folgendes: Die Funktion (8) ist auf der Menge $E_2 - f(\langle a, b\rangle)$ stetig und daher auf jeder Komponente dieser Menge konstant; ist $|\zeta|$ genügend gross, so hat man $|\operatorname{ind}_f \zeta| < 1$ und folglich $\operatorname{ind}_f \zeta = 0$. Weiter erhält man nach (3)

$$\operatorname{ind}_{f^*} w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{d(e^{i\alpha}f(t)+z_0)}{e^{i\alpha}f(t)+z_0-(e^{i\alpha}\zeta+z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{df(t)}{f(t)-\zeta} = \operatorname{ind}_f \zeta$$

$(\zeta \in E_2 - f(\langle a, b\rangle))$. Damit ist alles bewiesen.

5. B e z e i c h n u n g. Es sei ψ eine reelle Funktion im Intervall $\langle a, b\rangle$. Für $t \in \langle a, b\rangle$ definieren wir die Funktion η_ψ folgendermassen: Ist $t \in (a, b)$ und ψ wachsend (resp. fallend) im Punkte t, sei $\eta_\psi(t) = 1$ (resp. $\eta_\psi(t) = -1$); in allen übrigen Punkten t von $\langle a, b\rangle$ sei $\eta_\psi(t) = 0$. Es ist also insbesondere $\eta_\psi(a) = \eta_\psi(b) = 0$.

6. *Es sei $f \in V_0(a, b)$; es sei $f(t)$ (reell und) $\leqq 0$ für genau einen Wert $t = t_0 \in \langle a, b\rangle$. Weiter setzen wir voraus, dass $f(t_0) < 0$ und $\eta_\psi(t_0) \neq 0$, wo $\psi(t) = \operatorname{Im} f(t)$ ist. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}_f 0 = -\eta_\psi(t_0)\,. \tag{10}$$

B e w e i s. I. Es sei zuerst $\eta_\psi(t_0) = 1$. Da also $a < t_0 < b$ und ausserdem $f(t_0)$ reell, daher $\psi(t_0) = 0$ ist, können wir eine natürliche Zahl q so bestimmen, dass die Relationen

$$a + \frac{1}{q} < t_0 < b - \frac{1}{q}\,, \tag{11}$$

$$t \in \left(t_0 - \frac{1}{q},\, t_0\right) \Rightarrow \psi(t) < 0\,, \tag{12}$$

$$t \in \left(t_0,\, t_0 + \frac{1}{q}\right) \Rightarrow \psi(t) > 0 \tag{13}$$

bestehen. Für jedes $n > q$ definieren wir nun erstens

$$f_{n1}(t) = f(t) \quad \left(a \leqq t \leqq t_0 - \frac{1}{n}\right),$$

$$f_{n2}(t) = f(t) \quad \left(t_0 + \frac{1}{n} \leqq t \leqq b\right),$$

zweitens

$$g_n(t) = |f(t_0)| \cdot e^{it} \quad \left(-\pi + \frac{1}{n} \leqq t \leqq \pi - \frac{1}{n}\right)$$

und drittens

$$h_{n1}(t) = (1-t)\, A_n + tC_n\,, \quad h_{n2}(t) = (1-t)\, D_n + tB_n \quad (0 \leqq t \leqq 1)\,,$$

wo

$$A_n = f\left(t_0 - \frac{1}{n}\right), \quad B_n = f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right), \quad C_n = g_n\left(-\pi + \frac{1}{n}\right), \quad D_n = g_n\left(\pi - \frac{1}{n}\right).$$

Es gilt $\operatorname{Im} C_n < 0$, $\operatorname{Im} D_n > 0$; aus (12) und (13) folgt $\operatorname{Im} A_n < 0$, $\operatorname{Im} B_n > 0$, so dass $\operatorname{Im} h_{n1}(t) < 0$, $\operatorname{Im} h_{n2}(t) > 0$ für jedes $t \in \langle 0, 1\rangle$ und jedes $n > q$ ist. Es sei nun

$$l_n = f_{n1} \cup h_{n1} \cup g_n \cup h_{n2} \cup f_{n2}$$

(dieses Symbol wurde im Abschnitt 1 definiert). Es ist leicht zu sehen, dass $l_n \in V_0(\alpha_n, \beta_n)$, wo $\alpha_n = a$, $\beta_n = b - \frac{4}{n} + 2 + 2\pi$, und dass $l_n(t) \leqq 0$ für kein $t \in \langle \alpha_n, \beta_n\rangle$ ist. Die zusammenhängende Menge der $z \leqq 0$ ist daher ganz in einer einzigen Komponente von $E_2 - l_n(\langle \alpha_n, \beta_n\rangle)$ enthalten; man schliesst daraus nach Abschnitt 4, dass $\operatorname{ind}_{l_n} z = 0$ für jedes $z \leqq 0$ ist. Speziell hat man also $\operatorname{ind}_{l_n} 0 = 0$, d. h.

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{f_{n1}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{h_{n1}} \ldots + \int_{g_n} \ldots + \int_{h_{n2}} \ldots + \int_{f_{n2}} \ldots\right) = 0 \quad (n > q)\,. \tag{14}$$

Es gilt offensichtlich

$$\int_{f_{n1}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{f_{n2}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \to \int_{f} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,; \tag{15}$$

laut (2) hat man ferner

$$\int_{g_n} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-\pi+\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}(|f(t_0)| \cdot e^{it})}{|f(t_0)| \cdot e^{it}} = i\left(2\pi - \frac{2}{n}\right) \to 2\pi i\,. \tag{16}$$

Da $A_n \to f(t_0) \neq 0$, $C_n \to -|f(t_0)| = f(t_0)$ und $h_{n1}(t) = A_n + t(C_n - A_n)$ ist, so gilt $\frac{1}{h_{n1}(t)} \to \frac{1}{f(t_0)}$ gleichmässig in $\langle 0, 1\rangle$. Daraus ergibt sich

$$\int_{h_{n1}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(A_n + t(C_n - A_n))}{h_{n1}(t)} = (C_n - A_n) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{h_{n1}(t)} \to 0\,; \tag{17}$$

desgleichen gilt

$$\int_{h_{n2}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \to 0 \,. \tag{18}$$

Aus (14)—(18) folgt unmittelbar $0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_f \frac{\mathrm{d}z}{z} + 2\pi i\right)$, so dass in der Tat

$\operatorname{ind}_f 0 = -1 = -\eta_\psi(t_0)$ ist.

II. Jetzt betrachten wir den Fall $\eta_\psi(t_0) = -1$. Wir bilden die Funktion $\tilde{f}$ (gemäss (4)); es ist $\tilde{\psi}(t) = \operatorname{Im} \tilde{f}(t)$. Es gilt $\operatorname{ind}_{\tilde{f}} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{f}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot$

$\cdot \int_f \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\operatorname{ind}_f 0$; da $\eta_{\tilde{\psi}}(-t_0) = 1$ ist, so erhalten wir nach I. die Beziehung $\operatorname{ind}_{\tilde{f}} 0 = -\eta_{\tilde{\psi}}(-t_0)$. Es ist aber $\eta_{\tilde{\psi}}(-t_0) = -\eta_\psi(t_0)$. Daraus folgt wieder $\operatorname{ind}_f 0 = -\eta_\psi(t_0)$, womit der Beweis beendet ist.

7. *Es sei $f \in V_0(a, b)$, $\psi(t) = \operatorname{Im} f(t)$; x_1, x_2, y seien reell, $x_1 < x_2$; es sei $J = E[z; z = x + iy, x_1 \leqq x \leqq x_2)$. Wir setzen voraus, dass die Punkte $z_j = x_j + iy$ $(j = 1, 2)$ ausserhalb von $f(\langle a, b\rangle)$ liegen und dass $\eta_\psi(t) \neq 0$ für jedes $t \in f^{-1}(J)$ ist. Dann ist die Menge $f^{-1}(J)$ endlich und es gilt*

$$\operatorname{ind}_f z_1 = \operatorname{ind}_f z_2 + \sum_{f(t) \in J} \eta_\psi(t) \,. \tag{19}$$

Beweis. Die Menge $f^{-1}(J)$ ist kompakt. Weil $\psi(t) = y$ und $\eta_\psi(t) \neq 0$ für jedes $t \in f^{-1}(J)$ ist, sieht man leicht, dass jeder Punkt von $f^{-1}(J)$ isoliert ist. Deswegen ist $f^{-1}(J)$ endlich.

Es sei zunächst $z_2 = 0$ (also $y = 0$, $z_1 = x_1 < 0$). Die Formel (19) ist richtig, wenn die Menge $f^{-1}(J)$ leer ist. (Dann ist nämlich die Funktion ind_f konstant auf J und die Summe in (19) ist leer.) Es sei jetzt n ganz, $n \geqq 0$; wir setzen voraus, dass unser Satz für den Fall, dass $f^{-1}(J)$ höchstens n Elemente hat, bereits bewiesen ist. Wir betrachten eine Funktion f, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und für welche die Menge $f^{-1}(J)$ aus $n + 1$ Elementen $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}$, wo $t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, besteht. Wegen $\eta_\psi(t_{n+1}) \neq 0$ gilt $t_{n+1} \in (a, b)$. Es gibt ein $\delta > 0$ $(\delta < \min(b - t_{n+1}, t_{n+1} - a))$ derart, dass die Zahl $\psi(t)$ für jedes $t \in \langle t_{n+1} - \delta, t_{n+1} + \delta\rangle$, $t \neq t_{n+1}$ von Null verschieden ist. Wir setzen nun

$$\begin{gathered} f_1(t) = f(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle a, t_{n+1} - \delta\rangle \,, \\ f_2(t) = f(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle t_{n+1} + \delta, b\rangle \,, \\ f(t_{n+1} - \delta) = A \,, \quad f(t_{n+1} + \delta) = B \,, \\ h_1(t) = A(1 - t) + t \,, \quad h_2(t) = 1 - t + Bt \quad (0 \leqq t \leqq 1) \,, \\ g = f_1 \cup h_1 \cup h_2 \cup f_2 \,. \end{gathered} \tag{20}$$

Es ist $g \in V_0(\alpha, \beta)$, wo $\alpha = a$, $\beta = b + 2 - 2\delta$; da $\operatorname{Im} A = \psi(t_{n+1} - \delta) \neq 0 \neq \operatorname{Im} B$, gilt weder $h_1(t) \leqq 0$ noch $h_2(t) \leqq 0$ für ein $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Daraus folgt $g^{-1}(J) = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Aus $\eta_\mu(t_k) = \eta_\psi(t_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$, wo $\mu(t) = \operatorname{Im} g(t)$, ergibt sich nach der Induktionsvoraussetzung die Gleichheit

$$\operatorname{ind}_g z_1 - \operatorname{ind}_g z_2 = \sum_{g(t) \in J} \eta_\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_\psi(t_k) \,. \tag{21}$$

Wenn wir noch

$$\begin{gathered} f_0(t) = f(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle t_{n+1} - \delta, t_{n+1} + \delta \rangle \,, \\ \tilde{h}_j(t) = h_j(-t) \quad \text{für} \quad t \in \langle -1, 0 \rangle \,, \quad j = 1, 2, \\ h = f_0 \cup \tilde{h}_2 \cup \tilde{h}_1 \end{gathered} \tag{22}$$

setzen, so haben wir $h \in V_0(\gamma, \varepsilon)$, wo $\gamma = t_{n+1} - \delta$, $\varepsilon = t_{n+1} + \delta + 2$. Es ist $h(t) \leqq 0$ für genau ein $t \in \langle \gamma, \varepsilon \rangle$, nämlich für $t = t_{n+1}$; man hat $h(t_{n+1}) = f(t_{n+1}) < 0$. Es gilt daher $\operatorname{ind}_h z = 0$ für jedes $z < f(t_{n+1})$; insbesondere ist

$$\operatorname{ind}_h z_1 = 0 \,. \tag{23}$$

Wird $\nu(t) = \operatorname{Im} h(t)$ gesetzt, so gilt

$$\eta_\nu(t_{n+1}) = \eta_\psi(t_{n+1}) \neq 0 \,.$$

Weil die Funktion h alle Voraussetzungen im Abschnitt 6 erfüllt, haben wir laut (10)

$$\operatorname{ind}_h z_2 = -\eta_\psi(t_{n+1}) \,. \tag{24}$$

Da

$$f = f_1 \cup f_0 \cup f_2 \,, \tag{25}$$

so folgt aus (20), (22), (25) die Gleichheit

$$\operatorname{ind}_f z_j = \operatorname{ind}_g z_j + \operatorname{ind}_h z_j \quad (j = 1, 2) \,,$$

so dass (wegen (21), (23), (24))

$$\operatorname{ind}_f z_1 - \operatorname{ind}_f z_2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_\psi(t_k) + 0 - (-\eta_\psi(t_{n+1})) = \sum_{k=1}^{n+1} \eta_\psi(t_k)$$

ist. Damit ist der Satz für den Fall $z_2 = 0$ bewiesen. Der allgemeine Fall wird mittels der Transformation $w(z) = z - z_0$ und der Relation (9) erledigt.

Bemerkung. Ein ähnlicher Satz gilt natürlich auch für „vertikale" Strecken; an Stelle von (19) tritt jedoch die Formel

$$\operatorname{ind}_f z_1 = \operatorname{ind}_f z_2 - \sum_{f(t) \in J} \eta_\varphi(t) \tag{26}$$

(wo $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$, $\varphi(t) = \operatorname{Re} f(t)$ und $J = E[z; z = \operatorname{Re} z_1 + iy,\ \operatorname{Im} z_1 \leqq y \leqq \operatorname{Im} z_2]$ ist). Wenn wir nämlich $w(z) = -iz$, $f^*(t) = w(f(t))$, $\lambda(t) = \operatorname{Im} f^*(t)$ setzen, so ist $\operatorname{Re} w(z_1) < \operatorname{Re} w(z_2)$, $\operatorname{Im} w(z_1) = \operatorname{Im} w(z_2)$, aber $\eta_\lambda(t) = -\eta_\varphi(t)$. Nun liefern (9) und (19) leicht die Formel (26).

8. Bezeichnung. E_1 sei die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen. Wenn $A \subset E_2$, $t \in E_1$ ist, so setzen wir

$$A_t^1 = E[x; x \in E_1, x + it \in A]\,, \quad A_t^2 = E[y; y \in E_1, t + iy \in A]\,.$$

9. *Es sei $f \in V_0(a, b)$, $K = f(\langle a, b\rangle)$, $G = E[z; \operatorname{ind}_f z \neq 0]$; F sei eine reelle auf der Menge $G \cup K$ stetige Funktion. Wir setzen voraus, dass es eine Menge $A \subset G$ gibt mit der Eigenschaft, dass A_y^1 für fast alle $y \in E_1$ abzählbar ist und dass für jedes $z = x + iy \in G - A$ die (endliche) Ableitung $\dfrac{\partial F(x + iy)}{\partial x}$ existiert. Dann ist die Menge G_y^1 für fast alle $y \in E_1$ Vereinigung endlich vieler (beschränkter) offener Intervalle, es existiert ferner für fast alle y das Perronsche Integral*

$$S(y) = \int_{G_y^1} \operatorname{ind}_f(x + iy)\,.\,\frac{\partial F(x + iy)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,,^{*)} \tag{27}$$

die Funktion S ist nach Lebesgue integrierbar und es gilt

$$\int_{E_1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_f F\,\mathrm{d}y\,. \tag{28}$$

Beweis. Es sei $f = \varphi + i\psi$ (φ, ψ reell). Aus [3] (vgl. die Beziehung (0)) folgt, dass es eine Nullmenge $M_1 \subset E_1$ mit $\eta_\psi(t) \neq 0$ für jedes $t \in \psi^{-1}(E_1 - M_1)$ gibt. (Für jedes $y \in E_1 - M_1$ ist also die Menge $\psi^{-1}(y)$ endlich.) Weiter bezeichnen wir mit M_2 die Gesamtheit aller $y \in E_1$, für welche A_y^1 unabzählbar ist. (Nach Voraussetzung ist auch M_2 eine Nullmenge.) Wir wollen zeigen, dass für jedes $y \in E_1 - (M_1 \cup M_2)$ die Beziehung

$$S(y) = \sum_{\psi(t) = y} F(f(t))\,\eta_\psi(t) \tag{29}$$

besteht. Es sei also $K_y^1 = \{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$, $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_r$, $r \geqq 0$ (die Menge K_y^1 ist endlich, weil $K_y^1 = \varphi(\psi^{-1}(y))$). Wir schreiben noch $\xi_0 = -\infty$, $\xi_{r+1} = \infty$. Auf jeder Menge $B_j = E[z; z = x + iy, \xi_j < x < \xi_{j+1}]$ ist die Funktion ind_f konstant; es sei $\operatorname{ind}_f z = I_j$ für $z \in B_j$. (Es ist natürlich $I_0 = I_r = 0$.) Sei $\zeta_j = \xi_j + iy$, $N_j = f^{-1}(\zeta_j)$ ($j = 1, \ldots, r$). Es gilt

$$\bigcup_{j=1}^{r} N_j = \psi^{-1}(y)\,. \tag{30}$$

Wir wählen noch die Zahlen $x_j \in (\xi_j, \xi_{j+1})$ und setzen $z_j = x_j + iy$. Dann ist $I_j = \operatorname{ind}_f z_j$ für $j = 0, \ldots, r$. Schreiben wir in (19) z_{j-1} anstatt z_1, z_j anstatt z_2, so erhalten wir

$$I_{j-1} - I_j = \sum_{t \in N_j} \eta_\psi(t)\,. \tag{31}$$

---

*) Ist $D = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$, wo $a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n$, so definieren wir das Perronsche Integral $\int_D g(x)\,\mathrm{d}x$ als $\sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} g(x)\,\mathrm{d}x$, soweit die Perronschen Integrale $\int_{a_j}^{b_j} g(x)\,\mathrm{d}x$ existieren.

Aus (30), (31) folgt also

$$\sum_{\psi(t)=y} F(f(t))\,\eta_\psi(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{t\in N_j} F(f(t))\,\eta_\psi(t) = \sum_{j=1}^{r} F(\zeta_j) \sum_{t\in N_j} \eta_\psi(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} F(\zeta_j)(I_{j-1} - I_j) = \sum_{j=1}^{r-1} I_j(F(\zeta_{j+1}) - F(\zeta_j)) \,. \tag{32}$$

Wir bilden jetzt die Menge R aller k mit $I_k \neq 0$. Es sei $k \in R$. Für $x \in \langle \xi_k, \xi_{k+1} \rangle$ setzen wir $h(x) = F(x + iy)$. Da die Menge A_y^1 abzählbar ist, besitzt die Funktion h mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen $x \in \langle \xi_k, \xi_{k+1} \rangle$ eine (endliche) Ableitung $h'(x) = \dfrac{\partial F(x+iy)}{\partial x}$; ausserdem ist h stetig. Nach [1], Seite 465 bis 466, existiert das Perronsche Integral $\displaystyle\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{\partial F(x+iy)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ und hat den Wert $h(\xi_{k+1}) - h(\xi_k) = F(\zeta_{k+1}) - F(\zeta_k)$. Aus der Gleichheit $G_y^1 = \bigcup_{k\in R} (\xi_k, \xi_{k+1})$ ergibt sich nun

$$S(y) = \sum_{k\in R} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \operatorname{ind}_f (x+iy) \,.\, \frac{\partial F(x+iy)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in R} I_k(F(\zeta_{k+1}) - F(\zeta_k)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r-1} I_j(F(\zeta_{j+1}) - F(\zeta_j)) \,. \tag{33}$$

Aus (32) und (33) folgt sofort (29). Nach [3] (Formel (3)) gilt jedoch

$$\int_f F\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(f(t))\,\mathrm{d}\psi(t) = \int_{E_1} \Big(\sum_{\psi(t)=y} F(f(t))\,\eta_\psi(t)\Big)\,\mathrm{d}y\,; \tag{34}$$

durch (29), (34) ist (28) und damit der ganze Satz bewiesen.

Bemerkung. Unter ähnlichen Voraussetzungen könnten wir die Gleichheit

$$-\int_{E_1} \left(\int_{G_x^2} \operatorname{ind}_f (x+iy) \,.\, \frac{\partial F(x+iy)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_f F\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

beweisen; statt (19) müssten wir aber die Formel (26) benützen. Sonst wäre der Beweis nicht wesentlich verschieden.

10. *Es sei* $f \in V_0(a, b)$, $K = f(\langle a, b \rangle)$, $G = E[z; \operatorname{ind}_f z \neq 0]$. *Es seien* P, Q *reelle auf der Menge* $G \cup K$ *stetige Funktionen*; *es soll weiter eine Menge* $A \subset G$ *existieren, so dass die Mengen* A_t^1, A_t^2 *für fast alle* $t \in E_1$ *abzählbar sind und dass für jedes* $z = x + iy \in G - A$ *die endlichen Ableitungen* $\dfrac{\partial Q(x+iy)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P(x+iy)}{\partial y}$ *vorhanden sind. Ausserdem sollen noch die Lebesgueschen Integrale*

$$\int_G \operatorname{ind}_f \,.\, \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \int_G \operatorname{ind}_f \,.\, \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existieren. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{ind}_f \,.\, \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_f P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \,.$$

(Dieser Satz folgt unmittelbar aus (27), (28) und (35)).

Bemerkung. Aus [2], Satz 1 folgt leicht, dass die Mengen A_t^1, A_t^2 sicher dann für fast alle $t \in E_1$ abzählbar sind, wenn A messbar und nirgends dicht ist und wenn A_t^1, A_t^2 für alle $t \in E_1$ nur abzählbar viele Komponenten besitzen.

11. *Es sei* $f \in V_0(a, b)$, $G = E[z;\, \mathrm{ind}_f\, z \neq 0]$. *Dann gilt*

$$\int_G |\mathrm{ind}_f(x + iy)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty\,. \tag{36}$$

Beweis. Wir setzen $K = f(\langle a, b\rangle)$. Da ind_f messbar (sogar stetig) auf $E_2 - K$ ist, existiert das (endliche oder unendliche) Lebesguesche Integral

$$I = \int_G |\mathrm{ind}_f(x + iy)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Nach dem Satze von Fubini gilt

$$I = \int_{E_1} \Big(\int_{G_y^1} |\mathrm{ind}_f(x + iy)|\, \mathrm{d}x\Big)\, \mathrm{d}y\,. \tag{37}$$

Es gibt ein $\varDelta > 0$, so dass

$$(G \cup K)_y^1 \subset (-\varDelta, \varDelta) \tag{38}$$

für jedes $y \in E_1$ ist.

Es mögen ψ, M_1 dieselbe Bedeutung wie im Abschnitt 9 haben. Wird unter $q(y)$ die Anzahl der Elemente von $\psi^{-1}(y)$ verstanden, so folgt aus [4], S. 280, die Ungleichung

$$\int_{E_1} q(y)\, \mathrm{d}y < \infty\,, \tag{39}$$

weil ψ eine in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion von beschränkter Variation ist.

Es sei $y \in E_1 - M_1$, $x \in G_y^1$. Dann ist $\eta_\psi(t) \neq 0$ für jedes $t \in \psi^{-1}(y)$. Setzen wir noch $z_1 = x + iy$, $z_2 = \varDelta + iy$, so ist nach (38) $\mathrm{ind}_f\, z_2 = 0$ und es folgt aus (19)

$$|\mathrm{ind}_f(x + iy)| = |\mathrm{ind}_f\, z_1 - \mathrm{ind}_f\, z_2| \leqq \sum_{f(t) \in J} |\eta_\psi(t)| \leqq q(y)\,.$$

Deshalb hat man nach (38)

$$\int_{G_y^1} |\mathrm{ind}_f(x + iy)|\, \mathrm{d}x \leqq 2\varDelta q(y)\,.$$

Nach (39) und (37) ergibt sich hieraus die Behauptung (36).

Bemerkung 1. Es ist leicht zu sehen, dass $f(\langle a, b\rangle)$ eine Nullmenge ist; (36) ist daher äquivalent mit

$$\int_{E_2} |\mathrm{ind}_f\, (x + iy)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty\,.$$

Bemerkung 2. Aus 11 folgt leicht, dass die Integrale

$$\int_G \mathrm{ind}_f \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \quad \int_G \mathrm{ind}_f \cdot \frac{\partial P}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

(vgl. den Abschnitt 10) sicher existieren, wenn die Funktionen $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ auf der Menge G beschränkt sind.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

[2] *J. Mařík:* Poznámka o řídkých množinách v E_m, Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), 337—341.

[3] *Ян Маржик* (Jan Mařík): Преобразование одномерных интегралов, Časopis pro pěst. mat. *82* (1957), 93—98.

[4] *S. Saks:* Theory of the integral, New York.

Резюме

ТЕОРЕМА ГРИНА

ЙОСЕФ КРАЛ (Josef Král) и ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 27/II 1956 г.)

Пусть φ, ψ — непрерывные вещественные функции с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$; пусть $f = \varphi + i\psi$. Если F — непрерывная комплексная (или вещественная) функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$, то положим $\int_f F \,\mathrm{d}x = \int_a^b F(f(t)) \,\mathrm{d}\varphi(t)$, $\int_f F \,\mathrm{d}y = \int_a^b F(f(t)) \,\mathrm{d}\psi(t)$, $\int_f F \,\mathrm{d}z = \int_f F \,\mathrm{d}x + i\int_f F \,\mathrm{d}y$. Далее, пусть E_1 (соотв. E_2) означает множество всех (конечных) вещественных (соотв. комплексных) чисел. Если $A \subset E_2$, $t \in E_1$, обозначим $A_t^1 = E[x \in E_1; x + it \in A]$, $A_t^2 = E[y \in E_1; t + iy \in A]$. Пусть еще $V_0(a, b)$ — множество всех непрерывных комплексных функций f с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$ таких, что $f(a) = f(b)$. Если $f \in V_0(a, b)$, определим на множестве $E_2 - f(\langle a, b\rangle)$ функцию ind_f формулой (8). В этих обозначениях имеет место следующая теорема:

Пусть $f \in V_0(a, b)$, $K = f(\langle a, b\rangle)$, $G = E[z; \mathrm{ind}_f\, z \neq 0]$. Пусть F — непрерывна на $G \cup K$; пусть $A \subset G$ такое, что A_y^1 счетно для почти всех $y \in E_1$ и что для $z = x + iy \in G - A$ существует конечная производная $\dfrac{\partial F(x + iy)}{\partial x}$. Тогда для почти всех $y \in E_1$ множество G_y^1 является соединением конечного числа ограниченных открытых интервалов, существует интеграл Перрона $S(y)$ (см. (27)) *и имеет место равенство* (28).

При аналогичных предположениях справедливо равенство (35). Отсюда, наконец, вытекает следующая теорема:

Пусть $f \in V_0(a, b)$, $K = f(\langle a, b\rangle)$, $G = E[z; \mathrm{ind}_f\, z \neq 0]$. Пусть P, Q — непрерывные функции на $G \cup K$; пусть A — такое множество ($A \subset G$), что A_t^1, A_t^2 счетны для почти всех $t \in E_1$ и что для всех $z = x + iy \in G - A$

существуют конечные производные $\dfrac{\partial Q(x+iy)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P(x+iy)}{\partial y}$. *Предположим далее, что существуют интегралы Лебега*

$$\int_G \operatorname{ind}_f z \cdot \frac{\partial P(z)}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \int_G \operatorname{ind}_f z \cdot \frac{\partial Q(z)}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

Тогда

$$\int_G \operatorname{ind}_f \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_f P \, \mathrm{d}x + \int_f Q \, \mathrm{d}y .$$

Отметим еще, что $\int_G |\operatorname{ind}_f| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$ (см. теорему 11). Следовательно, интегралы $\int_G \operatorname{ind}_f \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, $\int_G \operatorname{ind}_f \cdot \dfrac{\partial P}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ существуют, если функции $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ограничены на множестве G.