Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwarz

О суещствовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 165–182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100241

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. 7 (82) ПРАГА 15. VII. 1957 г., No 2

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР НА НЕКОТОРЫХ ТИПАХ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 11/V 1956 г.)

В работе исследуются необходимые и достаточные условия существования справа инвариантной меры на одном типе бикомпактных полугрупп.

Пусть S — бикомпактная хаусдорфова полугруппа. Пусть $\mathfrak{C}$ — система всех бикомпактных подмножеств из S и пусть $\mathfrak{S}$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{C}$. Элементы σ-алгебры $\mathfrak{S}$ называем борелевскими множествами из S.

Под мерой мы будем подразумевать σ-аддитивную неотрицательную регулярную множественную функцию μ, определенную на борелевских множествах из S такую, что $\mu(S) = 1$.

Пусть μ — мера. Мы будем говорить, что μ есть справа инвариантная мера полугруппы S, если для каждого борелевского множества $E \subseteqq S$, для которого и Ea, $a \in S$, является борелевским, имеет место $\mu(Ea) = \mu(E)$.

Цель работы — отыскать необходимые и достаточные условия существования справа инвариантной меры на некоторых типах бикомпактных полугрупп.

Поскольку мне известно, эта проблема не была до сих пор подробно изучена в литературе. Только в последнее время Т. М. Чэни [1] опубликовала некоторые результаты для случая конечных полугрупп. Кажется, что некоторые результаты предлагаемой работы находятся в связи с предварительными сообщениями В. Г. Розен [7], [8].

Замечание. Пусть S — бикомпактная полугруппа, E — борелевское множество из S, $a \in S$. Тогда Ea не будет обязательно борелевским множеством из S. Это показывает следующий пример. Пусть S — множество точек замкнутого квадрата $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ с обычной топологией на плоскости. Определим умножение при помощи соотношения $(x, y) \odot$

$\odot (u, v) = (x, 0)$. Очевидно, умножение ассоциативно и непрерывно, следовательно, S — бикомпактная полугруппа. Известно, что в S существует борелевское множество E, проекция которого на ось x не является борелевским множеством. Возьмем в качестве E это множество. Тогда для любого $(u, v) \in S$ будет $E \odot (u, v) = \sum_x (x, 0)$, где x пробегает координаты x точек, лежащих в E. Тогда $E \odot (u, v)$ будет проекцией множества E на ось x, которая не будет борелевским множеством.

1

На протяжении всей работы S обозначает бикомпактную хаусдорфову полугруппу.

Определение. *Пусть μ — мера на S. Обозначим знаком $C(\mu)$ множество всех элементов $x \in S$, обладающих следующим свойством: для всякого открытого множества U, содержащего элемент x, будет* $\mu(U) > 0$.

Множество $C(\mu)$ назовем *носителем* меры μ.

Лемма 1,1. *Пусть μ — мера на S. Пусть $M = C(\mu)$ — носитель меры μ. Тогда*

а) *M замкнуто в S*; б) $\mu(M) = 1$; в) *для всякого относительно открытого подмножества V из M будет* $\mu(V) > 0$.

Доказательство. Если $M = S$, то нечего доказывать. Пусть, поэтому, $S - M \neq \emptyset$.

а) Пусть $x \in S - M$. Тогда существует такая окрестность U точки x, что $\mu(U) = 0$. Обязательно будет $U \cap M = \emptyset$. (Ибо, если бы существовал элемент $y \in U \cap M$, то по определению M, было бы $\mu(U) > 0$.) Итак, каждая точка из $S - M$ является внутренней точкой из $S - M$, т. е. M замкнуто в S.

б) Пусть G — произвольное открытое множество из S, содержащее M, $M \subseteqq G$. Если мы докажем $\mu(G) = 1$, то отсюда непосредственно следует — ввиду регулярности — $\mu(M) = 1$. Ввиду уравнения $1 = \mu(S) = \mu(S - G) + \mu(G)$, достаточно, поэтому, доказать $\mu(S - G) = 0$.

Для всякого $x \in S - G \subseteqq S - M$ существует такая окрестность V_x, что $\mu(V_x) = 0$. Рассмотрим сумму $\sum_{x \in S - G} V_x$. Это — покрытие замкнутого, а значит, и бикомпактного подмножества $S - G$ открытыми множествами. Следовательно, существует такое конечное покрытие, что имеет место $S - G \subseteqq V_{x_1} + V_{x_2} + \ldots + V_{x_n}$. Отсюда следует $\mu(S - G) \leqq \mu(V_{x_1}) + \mu(V_{x_2}) + \ldots + \mu(V_{x_n}) = 0$, ч. т. д.

в) Пусть $V \neq \emptyset$ — относительно открытое множество из M, т. е. $V = M \cap H$, где H открыто в S. Пусть $x \in M \cap H$. Так как $x \in M$ и $x \in H$, будет $\mu(H) > 0$. Из уравнения $1 = \mu(M) + \mu(S - M)$ следует $\mu(S - M) = 0$. Итак, $0 < \mu(H) = \mu(H \cap M) + \mu[H \cap (S - M)] = \mu(H \cap M) + 0 = \mu(V)$, $\mu(V) > 0$, чтд.[1])

Теорема 1,1. *Пусть μ — справа инвариантная мера полугруппы S. Пусть $R = C(\mu)$ есть определенное выше множество. Тогда*

а) *R есть замкнутый правый идеал из S;*

б) *для любого $a \in S$ будет $Ra = R$;*

в) *для любого $a \in S$, для которого $(S - R)a$ является борелевским множеством, имеет место $\mu[R \cap (S - R)\, a] = 0$.*

Доказательство. Множество Ra замкнуто, ибо оно является непрерывным образом замкнутого множества R в хаусдорфово пространство. Итак, Ra является борелевским множеством из S и $\mu(Ra)$ определено. Так как $\mu(R) = 1$, а μ — справа инвариантная мера, то $\mu(Ra) = 1$. Далее $Ra \cap (S - R)$ — или пустое или борелевское множество и $\mu(Ra) = \mu(Ra \cap R) + \mu[Ra \cap (S - R)]$. Так как для всякого борелевского множества $E \subseteqq S - R$ имеет место $\mu(E) = 0$, то $\mu[Ra \cap (S - R)] = 0$, откуда $\mu(Ra \cap R) = 1$. Если бы замкнутое множество $Ra \cap R$ было собственным подмножеством из R, множество $U = R - (Ra \cap R)$ было бы относительно открытым в R и в силу леммы 1,1 имело бы место $\mu(U) = t > 0$. Соотношение $\mu(R) = \mu(Ra \cap R) + \mu(U)$ влекло бы за собой $1 = 1 + t > 1$, что невозможно. Итак, $Ra \cap R = R$, т. е.

$$R \subseteqq Ra\,. \tag{1}$$

Докажем, что $R = Ra$. Соотношение (1) влечет

$$R \subseteqq Ra \subseteqq Ra^2 \subseteqq \ldots \subseteqq Ra^n \subseteqq \ldots \tag{2}$$

Пусть e — тот идемпотент $\in S$, к которому принадлежит элемент a, т. е. пусть e — единственный идемпотент $\in \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$. Покажем прежде всего, что $Ra \subseteqq Re$. Допустим противное: Ra non $\subseteqq Re$. Тогда существует такой элемент $x \in Ra$, что для любого $y_\nu \in R$ будет $x \neq y_\nu e$. Найдем прежде всего такие две окрестности $V(y_\nu e)$, $V(x)$, чтобы было $V(x) \cap V(y_\nu e) = \emptyset$. Найдем далее для множества $V(y_\nu e)$ такие две окрестности $U(y_\nu)$, $U_\nu(e)$, чтобы выполнялось соотношение $U(y_\nu) \,.\, U_\nu(e) \subseteqq V(y_\nu e)$. Тогда будет $V(x) \cap U(y_\nu) \,.\, U_\nu(e) = \emptyset$. В частности для каждого ν существуют такие две окрестности $U(y_\nu)$, $U_\nu(e)$, что x non $\in U(y_\nu)\, U_\nu(e)$. Рассмотрим сумму $\sum_{y_\nu \in R} U(y_\nu)$. Это — покрытие замкнутого множества R открытыми множествами. Итак, существует конечное покрытие множества R вида

$$R \subseteqq U(y_{\nu_1}) + U(y_{\nu_2}) + \ldots + U(y_{\nu_k})\,.$$

---

[1]) Формально иной способ введения множества $C(\mu)$ см. *Вендель* [2].

Для каждого $U(y_{v_i})$, $i = 1, 2, \ldots, k$ построим такую окрестность $U_{v_i}(e)$, чтобы было $x \text{ non} \in U(y_{v_i}) \, . \, U_{v_i}(e)$. Пусть, наконец, $U(e) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{k} U_{v_i}(e)$. Тогда имеем

$$x \text{ non} \in \sum_{i=1}^{k} U(y_{v_i}) \, U(e) \, , \quad x \text{ non} \in R \, . \, U(e) \, .$$

Так как $e \in \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$, то в нашей окрестности $U(e)$ существует элемент a^m с показателем $m \geqq 1$. Итак, было бы $x \text{ non} \in Ra^m$, что противоречит соотношению (2), согласно которому $x \in Ra \subseteqq Ra^m$. Итак, мы видим, что действительно $Ra \subseteqq Re$.

Из соотношения $R \subseteqq Ra \subseteqq Re$ следует, что каждый элемент $b \in R$ имеет вид $b = c \, . \, e$, $c \in R$. Итак, $b \, . \, e = (ce) \, e = ce = b$, т. е. e есть правая единица для всякого элемента $\in R$. Поэтому $R = Re$. Из соотношения $R \subseteqq Ra \subseteqq \subseteqq Re \subseteqq R$ следует $R = Ra$ для любого $a \in S$. Это доказывает, что R есть правый идеал из S и одновременно доказано соотношение б).

Из уравнения $S = R + (S - R)$ следует $1 = 1 + \mu(S - R)$, т. е. $\mu(S - R) = 0$. Из правой инвариантности меры μ следует $\mu[(S - R) \, a] = 0$ при условии, что $(S - R) \, a$ есть борелевское множество из S, и следовательно, при том же условии будет $\mu[R \cap (S - R) \, a] = 0$. Итак, теорема 1,1 вполне доказана.[2])

При доказательстве теоремы 1,1 мы показали, что для любого $a \in S$ будет $Ra = R$. В частности для любого $a \in R$ будет $Ra = R$. Полугруппа R не имеет, следовательно, ни одного собственного левого подидеала. Такая полугруппа называется слева простой. Полугруппа R замкнута, а значит, и бикомпактна в относительной топологии. Поэтому можно сформулировать

Следствие 1,1. *Полугруппа R из теоремы 1,1 является бикомпактной слева простой полугруппой.*

Структура таких полугрупп будет описана в разделе 2.

Следствие 1,2. *Пусть V — открытое подмножество из S, для которого $\mu(V) = 0$. Тогда будет $V \subseteqq S - R$.*

Доказательство. Допустим, что $y \in R \cap V \neq \emptyset$. Так как $y \in R$, $y \in V$, то было бы $\mu(V) > 0$, что невозможно. Итак, $R \cap V = \emptyset$.

Следствие 1,3. *Пусть $a \in S$. Пусть* $\mathrm{Int}[(S - R) \, a] \neq \emptyset$. *Тогда* $\mathrm{Int} \, . \, [(S - R) \, a] \subseteqq S - R$.

Следствие 1,4. *Пусть S — конечная полугруппа. Тогда $S - R$ есть правый идеал из S.*

---

[2]) Иное доказательство обстоятельства, что $R \subseteqq Ra$ влечет $R = Ra$, следует из одной общей теоремы, содержащейся в работе Уоллеса [6] (см. Следствие 1, стр. 25).

Доказательство. В этом случае $\mathrm{Int}[(S - R)\,a] = (S - R)\,a$. Следовательно, для всякого $a \in S$ будет $(S - R)\,a \subseteqq S - R$, т. е. $S - R$ есть правый идеал полугруппы S.

Более общий случай описывает

Следствие 1,5. *Пусть полугруппа S обладает следующим свойством: если A — открытое подмножество из S, то и $A\,.\,a$ открыто в S для любого $a \in S$. При этом условии $S - R$ является правым идеалом из S.*

Доказательство. Так как $S - R$ открыто в S, то по условию и $(S - R)\,a$ будет открытым множеством из S. Итак, согласно следствии 1,3, будет $(S - R)\,a \subseteqq S - R$ для любого $a \in S$.

Пример 1,1. Пусть S — множество точек замкнутого интервала $\langle 0, 1\rangle$ с обычной топологией на вещественной оси. Пусть $a \odot b = a$ для любой пары $a, b \in S$. Тогда S будет бикомпактной полугруппой. Пусть μ — мера, определенная при помощи единичной массы, помещенной в точке $a = 0$, т. е. $\mu(E) = 1$ для $0 \in E$, $\mu(E) = 0$ для $0 \,\mathrm{non} \in E$. Тогда $R = C(\mu) = \{0\}$, $S - R = \{(0, 1\rangle\}$. Так как для любого $E \subseteqq S$ и любого $b \in S$ будет $Eb = E$, то μ будет, очевидно, справа инвариантной мерой, а $S - R$ (открытым) правым идеалом из S.

2

В дальнейшем нам будут нужны более подробные сведения о некоторых свойствах полугруппы R. Поэтому мы приведем в настоящем параграфе некоторые результаты, касающиеся структуры бикомпактных слева простых полугрупп. Подробные доказательства читатель найдет, напр., в работе Шварц [4], в неявном виде также в работе Нумакура [3].

Полугруппу T называем слева простой, если она не содержит ни одного левого идеала $\neq T$. Если такая полугруппа содержит более одного элемента, то она не может содержать нулевого элемента.

Если T слева проста, то для любого $a \in T$ будет $Ta = T$, т. е. уравнение $xa = b$ имеет для каждого $a, b \in T$ решение $x \in T$. Если T бикомпактно (более общо, если T обладает идемпотентом), то решение уравнения $xa = b$ однозначно. Отсюда следует, что $xa = ya$ влечет за собой $x = y$.

Пусть $\{e_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — множество всех идемпотентов $\in T$. Для любого $a \in T$ и любого e_α будет $ae_\alpha = a$, т. е. каждый идемпотент $\in T$ является правой единицей из T.

Каждое из множеств $e_\alpha T = G_\alpha$ представляет собой замкнутую группу. Для $\alpha \neq \beta$ группы G_α, G_β дизъюнктны. Каждая из групп G_α является минимальным правым идеалом из T.

Полугруппу T можно записать в виде суммы дизъюнктных минимальных правых идеалов из T: $T = \sum_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha T = \sum_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Группы G_α мы назовем групповыми составляющими полугруппы T.

Для любого $x \in G_\alpha$

$$xT = (xe_\alpha)\, T = x(e_\alpha T) = xG_\alpha = G_\alpha \,.$$

Далее, имеем $e_\alpha G_\beta = G_\alpha$. Прежде всего $e_\alpha G_\beta \subseteqq e_\alpha T \subseteqq G_\alpha$. Далее, $e_\alpha G_\beta$ будет, очевидно, правым идеалом из T (ибо $e_\alpha G_\beta T \subseteqq e_\alpha G_\beta$). Но так как G_α есть минимальный правый идеал из T, то $e_\alpha G_\beta = G_\alpha$.

Группы G_α, G_β — изоморфные топологические группы и этот изоморфизм допускает следующую реализацию:

$$x \in G_\alpha \to y = e_\beta x \in G_\beta \,, \quad y \in G_\beta \to x = e_\alpha y \in G_\alpha \,.$$

Если S конечно, то отсюда следует в частности, что все групповые элементы имеют одинаковое число элементов.

Наконец, для каждого $x \in T$ имеем $G_\alpha x = G_\alpha$. (Ибо, $Tx = T$ (3); далее, $G_\alpha x \subseteqq G_\alpha$, и если бы для какого-либо α было $G_\alpha x$ собственным подмножеством G_α, мы получили бы противоречие с соотношением (3).)

Замечание. Простую формулировку структуры бикомпактной слева простой полугруппы T, из которой вытекают все приведенные выше свойства, дает нам следующая теорема. Пусть G — произвольная групповая составляющая $G \subseteqq T$. Пусть E — множество всех правых единиц из T. Тогда полугруппа T топологически изоморфна прямому произведению $E \times G$. В этой формулировке структура T описана в неявном виде напр. в работе Уоллес [5] (см. Теорему 1, стр. 44—45).

3

В настоящем разделе мы выведем некоторые вспомогательные теоремы, нужные нам в разделе 4. В то же время мы приведем несколько примеров, которые достаточно осветят обстоятельства, при которых на данной полугруппе не может существовать справа инвариантная мера.

Следствие 1,5 приводит к следующему определению:

Определение. *Мы будем говорить, что бикомпактная полугруппа S есть типа P, если для каждого открытого множества $E \subseteqq S$ и каждого $a \in S$ также Ea будет открытым множеством из S.*

Аналогично: мы будем говорить, что бикомпактная полугруппа S есть типа L, если для каждого открытого множества $E \subseteqq S$ и каждого $a \in S$ и aE будет открытым множеством из S.

Примеры: а) Каждая конечная полугруппа относится как к типу P, так и к типу L.

б) Бикомпактная группа относится как к типу P, так и к типу L.

в) Полугруппа из примера 1,1 относится к типу P, но не к типу L.

Следующий пример настолько важен, что мы приведем его в виде леммы.

Лемма 3,1. *Каждая бикомпактная слева простая полугруппа относится к типу P.*

Доказательство. По условию и согласно разделу 2, можно написать $S = \sum_{\alpha \in A} G_\alpha$. Пусть $a \in S$, тогда $a \in G_\alpha$ при соответствующем выборе α. Обозначим символом a^{-1} тот элемент группы G_α, для которого $aa^{-1} = e_\alpha$, где e_α есть идемпотент группы G_α.

Отображение f: $x \to xa$ является непрерывным отображением S на $Sa = S$. Это отображение взаимно однозначно, ибо $xa = ya \in S$ влечет $x = y \in S$.

Обратное отображение дано соотношением f^{-1}: $xa \to (xa)\,a^{-1} = xe_\alpha = x$. Оно также непрерывно. Итак, f дает топологическое отображение пространства S на себя. Поэтому открытые множества из S отображаются на открытые множества из S, ч. т. д.

Из теоремы 1,1 и следствия 1,5 следует: Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P. Пусть S обладает справа инвариантной мерой μ. Тогда S можно записать в виде суммы двух дизъюнктных правых идеалов $S = C(\mu) + [S - C(\mu)]$, из которых $C(\mu)$ замкнуто, причем для любого $a \in S$ имеет место $C(\mu)\,.\,a = C(\mu)$.

Представление в виде суммы двух дизъюнктных правых идеалов возможно невсегда даже в случае конечных полугрупп. Если, напр., S обладает нулевым элементом, то такое разложение невозможно, ибо нулевой элемент войдет в каждый правый идеал и никакие два правых идеала не будут дизъюнктны.

Введем поэтому следующее определение:

Определение. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P. Мы будем говорить, что S допускает правое μ-разложение, если можно написать $S = R + (S - R)$, где $R \neq \emptyset$ и $S - R$ — правые идеалы из S, R замкнуто и для любого $a \in S$ имеет место $Ra = R$. (Мы допускаем и случай $S - R = \emptyset$.)*

Аналогично можно определить в бикомпактной полугруппе типа L левое μ-разложение.

Пример 3,1. Пусть S — слева простая бикомпактная полугруппа. Такая полугруппа всегда допускает правое μ-разложение, так как можно написать $S = S + \emptyset$. Пусть $S = \sum_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Выберем конечное число групповых составляющих $\sum_\nu G_\nu$. Тогда и разложение $S = \sum_\nu G_\nu + (S - \sum_\nu G_\nu)$ будет правым μ-разложением. Каждое из слагаемых является, очевидно, правым идеалом, $\sum_\nu G_\nu$ замкнуто и наконец из раздела 2 следует, что $(\sum_\nu G_\nu)\, a = \sum_\nu G_\nu$ для любого $a \in S$.

Пример 3,2. Примером полугруппы, которая сама не является слева простой и допускает правое μ-разложение, служит полугруппа $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ со следующей таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{array} .$$

Здесь существуют три правых μ-разложения, а именно:

$$S = \{a_3\} + \{a_1, a_2, a_4\} = \{a_4\} + \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_3, a_4\} + \{a_1, a_2\} .$$

Обратим внимание на то, что в отличие от примера 3,1, хотя второе слагаемое и является всегда правым идеалом, тем не менее оно само не представляет слева простую полугруппу. В дальнейшем мы покажем, что эта полугруппа обладает справа инвариантными мерами.

Следующая теорема показывает, какую роль играют группы в множестве всех полугрупп типа P.

Теорема 3,1. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P. Пусть S имеет хоть одну справа и хоть одну слева инвариантную меру. Тогда S есть группа.*

Доказательство. Из условия следует, что S допускает хоть одно правое μ-разложение $S = R + (S - R)$, $R \neq \emptyset$. Так как кроме того существует и слева инвариантная мера ν, то можно написать (по теореме 1,1) $S = L + (S - L)$, где $L = C(\nu)$ — замкнутый левый идеал, и для любого $a \in S$ имеет место $aL = L$.

Рассмотрим произведение RL. Очевидно, $RL \subseteq R \cap L$. Далее имеем $RL = R \,.\, \{a, \ldots\} = R$ и $RL = \{a, \ldots\}\, L = L$. Итак, $R = L$, т. е. R — двусторонний идеал из S. Так как для любого $a \in R$ имеет место $Ra = R$, $aR = R$, то R — группа.

Покажем, что $S - R = \emptyset$. Предположим, что $S - R \neq \emptyset$ и рассмотрим произведение $(S - R)\, R$. Так как $S - R$ есть правый идеал, то $(S - R)\, R \subseteq$

$\subseteq S - R$. Так как R есть левый идеал из S, то $(S - R) R \subseteq R$. Отсюда следует $(S - R) R \subseteq R \cap (S - R)$, что, очевидно, невозможно. Итак, $S - R = \emptyset$ и $S = R$ есть группа, ч. т. д.

Следствие 3,1. *Пусть S — коммутативная бикомпактная полугруппа типа P. Если S обладает инвариантной мерой, то S — группа.*

Теперь мы будем изучать множество всех правых μ-разложений S.

Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3,2. *Пусть $S = R + (S - R)$ — правое μ-разложение S. Пусть G_α — какая-либо из групповых составляющих идеала R. Тогда G_α будет минимальным правым идеалом из S и для любого $a \in S$ будет $G_\alpha a = G_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $R = \sum\limits_\alpha G_\alpha$. Мы знаем, что каждое G_α есть минимальный правый идеал из R и имеет место $G_\alpha = G_\alpha R$. Но каждая из групп G_α является и правым идеалом из S, ибо $G_\alpha S = (G_\alpha R) S = G_\alpha(RS) = G_\alpha R = G_\alpha$. Следовательно, G_α тем более будет минимальным правым идеалом из S. Для любого $a \in S$ будет $Ra = R$, значит, $(\sum\limits_\alpha G_\alpha) a = \sum\limits_\alpha G_\alpha (4)$. Так как G_α — правый идеал из S, то $G_\alpha a \subseteq G_\alpha$. Из уравнения (4) следует, что здесь должен иметь место знак равенства, ибо $G_\alpha a \neq G_\alpha$ для какого-либо α противоречило бы уравнению (4). Этим и доказывается наша лемма.

Теорема 3,2. *Пусть бикомпактная полугруппа S типа P допускает хоть одно правое μ-разложение. Тогда она допускает и такое правое μ-разложение $S = R_0 + (S - R_0)$, где R_0 есть группа.*

Доказательство. Пусть $S = R + (S - R)$ правое μ-разложение и $R = \sum\limits_\alpha G_\alpha$. Пусть G_β — какая-либо групповая составляющая из R. Запишем разложение в виде $S = G_\beta + [(S - R) + \sum\limits_{\alpha \neq \beta} G_\alpha]$. Ясно, что оба слагаемых — правые идеалы. Далее, G_β замкнуто. Наконец (по лемме 3,2), для любого $a \in S$ имеем $G_\beta a = G_\beta$, и наша теорема доказана.

Теорема 3,3. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P, допускающая хоть одно правое μ-разложение. Тогда существует одно единственное правое μ-разложение $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$, обладающее следующим свойством: для любого правого μ-разложения $S = R + (S - R)$ имеет место $R \subseteq \mathfrak{R}$.*

Определение. *Разложение $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ будем называть максимальным правым μ-разложением полугруппы S.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех правых μ-разложений полугруппы S: $S = R_\alpha + (S - R_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$. Очевидно, достаточно доказать, что разложение $S = \overline{\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha} + (S - \overline{\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha})$ есть правое μ-разложение полугруппы S.

Множество $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha = T$ является правым идеалом из S. Нетрудно убедиться, что и замыкание $\overline{\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha}$ есть правый идеал из S. Итак, остается только доказать, что а) $\overline{T}a = \overline{T}$ для любого $a \in S$, б) $S - \overline{T}$ есть правый идеал из S.

а) Доказательство утверждения а) вытекает из следующей известной общей теоремы. Пусть S — хаусдорфово пространство и f — непрерывное отображение $S \to S$. Пусть $A \subseteqq S$. Если $f(A) = A$ и $\overline{A}$ бикомпактно, то $f(\overline{A}) = \overline{A}$. Положим в нашем случае $f(x) = xa$ и $A = T = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$. Тогда f — непрерывное отображение $S \to S$ и $f(T) = Ta = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha a = T$. Итак, $f(\overline{T}) = \overline{T}a = \overline{T}$, ч. т. д.[3])

б) Если $S = \overline{T}$, то нам нечего доказывать, ибо $S = \overline{T} + \emptyset$ есть максимальное правое μ-разложение S. Поэтому допустим, что $S - \overline{T} \neq \emptyset$. Так как S принадлежит типу P, то $(S - \overline{T})\, a$ — открытое множество для любого $a \in S$. Чтобы доказать, что $S - \overline{T}$ есть правый идеал из S, нужно доказать, что для любого $a \in S$ будет $(S - \overline{T})\, a \subseteqq S - \overline{T}$, т. е. $(S - \overline{T})\, a \cap \cap \overline{T} = \emptyset$. Доказательство от противного. Допустим, что существует такое $a \in S$, что $(S - \overline{T})\, a \cap \overline{T} \neq \emptyset$. Так как $(S - \overline{T})\, a$ открыто, отсюда необходимо следует $(S - \overline{T})\, a \cap T \neq \emptyset$. Далее, $S - \overline{T} \subseteqq S - T = S - \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha = = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda}(S - R_\alpha)$. Множество $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}(S - R_\alpha)$ непусто и — как пересечение правых идеалов — само является правым идеалом. Итак, $(S - \overline{T})\, a \subseteqq \subseteqq [\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}(S - R_\alpha)]\, a \subseteqq \prod\limits_{\alpha\in\Lambda}(S - R_\alpha) = S - T$. Соотношение $(S - \overline{T})\, a \cap T \neq \neq \emptyset$ влечет за собой $(S - T) \cap T \neq \emptyset$, что невозможно. Теорема **3,3** доказана.

Описание структуры полугруппы, имеющей хоть одну справа инвариантную меру, уточняется еще следующей теоремой.

Теорема 3,4. *Пусть S — бикомпактная полугруппа, имеющая хоть одну справа инвариантную меру. Тогда S содержит один единственный минимальный левый идеал $\mathfrak{L}$. Он является одновременно минимальным двусторонним идеалом из S. Для любой справа инвариантной меры μ имеет место $C(\mu) \subseteqq \mathfrak{L}$.*

Если S типа P, то $\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{L}$. Соотношение $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}$ имеет место тогда и только тогда, если S — слева простая полугруппа, т. е. $\mathfrak{R} = S$.

Доказательство. а) Известно, что каждая бикомпактная полугруппа содержит хоть один минимальный левый идеал L. Каждый минимальный

[3]) Первоначальное доказательство утверждения а) было более сложно. Упрощением я обязан проф. *А. Д. Уоллесу*.

левый идеал замкнут и является главным идеалом, т. е. его можно записать в виде $L = Sf$, $f \in S$.

Пересечение двух различных минимальных левых идеалов произвольной полугруппы S всегда пусто. Поэтому, для доказательства первой части нашей теоремы достаточно показать, что при наших условиях пересечение любых двух главных идеалов непусто. Пусть $L_1 = Sf_1$, $L_2 = Sf_2$ — два различных главных идеала из S. По условию существует хотя одна справа инвариантная мера μ_1. Так как $R = C(\mu_1) \neq \emptyset$, то для $i = 1, 2$ будет $L_i = Sf_i \supseteqq Rf_i = R$, т. е. $R \subseteqq L_1 \cap L_2$. Итак, S имеет единственный минимальный левый идеал $\mathfrak{L}$.

Так как хорошо известно, что минимальный двусторонний идеал бикомпактной полугруппы S является суммой всех минимальных левых идеалов из S, то ясно, что $\mathfrak{L}$ будет одновременно минимальным двусторонним идеалом из S.

б) Так как $\mathfrak{L}$ — левый главный идеал, можно написать $\mathfrak{L} = Se$, $e \in S$. Для каждой справа инвариантной меры μ будет $\mathfrak{L} = Se \supseteqq C(\mu)\, e = C(\mu)$.

в) Если S типа P и если $\mathfrak{R}$ существует, то будет также $\mathfrak{L} = Se \supseteqq \mathfrak{R}e = \mathfrak{R}$, т. е. $\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{L}$.

г) Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}$. Известно, что в каждой полугруппе каждый правый идеал пересекает каждый левый идеал. Если бы правый идеал $S - \mathfrak{R}$ был непустым, было бы обязательно $(S - \mathfrak{R}) \cap \mathfrak{L} \neq \emptyset$. Тогда было бы $(S - \mathfrak{R}) \cap \cap\, \mathfrak{R} \neq \emptyset$, что, очевидно, невозможно. Поэтому $S - \mathfrak{R} = \emptyset$, $S = \mathfrak{R}$.

Если же, наоборот, $S = \mathfrak{R}$, то (как нам уже известно) S будет слева простым, откуда $S = \mathfrak{L}$. Этим завершается доказательство теоремы 3,4.

4

Теперь мы докажем теорему, являющуюся обращением теоремы 1,1 при очевидных добавочных условиях. Вопрос о том, допускаетли предположение, что полугруппа S есть типа P, дальнейшее ослабление, мне не удалось до сих пор разрешить,

Теорема 4,1. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы S имело справа инвариантную меру, имеет вид: S допускает хоть одно правое μ-разложение.*

Доказательство. а) Из теоремы 1,1 и следствия 1,5 вытекает, что условие необходимо.

б) Покажем, что условие достаточно. Предположим, что S допускает хоть одно правое μ-разложение. По теореме 3,2 в таком случае существует и такое правое μ-разложение $S = G + (S - G)$, где G — группа. Пусть μ_1 есть мера Хаара группы G, удовлетворяющая условию $\mu_1(G) = 1$. Расширим определение меры μ_1 на все борелевские множества E из S тем, что положим $\mu(E) = \mu_1(E \cap G)$.

Достаточно доказать, что для любого $x \in S$ будет $\mu(Ex) = \mu(E)$. Напишем $Ex = (E \cap G)\,x + [E \cap (S - G)]\,x$. Для первого слагаемого направо имеем $(E \cap G)\,x \subseteqq Gx \subseteqq G$ (мы использовали лемму 3,2). Для второго слагаемого имеет место $[E \cap (S - G)]\,x \subseteqq (S - G)\,x \subseteqq S - G$. Итак, $Ex \cap G = (E \cap \cap G)\,x$.

В силу определения меры μ будет $\mu(Ex) = \mu_1(G \cap Ex) = \mu_1[(G \cap E)\,x]$. Если e — единичный элемент группы G, то $(G \cap E)\,x = (G \cap E)\,e\,.\,x$. Согласно разделу 2, элемент $y = ex$ будет, однако, каким — то элементом $\in G$. Поэтому

$$\mu(Ex) = \mu_1[(G \cap E)\,y] = \mu_1(G \cap E) = \mu(E)\,.$$

Этим теорема доказана.

Ввиду леммы 3,1 имеет место следующее следствие:

Следствие 4,1. *Каждая слева простая бикомпактная полугруппа имеет хоть одну справа инвариантную меру.*

Из теоремы 4,1 мы теперь выведем новое необходимое и достаточное условие существования справа инвариантной меры, которое использует только обычные в теории полугрупп понятия и весьма удобно для применений.

Теорема 4,2. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P. Пусть N — минимальный двусторонний идеал из S (т. наз. ядро Сушкевича). Необходимым и достаточным условием для того, чтобы S имело справа инвариантную меру, является выполнение следующих условий:*

а) *N есть минимальный левый идеал из S;*

б) $N - (S - N)\,S \neq \emptyset$.

Доказательство. А) Условия необходимы. Пусть S имеет хоть одну справа инвариантную меру. Согласно 3,4, S тогда содержит единственный минимальный левый идеал N, являющийся одновременно минимальным двусторонним идеалом из S. Итак, условие а) выполнено.

Пусть $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ есть максимальное правое μ-разложение S. Тогда $\emptyset \neq \mathfrak{R} \subseteqq N$. Если $\mathfrak{R} = N$, то по теореме 3,4 будет $S = N$ и наоборот. В этом случае $N - (S - N)\,S = S \neq \emptyset$. Итак, выполняется б). Поэтому в дальнейшем можно предполагать $N \neq S$.

Так как $(S - N)\,S\,.\,N \subseteqq (S - N)\,S \cap N$, правый идеал $(S - N)\,S \neq \emptyset$ пересекает идеал N. Следовательно, если бы было $N - (S - N)\,S = \emptyset$, то это бы необходимо значило $N \subseteqq (S - N)\,S$. Однако, $(S - N)\,S \subseteqq (S - \mathfrak{R})\,.\,.\,S \subseteqq S - \mathfrak{R}$. Соотношение $N \subseteqq S - \mathfrak{R}$ влечет за собой тем более $\mathfrak{R} \subseteqq \subseteqq S - \mathfrak{R}$, что явно невозможно. Поэтому обязательно будет $N - (S - N)S \neq \neq \emptyset$, откуда видно, что условие б) выполняется и в этом случае.

Б) Условия достаточны. Пусть выполнены условия а) и б). Покажем, что существует правое μ-разложение полугруппы S. Если $N = S$, то полугруппа слева проста и имеет, согласно следствию 4,1, справа инвариантную меру. Итак, можно предполагать, что $N \neq S$.

α) Положим $\mathfrak{R}_1 = N - (S - N) S$. Известно, что $S - N$ открыто в S. Значит, и $(S - N) a$ открыто в S для любого $a \in S$. Поэтому $(S - N) S = (S - N) \sum_{a \in S} a = \sum_{a \in S} (S - N) a$ будет открытым правым идеалом из S. Множество $\mathfrak{R}_1 = N - [N \cap (S - N) S] \neq \emptyset$ замкнуто в S. Известно, что минимальный левый идеал N можно записать в виде $N = \sum_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, где дизъюнктные группы G_α представляют собой в точности все минимальные правые идеалы из S. Множество $N \cap (S - N) S$ будет поэтому правым идеалом из S, содержащимся в N, и можно, следовательно, написать $\mathfrak{R}_1 = \sum_\beta G_\beta$, где β пробегает некоторое подмножество индексов множества Λ. Итак, $\mathfrak{R}_1$ — замкнутый правый идеал из S.

β) Пусть a — произвольный элемент $\in S$. Так как N — двусторонний идеал, то $Na \subseteqq N$. Одновременно ясно, что Na — левый идеал из S. Так как, однако, ввиду условия а) Na является минимальным левым идеалом из S, то обязательно будет $Na = N$. Итак, $(\sum_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha) a = \sum_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ (*). Каждое G_α является правым идеалом из S, значит для любого $\alpha \in \Lambda$ будет $G_\alpha a \subseteqq G_\alpha$. Из уравнения (*) следует, что для любого α имеет место $G_\alpha a = G_\alpha$. В частности, будет $\mathfrak{R}_1 a = (\sum_\beta G_\beta) a = \sum_\beta (G_\beta a) = \sum_\beta G_\beta = \mathfrak{R}_1$, т. е. $\mathfrak{R}_1 a = \mathfrak{R}_1$ для любого $a \in S$.

γ) Рассмотрим, наконец, множество $S - \mathfrak{R}_1 = (S - N) + (S - N) S$. Это множество является правым идеалом из S, ибо для любого $a \in S$ будет $(S - \mathfrak{R}_1) a = (S - N) a + (S - N) Sa \subseteqq (S - N) S + (S - N) S \subseteqq S - \mathfrak{R}_1$.

Из утверждений α), β), γ) следует, что разложение $S = \mathfrak{R}_1 + (S - \mathfrak{R}_1)$ является правым μ-разложением полугруппы S. Итак, S имеет по теореме 4,1 хоть одну справа инвариантную меру. Этим завершается доказательство теоремы 4,2.

Исходя из доказательства предыдущей теоремы, можно теперь уточнить и теорему 3,3. Справедлива

Теорема 4,3. *Пусть S — бикомпактная полугруппа типа P, допускающая хоть одно правое μ-разложение. Пусть N — ядро полугруппы S. Тогда для максимального правого μ-разложения $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ имеет место $\mathfrak{R} = N - (S - N) S$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 4,2 мы нашли: если положить $\mathfrak{R}_1 = N - (S - N) S$, то $S = \mathfrak{R}_1 + (S - \mathfrak{R}_1)$ будет правым μ-разложением полугруппы S. Для доказательства равенства $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$

достаточно доказать, что ни один элемент $\in (S - N)\, S$ не может содержаться в $\mathfrak{R}$. (Тем более в $\mathfrak{R}$ не может содержаться ни один элемент $\in N \cap$ $\cap\, (S - N)\, S$.)

Из теоремы 3,4 и 4,1 следует $\mathfrak{R} \subseteqq N$. Следовательно, $S - N \subseteqq S - \mathfrak{R}$. Отсюда следует $(S - N)\, S \subseteqq (S - \mathfrak{R})\, S \subseteqq S - \mathfrak{R}$, т. е. ни один элемент $\in (S - N)\, S$ не может лежать в $\mathfrak{R}$, ч. т. д.

5

Пусть $S = R + (S - R)$ — правое μ-разложение полугруппы S. Существуетли такая справа инвариантная мера, носителем которой является как раз R? Положительный ответ мы можем дать в случае, когда R имеет конечное число групповых составляющих.

Теорема 5,1. *Пусть $S = R + (S - R)$ — правое μ-разложение бикомпактной полугруппы типа P. Пусть R имеет лишь конечное число идемпотентов. Тогда существует справа инвариантная мера μ, носителем которой является как раз R.*

Доказательство. Пусть $R = \sum_{i=1}^{m} G_i$. Построим меру Хаара μ'_i группы G_i, для которой $\mu'_i(G_i) = 1$. Расширим определение μ'_i на все борелевские множества E из S тем, что положим $\mu_i(E) = \mu'_i(E \cap G_i)$.

Возьмем m действительных чисел $0 \leqq t_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$ таких, что $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$. Наконец, построим множественную функцию μ, определенную на всех борелевских множествах E из S: $\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i(E)$.

Очевидно, $\mu(S) = 1$. Покажем, что μ есть справа инвариантная мера. Для любого $x \in S$ будет опять $Ex = (E \cap G_i)\, x + [E \cap (S - G_i)]\, x$, $(E \cap G_i)\, x \subseteqq G_i$, $[E \cap (S - G_i)]\, x \subseteqq S - G_i$, следовательно, $Ex \cap G_i =$ $= (E \cap G_i)\, x$. Поэтому $\mu(Ex) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i(Ex) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu'_i(Ex \cap G_i) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu'_i[(E \cap$ $\cap\, G_i)\, x]$. Так как $E \cap G_i \subseteqq G_i$, то $(E \cap G_i)\, e_i = E \cap G_i$ и $(E \cap G_i)\, x =$ $= (E \cap G_i)\, e_i x$. Однако, $e_i x = y_i$ есть элемент из G_i, следовательно, ввиду инвариантности меры Хаара на G_i, получаем $\sum_{i=1}^{m} t_i \mu'_i[(E \cap G_i)\, x] =$ $= \sum_{i=1}^{m} t_i \mu'_i(E \cap G_i) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i(E) = \mu(E)$, т. е. $\mu(Ex) = \mu(E)$.

Возьмем теперь $t_1 = \dots = t_m = \dfrac{1}{m}$. Тогда $\mu(E) = \dfrac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mu_i(E)$ будет справа инвариантной мерой на S, удовлетворяющей соотношению $\mu(G_i) =$ $= \dfrac{1}{m} > 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ и $\mu(R) = 1$. Обозначим $R_1 = C(\mu)$. Очевидно,

$R_1 \subseteqq R$. По теореме 1,1 R есть$_1$ замкнутый правый идеал из S. R_1 имеет непустое пересечение с каждой из групп G_i (ибо в противном случае не могло бы быть $\mu(G_i) > 0$). Однако, группа, имеющая непустое пересечение с правым идеалом, содержится в этом идеале целиком. Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} G_i = R \subseteqq R_1$. Отсюда вытекает $R = R_1$, и наша теорема доказана.

Если в максимальном правом μ-разложении $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ $\mathfrak{R}$ имеет лишь конечное число идемпотентов, то при помощи доказательства теоремы 5,1 можно получить ясное представление обо всех справа инвариантных мерах на S.

Пусть $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{m} G_i$ и пусть μ'_i, μ_i имеют тот же смысл, как и в доказательстве теоремы 5,1. Тогда справедлива

Теорема 5,2. *При указанных только-что условиях каждая справа инвариантная мера на S имеет вид*

$$\mu(E) = t_1\mu_1(E) + t_2\mu_2(E) + \ldots + t_m\mu_m(E)\,, \tag{5}$$

где действительные числа t_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ выполняют соотношение $0 \leqq t_i \leqq 1$, $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$.

Доказательство. а) При доказательстве теоремы 5,1 мы показали, что каждая из мер (5) является справа инвариантной.

б) Пусть, наоборот, ν — какая-либо справа инвариантная мера на S. Тогда $C(\nu) \subseteqq \mathfrak{R}$. Так как $C(\nu)$ есть правый идеал, то $C(\nu) = \sum_k G_k$, где k пробегает некоторое подмножество множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$. Без ограничения общности можно написать $C(\nu) = \sum_{k=1}^{r} G_k$, $1 \leqq r \leqq m$. Каждая из групп G_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ является открыто-замкнутым подмножеством из $C(\nu)$. Итак, $\nu(G_k) = t_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$. В силу условия будет, конечно, $\sum_{k=1}^{r} t_k = 1$.

Построим множественную функцию $\overline{\mu}_k(E) = \frac{1}{t_k}\,\nu(G_k \cap E)$. Это — справа инвариантная мера на S, носителем которой является G_k и $\overline{\mu}_k(G_k) = 1$. Ввиду однозначности меры Хаара на G_k, будет поэтому $\overline{\mu}_k(E) = \mu_k(E)$, где $\mu_k(E)$ есть определенная выше множественная функция. Итак, имеем $\nu(G_k \cap E) = t_k\mu_k(E)$. Поэтому

$$\nu(E) = \nu[C(\nu) \cap E] = \sum_{k=1}^{r} \nu(G_k \cap E) = \sum_{k=1}^{r} t_k\mu_k(E)\,,$$

ч. т. д.

Пример 5,1. Пусть S — конечная полугруппа, имеющая справа инвариантную меру. Пусть $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ — максимальное правое μ-разложение. Пусть $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{m} G_i$, причем каждая из групп G_i состоит из s элементов.

Если $\mu(x)$ — справа инвариантная мера, e_i — идемпотент $\epsilon\, G_i$ и x — произвольный элемент $\epsilon\, G_i$, то $\mu(e_i) = \mu(e_i x) = \mu(x)$, т. е. μ принимает одно и то же значение для всякого $x \epsilon G_i$. Введенные выше меры будут в нашем случае, очевидно,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{для} \quad x \epsilon G_i\,, \\ 0 & \text{для} \quad x \text{ non } \epsilon G_i\,. \end{cases} \tag{6}$$

Итак, все справа инвариантные меры даны соотношением $\mu = t_1\mu_1 + \dots + t_m\mu_m$, где μ_i определяются уравнениями (6).

Рассмотрим, напр., полугруппу из примера 3,2. В максимальном правом μ-разложении будет $\mathfrak{R} = \{a_3, a_4\}$, $S - \mathfrak{R} = \{a_1, a_2\}$. Множественные функции μ_1, μ_2 определены таким образом: $\mu_1(\{a_3\}) = 1$, $\mu_1(\{a_1, a_2, a_4\}) = 0$; $\mu_2(\{a_4\}) = 1$, $\mu_2(\{a_1, a_2, a_3\}) = 0$. Множество всех справа инвариантных мер имеет вид $\mu = t\mu_1 + (1-t)\,\mu_2$, где — t действительное число, $0 \leqq t \leqq 1$. Итак, это все множественные функции μ, для которых $\mu(\{a_1, a_2\}) = 0$, $\mu(\{a_3\}) = 1 - t$, $\mu(\{a_4\}) = t$.

Замечание 1. Если $\mathfrak{R}$ имеет бесконечное количество идемпотентов, то теорема 5,2 в указанной формулировке, конечно, не может быть в общем случае справедлива, ибо может случиться, что $\mu(G_\alpha) = 0$ для каждой группы $G_\alpha \subset C(\mu)$. Рассмотрим, напр., полугруппу из примера 1,1. Определим $\mu(E)$ таким образом. Пусть J — замкнутый интервал $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ и пусть $\mu(E) = 2\lambda(E \cap J)$, где λ — мера Лебега на действительной оси. Так как для любого $a \epsilon S$ будет $Ea = E$, то эта мера будет необходимо справа инвариантной и $\mu(S) = 2\lambda(J) = 1$. Но каждое G_α является одноточечной группой, следовательно $\lambda(G_\alpha) = 0$ и $\mu(G_\alpha) = 0$ для любого $G_\alpha \subset S$.

Замечание 2. Из проведенных рассуждений можно, однако, в каждом случае заключить следующее. Пусть S имеет хоть одну справа инвариантную меру. Если в каком-либо правом μ-разложении $S = R + (S - R)$, R имеет больше одной групповой составляющей, то обязательно существует бесконечное количество справа инвариантных мер, для которых $\mu(S) = 1$. Действительно, если $G_1 \neq G_2$, $G_1 \subset R$, $G_2 \subset R$, и если обозначить знаком μ_1, μ_2 меры, введенные при доказательстве теоремы 5,1, то каждая мера вида $\mu = t\mu_1 + (1-t)\,\mu_2$, $0 \leqq t \leqq 1$, будет справа инвариантной и $\mu(S) = 1$. Отсюда следует: *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы* *бикомпактная полугруппа типа P имела одну единственную справа инвариантную меру, для которой $\mu(S) = 1$, имеет вид: существует максимальное правое μ-разложение $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R}$ — группа.* В частности: бикомпактная слева простая полугруппа имеет одну единственную справа инвариантную меру, выполняющую $\mu(S) = 1$, тогда и только тогда, если S есть группа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Th. M. Chaney:* On the existence of invariant means and measures on certain semigroups. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. *61* (1955), Abstract 230, p. 140.

[2] *J. G. Wendel:* Haar measure and the semigroup of measures on a compact group, Proc. Amer. Math. Soc., vol. *5* (1954), 923—929.

[3] *Št. Schwarz:* Poznámka k teórii bikompaktných pologrúp, Mat. fyz. časopis SAV, *5* (1955), 86—89.

[4] *K. Numakura:* On bicompact semigroups, Mathematical Journal of Okayama Univ., Vol. 1 (1952), 99—108.

[5] *A. D. Wallace:* Cohomology, dimension and mobs, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. *3* (1953), 43—55.

[6] *A. D. Wallace:* Inverses in euclidian mobs, Mathematical Journal of Okayama Univ. vol. *3* (1953), 23—28.

[7] *W. G. Rosen:* On invariant means over a compact semigroup, Bull. Amer. Math. Soc., vol. *61* (1955), No 2, Abstract 282, p. 154.

[8] *W. G. Rosen:* On invariant means over topological semigroups, Preliminary report, Bull. Amer. Math. Soc., vol. *61* (1955), No 2, Abstract 283, p. 154.

Summary

ON THE EXISTENCE OF INVARIANT MEASURES ON CERTAIN TYPES OF COMPACT SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received May 11, 1956.)

Let S be a compact Hausdorff semigroup. By a measure of S we shall mean a σ-additive, non-negative, regular set function μ defined on the Borel subsets of S and such that $\mu(S) = 1$. A measure is called right invariant if for every Borel subset $E \subseteq S$ and $a \in S$ for which Ea is also a Borel subset $\mu(Ea) = \mu(E)$ holds.

Let μ be a measure of S. Denote by $C(\mu)$ (the support of μ) the set of all $x \in S$ such that $\mu(U) \neq 0$ for each open set U about x.

Let μ be a right invariant measure of S. Then $R = C(\mu)$ has the following properties: a) R is a closed right ideal of S, b) $Ra = R$ for every $a \in S$, c) for all $a \in S$ for which $(S - R)\, a$ is a Borel subset $\mu[R \cap (S - R)\, a] = 0$ holds.

A compact semigroup is said to be of the type P if for any open subset $E \subseteqq S$ and any $a \in S$ the set Ea is open in S. For instance groups, finite semigroups and (compact) left simple semigroups are of the type P.

Let S be of the type P. We shall say that S admits a right μ-decomposition if it is possible to write $S = R + (S - R)$, where $R \neq \emptyset$ and $S - R$ are right ideals of S, R is closed and $Ra = R$ for all $a \in S$. (We also admit the case $S - R = \emptyset$.) If there exists at least one right μ-decomposition, there exists also such a right μ-decomposition of S where R is a group. Further there exists also a maximal μ-right decomposition, i. e. such a decomposition $S = \mathfrak{R} + (S - \mathfrak{R})$ that for any other right μ-decomposition $S = R + (S - R)$ the relation $R \subseteqq \mathfrak{R}$ holds.

Let S be a (compact) semigroup of the type P. The necessary and sufficient condition that S has a right invariant measure is: S admits at least one right μ-decomposition.

An other criterion which is practically more useful is the following. Let S be a (compact) semigroup of the type P and N its kernel. The necessary and sufficient condition that S has a right invariant measure is the fulfilment of the following conditions: a) N is a minimal left ideal of S, b) $N - (S - N)\, S \neq \emptyset$.

If S has at least one right μ-decomposition then the set $\mathfrak{R}$ from the maximal right μ-decomposition is exactly the set $\mathfrak{R} = N - (S - N)\, S$.

Let $S = R + (S - R)$ be a right μ-decomposition. If R has only a finite number of idempotents then there exists a right invariant measure of S whose support is exactly R.

If S is a compact semigroup of the type P, S has at least one right invariant measure and at least one left invariant measure, then S is a group.

Other properties of compact semigroups having a right invariant measure are given.