Alois Švec

Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 96–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100234

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

CONGRUENCES DE DROITES DANS LES ESPACES RÉGLÉS À CONNEXION PROJECTIVE

ALOIS ŠVEC, Liberec.

(Reçu le 29 avril 1956.)

L'auteur étudie dans l'espace réglé à connexion projective les congruences de droites et leurs correspondances développables.

1. Tout d'abord, je vais expliquer ce que j'entends par *espace réglé à connexion projective:*

Soit donné un domaine O dans l'espace euclidien à quatre dimensions E_4, à chaque point $z \in O$ je fais correspondre un espace projectif à trois dimensios $S_3 = S_3(z)$ et dans celui-ci une droite $p = p(z)$. Soient maintenant z_1, z_2 deux points (qui peuvent d'ailleurs coïncider) du domaine O, alors à chaque arc γ qui les joint correspond une homographie entre les espaces $S_3(z_1)$ et $S_3(z_2)$. Ici le domaine $O \subset E_4$ ne joue qu'un rôle d'ensemble de paramètres et peut être remplacé par n'importe quel domaine pourvu que celui-ci lui soit homéomorphe.

D'une façon analytique je peux procéder comme suit: Je choisis dans chaque espace S_3 une base, c'est-à-dire quatre points analytiques A_1, A_2, A_3, A_4 liés par la condition

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1 \tag{1}$$

d'une telle manière que la droite p passe par A_1, A_2. Ensuite je vais considérer les équations

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{ij}A_j\,, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \Big(\sum_1^4 \omega_{ii} = 0\Big)\,, \tag{2}$$

où ω_{ij} sont pour la base fixée dans chaque $S_3(z)$ des formes de Pfaff en $\mathrm{d}u_1, \ldots, \ldots, \mathrm{d}u_4$, les u_i étant les coordonnées dans E_4. Soit alors γ un arc joignant les deux points z_1, z_2, donné d'une façon paramétrique par

$$u_i = u_i(t)\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,; \quad z_1 = \{u_i(0)\}\,, \quad z_2 = \{u_i(1)\}\,. \tag{3}$$

Soit maintenant pour (3)

$$\omega_{ij} = p_{ij}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

de sorte que le système (2) devient un système d'équations différentielles

$$\frac{dA_i}{dt} = p_{ij}A_j\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,. \tag{5}$$

Soit B_1, B_2, B_3, B_4 la solution de ce système pour $t = 1$, déterminée par les conditions initiales $(A_i)_{t=0} = A_i(z_1)$. Alors l'homographie $KB_i = A_i(z_2)$ est justement l'homographie en question entre $S_3(z_1)$ et $S_3(z_2)$.

Dans le cas général les ω_{ij} sont les formes de Pfaff en $u_1, \ldots, u_4$ (paramètres principaux) et $v_1, \ldots, v_r$ (paramètres secondaires, dont dépend le choix du repère en S_3).

A chaque courbe dans $O \subset E_4$ on peut faire correspondre une surface réglée dans l'espace projectif à trois dimensions et cela d'une manière évidente: la courbe γ étant donnée par (3), la surface réglée est engendrée par la droite $[A_1A_2]$ où $A_1 = A_1(t)$, $A_2 = A_2(t)$ sont des solutions du système (5).

Je désigne par δ le symbole de différentiation pour lequel les paramètres principaux restent constants, ensuite j'écris comme d'habitude $e_{ij} = \omega_{ij}(\delta)$. En vertu du choix fixe de la droite p dans chaque S_3 on a

$$e_{13} = e_{14} = e_{23} = e_{24} = 0\,, \tag{6}$$

d'où

$$[\omega_{ij}\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4] = 0\,, \quad i = 1, 2;\ j = 3, 4\,. \tag{7}$$

Pour des raisons évidentes je vais supposer

$$[\omega_{13}\omega_{14}\omega_{23}\omega_{24}] \neq 0\,. \tag{8}$$

D'une manière analogue au cas d'un espace à connexion projective on peut vérifier *les conditions d'intégrabilité*

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{ik}\omega_{kj}] + R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu}[\omega_{\alpha\mu}\omega_{\beta\nu}]\,, \tag{9}$$

où l'on somme pour $k = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2$; $\mu, \nu = 3, 4$.

2. Je vais étudier *les congruences de droites* dans un espace réglé à connexion projective. Une congruence est évidemment donnée par les équations

$$u_i = u_i(v_1, v_2)\,, \quad i = 1, \ldots, 4\,, \tag{10}$$

où un des déterminants $\dfrac{\partial(u_i, u_j)}{\partial(v_1, v_2)}$ au moins est différent de zéro. Il existe donc de telles fonctions α_i, β_i qu'on a

$$\alpha_1\omega_{13} + \alpha_2\omega_{14} + \alpha_3\omega_{23} + \alpha_4\omega_{24} = 0\,, \ \beta_1\omega_{13} + \beta_2\omega_{14} + \beta_3\omega_{23} + \beta_4\omega_{24} = 0\,, \tag{11}$$

la matrice $\|\alpha_i, \beta_i\|$ ayant le rang 2. Or, toute autre relation existant entre les formes ω_{13}, ω_{14}, ω_{23}, ω_{24} est déjà une conséquence de (11). Alors il existe deux formes ω_1, ω_2, linéairement indépendantes, telles que l'on a

$$\omega_{\alpha\mu} = a^r_{\alpha\mu}\omega_r\,; \quad \alpha = 1, 2;\ \mu = 3, 4; \quad \text{(on somme pour } r = 1, 2) \tag{12}$$

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{13}^1 & a_{14}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \\ a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

ayant le rang 2.

Je vais chercher dans une congruence de droites les *surfaces développables.* Analytiquement cela signifie de trouver de telles fonctions x_1, x_2, λ_1, λ_2 et une telle forme de Pfaff ω que l'on ait

$$(\overline{\mathrm{d}x_1 A_1 + x_2 A_2})_{\omega_1 = \lambda_1\omega,\ \omega_2 = \lambda_2\omega} \equiv 0 \pmod{A_1, A_2}\,. \tag{14}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &x_1[(a_{13}^1 A_3 + a_{14}^1 A_4)\,\lambda_1 + (a_{13}^2 A_3 + a_{14}^2 A_4)\,\lambda_2] + \\ &+ x_2[(a_{23}^2 A_3 + a_{24}^2 A_4)\,\lambda_1 + (a_{23}^2 A_3 + a_{24}^2 A_4)\,\lambda_2] = 0\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1(a_{13}^1\lambda_1 + a_{13}^2\lambda_2) + x_2(a_{23}^1\lambda_1 + a_{23}^2\lambda_2) &= 0\,, \\ x_1(a_{14}^1\lambda_1 + a_{14}^2\lambda_2) + x_2(a_{24}^1\lambda_1 + a_{24}^2\lambda_2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Le point $x_1 A_1 + x_2 A_2$, vérifiant (14) pour un choix convenable de λ_1, λ_2, ω, sera appelé *foyer de la congruence*, sa signification géométrique étant évidemment la même comme dans un espace projectif plan. J'obtiens l'équations des foyers (c'est-à-dire des fonctions x_1, x_2) en éliminant λ_1, λ_2 des équations (15); l'équation ainsi obtenue est quadratique en $x_1 : x_2$, savoir

$$\begin{aligned} &f_1 x_1^2 + 2f_2 x_1 x_2 + f_3 x_2^2 \equiv \\ &\equiv \begin{vmatrix} a_{13}^1 & a_{13}^2 \\ a_{14}^1 & a_{14}^2 \end{vmatrix} x_1^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{13}^1 & a_{23}^2 \\ a_{14}^1 & a_{24}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23}^1 & a_{13}^2 \\ a_{24}^1 & a_{14}^2 \end{vmatrix} \right) x_1 x_2 + \begin{vmatrix} a_{23}^1 & a_{23}^2 \\ a_{24}^1 & a_{24}^2 \end{vmatrix} x_2^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Dans la suite je distingue des cas particuliers.

3. Chaque point de la génératrice $[A_1 A_2]$ de la congruence considérée est un foyer (c'est ce qu'on appelle *congruence planaire*); tous les coefficients de l'équation (16) s'annulent. On a $(\bmod A_1, A_2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &\equiv (a_{13}^1 A_3 + a_{14}^1 A_4)\,\omega_1 + (a_{13}^2 A_3 + a_{14}^2 A_4)\,\omega_2\,, \\ \mathrm{d}A_2 &\equiv (a_{23}^1 A_3 + a_{24}^1 A_4)\,\omega_1 + (a_{23}^2 A_3 + a_{24}^2 A_4)\,\omega_2\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Les expressions $a_{13}^1 A_3 + a_{14}^1 A_4$, $a_{13}^2 A_3 + a_{14}^2 A_4$ sont linéairement dépendantes et l'une d'elles au moins est un point, car autrement on aurait $a_{13}^1 = a_{14}^1 = a_{13}^2 = a_{14}^2 = 0$ et de $f_3 = 0$ il s'ensuiverait que la matrice (13) ait le rang 1. Supposons par exemple que la première expression représente un point, alors un a existe tel que $a_{13}^2 A_3 + a_{14}^2 A_4 = a(a_{13}^1 A_3 + a_{14}^1 A_4)$, je change ensuite le repère et la forme ω_1 de façon que j'aie

$$\mathrm{d}A_1 \equiv (\omega_1 + a\omega_2)(a_{13}^1 A_3 + a_{14}^1 A_4) = \omega_1 A_3$$

c'est-à-dire

$$a_{13}^1 = 1, \quad a_{14}^1 = a_{13}^2 = a_{14}^2 = 0\,. \tag{18}$$

En vertu de $f_2 = 0$ on a $a^2_{24} = 0$, de $f_3 = 0$ il s'ensuit que $a^1_{24} a^2_{23} = 0$. Le seul déterminant de second degré de la matrice M qui puisse être non-nul est M_{13}, de sorte que $M_{13} = a^2_{23} \neq 0$ et $a^1_{24} = 0$. Alors il est possible choisir la forme ω_2 d'une telle manière que $\mathrm{d}A_2 \equiv (a^1_{23}\omega_1 + a^2_{23}\omega_2)\, A_3 = \omega_2 A_3$. On a donc enfin

$$a^2_{23} = 1\,, \quad a^1_{23} = a^1_{24} = a^2_{24} = 0\,. \tag{19}$$

Les équations fondamentales (11) de la congruence planaire peuvent donc être mises sous la forme suivante

$$\omega_{14} = \omega_{24} = 0 \tag{20}$$

et on a $[\omega_{13}\omega_{23}] \neq 0$. Par différentiation extérieure de (20) on obtient

$$[\omega_{13}\omega_{34}] + R^{1323}_{14}[\omega_{13}\omega_{23}] = 0\,, \quad [\omega_{23}\omega_{34}] + R^{1323}_{24}[\omega_{13}\omega_{23}] = 0\,, \tag{21}$$

d'où il s'ensuit

$$\omega_{34} = R^{1323}_{24}\omega_{13} - R^{1323}_{14}\omega_{23}\,. \tag{22}$$

En différentiant de nouveau on obtient

$$\begin{aligned} &[\omega_{13}(\mathrm{d}R^{1323}_{24} + R^{1323}_{24}\overline{\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}} + R^{1323}_{14}\omega_{21})] - \\ &- [\omega_{23}(\mathrm{d}R^{1323}_{14} + R^{1323}_{14}\overline{\omega_{22} + \omega_{44} - 2\omega_{33}} - R^{1323}_{24}\omega_{12})] + \\ &+ (R^{1323}_{34} - R^{1323}_{24}R^{1323}_{13} + R^{1323}_{14}R^{1323}_{23})[\omega_{13}\omega_{23}] = 0\,. \end{aligned} \tag{23}$$

On a

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega_{13}] &= [\omega_{13}(\omega_{33} - \omega_{11})] + [\omega_{12}\omega_{23}] + R^{1323}_{13}[\omega_{13}\omega_{23}]\,, \\ [\mathrm{d}\omega_{23}] &= [\omega_{23}(\omega_{33} - \omega_{22})] + [\omega_{21}\omega_{13}] + R^{1323}_{23}[\omega_{13}\omega_{23}]\,, \\ [\mathrm{d}\omega_{34}] &= [\omega_{34}(\omega_{44} - \omega_{33})] + R^{1323}_{34}[\omega_{13}\omega_{23}]\,, \end{aligned} \tag{24}$$

de sorte qu'en différentiant de nouveau les équations (21) on a

$$[\mathrm{D}R^{1323}_{14}\omega_{13}\omega_{23}] = [\mathrm{D}R^{1323}_{24}\omega_{13}\omega_{23}] = 0\,, \tag{25}$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{D}R^{1323}_{14} &\equiv \mathrm{d}R^{1323}_{14} + R^{1323}_{14}(\omega_{22} + \omega_{44} - 2\omega_{33}) - R^{1323}_{24}\omega_{12} = \\ &= R^{1323}_{14,1}\omega_{13} + R^{1323}_{14,2}\omega_{23}\,, \\ \mathrm{D}R^{1323}_{24} &\equiv \mathrm{d}R^{1323}_{24} + R^{1323}_{24}(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{23}) + R^{1323}_{14}\omega_{21} = \\ &= R^{1323}_{24,1}\omega_{13} + R^{1323}_{24,2}\omega_{23}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Ces résultats joints à (23) donnent *la forme définitive de la condition pour que la congruence* (20) *soit planaire: il faut que l'on ait*

$$R^{1323}_{24,2} + R^{1323}_{14,1} + R^{1323}_{34} - R^{1323}_{24}R^{1323}_{13} + R^{1323}_{14}R^{1323}_{23} = 0\,. \tag{27}$$

Dans un espace plan ($R^{\alpha\mu\beta\nu}_{ij} = R^{\alpha\mu\beta\nu}_{ij,k} = 0$) les congruences planaires sont évidemment formées par les droites des plans.

4. Je vais traiter maintenant le cas des *congruences paraboliques*, c'est-à-dire le cas où sur chaque droite de la congruence il n'y a qu'un seul foyer. Je choisis le repère et les formes ω_i d'une telle manière que le foyer soit A_1, et qu'il soit situé sur la surface développable $\omega_1 = 0$ (c'est-à-dire $x_1 = \lambda_2 = 1$, $x_2 = = \lambda_1 = 0$); il découle de (15) que

$$a_{13}^2 = a_{14}^2 = 0 \,. \tag{28}$$

Je vais distinguer deux cas suivant que $\mathrm{d}A_1 \equiv 0 \pmod{A_1, A_2}$, ou non.

1° On a

$$a_{13}^1 = a_{14}^1 = 0 \,, \tag{29}$$

alors, en raison du rang de la matrice (13), les expressions $a_{23}^1 A_3 + a_{24}^1 A_4$, $a_{23}^2 A_3 + a_{24}^2 A_4$ sont deux points linéairement indépendants, on peut donc choisir le repère d'une telle sorte qu'on ait (mod A_1, A_2)

$$\mathrm{d}A_1 \equiv 0 \,, \quad \mathrm{d}A_2 \equiv \omega_1 A_3 + \omega_2 A_4 \,. \tag{30}$$

Il est donc possible d'écrire les équations (11) sous la forme de

$$\omega_{13} = \omega_{14} = 0 \tag{31}$$

avec la condition $[\omega_{23}\omega_{24}] \neq 0$. Par différentiation extérieure on obtient

$$[\omega_{12}\omega_{23}] + R_{13}^{2324}[\omega_{23}\omega_{24}] = [\omega_{12}\omega_{24}] + R_{14}^{2324}[\omega_{23}\omega_{24}] = 0 \,, \tag{32}$$

d'où

$$\omega_{12} = - R_{14}^{2324}\omega_{23} + R_{13}^{2324}\omega_{24} \tag{33}$$

et par une nouvelle différentiation

$$\begin{aligned} &- [\omega_{23}(\mathrm{d}R_{14}^{2324} + R_{14}^{2324}\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33}} + R_{13}^{2324}\omega_{34})] + \\ &+ [\omega_{24}(\mathrm{d}R_{13}^{2324} + R_{13}^{2324}\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}} + R_{14}^{2324}\omega_{43})] + \\ &+ (R_{12}^{2324} + R_{14}^{2324}R_{23}^{2324} - R_{13}^{2324}R_{24}^{2324})[\omega_{23}\omega_{24}] = 0 \,. \end{aligned} \tag{34}$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega_{23}] &= [\omega_{23}(\omega_{33} - \omega_{22})] + [\omega_{24}\omega_{43}] + R_{23}^{2324}[\omega_{23}\omega_{24}] \,, \\ [\mathrm{d}\omega_{24}] &= [\omega_{24}(\omega_{44} - \omega_{22})] + [\omega_{23}\omega_{34}] + R_{24}^{2324}[\omega_{23}\omega_{24}] \,, \\ [\mathrm{d}\omega_{12}] &= [\omega_{12}(\omega_{22} - \omega_{11})] + R_{12}^{2324}[\omega_{23}\omega_{24}] \,, \end{aligned} \tag{35}$$

par différentiation extérieure des équations (32) on obtient en se servant du lemme de Cartan

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_{14}^{2324} + R_{14}^{2324}(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33}) + R_{13}^{2324}\omega_{34} &= R_{14,1}^{2324}\omega_{23} + R_{14,2}^{2324}\omega_{24} \,, \\ \mathrm{d}R_{13}^{2324} + R_{13}^{2324}(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}) + R_{14}^{2324}\omega_{43} &= R_{13,1}^{2324}\omega_{23} + R_{13,2}^{2324}\omega_{24} \,, \end{aligned} \tag{36}$$

de sorte que *pour la congruence en question on a la condition*

$$R_{12,2}^{2324} + R_{13,1}^{2324} - R_{12}^{2324} + R_{13}^{2324}R_{24}^{2324} - R_{14}^{2324}R_{23}^{2324} = 0 \,. \tag{37}$$

Je vais m'appliquer maintenant à l'étude du cas où *l'espace réglé n'a pas de torsion*, c'est-à-dire où $R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu} = 0$ ($\alpha, \beta, i = 1, 2$; $\mu, \nu, j = 3, 4$). Alors

$$\omega_{12} = 0 \tag{38}$$

et *la condition finie pour la congruence considérée est*

$$R_{12}^{2324} = 0 \,. \tag{37'}$$

Je choisis une certaine droite p_0 de la congruence et je développe, dans l'espace S_3 qui lui correspond, toutes ses surfaces réglées; on voit aisément de (31) et (38) qu'elles se développent en cônes au sommet $A_1 \in p_0$, la congruence est donc *centrale.* Comme une étoile de droites est équivalent à un plan projectif, il est aisé de voir que *l'étude d'une congruence centrale conduit à l'étude d'un plan à connexion projective.* Analytiquement: j'introduis les droites analytiques

$$p_0 = [A_1A_2]\,, \quad p_1 = [A_1A_3]\,, \quad p_2 = [A_1A_4]\,, \tag{39}$$

le connexion est définie par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p_0 &= (\omega_{11} + \omega_{22})\, p_0 + \omega_{23}p_1 + \omega_{24}p_2\,, \\ \mathrm{d}p_1 &= \omega_{32}p_0 + (\omega_{11} + \omega_{33})\, p_1 + \omega_{34}p_2\,, \\ \mathrm{d}p_2 &= \omega_{42}p_0 + \omega_{43}p_1 + (\omega_{11} + \omega_{44})\, p_2\,, \end{aligned} \tag{40}$$

le plan considéré est évidemment sans torsion.

L'étude des congruences considérées dans les espaces à torsion mériterait une attention également.

2° L'expression $a_{13}^1A_3 + a_{14}^1A_4$ représente un point, on peut choisir le repère d'une telle maniere que l'on ait

$$a_{13}^1 = 1\,, \quad a_{14}^1 = 0\,. \tag{41}$$

L'équation (16) devient

$$a_{24}^2x_1x_2 + f_3x_2^2 = 0\,, \tag{42}$$

de l'existence d'un seul foyer A_1 découle

$$a_{24}^2 = 0\,, \tag{43}$$

or le rang de la matrice (13) étant 2, il en résulte que $a_{23}^2 \neq 0$. La forme ω_2 peut alors être choisie d'une telle sorte que $a_{23}^1\omega_1 + a_{23}^2\omega_2 = \omega_2$ d'où

$$a_{23}^1 = 0\,, \quad a_{23}^2 = 1\,. \tag{44}$$

On a $a_{24}^1 \neq 0$, car le cas $a_{24}^1 = 0$ conduirait à une congruence planaire; en choisissant convenablement le repère on peut obtenir

$$a_{24}^1 = 1\,. \tag{45}$$

On a donc enfin

$$\mathrm{d}A_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_1A_3\,, \quad \mathrm{d}A_2 = \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_3 + \omega_1A_4\,, \tag{46}$$

de sorte que les équations fondamentales deviennent

$$\omega_{14} = 0\,, \quad \omega_{13} = \omega_{24} \tag{47}$$

avec la condition $[\omega_{13}\omega_{23}] \neq 0$. Par différentiation extérieure, elles donnent

$$\begin{gathered}[\omega_{13}(\omega_{34} - \omega_{12})] + R_{14}^{1323}[\omega_{13}\omega_{23}] = 0 \,, \\ [\omega_{13}(\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44})] + [\omega_{23}(\omega_{34} + \omega_{12})] + \\ + (R_{24}^{1323} - R_{13}^{1323})[\omega_{13}\omega_{23}] = 0 \,,\end{gathered} \tag{48}$$

d'où en vertu de lemme de Cartan

$$\begin{gathered}\omega_{34} - \omega_{12} = \alpha_1\omega_{13} - R_{14}^{1323}\omega_{23} \,, \\ \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = \alpha_2\omega_{13} + (\alpha_3 - \overline{\tfrac{1}{2}R_{24}^{1323} - R_{13}^{1323}})\,\omega_{23} \,, \\ \omega_{34} + \omega_{12} = (\alpha_3 + \overline{\tfrac{1}{2}R_{24}^{1323} - R_{13}^{1323}})\,\omega_{13} + \alpha_4\omega_{23} \,.\end{gathered} \tag{49}$$

Les congruences paraboliques dépendent d'une fonction de deux variables.

Sur chaque droite de la congruence, il n'y a donc qu'un seul foyer A_1. Je considère (en le supposant à deux dimensions) l'ensemble de tous les foyers A_1, dont chacun est immergé dans l'espace S_3 correspondant; si je considère la connexion naturelle entre ces S_3, donnée par la connexion de l'espace réglé, je peux dire que les foyers engendrent ce qu'on appelle une *variété de König* (voir R. König, *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresb. D. M. Verein, *28*, 1919, 213—228; J. A. Schouten, *Sur les connexions conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König*, CR 178, 1924, 2044-2046), je vais l'appeler *surface focale.*

Le condision nécessaire et suffisante pour que les foyers engendrent une surface focale est évidemment $[\omega_{12}\omega_{13}] \neq 0$, c'est-à-dire

$$\alpha_4 + R_{14}^{1323} \neq 0 \,. \tag{50}$$

Le plan tangent de la surface focale est $[A_1A_2A_3]$, les asymptotiques sont évidemment

$$\omega_{13}(\omega_{12} + \omega_{34}) = 0 \,, \tag{51}$$

de sorte que *les droites de la congruence parabolique sont les tangentes asymptotiques de la surface focale.* La seconde couche de courbes asymptotiques est donné par l'équation

$$(\alpha_3 + \overline{\tfrac{1}{2}R_{24}^{1323} - R_{13}^{1323}})\,\omega_{13} + \alpha_4\omega_{23} = 0 \,. \tag{52}$$

Je ne vais pas considérer spécialement le cas où $[\omega_{12}\omega_{13}] = 0$, car tout le cas des congruences paraboliques mériterait une étude plus détaillée.

5. Je passe enfin à l'étude propre des *congruences nonparaboliques*, où sur chaque droite de la congruence il y a deux foyers; soit A_i le foyer pour lequel $\omega_i = 0$ est la surface développable, $i = 1, 2$. Des équations (15) résulte

$$a_{13}^2 = a_{14}^2 = a_{23}^1 = a_{24}^1 = 0 \,, \tag{53}$$

de sorte que l'on a (mod A_1, A_2)

$$\mathrm{d}A_1 \equiv \omega_1(a_{13}^1A_3 + a_{14}^1A_4) \,, \quad \mathrm{d}A_2 \equiv \omega_2(a_{23}^2A_3 + a_{24}^2A_4) \,, \tag{54}$$

ici $a^1_{13}A_3 + a^1_{14}A_4$, $a^2_{23}A_3 + a^2_{24}A_4$ sont deux points linéairement indépendants, on peut donc choisir le repère d'une telle manière que

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_1 A_3 \,, \\ dA_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 \qquad\quad + \omega_2 A_4 \,, \end{aligned} \tag{55}$$

où

$$\omega_{13} = \omega_1 \,, \quad \omega_{24} = \omega_2 \,, \quad [\omega_1\omega_2] \neq 0 \,. \tag{56}$$

Les équations fondamentales sont

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0 \,, \tag{57}$$

on en obtient par différentiation extérieure

$$\begin{aligned} [\omega_{12}\omega_2] + [\omega_1\omega_{34}] + 2h[\omega_1\omega_2] &= 0 \,, \\ [\omega_{21}\omega_1] + [\omega_2\omega_{43}] - 2k[\omega_1\omega_2] &= 0 \,, \end{aligned} \tag{58}$$

où

$$h = \tfrac{1}{2}R^{1324}_{14} \,, \quad k = -\tfrac{1}{2}R^{1324}_{23} \,. \tag{59}$$

Partout dans la suite, je vais écrire afin de simplier $R^{1324}_{ij} = R_{ij}$, $R_{13} = R_1$, $R_{24} = R_2$.

En se servant du lemme de Cartan on obtient de (58)

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= (a_0 - h)\,\omega_1 + a_1\omega_2 \,, \quad & \omega_{34} &= a_2\omega_1 - (a_0 + h)\,\omega_2 \,, \\ \omega_{21} &= b_1\omega_1 - (b_0 + k)\,\omega_2 \,, \quad & \omega_{43} &= (b_0 - k)\,\omega_1 + b_2\omega_2 \,. \end{aligned} \tag{60}$$

On a

$$\begin{aligned} [d\omega_1] &= [\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] + R_1[\omega_1\omega_2] \,, \\ [d\omega_2] &= [\omega_2(\omega_{44} - \omega_{22})] + R_2[\omega_1\omega_2] \,, \\ [d\omega_{12}] &= [\omega_{12}(\omega_{22} - \omega_{11})] + [\omega_1\omega_{32}] + R_{12}[\omega_1\omega_2] \,, \\ [d\omega_{21}] &= [\omega_{21}(\omega_{11} - \omega_{22})] + [\omega_2\omega_{41}] + R_{21}[\omega_1\omega_2] \,, \\ [d\omega_{34}] &= [\omega_{34}(\omega_{44} - \omega_{33})] + [\omega_{32}\omega_2] + R_{34}[\omega_1\omega_2] \,, \\ [d\omega_{43}] &= [\omega_{43}(\omega_{33} - \omega_{44})] + [\omega_{41}\omega_1] + R_{43}[\omega_1\omega_2] \,, \end{aligned} \tag{61}$$

par différentiation extérieure des équations (58) résulte

$$[(dh + h\overline{\omega_{22} - \omega_{33}})\,\omega_1\omega_2] = [(dk + k\overline{\omega_{11} - \omega_{44}})\,\omega_1\omega_2] = 0 \,, \tag{62}$$

il existe donc des dérivées „covariantes" h_i, k_i telles que

$$dh + h(\omega_{22} - \omega_{33}) = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 \,, \quad dk + k(\omega_{11} - \omega_{44}) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \,. \tag{63}$$

Des équations (60) on obtient par différentiation extérieure et en se servant de (63)

$$\begin{aligned} &[\omega_1(da_0 + a_0\overline{\omega_{22} - \omega_{33}} + \omega_{32})] + [\omega_2(da_1 + a_1\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}})] + \\ &\qquad + (R_{12} - \overline{a_0} - hR_1 - a_1R_2 - h_2)[\omega_1\omega_2] = 0 \,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1(\mathrm{d}a_2 + a_2\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33})] - [\omega_2(\mathrm{d}a_0 + a_0\omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{32})] + \\
&\qquad + (R_{34} - a_2R_1 + a_0 + hR_2 + h_1)[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\
&[\omega_1(\mathrm{d}b_1 + b_1 2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})] - [\omega_2(\mathrm{d}b_0 + b_0\omega_{11} - \omega_{44} - \omega_{41})] + \\
&\qquad + (R_{21} - b_1R_1 + b_0 + kR_2 + k_1)[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\
&[\omega_1(\mathrm{d}b_0 + b_0\omega_{11} - \omega_{44} - \omega_{41})] + [\omega_2(\mathrm{d}b_2 + b_2\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})] + \\
&\qquad + (R_{43} - b_0 - kR_1 - b_2R_2 - k_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,
\end{aligned}
\tag{64}
$$

de sorte qu'on a

$$
\delta a_0 = a_0(e_{33} - e_{22}) - e_{32}\,, \quad \delta b_0 = b_0(e_{44} - e_{11}) + e_{41}\,, \tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta a_1 &= a_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22})\,, \quad \delta b_1 = b_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11})\,, \\
\delta a_2 &= a_2(2e_{33} - e_{11} - e_{44})\,, \quad \delta b_2 = b_2(2e_{44} - e_{22} - e_{33})\,.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

En vertu de (65) on peut faire

$$
a_0 = b_0 = 0\,, \tag{67}
$$

et par conséquent

$$
e_{32} = e_{41} = 0\,. \tag{68}
$$

Les expressions a_1, a_2, b_1, b_2 sont des invariants relatifs, leur annulement a une signification géométrique.

Il est évident que si l'on choisit un point B sur chaque droite de la congruence considérée, alors l'ensemble de tous ces points B avec les espaces S_3 qui les contiennent engendre par la connexion fondamentale de l'espace reglé une variété de König; comme cela a été déjà dit pendant l'étude des congruences paraboliques.

6. Je vais introduire ensuite la notion *d'espace duel à l'espace réglé à connexion projective* donné; je considère tout espace S_3, figurant dans la définition de l'espace réglé donné, comme un espace duel Σ_3 où la droite π est déterminée par un faisceau de plans ayant pour axe la droite $\mathrm{p} \in S_3$ de l'espace réglé; l'homographie entre deux espaces Σ_3, correspondant à une certaine courbe γ, est la même comme celle existant entre les espaces duels correspondants S_3. À une congruence L de droite dans l'espace réglé il correspond dans l'espace duel évidemment la congruence L^*, c'est-à-dire la *dualisation* de la congruence L. Si j'introduis, comme d'habitude, les plans analytiques

$$
E_1 = [A_2A_3A_4]\,, \quad E_2 = -[A_1A_3A_4]\,, \quad E_3 = [A_1A_2A_4]\,, \quad E_4 = -[A_1A_2A_3]\,, \tag{69}
$$

j'obtiens pour la congruence L^* engendrée par les droites $[E_3E_4]$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_1 &= -\,\omega_{11}E_1 - \omega_{21}E_2 - \omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4\,, \\
\mathrm{d}E_2 &= -\,\omega_{12}E_1 - \omega_{22}E_2 - \omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4\,, \\
\mathrm{d}E_3 &= -\,\omega_1E_1 - \omega_{33}E_3 - \omega_{43}E_4\,, \quad \mathrm{d}E_4 = -\,\omega_2E_2 - \omega_{34}E_3 - \omega_{44}E_4\,.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

De là on voit aisément que la congruence L^* est une congruence nonparabolique qui est en transformation développable avec la congruence L. Ses foyers sont

E_3, E_4. *J'oriente* la congruence L en déclarant A_1 (A_2) premier (second) foyer de sorte que E_3 (E_4) est le premier (second) plan focal.

La condition nécessaire et suffisante pour que le premier (second) foyer décrive une surface est que $a_1 \neq 0$ ($b_1 \neq 0$); la condition nécessaire et suffisante pour que le premier (second) plan focal décrive une surface (duelle) est que $b_2 \neq 0$ ($a_2 \neq 0$).

7. Je vais traiter le soi-disant cas général où $a_1 a_2 b_1 b_2 \neq 0$. Les asymptotiques des surfaces focales (A_1), (A_2) sont

$$\Gamma_1 \equiv a_2\omega_1^2 - 2h\omega_1\omega_2 + a_1\omega_2^2 = 0\,, \tag{71}$$

$$\Gamma_2 \equiv b_1\omega_1^2 - 2k\omega_1\omega_2 + b_2\omega_2^2 = 0\,, \tag{72}$$

les asymptotiques des surfaces focales (E_3), (E_4) de la congruence duelle sont alors (72) et (71). En vertu de (63) on a

$$\delta h = h(e_{33} - e_{22})\,, \quad \delta k = k(e_{44} - e_{11})\,, \tag{73}$$

de $(61_{1,2})$ découle

$$\delta\omega_1 = (e_{11} - e_{33})\,\omega_1\,, \quad \delta\omega_2 = (e_{22} - e_{44})\,\omega_2\,. \tag{74}$$

Les *invariants fondamenteux de la congruence* sont alors

$$I = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}\,, \tag{75}$$

$$I_1 = \frac{h^2}{a_1 a_2}\,, \quad I_2 = \frac{k^2}{b_1 b_2}\,, \tag{76}$$

les *formes fondamentales de la congruence* sont

$$\varphi = a_1 b_1 \omega_1\omega_2\,, \quad \varphi^* = a_2 b_2 \omega_1\omega_2\,, \tag{77}$$

$$F_1 = a_1 b_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1}\,, \quad F_2 = a_2 b_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_2}\,, \tag{78}$$

liées par les relations

$$\varphi\varphi^* = F_1 F_2\,, \tag{79}$$

$$\varphi = I\varphi^*\,. \tag{80}$$

La forme φ (ou φ^*, ou F_1, ou F_2) sera appelée *forme ponctuelle* (ou *planaire*, ou *première focale*, ou *seconde focale* respectivement). L'invariant I est l'*invariant de Wälsch*, les invariants I_1, I_2 sont des *invariants de torsion de* 1ère ou 2de *espèce* respectivement. Leur signification se fera voir dans la suite.

8. Je vais étudier maintenant deux problèmes d'existence: je vais trouver *le degré de généralité des congruences dont les invariants fondamenteux* (75), (76) *sont liés par une ou deux relations données.* Dans ce but je pose

$$\omega_1 = \mathrm{d}u\,, \quad \omega_2 = \mathrm{d}v \tag{81}$$

d'où

$$[\mathrm{d}u(\omega_{33} - \omega_{11})] + R_1[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = [\mathrm{d}v(w_{44} - \omega_{22})] + R_2[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0 \tag{82}$$

et

$$\omega_{33} - \omega_{11} = z_1\,\mathrm{d}u - R_1\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_{44} - \omega_{22} = R_2\,\mathrm{d}u + z_2\,\mathrm{d}v\,. \tag{83}$$

Soient

$$\Phi_i(I, I_1, I_2, u, v) = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{84}$$

les relations en question; en les différentiant j'obtiens

$${}^i\lambda_1\,\mathrm{d}I + {}^i\lambda_2\,\mathrm{d}I_1 + {}^i\lambda_3\,\mathrm{d}I_2 + {}^i\lambda_4\,\mathrm{d}u + {}^i\lambda_5\,\mathrm{d}v = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{85}$$

la matrice $\|{}^i\lambda_1, {}^i\lambda_2, {}^i\lambda_3\|$ ayant le rang 2. J'introduis la notation

$$\begin{aligned} \mathrm{D}a_1 &= \mathrm{d}a_1 + a_1(\omega_{22} - \omega_{11})\,, \quad & \mathrm{D}a_2 &= \mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{44} - \omega_{33})\,, \\ \mathrm{D}b_1 &= \mathrm{d}b_1 + b_1(\omega_{11} - \omega_{22})\,, \quad & \mathrm{D}b_2 &= \mathrm{d}b_2 + b_2(\omega_{33} - \omega_{44})\,, \end{aligned} \tag{86}$$

alors en vertu de (81), (83) et (67) les équations (64) deviennent

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}u\,\omega_{32}] + [\mathrm{d}v\,\mathrm{D}a_1] + \nu_1[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] &= 0\,, \\ [\mathrm{d}u\,\mathrm{D}a_2] - [\mathrm{d}v\,\omega_{32}] + \nu_2[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] &= 0\,, \\ [\mathrm{d}u\,\mathrm{D}b_1] + [\mathrm{d}v\,\omega_{41}] + \nu_3[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] &= 0\,, \\ -[\mathrm{d}u\,\omega_{41}] + [\mathrm{d}v\,\mathrm{D}b_2] + \nu_4[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] &= 0\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Ensuite on trouve par un calcul direct

$$\mathrm{d}I = \frac{a_1}{a_2b_2}\,\mathrm{D}b_1 + \frac{b_1}{a_2b_2}\,\mathrm{D}a_1 - \frac{a_1b_1}{a_2^2b_2}\,\mathrm{D}a_2 - \frac{a_1b_1}{a_2b_2^2}\,\mathrm{D}b_2\,, \tag{88}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I_1 = &-\frac{h^2}{a_1^2a_2}\,\mathrm{D}a_1 - \frac{h^2}{a_1a_2^2}\,\mathrm{D}a_2 + \left(2\,\frac{hh_1}{a_1a_2} + \overline{I_1z_1 + R_2}\right)\mathrm{d}u + \\ &+ \left(2\,\frac{hh_2}{a_1a_2} + \overline{I_1z_2 - R_1}\right)\mathrm{d}v\,, \\ \mathrm{d}I_2 = &-\frac{k^2}{b_1^2b_2}\,\mathrm{D}b_1 - \frac{k^2}{b_1b_2^2}\,\mathrm{D}b_2 + \left(2\,\frac{kk_1}{b_1b_2} + \overline{I_2z_1 + R_2}\right)\mathrm{d}u + \\ &+ \left(2\,\frac{kk_2}{b_1b_2} + \overline{I_2z_2 - R_1}\right)\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{89}$$

de sorte que (85) implique

$$\begin{aligned} &\left({}^i\lambda_1\,\frac{b_1}{a_2b_2} - {}^i\lambda_2\,\frac{h^2}{a_1^2a_2}\right)\mathrm{D}a_1 - \left({}^i\lambda_1\,\frac{a_1b_1}{a_2^2b_2} + {}^i\lambda_2\,\frac{h^2}{a_1a_2^2}\right)\mathrm{D}a_2 + \\ &+ \left({}^i\lambda_1\,\frac{a_1}{a_2b_2} - {}^i\lambda_3\,\frac{k^2}{b_1^2b_2}\right)\mathrm{D}b_1 - \left({}^i\lambda_1\,\frac{a_1b_1}{a_2b_2^2} + {}^i\lambda_3\,\frac{k^2}{b_1b_2^2}\right)\mathrm{D}b_2 + \\ &+ {}^i\mu_5\,\mathrm{d}u + {}^i\mu_6\,\mathrm{d}v = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

ce qui peut s'écrire aussi sous la forme suivante

$${}^i\mu_1\,\mathrm{D}a_1 + {}^i\mu_2\,\mathrm{D}a_2 + {}^i\mu_3\,\mathrm{D}b_1 + {}^i\mu_4\,\mathrm{D}b_2 + {}^i\mu_5\,\mathrm{d}u + {}^i\mu_6\,\mathrm{d}v = 0, i = 1, 2. \tag{91}$$

La déterminant de la matrice polaire aux colonnes correspondant aux formes ω_{32}, ω_{41}, Da_1, Da_2, Db_1, Db_2 est

$$\begin{vmatrix} du & 0 & dv & 0 & 0 & 0 \\ -dv & 0 & 0 & du & 0 & 0 \\ 0 & dv & 0 & 0 & du & 0 \\ 0 & -du & 0 & 0 & 0 & dv \\ 0 & 0 & {}^1\mu_1 & {}^1\mu_2 & {}^1\mu_3 & {}^1\mu_4 \\ 0 & 0 & {}^2\mu_1 & {}^2\mu_2 & {}^2\mu_3 & {}^2\mu_4 \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{92}$$

on voit donc aisément que *les congruences dont les invariants* (75), (76) *vérifient une seule relation dépendent d'une fonction de deux variables et les congruences dont les invariants sont liés par deux relations indépendantes dépendent de six fonctions d'une variable.*

Les surfaces développables forment sur les surfaces focales le réseau

$$\omega_1\omega_2 = 0\,. \tag{93}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques sur la première (seconde) surface focale forment le réseau harmoniquement conjugué au réseau (93) *est évidemment*

$$I_1 = 0 \quad (I_2 = 0)\,. \tag{94}$$

De là résulte le rôle des invariants relatifs h, k, n'apparaissant pas dans les espaces plans.

9. Les relations (73), (74), (66) rendent possible l'introduction suivante d'*invariants des directions dans la congruence*:

$$\dot{i}_1 = \frac{h\omega_1}{a_1\omega_2}\,, \quad \dot{i}_2 = \frac{k\omega_2}{b_1\omega_1}\,, \tag{95}$$

$$\dot{i}_1^* = \frac{k\omega_1}{b_2\omega_2}\,, \quad \dot{i}_2^* = \frac{h\omega_2}{a_2\omega_1} \tag{96}$$

de sorte qu'on a

$$I_1 = \dot{i}_1\dot{i}_2^*\,, \quad I_2 = \dot{i}_2\dot{i}_1^* \tag{97}$$

et dans le cas où $hk \neq 0$

$$I = \frac{\dot{i}_1^*\dot{i}_2^*}{\dot{i}_1\dot{i}_2}\,. \tag{98}$$

Il est facile d'en trouver la signification géométrique. Il est possible d'introduire dans la congruence L quatre couches de surfaces réglées $\Lambda_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ d'une telle manière que la couche $\Lambda_{ij} = 0$ découpe sur la i-ème surface focale les polaires de la couche $\omega_j = 0$ par rapport aux asymptotiques. Les équations des couches sont

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &\equiv h\omega_1 - a_1\omega_2 = 0\,, & \Lambda_{12} &\equiv a_2\omega_1 - h\omega_2 = 0\,, \\ \Lambda_{21} &\equiv k\omega_1 - b_2\omega_2 = 0\,, & \Lambda_{22} &\equiv b_1\omega_1 - k\omega_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Soit donnée une couche Λ ($\omega_1 = \psi_1\omega$, $\omega_2 = \psi_2\omega$), alors les birapports D_{ij} des couches $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, Λ et $\Lambda_{ij} = 0$ sont

$$D_{11} = i_1 , \quad D_{12} = i_2^{*-1} , \quad D_{21} = i_1^* , \quad D_{22} = i_2^{-1} . \tag{100}$$

J'appelle *formes ponctuelles* (*planaires*) *de* 1ère (2de) *espèce* les formes i_r (i_s^*); ces formes sont identiquement nulles si les invariants de torsion s'annulent, c'est par exemple le cas des congruences de droites dans les espaces plans.

De (97) résulte la signification géométrique des invariants de torsion.

10. Je vais considérer une congruence L dont le repère est spécialisé de sorte que (57), (60) et (67) soient vérifiées et une autre congruence L' avec le repère semblablement spécialisé de sorte que l'on ait

$$\omega'_{14} = \omega'_{23} = 0 , \tag{101}$$

$$\begin{aligned} \omega'_{12} &= -h'\omega'_1 + a'_1\omega'_2 , & \omega'_{21} &= b'_1\omega'_1 - k'\omega'_2 , \\ \omega'_{34} &= a'_2\omega'_1 - h'\omega'_2 , & \omega'_{43} &= -k'\omega'_1 + b'_2\omega'_2 ; \end{aligned} \tag{102}$$

la congruence L' soit en *transformation développable* avec la congruence L, je peux l'exprimer par

$$\tau_{13} = \tau_{24} = 0 , \tag{103}$$

en posant

$$\omega'_{ij} = \omega_{ij} + \tau_{ij} , \tag{104}$$

$$R'_{ij} = R_{ij} + S_{ij} , \quad R'_i = R_i + S_i . \tag{105}$$

Par différentiation extérieure j'obtiens de (103)

$$[\omega_1(\tau_{33} - \tau_{11})] + S_1[\omega_1\omega_2] = [\omega_2(\tau_{44} - \tau_{22})] + S_2[\omega_1\omega_2] = 0 \tag{106}$$

et en vertu du lemme de Cartan

$$\tau_{33} - \tau_{11} = z_1\omega_1 - S_1\omega_2 , \quad \tau_{44} - \tau_{22} = S_2\omega_1 + z_2\omega_2 . \tag{107}$$

Je vais montrer maintenant la signification géométrique de l'égalité des formes ponctuelles, ou planaires, de la 1ère ou 2de espèce, des congruences L et L'. Dans ce but, je calcule d'abord l'homographie K réalisant un contact analytique d'ordre un de la correspondance $L \to L'$ entre les deux congruences pour un couple de droites se correspondant respectivement; K est alors, d'une façon bien évidente, une homographie entre les espaces S_3, S'_3 respectifs. Comme les foyers des deux congruences se correspondent par rapport à cette homographie tangente, comme on l'appelle, K vérifie nécessairement

$$\begin{aligned} KA'_1 &= \varrho A_1 , \quad KA'_2 = \varrho^{-1}A_2 , \\ KA'_3 &= \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3 + \alpha_{34}A_4 , \\ KA'_4 &= \alpha_{41}A_1 + \alpha_{42}A_2 + \alpha_{43}A_3 + \alpha_{44}A_4 \end{aligned} \tag{108}$$

et l'on a

$$K[A'_1A'_2] = [A_1A_2] . \tag{109}$$

De

$$d[A_1A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] - \omega_1[A_2A_3] + \omega_2[A_1A_4] \tag{110}$$

et d'une expression analogue valable pour L', il résulte pour K nécessairement

$$\alpha_{34} = \alpha_{43} = 0\,, \quad \alpha_{33} = \varrho\,, \quad \alpha_{44} = \varrho^{-1} \tag{111}$$

et

$$K\, d[A_1'A_2'] = d[A_1A_2] + (\tau_{11} + \tau_{22} + \varrho^{-1}\alpha_{31}\omega_1 + \varrho\alpha_{42}\omega_2)[A_1A_2]\,. \tag{112}$$

Pour l'homographie (108) + (111) on a

$$\begin{gathered} KE_3' = \varrho^{-1}E_3\,, \quad KE_4' = \varrho E_4\,, \\ KE_1' = -\varrho^{-2}\alpha_{31}E_3 - \alpha_{41}E_4 + \varrho^{-1}E_1\,, \quad KE_2' = -\alpha_{32}E_3 - \varrho^2\alpha_{42}E_4 + \varrho E_2\,, \end{gathered} \tag{113}$$

de sorte que K réalise également un contact analytique d'ordre un de la correspondance $L^* \to L'^*$ entre les deux dualisations. Les homographies considérées seront appelées dans la suite *homographies tangentes.*

La relation

$$\alpha_{32} = 0 \quad (\text{ou } \alpha_{41} = 0) \tag{114}$$

caractérise évidemment les homographies faisant correspondre la tangente $[A_1A_3]$ (ou bien $[A_2A_4]$ resp.) de la couche $\Lambda_{11} = 0$ (ou bien $\Lambda_{22} = 0$ resp.) à une tangente analogue de la congruence L'; d'une façon duelle la relation (114) caractérise les homographies tangentes faisant correspondre la tangente $[E_4E_2]$ (ou $[E_3E_1]$ resp.) de la couche $\Lambda_{12} = 0$ (ou $\Lambda_{21} = 0$) à une tangente analogue de la congruence L'. J'appelle homographie tangente vérifiant (114_1) (ou 114_2) resp. *homographie demicanonique de* 1-ère (2-de) *espèce*; une homographie vérifiant (114_1) et (114_2) à la fois sera appelée *demicanonique* (tout court).

Pour une homographie demicanonique de la première espèce on a

$$\begin{aligned} K\, dA_1' = \varrho\, dA_1 &+ (\varrho\tau_{11} + \alpha_{31}\omega_1)\, A_1 + \\ &+ (\overline{\varrho h - \varrho^{-1}h'}\, \omega_1 - \overline{\varrho a_1 - \varrho^{-1}a_1'}\, \omega_2)\, A_2\,, \end{aligned} \tag{115}$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homographie demicanonique de la première espèce realisant un contact analytique de premier ordre de la correspondance $(A_1) \to (A_1')$ entre les premières surfaces focales des congruences L, L', est l'existence d'une telle fonction ϱ que l'on ait

$$h' = \varrho^2 h\,, \quad a_1' = \varrho^2 a_1 \tag{116}$$

c'est-à-dire

$$\frac{h'}{a_1'} = \frac{h}{a_1}\,, \quad \text{ou bien} \quad i_1' = i_1\,. \tag{117}$$

On peut trouver d'une manière analogue la signification géométrique de l'égalité des formes i_2, i_1^*, i_2^* des deux congruences.

Pour une homographie demicanonique on a (115) et encore

$$K\,\mathrm{d}A_2' = \varrho^{-1}\,\mathrm{d}A_2 + (\varrho^{-1}\tau_{22} + \alpha_{42}\omega_2)\,A_2 + (\overline{\varrho b_1' - \varrho^{-1}b_1\omega_1} - \overline{\varrho k' - \varrho^{-1}k\omega_2})\,A_1\,, \tag{118}$$

$$K\,\mathrm{d}E_3' = \varrho^{-1}\,\mathrm{d}E_3 + (\varrho^{-2}\alpha_{31}\,\omega_1 - \varrho^{-1}\tau_{33})\,E_3 + (\overline{\varrho k' - \varrho^{-1}k\omega_1} - \overline{\varrho b_2' - \varrho^{-1}b_2\omega_2})\,E_4\,, \tag{119}$$

$$K\,\mathrm{d}E_4' = \varrho\,\mathrm{d}E_4 + (\varrho^2\alpha_{42}\omega_2 - \varrho\tau_{44})\,E_4 + (\overline{\varrho a_2 - \varrho^{-1}a_2'\omega_1} - \overline{\varrho h - \varrho^{-1}h'\omega_2})\,E_3\,.$$

En partant de ces équations et de (115) on trouve aisément la signification géometrique de l'égalité des formes ponctuelles, planaires, ou focales des deux congruences.

Il est possible d'introduire une nouvelle forme invariante de la congruence, savoir

$$T = i_1 i_2 \varphi = i_1^* i_2^* \varphi^* = hk\omega_1\omega_2\,, \tag{120}$$

que je vais appeler *forme torsale.* Je vais faire voir une des significations géométrique de l'égalité $T \equiv T'$ des formes torsales de congruences L et L'.

Les surfaces développables de la congruence L déterminent sur ses surfaces focales le réseau $\omega_1\omega_2 = 0$ qui se coupe par exemple sur la première surface focale (A_1) de la couche principale, $\omega_1 = 0$, dont les tangentes sont les droites de la congruence, et de la couche secondaire $\omega_2 = 0$. *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L' en transformation developpable aient la même forme torsale est que pour tout couple de droites qui se correspondent mutuellement, il existe une homographie demicanonique réalisant un contact analytique de premier ordre des courbes des couches secondaires passant par les foyers des droites considérées*; cet énoncé s'ensuit aisément de (115) et (118).

11. Je vais passer enfin à la considération d'un des plus importants objets de mon étude — à savoir: *déformation projective de second ordre des congruences de droites.* Si les congruences L et L' sont en déformation de second ordre, il existe pour chaque couple de droites qui se correspondent l'une à l'autre, de l'homographie (108) + (111) vérifiant (109), (112) et

$$K\,\mathrm{d}^2[A_1'A_2'] = \mathrm{d}^2[A_1A_2] + 2(\tau_{11} + \tau_{22} + \varrho^{-1}\alpha_{31}\omega_1 + \varrho\alpha_{42}\omega_2)\,\mathrm{d}[A_1A_2] + \\ + (\,.\,)[A_1A_2]\,. \tag{121}$$

Par un calcul direct on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2[A_1A_2] = {} & (\,.\,)[A_1A_2] + (b_2\omega_2^2 - b_1\omega_1^2)[A_1A_3] + (a_1\omega_2^2 - a_2\omega_1^2)[A_2A_4] + \\ & + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}})[A_1A_4] - \\ & - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}})[A_2A_3] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4] \end{aligned} \tag{122}$$

de sorte qu'en vertu de (107) on a

$$\begin{aligned} K\,\mathrm{d}^2[A_1'A_2'] = {} & \mathrm{d}^2[A_1A_2] + 2(\tau_{11} + \tau_{22} + \varrho^{-1}\alpha_{31}\omega_1 + \varrho\alpha_{42}\omega_2)\,\mathrm{d}[A_1A_2] + \\ & + (\,.\,)[A_1A_2] + \Phi_{13}[A_1A_3] + \Phi_{24}[A_2A_4] + \Phi_{14}[A_1A_4] + \Phi_{23}[A_2A_3] \end{aligned} \tag{123}$$

où

$$
\begin{aligned}
\Phi_{13} &= (b_1 - \varrho^2 b_1')\,\omega_1^2 - 2\varrho\alpha_{41}\omega_1\omega_2 + (\varrho^2 b_2' - b_2)\,\omega_2^2\,,\\
\Phi_{24} &= (a_2 - \varrho^{-2} a_2')\,\omega_1^2 + 2\varrho^{-1}\alpha_{32}\omega_1\omega_2 + (\varrho^{-2} a_1' - a_1)\,\omega_2^2\,,
\end{aligned}
\tag{124}
$$

$$
\Phi_{14} = S_2\omega_1\omega_2 + (z_2 - 2\varrho\alpha_{42})\,\omega_2^2\,,\quad \Phi_{23} = (2\varrho^{-1}\alpha_{31} - z_1)\,\omega_1^2 + S_1\omega_1\omega_2\,. \tag{125}
$$

Comme la condition nécessaire et suffisante pour que L et L' soient en déformation projective de second ordre est l'existence de $\varrho \neq 0$, $\alpha_{31}\,\alpha_{32}, \alpha_{41}, \alpha_{42}$ vérifiant $\Phi_{13} = \Phi_{24} = \Phi_{14} = \Phi_{23} = 0$; je trouve en tenant compte de la possibilité de choisir

$$
\alpha_{32} = \alpha_{41} = 0\,,\quad \alpha_{31} = \tfrac{1}{2}\varrho z_1\,,\quad \alpha_{42} = \tfrac{1}{2}\varrho^{-1} z_2 \tag{126}
$$

que *les congruences L et L' sont en déformation projective de second ordre si et seulement si l'on a*

$$
S_1 = S_2 = 0 \tag{127}
$$

et qu'il existe une fonction $\varrho \neq 0$ vérifiant

$$
a_1 = \varrho^{-2} a_1'\,,\quad a_2 = \varrho^{-2} a_2'\,,\quad b_1 = \varrho^2 b_1'\,,\quad b_2 = \varrho^2 b_2'\,. \tag{128}
$$

L'homographie réalisant la déformation projective est nécessairement demi-canonique; elle est évidemment unique et je peux l'appeler *canonique.*

Pour les congruences L, L' en déformation projective on a

$$
\varphi = \varphi'\,,\quad \varphi^* = \varphi^{*\prime}\,,\quad F_1 = F_1'\,,\quad F_2 = F_2'\,. \tag{129}
$$

Il est intéressant de signaler que l'étude de la déformation projective ne fait pas intervenir les invariants relatifs h, k avec les formes torsales qui y sont attachées, mais on obtient les relations (127), vérifiées automatiquement dans les espaces réglés plans.

Comme deux congruences L, L' en correspondance développable dépendent de quatre fonctions de deux variables et que les équations (127), (128) donnent $2 + 3 = 5$ conditions simples pour la déformation projective de second ordre, on peut en conclure que, d'une façon générale, dans deux espaces réglés à connexion projective P, P' il n'existe pas de congruences $L \subset P$, $L' \subset P'$ qui soient en déformation projective de second ordre. Aussi peut-on considérer comme résolue — au sens négatif — la question de savoir si une congruence dans un espace réglé à connexion projective est en déformation projective de second ordre avec une congruence d'un espace réglé plan, donc la question à laquelle, pour le cas des surfaces dans les espaces à connexion projective, M. Luigi Muracchini a pu répondre par l'affirmative dans son travail *Sulla applicabilità proiettiva delle superficie negli spazi à connessione proiettiva à tre dimensioni* (Чехосл. мат. журнал 5 (*80*), 1955, 274—288).

Or l'étude du problème considéré ne se trouve par là nullement achevée, on peut s'attendre au contraire à ce que les résultats que je viens d'établir pourront servir de base à une théorie plus détaillée des transformations développables dont le point de départ seront les équations (103), (106), (107). Il séra également intéressant d'étudier la question de savoir si les congruences de certains espaces spéciaux seront déformables en congruences d'un espace plan; une attention particulière exigera alors l'espace réglé sans torsion pour lequel on a $R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu} = 0$ $(i, \alpha, \beta = 1, 2;\ j, \mu, \nu = 3, 4)$; les équations (127) étant alors vérifiées automatiquement.

12. La notion de déformation projective de second ordre des congruences de droites dans les espaces réglés plans peut toutefois être généralisée au cas des espaces réglés courbes d'une autre manière encore.

Je dis que deux congruences L et L' en correspondance développable sont en *faible déformation projective,* si pour tout couple de droite qui se correspondent, il existe une homographie K entre les espaces S_3 associés, vérifiant les équations (109), (112), l'équation (121) étant satisfaite mod$[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$. Je ne vais pas donner ici la signification géométrique de la faible déformation projective, on peut la trouver facilement à l'aide de la notion de transformations K-linéarisantes de la même façon comme c'est fait, pour le cas des espaces plans, dans mon travail *Remarques sur la déformation projective des congruences de droites* (qui paraîtra dans Чехосл. мат. журнал 1957). Ce qui est important, c'est que deux congruences dans les espaces plans qui sont en faible déformation sont en déformation projective de second ordre (la réciproque est évidente).

La condition nécessaire et suffisante pour que deux congruences L, L' soient en faible déformation projective est qu'il existe un $\varrho \neq 0$ *vérifiant* (128), ou bien encore *que les équations* (129) *soient satisfaites.*

Je vais étudier encore le *problème d'existence d'une faible déformation.* Supposons la congruence L donnée par le système (57) + (60) + (67) et par les équations quadratiques

$$\begin{aligned} &[\omega_1\omega_{32}] + [\omega_2\Delta a_1] + r_1[\omega_1\omega_2] = 0\,, \quad [\omega_1\Delta a_2] - [\omega_2\omega_{32}] + r_2[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\ &[\omega_1\Delta b_1] + [\omega_2\omega_{41}] + r_3[\omega_1\omega_2] = 0\,, \quad [\omega_1\omega_{41}] - [\omega_2\Delta b_2] + r_4[\omega_1\omega_2] = 0\,, \end{aligned} \tag{130}$$

où $\Delta a_1 = \mathrm{d}a_1 + a_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})$ etc. Si L' est en faible déformation avec L, je peux choisir les repères d'une telle manière que ϱ dans (128) soit $\varrho = 1$, de sorte que L' soit donné par les équations (101),

$$\begin{aligned} &\omega'_{12} = -\,h'\omega_1 + a_1\omega_2\,, \qquad \omega'_{21} = b_1\omega_1 - k'\omega_2\,, \\ &\omega'_{34} = a_2\omega_1 - h'\omega_2\,, \qquad \omega'_{43} = -\,k'\omega_1 + b_2\omega_2 \end{aligned} \tag{131}$$

et des équations quadratiques correspondantes (130'); la correspondance entre L et L' étant donnée par les équations (103), (106). Si j'introduis les formes linéairement indépendantes $\Theta_1 = \tau_{33} - \tau_{11}$, $\Theta_2 = \tau_{44} - \tau_{22}$, $\Theta_3 = \tau_{22} - \tau_{33}$, je peux écrire les équations (106), (130′) en me servant de (130) de la façon suivante:

$$[\omega_1\Theta_1] + S_1[\omega_1\omega_2] = [\omega_2\Theta_2] + S_2[\omega_1\omega_2] = 0\,, \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
&[\omega_1\tau_{32}] + a_1[\omega_2(\Theta_1 + \Theta_3)] + s_1[\omega_1\omega_2] = 0\,,\\
&a_2[\omega_1(\Theta_2 + \Theta_3)] - [\omega_2\tau_{32}] + s_2[\omega_1\omega_2] = 0\,,\\
&-b_1[\omega_1(\Theta_1 + \Theta_3)] + [\omega_2\tau_{41}] + s_3[\omega_1\omega_2] = 0\,,\\
&[\omega_1\tau_{41}] + b_2[\omega_2(\Theta_2 + \Theta_3)] + s_4[\omega_1\omega_2] = 0\,.
\end{aligned} \tag{133}$$

En vertu du lemme de Cartan on a

$$\begin{aligned}
&\omega_{32} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2\,, \quad \omega_{41} = \alpha_3\omega_1 + \alpha_4\omega_2\,,\\
&\tau_{32} = -(a_2\gamma_2 + \gamma_3 + s_2)\,\omega_1 + (a_1\gamma_1 + \gamma_3 - s_1)\,\omega_2\,,\\
&\tau_{41} = (b_1S_1 - \gamma_4 + s_3)\,\omega_1 + (b_2S_2 + \gamma_3 - s_4)\,\omega_2\,,\\
&\Theta_1 = \gamma_1\omega_1 - S_1\omega_2\,, \quad \Theta_2 = S_2\omega_1 + \gamma_2\omega_2\,, \quad \Theta_3 = \gamma_3\omega_1 + \gamma_4\omega_2\,,\\
&\Delta a_1 = (\alpha_2 + r_1)\,\omega_1 + \beta_1\omega_2\,, \quad \Delta a_2 = \beta_2\omega_1 - (\alpha_1 + r_2)\,\omega_2\,,\\
&\Delta b_1 = \beta_3\omega_1 + (\alpha_3 - r_3)\,\omega_2\,, \quad \Delta b_2 = -(\alpha_4 + r_4)\,\omega_1 + \beta_4\omega_2\,,
\end{aligned}$$

on voit donc aisément que *les couples de congruences en faible déformation dépendant d'une fonction de deux variables.* On peut considérer ce théorème d'existence comme une généralisation du théorème d'existence de déformation projective de second ordre des congruences de droites dans les espaces plans.

Резюме

КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ В ЛИНЕЙЧАТЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец.

(Поступило в редакцию 29/IV 1956 г.)

В теории пространств с проективной связностью исходят из того, что задается точечное многообразие $\mathfrak{M}$, каждой точке x которого поставлено в соответствие содержащее ее проективное пространство $S(x)$, причем между каждыми двумя пространствами $S(x_1)$ и $S(x_2)$ дано проективное соответствие, зависящее от пути, соединяющего точки x_1 и x_2. При этом предполагается, что многообразие $\mathfrak{M}$ и пространства $S(x)$ — одной и той же размерности; мало разработанная теория многообразий Кенига изучает случай, когда размерность пространств S больше размерности $\mathfrak{M}$.

Можно, однако, рассматривать и другое обобщение пространств с проективной связностью, а именно, если предположить, что многообразие

$\mathfrak{M}$ составлено из проективных пространств P (причем каждое из них погружено в проективное гиперпространство $S(P)$), связанных опять-таки некоторым предписанным законом преобразования.

В резюмируемой работе исследуется случай т. наз. линейчатого пространства с проективной связностью, когда $\mathfrak{M}$ — четырехмерное многообразие, составленное из проективных прямых, причем пространства $S(P)$ трехмерны; разработаны основы теории двумерных многообразий этого пространства, представляющие, очевидно, обобщение теории прямолинейных конгруэнций в трехмерном проективном пространстве.

Так же, как и в случае плоского пространства, здесь можно определить разложение конгруэнции прямых на развертывающиеся поверхности и фокальные поверхности, являющиеся, однако, некоторыми многообразиями Кенига. Кроме вводных соображений автор ограничился непараболическими конгруэнциями, допускающими разложение на неразвертывающиеся поверхности точно двумя способами. Найден инвариант конгруэнции, аналогичный инварианту Вельша, и еще два инварианта, связанные с кривизной линейчатого пространства и исчезающие в плоском пространстве; далее определяются основные инвариантные формы конгруэнции, являющиеся непосредственным обобщением точечной, плоскостной и фокальной форм, рассмотренных акад. Э. Чехом. Понятие пространства, двойственного данному линейчатому пространству с проективной связностью, позволило дать определение дуализации конгруэнции прямых.

Далее более подробно исследуются торсальные преобразования конгруэнции; при этих исследованиях существенную роль играют четыре дальнейшие инвариантные формы конгруэнции, также исчезающие в плоском пространстве. Работа заканчивается анализом понятия проективного изгибания 2-го порядка конгруэнций прямых.