Alois Švec

Certaines enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 57–65

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100231`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

CERTAINES ENVELOPPES DES FAMILLES ∞^3 D'HOMOGRAPHIES DANS S_5

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 26 novembre 1955.)

Dans ce travail, j'étudié les enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5, c'est-à-dire les déformations ponctuelles d'un complexe de plans dans S_5, en me bornant à de tels complexes pour lesquels les foyers dans chaque plan forment trois droites linéairement indépendantes. Comme on verra dans la suite, ces complexes spéciaux de plans sont une analogue directe des congruences de droites dans S_3, il n'est donc pas sans raison de nous être bornés à eux. Il ne serait pas difficile de généraliser le problème résolu à l'étude d'une déformation ponctuelle d'un systeme $S_{n-1} = S_{n-1}(u_1, \ldots, u_n)$ de sous-espaces à $n - 1$ dimensions de l'espace S_{2n-1}, en supposant que la variété des foyers $V^n_{n-2} \subset S_{n-1}$ se décompose en n S_{n-2} indépendants.

Le but poursuivi dans ce travail est de montrer sur un exemple spécial au moins, en détail la situation décrite par L. MURACCHINI dans son travail „Sulle transformazioni puntuali che sono inviluppi di omografie" dans le cas d'une déformation ponctuelle d'un système général de sous-espaces. Le fait que le travail cité de M. Muracchini est trop général et — qu'il me soit permis de l'écrire — n'en dit pas beaucoup dans un cas spécial, a constitué une autre raison qui m'a poussé à écrire ce Mémoire.

1. Soit donné dans l'espace projectif à cinq dimensions S_5 *un complexe* K (c'est-à-dire une famille ∞^3) *de plans*

$$\pi = \pi(u_1, u_2, u_3) . \tag{1}$$

Si je choisis les fonctions u_j d'une façon bien déterminée $u_j = u_j(t)$, les plans π forment une variété V_3 dont l'espace tangent suivant le plan générateur π sera

$$\tau = \left[A_1 A_2 A_3 \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}\right] .$$

J'appelle la variété V_3 *développable*, si ses espaces tangents τ ont une dimension plus petite que 5. Dans ce cas chaque son plan coupe chaque plan infiniment voisin dans un point (au moins) appelé *foyer*. Dans un complexe K les variétés de plans développables sont déterminées par l'équation differentielle de premier ordre

$$[A_1 A_2 A_3 \,\mathrm{d}A_1 \,\mathrm{d}A_2 \,\mathrm{d}A_3] = 0 \,. \tag{2}$$

Le premier membre de l'équation (2) est une forme de troisième degré en $\mathrm{d}u_i$; je vais me borner aux complexes K pour lesquels la forme en question est le produit de trois formes linéaires indépendantes en $\mathrm{d}u_i$; je les désigne par ω_1, ω_2, ω_3. L'équation (2) devient alors

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0 \tag{3}$$

et l'on a

$$[\omega_1 \omega_2 \omega_3] \neq 0 \,. \tag{4}$$

Je vais étudier des complexes K tels que pour $i = 1, 2, 3$ il y a pour $\omega_i = 0$ (et ω_j, ω_k quelconques) un foyer et un seul et que les trois foyers en question ne se trouvent pas situés sur une même droite; je prends ces trois foyers pour points A_i. Maintenant il est clair que l'on peut pour chaque triple (u_1, u_2, u_3) choisir un repère dans S_5 de telle façon que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3 + \omega_1 A_4 \,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3 + \omega_2 A_5 \,, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \omega_3 A_6 \,, \\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \omega_{43}A_3 + \omega_{44}A_4 + \omega_{45}A_5 + \omega_{46}A_6 \,, \\
\mathrm{d}A_5 &= \omega_{51}A_1 + \omega_{52}A_2 + \omega_{53}A_3 + \omega_{54}A_4 + \omega_{55}A_5 + \omega_{56}A_6 \,, \\
\mathrm{d}A_6 &= \omega_{61}A_1 + \omega_{62}A_2 + \omega_{63}A_3 + \omega_{64}A_4 + \omega_{65}A_5 + \omega_{66}A_6 \,.
\end{aligned} \tag{5}$$

On pose

$$\omega_{14} = \omega_1 \,, \quad \omega_{25} = \omega_2 \,, \quad \omega_{36} = \omega_3 \tag{6}$$

et l'on obtient pour le complexe K les équations

$$\omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{24} = \omega_{26} = \omega_{34} = \omega_{35} = 0 \tag{7}$$

qui, après une différentiation extérieure, donnent

$$\begin{aligned}
&[\omega_{12}\omega_2] + [\omega_1\omega_{45}] = [\omega_{13}\omega_3] + [\omega_1\omega_{46}] = [\omega_{21}\omega_1] + [\omega_2\omega_{54}] = \\
&= [\omega_{23}\omega_3] + [\omega_2\omega_{56}] = [\omega_{31}\omega_1] + [\omega_3\omega_{64}] = [\omega_{32}\omega_2] + [\omega_3\omega_{65}] = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

et suivant le lemme de Cartan

$$\begin{aligned}
\omega_{12} &= a_1\omega_2 - a_0\omega_1 \,, & \omega_{45} &= a_0\omega_2 + a_2\omega_1 \,, \\
\omega_{13} &= b_1\omega_3 - b_0\omega_1 \,, & \omega_{46} &= b_0\omega_3 + b_2\omega_1 \,, \\
\omega_{21} &= c_1\omega_1 - c_0\omega_2 \,, & \omega_{54} &= c_0\omega_1 + c_2\omega_2 \,, \\
\omega_{23} &= e_1\omega_3 - e_0\omega_2 \,, & \omega_{56} &= e_0\omega_3 + e_2\omega_2 \,, \\
\omega_{31} &= f_1\omega_1 - f_0\omega_3 \,, & \omega_{64} &= f_0\omega_1 + f_2\omega_3 \,, \\
\omega_{32} &= g_1\omega_2 - g_0\omega_3 \,, & \omega_{65} &= g_0\omega_2 + g_2\omega_3 \,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Du système fermé (7) + (8) il s'ensuit que *les complexes de plans considérés dépendent de six fonctions de deux variables.*

La différentiation extérieure de la première colonne de (9) donne

$$\begin{aligned} [\omega_1\omega_{42}] &= -[\mathrm{d}a_0\,\omega_1] + \dots, & [\omega_2\omega_{53}] &= -[\mathrm{d}e_0\,\omega_2] + \dots, \\ [\omega_1\omega_{43}] &= -[\mathrm{d}b_0\,\omega_1] + \dots, & [\omega_3\omega_{61}] &= -[\mathrm{d}f_0\,\omega_3] + \dots, \\ [\omega_2\omega_{51}] &= -[\mathrm{d}c_0\,\omega_2] + \dots, & [\omega_3\omega_{62}] &= -[\mathrm{d}g_0\,\omega_3] + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

de sorte que l'on peut faire

$$a_0 = b_0 = c_0 = e_0 = f_0 = g_0 = 0 \tag{11}$$

et alors les équations (9) deviennent

$$\begin{array}{lll} & \omega_{12} = a_1\omega_2\,, & \omega_{13} = b_1\omega_3\,, \\ \omega_{21} = c_1\omega_1\,, & & \omega_{23} = e_1\omega_3\,, \\ \omega_{31} = f_1\omega_1\,, & \omega_{32} = g_1\omega_2\,, & \\ & \omega_{45} = a_2\omega_1\,, & \omega_{46} = b_2\omega_1\,, \\ \omega_{54} = c_2\omega_2\,, & & \omega_{56} = e_2\omega_2\,, \\ \omega_{64} = f_2\omega_3\,, & \omega_{65} = g_2\omega_3\,. & \end{array} \tag{12}$$

On voit facilement que dans l'espace S_5^*, duel à l'espace S_5, les plans $[E_4E_5E_6]$ où

$$E_1 = [A_2A_3A_4A_5A_6]\,, \quad E_2 = -[A_1A_3A_4A_5A_6]\,,\dots, \\ E_6 = -[A_1A_2A_3A_4A_5]$$

sont définis de façon bien connue, forment un complexe K^* du même type. Les foyers A_i ou E_j engendrent respectivement les variétés (A_i) ou (E_j); $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$. Je ne m'intéresserai qu'au cas général où les variétés focales des complexes K et K^* sont à trois dimensions. On voit des équations (5) et (12) qu'on a alors

$$\prod_{i=1}^{2} a_ib_ic_ie_if_ig_i \neq 0\,. \tag{13}$$

De (5) découle

$$\mathrm{d}^2A_1 \equiv (\omega_{12}\omega_2 + \omega_{45}\omega_1)\,A_5 + (\omega_{13}\omega_3 + \omega_{46}\omega_1)\,A_6 \\ (\mathrm{mod}\ A_1, A_2, A_3, A_4)\,.$$

Les asymptotiques de la variété (A_1) sont ainsi données par un système d'équations

$$\omega_{12}\omega_2 + \omega_{45}\omega_1 = \omega_{13}\omega_3 + \omega_{46}\omega_1 = 0 \tag{14}$$

qui devient en raison de (12)

$$a_1\omega_2^2 + a_2\omega_1^2 = b_1\omega_3^2 + b_2\omega_1^2 = 0\,. \tag{15}$$

Les courbes $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ engendrent sur la variété (A_1) une 3-congruence de courbes K_1. Il est clair que dans l'espace S_3 tangent à la variété focale (A_1) au point A_1 *les trois tangentes du système* K_1 *forment le trièdre polaire du quadrilatérale complet engendré par les tangentes asymptotiques.*

De $[d\omega_1] = [\omega_1(\omega_{44} - \omega_{11})]$ s'ensuit que l'équation

$$\omega_1 = 0 \tag{16}$$

est complètement intégrable de sorte que *l'on peut décomposer la variété en une couche de surfaces dont chacune a pour plan tangent au point A_1 justement le plan correspondant du complexe K.* Avec (16) on a

$$d^2A_1 \equiv a_1\omega_2^2A_5 + b_1\omega_3^2A_6 \quad (\text{mod } A_1, A_2, A_3) \tag{17}$$

de sorte que *chaque surface de la couche considérée a un réseau conjugué et ses tangentes aux courbes de ce réseau sont $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$.*

2. Soit donné, dans l'espace S_5', un autre complexe K' de type considéré, je désigne par A_i' les points du repère lui correspondant. J'ai ensuite les équations (1')—(17') analogues aux équations (1)—(17) ou j'écris ω_{ij}' au lieu de ω_{ij} et a_i', ... au lieu de a_i, ... Dans toute la suite j'écris

$$\omega_{ij}' = \omega_{ij} + \tau_{ij} \,. \tag{18}$$

Supposons que *le complexe K' soit en correspondance C* (plan $\to$ plan) *avec le complexe K de telle sorte que les variétés développable V_3 se correspondent respectivement.* Une telle correspondance peut être determinée dans le cas le plus général par les équations

$$\tau_{14} = \tau_{25} = \tau_{36} = 0 \tag{19}$$

qui donnent par une différentiation extérieure

$$[\omega_1(\tau_{44} - \tau_{11})] = [\omega_2(\tau_{55} - \tau_{22})] = [\omega_3(\tau_{66} - \tau_{33})] = 0 \,. \tag{20}$$

La correspondance considerée entre deux complexes donnés dépend de trois fonctions d'une variable.

Je dis que deux complexes K et K' qui sont en correspondance (quelconque) C sont en déformation ponctuelle si l'on peut étendre la correspondance C en une correspondance ponctuelle C^* entre S_5 et S_5' telle que pour chaque couple de plans π et $\pi' = C\pi$ il y ait une homographie $H = H(u_1, u_2, u_3)$ telle que l'énoncé suivant soit valable: Soit γ une courbe arbitraire dans S_5 passant par un point arbitraire A dans π, alors les courbes $C^*\gamma$ et $H\gamma$ ont au point $C^*A = HA$ un contact analytique de premier ordre. Il est clair qu'une déformation ponctuelle d'un complexe de plans K est une enveloppe d' ∞^3 d'homographies.

Soit C une déformation ponctuelle, alors les variétés développables V_3 se correspondent respectivement de façon qu'elle est de type (19). L'extension C^* constitue entre deux plans correspondants l'un à l'autre une homographie qui fait correspondre respetivement les foyers; supposons avoir choisi la notation d'une telle manière que les points (géométriques) A_i' et C^*A_i coïncident.

Je vais résoudre la question d'existence d'une déformation ponctuelle d'un complexe de plans du type en question. Je considère alors un complexe K pour lequel (5) et (7) valent, un complexe K' avec les équations (5') et (7') et la correspondance (19) entre eux. Les repères des complexes K et K' soient choisis de telle sorte que l'homographie $HA_i = A'_i$ ($i = 1, \ldots, 6$) possède la propriété citée ci-dessus, c'est-à-dire

$$HA = A' \,, \quad H\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}A' + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)\,A' \tag{22}$$

où

$$A = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 \tag{23}$$

pour tout t_i et ω_j; $i, j = 1, 2, 3$. On a

$$A' = C^*A = t_1A'_1 + t_2A'_2 + t_3A'_3 \,. \tag{24}$$

En partant de

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A = (\mathrm{d}t_1 + t_1\omega_{11} + t_2\omega_{21} + t_3\omega_{31})\,A_1 + (\mathrm{d}t_2 + t_1\omega_{12} + t_2\omega_{22} + t_3\omega_{32})\,A_2 + \\ + (\mathrm{d}t_3 + t_1\omega_{13} + t_2\omega_{23} + t_3\omega_{33})\,A_3 + t_1\omega_1A_4 + t_2\omega_2A_5 + t_3\omega_3A_6\end{aligned}$$

et d'une équation analogue pour $\mathrm{d}A'$ on obtient de (22_2) en comparant les coefficients de A'_i

$$\tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{12} = \tau_{32} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \tag{26}$$

et

$$\tau_{ii} + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{27}$$

De (27) s'ensuivent les équations linéairement indépendantes

$$\tau_{11} - \tau_{33} = 0 \,, \quad \tau_{22} - \tau_{33} = 0 \,. \tag{28}$$

Supposons que nous ayons un complexe K, c'est-à-dire que les équations (7), (8), (9) vaillent. Les complexes K' qui sont en déformation ponctuelle avec K sont donnés par le système (19), (26), (28) et

$$\tau_{15} = \tau_{16} = \tau_{24} = \tau_{26} = \tau_{34} = \tau_{35} = 0 \,. \tag{29}$$

Une différentiation extérieure de (29) donne

$$[\omega_1\tau_{45}] = [\omega_1\tau_{46}] = [\omega_2\tau_{54}] = [\omega_2\tau_{56}] = [\omega_3\tau_{64}] = [\omega_3\tau_{64}] = 0 \,. \tag{30}$$

Les conséquences différentielles des équations (19) sont (20), de (26) on obtient

$$[\omega_1\tau_{42}] = [\omega_1\tau_{43}] = [\omega_2\tau_{51}] = [\omega_2\tau_{53}] = [\omega_3\tau_{61}] = [\omega_3\tau_{62}] = 0 \,, \tag{31}$$

de (28) on a

$$[\omega_1\tau_{41}] - [\omega_3\tau_{63}] = [\omega_2\tau_{52}] - [\omega_3\tau_{63}] = 0 \,. \tag{32}$$

Je multiplie extérieurement l'équation (32_1) par la forme ω_1 et l'équation (32_2) par la forme ω_2 en obtenant ainsi $[\omega_1\omega_3\tau_{63}] = [\omega_2\omega_3\tau_{63}] = 0$. En vertu de (4) j'ai $[\omega_3\tau_{63}] = 0$ et alors en somme

$$[\omega_1\tau_{41}] = [\omega_2\tau_{52}] = [\omega_3\tau_{63}] = 0 \,. \tag{33}$$

Les complexes K' qui sont en déformation ponctuelle avec K sont donnés par le système fermé (29) + (19) + (26) + (28) + (30) + (20) + (31) + (33). *Ce système est en involution et sa solution générale dépend de* 18 *fonctions d'une variable.*

3. Dans la suite je vais étudier quelques propriétés géométriques de déformation ponctuelle d'un complexe de plans. Dans ce but j'écris les conditions pour une déformation ponctuelle de complexes K et K' sous une forme un peu changée en spécifiant d'avantage les repères des deux complexes.

Supposons que les équations (5), (7), (9) et (11) soient satisfaites pour le complexe K et que les équations analogues correspondantes vaillent pour K'; la correspondance entre K et K' soit de nouveau donnée par (19). Supposons ensuite que les complexes K et K' soient en déformation ponctuelle avec la correspondance C^* donnée par

$$A' = C^*(t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3) = t_1\varrho_1A_1' + t_2\varrho_2A_2' + t_3\varrho_3A_3' \,, \quad (\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \neq 0) \,, \tag{34}$$

et l'homographie H engendrant la déformation ponctuelle donnée par

$$\begin{aligned} HA_1 &= \varrho_1A_1' \,, \\ HA_2 &= \varrho_2A_2' \,, \\ HA_3 &= \varrho_3A_3' \,, \\ HA_4 &= \alpha_{41}A_1' + \alpha_{42}A_2' + \alpha_{43}A_3' + \alpha_{44}A_4' + \alpha_{45}A_5' + \alpha_{46}A_6' \,, \\ HA_5 &= \alpha_{51}A_1' + \alpha_{52}A_2' + \alpha_{53}A_3' + \alpha_{54}A_4' + \alpha_{55}A_5' + \alpha_{56}A_6' \,, \\ HA_6 &= \alpha_{61}A_1' + \alpha_{62}A_2' + \alpha_{63}A_3' + \alpha_{64}A_4' + \alpha_{65}A_5' + \alpha_{66}A_6' \,. \end{aligned} \tag{35}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A' = {} & (\mathrm{d}t_1\,\varrho_1 + t_1\,\mathrm{d}\varrho_1 + t_1\varrho_1\omega_{11}' + t_2\varrho_2\omega_{21}' + t_3\varrho_3\omega_{31}')\,A_1' + \\ & + (\mathrm{d}t_2\,\varrho_2 + t_2\,\mathrm{d}\varrho_2 + t_1\varrho_1\omega_{12}' + t_2\varrho_2\omega_{22}' + t_3\varrho_3\omega_{32}')\,A_2' + \\ & + (\mathrm{d}t_3\,\varrho_3 + t_3\,\mathrm{d}\varrho_3 + t_1\varrho_1\omega_{13}' + t_2\varrho_2\omega_{23}' + t_3\varrho_3\omega_{33}')\,A_3' + \\ & + t_1\varrho_1\omega_1A_4' + t_2\varrho_2\omega_2A_5' + t_3\varrho_3\omega_3A_6' \,. \end{aligned}$$

En substituant dans (22_2) et en comparant les coefficients de A_i' j'obtiens

$$\begin{aligned} & t_1\,\mathrm{d}\varrho_1 + t_1\varrho_1\tau_{11} + t_2(\varrho_2\omega_{21}' - \varrho_1\omega_{21}) + t_3(\varrho_3\omega_{31}' - \varrho_1\omega_{31}) - \\ & - \alpha_{41}t_1\omega_1 - \alpha_{51}t_2\omega_2 - \alpha_{61}t_3\omega_3 + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)\,t_1 = 0 \,, \\ & t_2\,\mathrm{d}\varrho_2 + t_1(\varrho_1\omega_{12}' - \varrho_2\omega_{12}) + t_2\varrho_2\tau_{22} + t_3(\varrho_3\omega_{32}' - \varrho_2\omega_{32}) - \\ & - \alpha_{42}t_1\omega_1 - \alpha_{52}t_2\omega_2 - \alpha_{62}t_3\omega_3 + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)\,t_2 = 0 \,, \\ & t_3\,\mathrm{d}\varrho_3 + t_1(\varrho_1\omega_{13}' - \varrho_3\omega_{13}) + t_2(\varrho_2\omega_{23}' - \varrho_3\omega_{23}) + t_3\varrho_3\tau_{33} - \\ & - \alpha_{43}t_1\omega_1 - \alpha_{53}t_2\omega_2 - \alpha_{64}t_3\omega_3 + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)\,t_3 = 0 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1\varrho_1\omega_1 - \alpha_{44}t_1\omega_1 - \alpha_{54}t_2\omega_2 - \alpha_{64}t_3\omega_3 &= 0 \,, \\ t_2\varrho_2\omega_2 - \alpha_{45}t_1\omega_1 - \alpha_{55}t_2\omega_2 - \alpha_{65}t_3\omega_3 &= 0 \,, \\ t_3\varrho_3\omega_3 - \alpha_{46}t_1\omega_1 - \alpha_{56}t_2\omega_2 - \alpha_{66}t_3\omega_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

En comparant ensuite les coefficients de t_i j'ai

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varrho_1 + \varrho_1\tau_{11} - \alpha_{41}\omega_1 + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 &= 0 \,, \\ \mathrm{d}\varrho_2 + \varrho_2\tau_{22} - \alpha_{52}\omega_2 + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 &= 0 \,, \\ \mathrm{d}\varrho_3 + \varrho_3\tau_{33} - \alpha_{64}\omega_3 + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 &= 0 \,, \end{aligned} \tag{37}$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho_2 c_1' - \varrho_1 c_1)\,\omega_1 - \alpha_{51}\omega_2 &= 0\,,\\
(\varrho_3 f_1' - \varrho_1 f_1)\,\omega_1 - \alpha_{61}\omega_3 &= 0\,,\\
(\varrho_1 a_1' - \varrho_2 a_1)\,\omega_2 - \alpha_{42}\omega_1 &= 0\,,\\
(\varrho_3 g_1' - \varrho_2 g_1)\,\omega_2 - \alpha_{62}\omega_3 &= 0\,,\\
(\varrho_1 b_1' - \varrho_3 b_1)\,\omega_3 - \alpha_{43}\omega_1 &= 0\,,\\
(\varrho_2 e_1' - \varrho_3 e_1)\,\omega_3 - \alpha_{53}\omega_2 &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{44} &= \varrho_1\,, \quad \alpha_{54} = \alpha_{64} = 0\,,\\
\alpha_{55} &= \varrho_2\,, \quad \alpha_{45} = \alpha_{65} = 0\,,\\
\alpha_{66} &= \varrho_3\,, \quad \alpha_{46} = \alpha_{56} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

La condition nécessaire et suffisante pour la déformation ponctuelle des complexes K et K' est donc l'existence de fonctions $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \alpha, \beta, \gamma$ et d'une forme ω telles que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\varrho_1 + \varrho_1\tau_{11} &= \alpha\omega_1 + \omega\,,\\
\mathrm{d}\varrho_2 + \varrho_2\tau_{22} &= \beta\omega_2 + \omega\,,\\
\mathrm{d}\varrho_3 + \varrho_3\tau_{33} &= \gamma\omega_3 + \omega\,,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$\varrho_1 a_1' = \varrho_2 a_1\,, \tag{41}$$

$$\varrho_1 b_1' = \varrho_3 b_1\,, \tag{42}$$

$$\varrho_2 c_1' = \varrho_1 c_1\,, \tag{43}$$

$$\varrho_2 e_1' = \varrho_3 e_1\,, \tag{44}$$

$$\varrho_3 f_1' = \varrho_1 f_1\,, \tag{45}$$

$$\varrho_3 g_1' = \varrho_2 g_1\,. \tag{46}$$

Il résulte de (41)—(46) que

$$a_1 c_1 = a_1' c_1'\,, \tag{47}$$

$$b_1 f_1 = b_1' f_1'\,, \tag{48}$$

$$e_1 g_1 = e_1' g_1'\,. \tag{49}$$

Je vais étudier maintenant les conditions (47)—(49). Je choisis sur la variété (A_1) une surface ζ de la couche de surfaces considérée ci-dessus. Soit alors $\omega_1 = 0$. On a donc

$$\mathrm{d}A_2 = \omega_{22}A_2 + e_1\omega_3 A_3 + \omega_2 A_5\,, \quad \mathrm{d}A_3 = g_1\omega_1 A_2 + \omega_{33}A_3 + \omega_3 A_6\,. \tag{50}$$

Il s'ensuit de là que les droites $[A_2A_3]$ situées dans les plans tangents à la surface ζ forment une congruence aux surfaces focales (A_2), (A_3); sa forme ponctuelle de Laplace-Darboux étant $e_1 g_1 \omega_2 \omega_3$. On a donc l'énoncé suivant:

Soient donnés deux complexes K et K' en correspondance (19) *qui induit une autre correspondance entre les variétés focales (A_1), (A_1'). Soit ζ une surface de la variété (A_1) telle que ses plans tangents appartiennent au complexe K; soit ζ' la surface lui correspondante. Soient ensuite $\mathfrak{L}_\zeta$ et $\mathfrak{L}_{\zeta'}$ les congruences de droites*

$[A_2A_3]$ *ou* $[A_2'A_3']$ *situées dans les plants tangents aux surfaces* ζ *et* ζ' *respectivement. La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences* $\mathfrak{L}_\zeta$ *et* $\mathfrak{L}_{\zeta'}$ *soient, pour chaque surface* ζ *à la propriété citée, en déformation ponctuelle est que* (49) *soit satisfait.* On se rendra compte de la signification géométrique des conditions (47), (48) en interchangeant les variétés focales.

Il nous reste à étudier les conditions (40). Je dénote par d_{ij} la différentiation pour laquelle $\omega_i = \omega_j = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{23}A_2 &= c_1\omega_1 A_1 + \omega_{22}(\mathrm{d}_{23})\, A_2\,, \\ \mathrm{d}_{23}A_3 &= f_1\omega_1 A_1 \qquad\qquad + \omega_{33}(\mathrm{d}_{23})\, A_3\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Je vais considérer une courbe γ $\omega_2 = \omega_3 = 0$ de la variété (A_1); les droites $[A_2A_3]$ des plans du complexe K dont les points A_1 se trouvent sur γ forment alors une surface reglée $\mathfrak{R}_\gamma$ à laquelle correspond (droite $\rightarrow$ droite) une autre surface reglée $\mathfrak{R}_{\gamma'}$ dans l'espace S_5'. J'impose maintenant la condition que l'on puisse étendre ponctuellement la correspondance qui existe entre $\mathfrak{R}_\gamma$ et $\mathfrak{R}_{\gamma'}$ d'une telle manière que $A_2 \rightarrow A_2'$, $A_3 \rightarrow A_3'$ et que l'extension jouisse de deux propriétés suivantes:

1. Pour chaque couple de droites $p \in \mathfrak{R}_\gamma$, $p' \in \mathfrak{R}_{\gamma'}$ se correspondantes respectivement il existe une homographie H entre S_5 et S_5' faisant correspondre mutuellement les foyers des plans appartenant aux complexes respetifs et passant par les droites p ou p'.

2. Supposons qu'une courbe φ située sur $\mathfrak{R}_\gamma$ passe par le point A situé sur $[A_2A_3]$, soit φ' la courbe correspondant à φ. Je demande que les projections des courbes φ' et $H\varphi$ du point de vue A_1' aient au point A' un contact analytique de premier ordre.

Soit

$$C^*(t_2A_2 + t_3A_3) = t_2\varrho_2A_2' + t_3\varrho_3A_3' \tag{52}$$

l'extension ponctuelle en question. Soit (35) l'homographie H. Alors on a nécessairement

$$H\,\mathrm{d}_{23}(t_2A_2 + t_3A_3) = \mathrm{d}_{23}(t_2\varrho_2A_2' + t_3\varrho_3A_3') + \lambda\omega_1(t_2\varrho_2A_2' + t_3\varrho_3A_3') + + (\ldots)\,A_1' \tag{53}$$

pour tout t_2, t_3. En substituant et en comparant les coefficients de A_2', A_3' on a

$$\mathrm{d}_{23}\varrho_2 + \varrho_2\tau_{22} + \lambda\omega_1 = 0\,,\quad \mathrm{d}_{23}\varrho_3 + \varrho_3\tau_{33} + \lambda\omega_1 = 0\,. \tag{54}$$

On a donc

$$\mathrm{d}_{23}\varrho_2 - \mathrm{d}_{23}\varrho_3 + \varrho_2\tau_{22}(\mathrm{d}_{23}) - \varrho_3\tau_{33}(\mathrm{d}_{23}) = 0\,. \tag{55}$$

Or l'équation

$$[(\mathrm{d}\varrho_2 - \mathrm{d}\varrho_3 + \varrho_2\tau_{22} - \varrho_3\tau_{33})\,\omega_2\omega_3] = 0 \tag{56}$$

est tout a fait équivalente à l'équation (55); je viens donc de trouver sa signification géométrique. Or l'équation (56) s'obtient en soustrayant les équations $(40_{2,3})$ et en multipliant extérieurement par la forme $[\omega_2\omega_3]$.

La déformation ponctuelle des complexes K et K' donne six conditions simples en accord avec le théorème d'existence trouvé. Soient K et K' deux complexes en déformation ponctuelle, j'ai alors trois conditions (47)—(49). En partant de (41)—(46) je détermine les ϱ_i, ou plûtot leurs rapports, et puis je calcule les expressions $\Theta_{ij} = \mathrm{d}\varrho_i - \mathrm{d}\varrho_j + \varrho_i\tau_{ii} - \varrho_j\tau_{jj}$. Les autres trois conditions sont ensuite données par $[\Theta_{ij}\omega_i\omega_j] = 0$; $i, j = 1, 2, 3$.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ОГИБАЮЩИЕ ∞^3 КОЛЛИНЕАЦИЙ В S_5

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец.

(Поступило в редакцию 26/XI 1955 г.)

В работе изучаются огибающие ∞^3 коллинеаций в S_5, т. е. точечные изгибания (в смысле акад. Э. Чеха) комплекса плоскостей в S_5, причем я ограничиваюсь такими комплексами, для которых фокусы в каждой плоскости образуют три линейно независимые прямые. Рассматриваемые комплексы плоскостей зависят от шести функций двух переменных. Комплексы, состоящие с данным комплексом в точечном изгибании, зависят от 18 функций одного переменного. Итак, точечное изгибание дает шесть простых условий, геометрический смысл которых выяснен.