Václav Alda

Les réseaux de coniques

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, (48)–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100230

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

LES RÉSEAUX DE CONIQUES

VÁCLAV ALDA, Prague.

(Reçu le 19 november 1955.)

Le théorème, que tout résau de coniques est un réseau de courbes polaires d'une cubique n'est valable qu',,en général". Dans cet article les conditions nécessaires et suffisantes pour la valadité de ce théorème sont précisées et démontrées.

Dans la littérature est bien connu le fait [1], que tout réseau de conique est un réseau de courbes polaires d'une cubique. Cette proposition néanmoins, n'est valable qu' ,,en général". Ce mémoire a précisémment pour but de déterminer les conditions, sous lesquelles cette proposition est vraie.

Pour commencer, nous dresserons un Tableau complet, contenant les cubiques $K = 0$ possibles (même dégénérées), leurs courbes d'Hesse et les dérivées partielles de la forme K. (Voir la page suivante.)

Envisageons maintenant un réseau défini par trois coniques linéairement indépendantes

$$L_1 \equiv a_{11}x_1^2 + \ldots = 0\,, \quad L_2 \equiv b_{11}x_1^2 + \ldots = 0\,, \quad L_3 \equiv c_{11}x_1^2 + \ldots = 0\,.$$

Dédignons par $J(x)$ le jacobien du réseau:

$$J(x) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \ldots, \ldots \\ b_{11}x_1 + \ldots, \ldots \\ c_{11}x_1 + \ldots, \ldots \end{vmatrix}$$

et par $D(\lambda)$ le discriminant de la conique générale du réseau $\lambda_1 L + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1 + b_{11}\lambda_2 + c_{11}\lambda_3, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Si ce réseau est un réseau de courbes polaires d'une cubique $K = 0$, on peut poser

$$L_i = \frac{\partial K}{\partial x_i}\,.$$

	Cubique $K = 0$	La courbe d'Hesse de la cubique $K = 0$	Dérivées partielles de la forme K (à un facteur constant près)
1	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$	$m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (2m^2 + 1)\,.$ $.\,x_1x_2x_3 = 0$	$x_1^2 + 2mx_2x_3,\ x_2^2 + 2mx_1x_3,\ x_3^2 + 2mx_1x_2$
2	$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_2x_3 = 0$	$x_1^2 - 2x_2x_3,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_1x_2$
3	$3x_1^2x_3 - x_2^3 = 0$	$4x_1^2x_2 = 0$	$x_1x_3,\ x_2^2,\ x_1^2$
4	$x_2(x_2^2 - 6x_1x_3) = 0$	$4x_2(x_2^2 + 2x_1x_3) = 0$	$x_2x_3,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_1x_2$
5	$x_1(x_2^2 - x_1x_3) = 0$	$x_1^3 = 0$	$2x_1x_3 - x_2^2,\ x_1x_2,\ x_1^2$
6	$x_1x_2x_3 = 0$	$x_1x_2x_3 = 0$	$x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2$
7	$x_1^2x_2 = 0$	$0 = 0$	$x_1x_2,\ x_1^2,\ 0$
8	$x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$	$0 = 0$	$x_2(2x_1 - x_2),\ x_1(x_1 - 2x_2),\ 0$
9	$x_1^3 = 0$	$0 = 0$	$x_1^2,\ 0,\ 0$

On a, par conséquent,

$$J(x) = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

et

$$D(\lambda) = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\lambda_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial K}{\partial x_3}\right)\right).$$

Mais

$$\lambda_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial K}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 K(\lambda)}{\partial \lambda_i\, \partial \lambda_j},$$

d'où vient

$$D(\lambda) = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 K(\lambda)}{\partial \lambda_i\, \partial \lambda_j}\right).$$

Les équations $J(x) = 0$ et $D(\lambda) = 0$ sont donc des équations d'une même courbe, c'est-à-dire de la courbe d'Hesse de la cubique $K = 0$.

Il est aisé de voir dans notre Tableau, que parmi les courbes d'Hesse ne figure pas la cubique avec un point de rebroussement. Le réseau

$$L_1 \equiv 2x_2x_3 = 0\,, \quad L_2 \equiv x_3^2 - 2x_1x_2 = 0\,, \quad L_3 \equiv x_1^2 = 0$$

a pour déterminant

$$D(\lambda) = -\lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_2^3\,.$$

Ce réseau donc ne peut pas être un réseau de courbes polaires d'une cubique.

Rappelons maintenant ces faits bien connus:

1. En changeant les coordonnées du plan (x), la courbe $J(x) = 0$ ne change pas tandis que $D(\lambda)$ se multiplie par une constante non nulle.

2. En changeant la base du réseau, la courbe $D(\lambda) = 0$ ne change pas tandis que $J(x)$ se multiplie par une constante non nulle.

Nous démontrerons maintenant ce théorème: *Pour qu'un réseau de coniques (contenant trois coniques linéairement indépendantes) soit un réseau de courbes polaires d'une cubique, il faut et il suffit, que*

1. *les courbes $J(x) = 0$ et $D(\lambda) = 0$ soient homographiques,*

2. *$J(x)$ ne soit pas identiquement égal à zero*

3. *et que le réseau contienne deux droites doubles si $J(x) = 0$ se décompose en deux droites.*

Remarque. D'après ce que nous venons de rappeller, la condition 1. ne dépend pas ni du choix du système de coordonnées ni du choix de la base.

Démonstration. *Les conditions sont nécessaires.* S'il s'agit d'un réseau de courbes polaires d'une cubique, il doit être, comme nous l'avons déjà vu, $D(\lambda) = J(\lambda)$; la condition 1. est donc nécessaire. L'équation $J(x) = 0$ n'a lieu identiquement que dans les trois derniers cas de notre Tableau, pour lesquels le réseau contient au plus deux coniques linéairement indépendantes. La troisième condition enfin est nécessaire dans le cas où la cubique possède un point de rebroussement et la réseau contient deux droites doubles.

Les conditions sont suffisantes. **1.** Si le réseau envisagé est un réseau de courbes polaires de la cubique $K = 0$, il en existe trois points (α), (β), (γ) dans le plan (λ) vérifiant les équations

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = \alpha_i L_1 + \beta_i L_2 + \gamma_i L_3 \, .$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité $\dfrac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial x_i}$ nous obtenons le système d'équations

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_i L_1 + \beta_i L_2 + \gamma_i L_3) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_j L_1 + \beta_j L_2 + \gamma_j L_3) \, , \; i \neq j, i, j = 1, 2, 3 \, .$$

En comparant les coefficients des termes contenant les variables x_1, x_2, x_3 on obtient neuf équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} a_{2i}\alpha_1 + b_{2i}\beta_1 + c_{2i}\gamma_1 - a_{1i}\alpha_2 - b_{1i}\beta_2 - c_{1i}\gamma_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \, , \\ - a_{3i}\alpha_1 - b_{3i}\beta_1 - c_{3i}\gamma_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{1i}\alpha_3 + b_{1i}\beta_3 + c_{1i}\gamma_3 &= 0 \, , \\ a_{3i}\alpha_2 + b_{3i}\beta_2 + c_{3i}\gamma_2 - a_{2i}\alpha_3 - b_{2i}\beta_3 - c_{2i}\gamma_3 &= 0 \, , \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où on pose toujours $i = 1, 2, 3$. Le déterminant de ce système est égal à zero (en échangeant les trois dernières équations avec les trois premières on voit aisément qu'il s'agit d'un déterminant antisymétrique d'un degré impair), c'est-à-dire qu'une solution existe, dont un des nombres $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ est différent de zéro. La forme K qui correspond à cette solution peut être trouvée par intégration. Mais il n'est pas nécessaire que la cubique $K = 0$ ait toutes les coniques du réseau pour courbes polaires; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suff t, que les coniques $L_1 = 0$ soient trois de ces courbes polaires. Il suffit, pour cela, que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

soit égal à 3. Cette condition est aussi nécessaires, car $\Sigma_i \lambda_i \dfrac{\partial K}{\partial x_i} = 0$ est un réseau de coniques, qui contient le nombre maximum de coniques linéairement indépendantes égal au rang de la matrice (2).

2. Si le rang de la matrice (2) est pour une solution égal à trois, il s'agit d'un réseau de courbes polaires d'une cubique. Il reste donc à déduire des conditions 1., 2., 3. du théorème que le réseau envisagé est un réseau de courbes polaires même dans le cas, où nous savons qu'il existe une solution, pour laquelle le rang de la matrice (2) est égal à l'unité ou à deux:

Dans le cas que le rang de la matrice (2) est pour une solution égal à l'unité, on peut choisir la base de telle manière, que la solution soit de la forme

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \ldots = \gamma_3 = 0 .$$

En substituant ces quantités dans les équations (1) on obtient $a_{2i} = a_{3i} = 0$, c'est-à-dire que $L_1 \equiv x_1^2$. Le réseau contient donc une droite double.

Dans le cas que le rang de la matrice (2) est pour une solution égal à 2, on peut choisir la base de telle manière, qu'il soit $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, tandis que les autres nombres α_i, β_i, γ_i soient nuls.

En substituant cas quantités dans les équations (1) on obtient $a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_{31} = b_{32} = b_{33} = 0$, d'où vient que

$$L_1 \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 , \quad L_2 \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 .$$

Envisageons tout d'abord les cas, où le rang de la matrice (2) est égal à 2.

3. Commençons par le cas, où la faisceau $\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0$ contient deux droites doubles. On peut choisir les coordonnées du plan (x) de telle manière, que ce soient les droites $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$; prenons ces droites pour éléments de la base du réseau. Soit

$$L_3 \equiv c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 = 0$$

la troisième conique de la base.

Nous avons

$$J(x) = \begin{vmatrix} x_1, & 0, & 0 \\ 0, & x_2, & 0 \\ c_{12}x_2 + \ldots, & \ldots, & c_{13}x_1 + \ldots \end{vmatrix} = x_1x_2(c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3) ,$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1, & c_{12}\lambda_3, & c_{12}\lambda_3 \\ c_{12}\lambda_3, & \lambda_2, & c_{23}\lambda_3 \\ c_{13}\lambda_3, & c_{23}\lambda_3, & c_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = [c_{33}\lambda_1\lambda_2 + 2c_{12}c_{13}c_{23}\lambda_3^2 - c_{13}^2\lambda_2\lambda_3 - c_{23}^2\lambda_1\lambda_3 c_{12}^2c_{33}\lambda_3^2]\, \lambda_3 .$$

D'après la condition 1. il existe une transformation homographique, qui fait correspondre l'une à l'autre des deux courbes $J(x) = 0$, $D(\lambda) = 0$. La conique

$$c_{33}\lambda_1\lambda_2 - c_{23}^2\lambda_1\lambda_3 - c_{13}^2\lambda_2\lambda_3 + 2c_{12}c_{13}c_{23}\lambda_3^2 - c_{12}^2c_{33}\lambda_3^2 = 0$$

est donc singulière. Elle a pour discriminant

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}c_{33}, & -\frac{1}{2}c_{23}^2 \\ \ldots, & 0, & -\frac{1}{2}c_{13}^2 \\ \ldots, & \ldots, & 2c_{12}c_{13}c_{23} - c_{12}^2c_{33} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}c_{33}[c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33}]^2$$

d'où vient ou bien $c_{33} = 0$, ou bien $\begin{vmatrix} c_{12}, & c_{13} \\ c_{23}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0.$

Dans le cas où $c_{33} = 0$, on a

$$J(x) = x_1 x_2 (c_{13} x_1 + c_{23} x_2)\,, \quad D(\lambda) = [2c_{12}c_{13}c_{23}\lambda_3 - c_{13}^2\lambda_2 - c_{23}^3\lambda_1]\,\lambda_3^2$$

et il faut qu'il soit per ex. $c_{23} = 0$ tandis que $c_{13} \neq 0$, car autrement $J(x)$ serait nul identiquement. Introduisons une nouvelle coordonnée $x_3' = c_{12}x_2 + c_{13}x_3$. Tout cela fait voir, qu'il s'agit d'un réseau de courbes polaires d'une cubique ayant un point de rebroussement.

Dans le second cas, où $\begin{vmatrix} c_{12}, & c_{13} \\ c_{23}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0$ et $c_{33} \neq 0$ on a

$$(c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3)^2 = c_{13}^2 x_1^2 + c_{23}^2 x_2^2 + 2c_{13}c_{33}x_1x_3 + 2c_{23}c_{33}x_2x_3 + \\ + 2c_{13}c_{23}x_1x_2 + c_{33}^2x_3^2 = c_{13}^2 L_1 + c_{13}^2 L_2 + c_{33}L_3$$

d'où vient que la droite $(c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3)^2 = 0$ appartient au réseau, mais ne passe pas par le point (0; 0; 1). Il résulte de là qu'il s'agit d'un réseau de courbes polaires d'une cubique equianharmonique.

4. Un autre cas possible est celui, où le faisceau $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$ n'a qu'une seule droite double. Nous choisirons alors les coordonnées de manière qu'il soit

$$L_1 \equiv x_1^2\,, \quad L_2 \equiv x_1 x_2$$

tandis que la troisième conique ait la forme

$$L_3 \equiv c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^3 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 = 0\,.$$

On a alors

$$J(x) = \begin{vmatrix} x_1, & 0\,, & 0 \\ x_2, & x_1\,, & 0 \\ c_{13}x_3, & c_{22}x_2 + c_{23}x_3, & c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 \end{vmatrix} = x_1^2(c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3)\,,$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1, & \lambda_2, & c_{13}\lambda_3 \\ \lambda_2, & c_{22}\lambda_3, & c_{23}\lambda_3 \\ c_{13}\lambda_3, & c_{23}\lambda_3, & c_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3[c_{22}c_{33}\lambda_1\lambda_3 + 2c_{13}c_{23}\lambda_2\lambda_3 - c_{13}^2c_{22}\lambda_3^2 - c_{23}^2\lambda_1\lambda_3 - \\ - c_{33}\lambda_2^2]\,.$$

Le discriminant de la forme quadratique qui figure entre les paranthèses est de la forme

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & \tfrac{1}{2}c_{22}c_{33} - \tfrac{1}{2}c_{23}^2 \\ 0, & -c_{33}, & c_{23}c_{13} \\ \tfrac{1}{2}c_{22}c_{33} - \tfrac{1}{2}c_{23}^2, & c_{23}c_{13}, & -c_{22}c_{13}^2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}c_{33}\begin{vmatrix} c_{22}, & c_{23} \\ c_{23}, & c_{33} \end{vmatrix}$$

et doit être zéro d'après la condition 1.

Si $c_{33} = 0$ on a $J(x) = x_1^2(c_{13}x_1 + c_{23}x_2)$,

$$D(\lambda) = \lambda_3^2[2c_{23}c_{13}\lambda_2 - c_{13}^2c_{22}\lambda_3 - c_{23}^2\lambda_1]\,.$$

Si, en plus, $c_{23} \neq 0$, l'équation $J(x) = 0$ exprime un couple de droites, le réseau contient donc (d'après la condition 3) deux droites doubles, qui font partie de la courbe $J(x) = 0$. L'équation $(c_{13}x_1 + c_{23}x_2)^2 = 0$ exprime donc une conique du réseau, qui est linéairement indépendente avec les coniques L_1, L_2. On déduit de là que le réseau a pour base les coniques $x_1^2 = 0$, $x_1x_2 = 0$, $x_2^2 = 0$. Mais dans ce cas il serait $J(x) = 0$ identiquement, ce que nous avons exclu.

On a donc les relations $c_{23} = 0$, $c_{13} \neq 0$, qui ont pour conséquence nécessaire $c_{22} \neq 0$, d'où vient que la base du réseau est formée par les coniques $x_1^2 = 0$, $x_1x_2 = 0$, $x_2^2 + 2c'_{13}x_1x_3 = 0$ ce qui fournit le cinquième cas de notre Tableau.

Dans le cas où $c_{33} \neq 0$, il est $\begin{vmatrix} c_{22}, & c_{23} \\ c_{23}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0$. À l'aide du choix d'une base nouvelle, à savoir $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_2$, $L'_3 = c_{33}L_3 + c_{13}^2L_1 + 2c_{13}c_{23}L_2$ on se rend facilement compte, qu'il s'agit ici du cas troisième de notre Tableau.

5. Supposons maintenant qu'il existe une solution, pour laquelle le rang de la matrice (2) est égal à l'unité. Nous savons que ce réseau contient une droite double. Cette droite double fait partie de courbe $J(x) = 0$, c'est-à-dire que la courbe $D(\lambda) = 0$ elle aussi contient une droite, d'où vient qu'un faisceau de coniques singulières contenu dans le réseau existe. Trois cas d'un tel faisceau peuvent se présenter. Deux de ces cas étant été déjà discutés dans les paragraphes 3 et 4, il nous reste encore le cas, où les coniques de ce faisceau se composent d'une droite fixe et d'une droite appartenant à un faisceau, dont le centre n'est pas situé sur cette droite fixe. Nous pouvons choisir les coordonnées et la base de telle manière qu'il soit $L_1 \equiv x_1x_3$, $L_2 \equiv x_2x_3$ et $L_3 \equiv c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{33}x_3^2$. On obtient ainsi les équations

$$J(x) = \begin{vmatrix} x_3, & 0, & x_1 \\ 0, & x_3, & x_2 \\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2, & c_{22}x_2 + c_{12}x_1, & c_{33}x_3 \end{vmatrix} = x_3(c_{33}x_3^2 - c_{11}x_1^2 - 2c_{12}\, x_1x_2 - c_{12}x_2^2)\,,$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11}\lambda_3, & c_{12}\lambda_3, & \lambda_1 \\ c_{12}\lambda_3, & c_{22}\lambda_3, & \lambda_2 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & c_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3[- c_{22}\lambda_1^2 - c_{11}\lambda_2^2 + 2c_{12}\lambda_1\lambda_2 + (c_{11}c_{22}c_{33} - c_{12}^2c_{33})\,\lambda_3^2]\,.$$

Le faisceau $\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0$ ne contient pas de droites doubles tandis que le réseau en contient une qui doit donc faire partie de la courbe $J(x) = 0$. On tire de là cette conclusion: ou bien cette droite est la droite $x_3 = 0$, on bien la conique $c_{33}x_3^2 - c_{11}x_1^2 - 2c_{12}x_1x_2 - c_{22}x_2^2 = 0$ est dégénérée.

Si la droite $x_3 = 0$ est une droite double du réseau, nous pouvons la choisir pour le troisième élément de la base du réseau ce qui nous donne $J(x) = x_3^3$, $D(\lambda) = 0$, ce qui est en contradiction avec la condition 1. Il donc nécessairement

$$c_{33}\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si $c_{33} = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} = 0$, la troisième conique de la base est

$$(\sqrt{c_{11}}x_1 + \sqrt{c_{22}}x_2)^2 = 0$$

et

$$J(x) = - x_3[\sqrt{c_{11}}x_1 + x_2\sqrt{c_{22}}]^2 \ (|c_{11}| + |c_{22}| > 0) \ .$$

Le réseau contient deux droites doubles (d'après la condition 3), qui doivent avoir la forme $x_3 = 0$, $\sqrt{c_{11}}x_1 + \sqrt{c_{22}}x_2 = 0$. Or, de ces deux droites, ce n'est que la seconde, qui est double, ce qui est absurde.

Un autre cas possible est celui où $c_{33} = 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \neq 0$. On a alors

$$L_1 = x_1x_3, \ L_2 = x_2x_3, \ L_3 = (\varrho_1x_1 + \sigma_1x_2)(\varrho_2x_1 + \sigma_2x_2) \ ,$$

les deux droites de la conique $L_3 = 0$ étant distinctes. Le même réseau est évidemment fourni par la base, dans laquelle on remplace les coniques L_1, L_2 par les coniques L_1', L_2' où $L_1' = \varrho_1L_1 + \sigma_1L_2$, $L_2' = \varrho_2L_1 + \sigma_2L_2$. Il est facile à voir, qu'il s'agit du cas sixième de notre Tableau.

Supposons donc que $c_{33} \neq 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0$. Supposons, que $c_{11} = c_{22} = 0$. On tire de la $J(x) = x_3^3$, $D(\lambda) = 0$ identiquement, ce qui n'est pas possible. En supposant donc que $|c_{11}| + |c_{22}| > 0$, on a

$$J(x) = x_3(\sqrt{c_{33}}x_3 - \sqrt{c_{11}}x_1 - \sqrt{c_{22}}x_2) \ . \ (\sqrt{c_{33}}x_3 + \sqrt{c_{11}}x_1 + \sqrt{c_{22}}x_2)$$

et

$$D(\lambda) = - \lambda_3[\sqrt{c_{22}}\lambda_1 - \sqrt{c_{11}}\lambda_2]^2$$

d'où vient que $J(x) = 0$ est composé de trois droites distinctes et que $D(\lambda) = 0$ est composé de deux droites, ce qui n'est pas possible non plus.

Ceci termine toute la demonstration du thèoréme.

6. Le réseau qui a pour base

$$L_1 \equiv x_1x_3 = 0 \ , \quad L_2 \equiv x_2x_3 = 0 \ , \quad L_3 \equiv (x_1 + x_2)^2 = 0$$

nous fournit un exemple, qui montre, que la troisième condition de notre théorème ne peut pas être omise. En effet, on a dans ce cas

$$J(x) = - x_3(x_1 + x_2)^2 \ , \quad D(\lambda) = - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)^2$$

et la troisième condition n'est pas remplie.

LITTÉRATURE

Encyclopédie des sc. math. T B II, vol. *3*, pp. 228.

Резюме

СЕТКИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 19/XI 1955 г.)

Доказательства, что всякая сетка конических сечений является сеткой поляр кубической кривой, безоговорочно исключали особые случаи. Вследствие этого (как показано на примере) существуют сетки, для которых это утверждение не справедливо. Для справедливости утверждения являются необходимыми и достаточными следующие три условия:

1. $D(\lambda) = 0$, $J(x) = 0$ являются проективно эквивалентными кривыми.

2. $J(x)$ не равно тождественно нулю.

3. Если $J(x) = 0$ состоит из двух прямых, то сетка содержит двойные прямые. $D(\lambda)$ означает здесь дискриминант общего конического сечения сетки, а $J(x)$ — якобиан сетки.